గణితశాస్త్రం II వ భాగం

తొమ్మిదవ తరగతి

భారత సంవిధానము

పార్ట్ – IV A

ప్రాథమిక బాధ్యతలు

51 ఎ) ప్రాథమిక బాధ్యతలు

ప్రతి పౌరుడు ఈ క్రింది బాధ్యతలను మనసారా స్వీకరించి బాధ్యతాయుతంగా ప్రవర్తించవలెను.

ఎ) రాజ్యాంగ శాసనబద్ధుడై యుండుట. శాసనమందలి ఆశయములనూ, శాసనం స్థాపించే సంస్థలనూ, జాతీయ పతకాన్ని, జాతీయ గీతాన్ని అంకితభావంతో గౌరవించుట.

బి) స్వాతంత్ర్యోద్యమ స్ఫూర్తితో అన్ని రంగాలలో వ్యవహరించుట.

సి) దేశ సార్వభౌమత్వాన్ని, సమన్వయతనూ, సమగ్రతను రక్షించుట.

డి) దేశరక్షణలో అనుక్షణం సంసిద్ధుడై ఉండుట.

ఇ) ప్రజాజీవనంలో అన్యోన్యతనూ, భ్రాతృభావాన్ని పోషించుట, మత, భాష, ప్రాంతీయతత్త్వాలకు వర్గవైరుధ్యములకు అతీతముగా ఉండుట. స్త్రీలను అగౌరవపరచే ఆచారములను విడనాడుట.

ఎఫ్) అమూల్యమైన భారతీయ చారిత్రక సంపదనూ, సుసంపన్న సంస్కృతినీ పరిరక్షించుట.

జి) పర్యావరణాన్ని అడవులను, కొలనులనూ, నదులనూ రక్షించుట, అభివృద్ధి పరచుట, మృగరక్షణ జలజంతు జీవరాసులపై కరుణార్తత.

హెచ్) శాస్త్రీయ మరియు మానవతా దృక్పథాలను అలవరచుకొనుట, జిజ్ఞాసను పెంపొందించు కొనుట, సంస్కరణ తత్వమును పెంపొందించుట.

ఐ) హింసను విడనాడుట, ప్రజల ఆస్తుల విధ్వంసం చర్యలను నిరోధించుట.

జె) వ్యక్తిత్వ శక్తి సామర్థ్యాల ఔన్నత్యాన్ని పెంపొందించుకొనుట ద్వారా మరియూ సమిష్టి కృషి ద్వారా అన్ని రంగాలలో గణనీయమైన స్థాయిని చేరుటకొరకు, శిఖరాగ్ర సాధనకొరకు నిరంతరం కృషి సల్పుట.

కె) రక్షకులు లేదా సంరక్షకులుగా ఉన్నవారందరూ ఆరు నుంచి 14 సంవత్సరముల లోపల పసివారికి విద్యాభ్యాసము చేయు అవకాశమును కల్పించవలెను.

ప్రభుత్వ తీర్మానం క్రమ సంఖ్య : అభ్యాస్-2116/(ప్ర.క్ర.43/16) ఎస్‌డి-4 తేదీ 25.4.2016ను సారం స్థాపించబడిన సమన్వయ సమితి యొక్క తేదీ 3.3.2017 రోజున జరిగిన సభలో ఈ పాఠ్య పుస్తకమును నిర్దేశించుటకుగాను అనుమతి ఇవ్వబడినది.

గణితశాస్త్రం

II వ భాగం

తొమ్మిదవ తరగతి

మహారాష్ట్ర రాష్ట్ర పాఠ్యపుస్తక నిర్మితి మరియు పాఠ్యప్రణాళిక పరిశోధన సంస్థ, పుణె-411 004.

RX1PRH

మీ స్మార్ట్‌ఫోన్‌తో DIKSHA App నుపయోగించి పాఠ్యపుస్తకం మొదటి పుటలోని QR CODE ను స్కాన్ చేసిన డిజిటల్ పాఠ్యపుస్తకం మరియు ప్రతి పాఠంలోని QR CODE ను స్కాన్ చేసిన ఆ పాఠానికి సంబంధించిన అధ్యయన-అధ్యాపనలకు ఉపయుక్తమగు దృశ్య-శ్రవణ సాహిత్యం లభిస్తుంది.

ప్రథమ ప్రచురణ :2017
పునర్ముద్రణ : 2022

© మహారాష్ట్ర రాష్ట్ర పాఠ్యపుస్తక నిర్మితి మరియు పాఠ్య ప్రణాళిక పరిశోధన సంస్థ, పుణె-411004.
ఈ పుస్తకమునకు సంబంధించిన సర్వహక్కులు మహారాష్ట్ర రాష్ట్ర పాఠ్యపుస్తక నిర్మితి మరియు పాఠ్య ప్రణాళిక పరిశోధన సంస్థవి. ఈ పుస్తకము నందలి ఏ భాగమును సంచాలకులు, మహారాష్ట్ర రాష్ట్ర పాఠ్యప్రణాళిక పరిశోధన సంస్థ వారి లిఖిత అనుమతి లేకుండా ఉటంకించటం చేయరాదు.

గణిత విషయనిపుణుల సమితి

డా॥ మంగళ నార్లీకర్ (అధ్యక్షులు)
డా॥ జయశ్రీ అత్రే (సభ్యులు)
శ్రీ రమాకాంత్ సరోదే (సభ్యులు)
శ్రీ దాదాసో సర్దే (సభ్యులు)
శ్రీ సందీప్ పంచభాయ్ (సభ్యులు)
శ్రీమతి లత టిళేకర్ (సభ్యులు)
శ్రీమతి ఉజ్వలా గోడ్‌బోలె (సభ్యకార్యదర్శి)

ప్రధాన సంయోజకులు : శ్రీమతి ఉజ్వలా శ్రీకాంత్ గోడ్‌బోలే
ఇ. విశేషాధికారిణి, గణితం
పాఠ్యపుస్తక సంస్థ, పుణె.

ముఖచిత్రం అలంకరణ : ధనశ్రీ మోకాశీ, పుణె

కంప్యూటర్ స్కెచ్ : శ్రీ సందీప్ కోళీ, ముంబయి

చిత్రకారులు : శ్రీ ధనశ్రీ మోకాశీ

గణిత విషయం - రాష్ట్ర అధ్యయనవర్గ సభ్యులు

శ్రీమతి పూజా జాధవ్
శ్రీ ప్రమోద్ ఠోంబ్రే
శ్రీ రాజేంద్ర చౌధరీ
శ్రీ అన్నప్ప పరీట్
శ్రీ శ్రీపాద్ దేశ్‌పాండే
శ్రీ బన్సీ హావలే
శ్రీ ఉమేష్ రేఖే
శ్రీ చందన్ కులకర్ణీ
శ్రీమతి అనిత జావే
శ్రీమతి బాగేశ్రీ చవాన్
శ్రీ కళ్యాణ్ కడేకర్
శ్రీ సందేశ్ సోనావణే
శ్రీ సుజిత్ శిందే
డా॥ హన్మంత్ జగ్‌తాప్
శ్రీ ప్రతాప్ కాశిద్
శ్రీ కాశీరాం బావిసానే
శ్రీ పప్పు గాడే
శ్రీమతి రోహిణి శిర్కే
శ్రీ రామా వన్యాళ్‌కర్
శ్రీ అన్సార్ శేఖ్
శ్రీమతి సువర్ణ దేశ్‌పాండే
శ్రీ గణేష్ కోల్తే
శ్రీ సురేష్ దాతే
శ్రీ ప్రకాశ్ జేండె
శ్రీ శ్రీకాంత్ రత్నపారఖీ
శ్రీ సూర్యకాంత్ శహాణే
శ్రీ ప్రకాశ్ కాప్సే
శ్రీ సలీం హాష్మీ
శ్రీమతి ఆర్యా భిడే
శ్రీ మిలింద్ భాకరే
శ్రీ జ్ఞానేశ్వర్ మాశాళ్‌కర్
శ్రీ లక్ష్మణ్ దావణ్‌కర్
శ్రీ సుధీర్ పాటీల్
శ్రీ రాజారాం బండగర్
శ్రీ ప్రదీప్ గోడ్సే
శ్రీ రవీంద్ర ఖందారే
శ్రీ సాగర్ సకుడే

శ్రీమతి ప్రాజక్తి గోఖలే (ఆహ్వానిత సభ్యులు)
శ్రీ వి.డి. గోడ్బోలే (ఆహ్వానిత సభ్యులు)
శ్రీమతి తరుబెన్ పోపట్ (ఆహ్వానిత సభ్యులు)

అనువాదం మరియు సమీక్ష : శ్రీ బేతి మల్లేశం
శ్రీమతి ఈరబత్తి ప్రతిభ అనిల్

పునస్సమీక్ష : శ్రీ మురళి రాజేశం కుందారం

అనువాద సంయోజకులు : డా॥ శ్రీమతి తులసీ భారత్,
విశేషాధికారిణి-తెలుగు,
పాఠ్యపుస్తక సంస్థ, పుణె

నిర్మితి : శ్రీ సచ్చితానంద్ ఆఫళే
ముఖ్యనిర్మితి అధికారి
శ్రీ సంజయ్ కాంబ్లే
నిర్మితి అధికారి
శ్రీ ప్రశాంత్ హరణె
నిర్మితి సహాయకులు

అక్షర కూర్పు : శ్రీ విజయ్‌కుమార్ దండె, పుణె

కాగితం : 70 జి.యస్.యమ్. క్రీమ్‌వోవ్

ముద్రణాదేశం : N/PB/2017-18/2,000

ముద్రకులు :

ప్రకాశకులు

శ్రీ వివేక్ ఉత్తమ్ గోసావి, నియంత్రకులు,
పాఠ్యపుస్తక నిర్మితి సంస్థ,
ప్రభాదేవి, ముంబయి-25.

భారత సంవిధానము

ప్రస్తావన

భారతదేశ ప్రజలమగు మేము, భారతదేశమును **సార్వభౌమ్య**
సామ్యవాద లౌకిక ప్రజాస్వామ్య గణరాజ్యముగ
నెలకొల్పుటకు మరియు అందలి పౌరులెల్లరకు
సామాజిక, ఆర్థిక, రాజకీయ **న్యాయమును**,
భావము, భావప్రకటన, విశ్వాసము,
ధర్మము, ఆరాధన -- వీటి **స్వాతంత్ర్యమును**,
అంతస్తులోను, అవకాశములోను **సమానత్వమును**
చేకూర్చుటకు; మరియు వారందరిలో
వ్యక్తి గౌరవమును, జాత్యైక్యతను,
అఖండతను తప్పక ఒనగూర్చు **సౌభ్రాత్రమును**,
పెంపొందించుటకు; సత్యనిష్ఠా పూర్వకముగ తీర్మానించుకొని,
ఈ 1949వ సంవత్సరము నవంబరు ఇరువది యారవ
దినమున **మా సంవిధాన సభయందు ఇందుమూలముగ,**
ఈ సంవిధానమును అంగీకరించి, అధిశాసనము చేసి
మాకు మేము ఇచ్చుకొన్నవారమైతిమి.

జాతీయ గీతము

జనగణమన – అధినాయక జయ హే
భారత – భాగ్యవిధాతా
పంజాబ, సింధు, గుజరాత, మరాఠా,
ద్రావిడ, ఉత్కల, బంగ,
వింధ్య, హిమాచల, యమునా, గంగా,
ఉచ్ఛల జలధితరంగ,
తవ శుభ నామే జాగే, తవ శుభ ఆశిస మాగే,
గాహే తవ జయగాథా,
జనగణ మంగలదాయక జయ హే,
భారత – భాగ్యవిధాతా
జయ హే, జయ హే, జయ హే,
జయ జయ జయ, జయ హే

ప్రతిజ్ఞ

భారతదేశం నా మాతృభూమి. భారతీయులందరు నా సహోదరులు.

నేను నా దేశాన్ని ప్రేమిస్తున్నాను. సుసంపన్నమైన, బహువిధమైన నా దేశ వారసత్వ సంపద నాకు గర్వకారణం. దీనికి అర్హత పొందడానికి సర్వదా నేను కృషిచేస్తాను.

నా తల్లిదండ్రుల్ని, ఉపాధ్యాయుల్ని, పెద్దలందర్ని గౌరవిస్తాను. ప్రతివారితోను మర్యాదగా నడచుకొంటాను.

నా దేశంపట్ల, నా ప్రజలపట్ల సేవానిరతితో ఉంటానని ప్రతిజ్ఞ చేస్తున్నాను. వారి శ్రేయోభివృద్ధులే నా ఆనందానికి మూలం.

ప్రస్తావన

విద్యార్థి మిత్రులారా,

తొమ్మిదవ తరగతిలోకి మీ అందరికి స్వాగతం!

ప్రాథమిక విద్యాభ్యాసాన్ని పూర్తి చేసుకొని, మీరు మాధ్యమిక దశలోని విద్యాభ్యాసాన్ని ప్రారంభించబోతున్నారు. ఎనిమిదవ తరగతి వరకు గణితాభ్యాసానికై ఒకే పాఠ్యపుస్తకముండేది. ఇప్పుడు గణితం Iవ భాగం మరియు IIవ భాగం ఇలా రెండు పాఠ్యపుస్తకాలను అభ్యసించవలసివస్తుంది.

ఎనిమిదవ తరగతివరకు గణిత పాఠ్యపుస్తకంలో రేఖలు, త్రిభుజాలు, చతుర్భుజాలు, వృత్తాలు మొదలైనవాటి ధర్మాలను పరీక్షించి చూసాం. ఇప్పుడు మీరు మరికొన్ని ధర్మాలను తార్కిక సోపానాలతో నిరూపించడం నేర్చుకొనబోతున్నారు. తార్కికంగా ప్రతిపాదించు కౌశల్యం వ్యవహారంలో అన్ని క్షేత్రాలలోను ముఖ్యమైనది. పాఠ్యపుస్తకంలో ఈ కౌశాల్యాలను నెమ్మదిగా నేర్చుకొనే అవకాశముంది.

పాఠ్యపుస్తకంలో నమోదు చేయబడిన కృత్యాలకు సంబంధించి ఉపాధ్యాయులతో, తరగతిలోని స్నేహితులతో చర్చించి ఆ కృత్యాన్ని చేసి ధర్మంయొక్క నిరూపణను అభ్యసించండి. నిరూపణలో ప్రతిసోపానానికిచ్చిన కారణాలను గూర్చి చర్చించి, ఆ ధర్మాలను అర్థం చేసుకోండి.

ఈ పాఠ్యపుస్తకంలో ఉన్నత గణితాభ్యాసానికి ఉపయుక్తమైనటువంటి త్రికోణమితి మరియు నిరూపక రేఖాగణితంలాంటి పాఠ్యాంశాలు చేర్చబడినవి. అలాగే దైనందిన వ్యవహారంలో అవసరమైనటువంటి తలవైశాల్యం మరియు ఘనపరిమాణంలాంటి పాఠ్యాంశాలను కూడా మీరిక్కడ అభ్యసించబోతున్నారు.

ఇంటర్నెట్‌నుపయోగించి అనేక కృత్యాలను అర్థం చేసుకోండి. పాఠ్యపుస్తకాన్ని సూక్ష్మంగా చదవడం, కృతియుక్తమైన అధ్యయనం మరియు అభ్యాసం ఈ త్రిసూత్రాలతో ఈ గణితయాత్రను మీరు ఆనందంగా అధిగమించగలరనుటలో సందేహం లేదు.

పదండి మరి! ఉపాధ్యాయులు, పాలకులు, స్నేహితులు–స్నేహితురాళ్ళు, ఇంటర్నెట్ వీరందరిని వెంటతీసుకొని ఇప్పుడు గణితాన్ని అభ్యసిద్దాం. ఈ అభ్యాసానికై మీ అందరికి అనేక శుభాకాంక్షలు!

(డా. సునీల్ మగర్)

సంచాలకులు

మహారాష్ట్ర రాష్ట్ర పాఠ్యపుస్తక నిర్మితి మరియు

పాఠ్యప్రణాళిక పరిశోధన సంస్థ, పుణె–411004.

పుణె :

తేది : 28 ఏప్రిల్ 2017, అక్షయ తృతీయ

భారతీయ సౌర తేది: 8 వైశాఖం 1939

9వ తరగతి గణితం IIవ భాగం పాఠ్యప్రణాళిక నుండి క్రింది సామర్థ్యాలు విద్యార్థులలో అభివృద్ధి చెందుతాయి.

క్షేత్రం	అంశాలు	సామర్థ్య వివరణ
1. రేఖాగణితం	1.1 యూక్లిడ్ రేఖాగణితం 1.2 సమాంతర రేఖలు మరియు కోణాల జతలు. 1.3 త్రిభుజ కోణాలు మరియు భుజాల సిద్ధాంతం. 1.4 సమరూప త్రిభుజాలు 1.5 వృత్తం 1.6 రేఖీయ పటాల నిర్మాణం 1.7 చతుర్భుజం	• ఇచ్చిన వివరణలో అందుబాటులో గల ఉపయోగించదగినట్టి సమాచారం (దత్తాంశం) ను బట్టి నిరూపించవలసిన వివరణ (సారాంశంను) యోగ్యరీతిలో అమర్చగల్గుట. • తార్కికంగా అమర్చి సారాంశ వివరణను నిరూపించే సామర్థ్యం అభివృద్ధి చెందడం. • సమాంతర రేఖలు మరియు తిర్యగ్రేఖ మూలంగా తయారయ్యే వివిధ రకాల కోణాల జతలను గుర్తించగల్గుట. • కోణాల జతల ధర్మాన్ని అర్థం చేసికొని వాటిని ఉపయోగించగల్గుట. • ఇచ్చిన వివరణను దత్తాంశం మరియు సారాంశ రూపంలో రాసి నిరూపించగల్గుట. • సమరూప త్రిభుజాలను గుర్తించి వాటి భుజాలనిష్పత్తిని రాయగల్గుట. • సర్వసమాన త్రిభుజ నియమాలనుపయోగించి వృత్తం యొక్క ధర్మాలను నిరూపించగల్గుట. • అంతరవృత్తం, పరివృత్తం గీయగల్గుట. • త్రిభుజం యొక్క ప్రత్యేక అంశాలిచ్చిన త్రిభుజ నిర్మాణం చేయగల్గుట. • ప్రత్యేక చతుర్భుజం యొక్క ఉపపత్తిని రాయగల్గుట. • ICT Tools సహాయంతో త్రిభుజం, చతుర్భుజం, వృత్తాల ధర్మాలను పరీక్షించగల్గుట.
2. నిరూపక రేఖాగణితం	2.1 నిరూపక రేఖాగణితం	• తలంలోని ప్రతి బిందువుకు సంబంధించిన నిరూపక యుగ్మాల అర్థం చెప్పగల్గుట. • నిరూపకాలనుపయోగించి ప్రత్యేక బిందువును గూర్చి చెప్పగల్గుట. • ICT Tools నుపయోగించి తలంలోని బిందువుల నిరూపకమును వెదకగల్గుట.
3.క్షేత్రమితి	3.1 తలవైశాల్యం మరియు ఘనపరిమాణం	• గోళం మరియు శంకువుల తలవైశాల్యం మరియు ఘనపరిమాణం కనుగొనగల్గుట.
4. త్రికోణమితి	4.1 త్రికోణమితి	• సమరూపత్రిభుజాలు మరియు పైథాగోరస్ సిద్ధాంతమునుపయోగించి త్రికోణమితి నిష్పత్తిని చెప్పుట మరియు దానిని ఉపయోగించగల్గుట.

ఉపాధ్యాయులకు సూచనలు

తొమ్మిదవ తరగతి IIవ భాగం పాఠ్యపుస్తకాన్ని ఉపాధ్యాయులు ముందుగా క్షుణ్ణంగా చదవండి. అందులో ఇవ్వబడిన అన్ని కృత్యాలు మరియు ప్రాత్యక్షికాలను అర్థం చేసుకోండి. కృత్యాలు రెండు భాగాలు. ఒకటి ఉపపత్తిని రాయుట, రెండవది ధర్మాలు మరియు నేర్చుకొన్న నిష్కర్షలను ప్రాత్యక్షికాలద్వారా పరీక్షించడం. ఈ కృత్యాలు చేయుటకు మరియు పుస్తకం అధిక ప్రేరణాత్మకం కావడానికి చర్చ, ప్రశ్నోత్తరాలు, సామూహిక ఉపక్రమాలలాంటి వివిధ పద్ధతులను ఉపాధ్యాయులుపయోగించడం ఆశించడమైనది. విద్యార్థులు పాఠ్యపుస్తకాలలోని కృత్యాలు చేయాలి, అలాగే అలాంటి అనేక కృత్యాలు తయారు చేయుటకు విద్యార్థులకు మార్గనిర్దేశనం చేయాలి.

సిద్ధాంతాల నిరూపణను జ్ఞాపకం చేయుటకంటె వాటిని తార్కికంగా ఆలోచించి, అమర్చడం అతిముఖ్యం. ఈ తార్కిక ఆలోచనాశక్తిని పెంపొందించే వివిధ ఉదహరణలు పాఠ్యపుస్తకంలో పొందుపరచబడినవి. ఇలాంటి అనేక ఉదాహరణలను ఉపాధ్యాయులు, విద్యార్థులు కలిసి తయారు చేయాలి. తార్కిక పద్ధతిలో ఏదేని నిరూపణ ఇచ్చిన, కృత్యం చేసిన, లేదా ఉదాహరణలను సాధించినట్లయితే ఆ విద్యార్థులను ఉపాధ్యాయుడు ప్రశంసించాలి.

మూల్యమాపనం చేయునపుడు ముక్తప్రశ్నలు మరియు కృత్యపత్రికలను గూర్చికూడా ఉపాధ్యాయులు ఆలోచించాలని ఆశించడమైనది. అలాంటి మూల్యమాపన పద్ధతులను ఉపాధ్యాయులు అభివృద్ధి చేసే ప్రయత్నంచేయాలి. దాంతోబాటు పాఠ్యపుస్తకంలో నమూనా ప్రాత్యక్షికాల పట్టిక ఇవ్వబడింది. ఇదేగాకుండా అందుబాటులోనున్న వస్తువులతో మీరు స్వయంగా రకరకాల ప్రాత్యక్షికాలు తయారు చేయవచ్చు, అలాగే సాహిత్యాలను కూడా తయారు చేయవచ్చు. పాఠ్యపుస్తకంలోని వివిధ కృత్యాలు ఈ ప్రాత్యక్షికాలాలో అంతర్భూతం చేయబడినవి. దానిపై ఆధారపడిన మూల్యమాపన పద్ధతియొక్క ఉపయోగం పై తరగతి సామర్థ్యాల అభివృద్ధికి తప్పకుండా ఉపయోగపడతాయని మా ఆశ.

నమూనా ప్రాత్యక్షికాల పట్టిక

(1) సంఖ్యారేఖపైనున్న రెండు బిందువుల మధ్య దూరం కనుగొనుట.

(2) సమాంతర రేఖలు మరియు తిర్యగ్రేఖల మూలంగా ఏర్పడే కోణాల ధర్మాలను సాహిత్యాలనుపయోగించి పరీక్షించుట..

(3) వివిధ సాహిత్యాల ఆధారంతో త్రిభుజం యొక్క భుజాలు మరియు కోణాల ధర్మమును పరీక్షించుట.

(4) లంబకోణ త్రిభుజం మరియు మధ్యగతల ధర్మాలను నిరూపణచేసుకొనుట.

(5) త్రిభుజ నిర్మాణానికై త్రిభుజం యొక్క వేర్వేరు కొలతలను తీసుకొని అన్ని రకాల రేఖాగణిత నిర్మాణాలు చేయుట.

(6) శంకువు వక్రతలవైశాల్యం సుమారుగా చెప్పడానికి ఒక కృత్యం ఇవ్వబడినది. ఆ కృత్యంను 'r' వ్యాసార్థంగల వృత్తానికై చేయుట మరియు వృత్తంవైశాల్యం πr^2 అవుతుందని నిరూపణం చేసుకోవడం.

(7) ఏదేని గది, అందులోని అన్ని వస్తువుల కొలతలను దృష్టిలో పెట్టుకొని ప్రమాణబద్ధంగా మానచిత్రపటం, రేఖాచిత్రకాగితంపై గీయుట.

(8) పాఠశాల మైదానంలో X మరియు Y అక్షాలు గీసి విద్యార్థుల స్థానాల నిరూపకాలను నిర్ణయించు కృత్యంను చేయుట.

(9) క్రమస్థూపాకారం గల డబ్బా ఘనపరిమాణంను సూత్రం సహాయంతో కనుగొనుట అదేడబ్బాలో నిండుగా నీరు నింపి నీటి ఘనపరిమాణమును లెక్కించుట. రెండు సమాధానాలను పోల్చడం, ఈ విధంగా అనేక త్రిమితీయ ఆకారంగల వస్తువుల ఘనపరిమాణంను పరీక్షించుట.

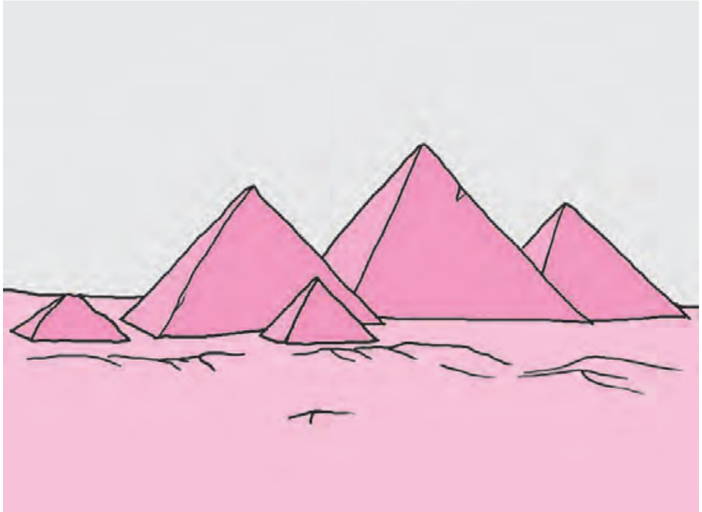
విషయసూచిక

	అధ్యాయాలు	పేజీలు
1.	రేఖాగణిత ప్రాథమిక భావనలు	1 నుండి 12
2.	సమాంతర రేఖలు	13 నుండి 23
3.	త్రిభుజములు	24 నుండి 50
4.	త్రిభుజ నిర్మాణాలు	51 నుండి 56
5.	చతుర్భుజములు	57 నుండి 75
6.	వృత్తము	76 నుండి 87
7.	నిరూపక రేఖాగణితము	88 నుండి 99
8.	త్రికోణమితి	100 నుండి 113
9.	ఉపరితలవైశాల్యం మరియు ఘనపరిమాణం	114 నుండి 123
●	జవాబులు	124 నుండి128

1 రేఖాగణిత ప్రాథమిక భావనలు

పదండి, నేర్చుకుందాం.

- బిందువు, రేఖ మరియు తలము
- బిందువుయొక్క నిరూపకములు మరియు దూరం
- మధ్యత
- నియత వాక్యములు
- ఉపపత్తి



ప్రక్క చిత్రమును గుర్తుపట్టారా? ఇది ఈజిప్టులోని పిరమిడ్ల యొక్క చిత్రం. క్రీ.పూ. 3000 సంవత్సరకాలంలో ఇంత పెద్ద నిర్మాణాలను పూర్వీకులు ఎలా నిర్మించి ఉంటారు? వాస్తు శాస్త్రము మరియు క్షేత్ర గణితము (క్షేత్రమితి) ఈ క్షేత్రములలో అభివృద్ధి జరగనట్లయితే ఇలాంటి గొప్ప నిర్మాణాలు జరిగి ఉండేవికావు.

క్షేత్రమితి అనే పేరును బట్టి ఈ శాస్త్రం యొక్క మూలం అర్థమవుతుంది. క్షేత్రం అనగా భూమి మరియు 'మితి' అనగా కొలత. దీనిని బట్టి భూమిని కొలిచే అవసరం నుంచి ఈ విషయ నిర్మాణం జరిగివుండవచ్చు.

వివిధ దేశాలలో క్షేత్ర గణితం యొక్క అభివృద్ధి వేర్వేరు కాలాల్లో మరియు వేర్వేరు నిర్మాణాల గురించి జరిగింది. థేల్స్ అనే మొదటి గ్రీకు గణిత శాస్త్రవేత్త ఈజిప్టుకు వెళ్ళినప్పుడు అతడు పిరమిడ్ల యొక్క నీడలను కొలచి త్రిభుజ సమరూప నియమాలను ఉపయోగించి పిరమిడ్ల యొక్క ఎత్తుని కనుగొన్నాడని చెబుతారు. పైథాగరస్ ఈ థేల్స్ యొక్క శిష్యుడనికూడా చెబుతారు.

ప్రాచీన భారతీయులకు కూడా క్షేత్రమితి విషయంలో పరిపూర్ణ జ్ఞానం ఉండేది. వేదకాలంలో భారతీయులు యజ్ఞవేదికలు నిర్మించడానికి క్షేత్రమితి ధర్మాలనుపయోగించెడివారు. శుల్వ సూత్రాలలో, దారం సహాయంతో ఎలాకొలవాలో మరియు వివిధ ఆకారాలను ఎలా తయారుచేయాలో చెప్పడం జరిగింది. తర్వాత కాలంలో ఆర్యభట్టు, వరహమిహిరుడు, బ్రహ్మగుప్తుడు, భాస్కరాచార్యుడు ఇత్యాది గణితశాస్త్రవేత్తలు ఈ విషయంలో విశేష కృషి చేసారు.

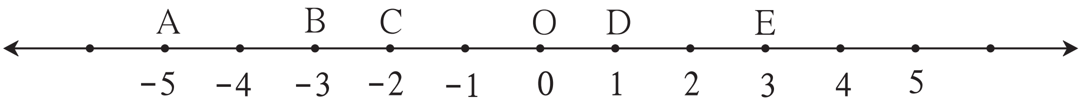
తెలుసుకొందాం.

రేఖా గణితంలోని ప్రాథమిక భావనలు : బిందువు, రేఖ మరియు తలము. (Basic concepts in geometry & point, line and plane)

ఏ విధంగానైతే మనం సంఖ్యలను నిర్వచించమో అదేవిధంగా బిందువు, రేఖ మరియు తలములు కూడా నిర్వచించబడవు. రేఖా గణితంలో కొన్ని ప్రాథమిక (మూలాధార) భావనలున్నాయి. రేఖ మరియు తలం ఇవి బిందువుల సమితులు. రేఖ అనగా సరళ రేఖ అని గుర్తుంచుకోండి. రే.ఖం. అనగా రేఖాఖండం.

బిందువుల యొక్క నిరూపకములు మరియు మధ్యదూరం (Co-ordinates of points and distance)

కింది సంఖ్యారేఖను గమనించండి.



పటం 1.1

ఇక్కడ D, అనే బిందువు రేఖపై 1 అనే అంకెను సూచిస్తుంది. అనగా1 అనే అంకెను బిందువు D యొక్క **నిరూపకము** అని అంటారు. B బిందువు సంఖ్యారేఖపై −3 అనే అంకెను సూచిస్తుంది. కాబట్టి బిందువు B యొక్క నిరూపకము −3 అవుతుంది. అదే విధంగా A యొక్క నిరూపకము −5 మరియు E యొక్క నిరూపకము 3 అవుతుంది.

D బిందువు నుండి E బిందువు 2 యూనిట్ల దూరంలో ఉంది, అనగా E మరియు D బిందువుల మధ్య దూరం 2 యూనిట్లు. యూనిట్లను కొలిచి మనం రెండు బిందువుల మధ్య దూరంను కనుగొంటాం. ఈ సంఖ్యారేఖపై A మరియు B బిందువుల మధ్య దూరం కూడా 2 యూనిట్లు.

ఇప్పుడు బిందువుల యొక్క నిరూపకములను ఉపయోగించి మధ్య దూరంను ఎలా కనుగొనాలో చూద్దాం.

రెండు బిందువుల మధ్యదూరంను కనుగొనడం అనగా ఆ బిందువుల నిరూపకములలో పెద్ద నిరూపకంనుండి చిన్న నిరూపకంను తీసివేయడం.

D బిందువు యొక్క నిరూపకం 1, E యొక్క నిరూపకము 3 మరియు 3 > 1 అని మనకు తెలుసు.

బిందువు E మరియు D ల మధ్య దూరం 3−1 అనగా 2 అవుతుంది.

బిందువు E మరియు D ల మధ్యనున్న దూరంను d (E,D) అని సూచిస్తాము. ఈ దూరం అనగా l(ED), ఇది రేఖ ED యొక్క పొడవు అవుతుంది.

d (E, D) = 3 − 1 = 2
∴ l(ED) = 2
d (E, D) = l(ED) = 2
అలాగే d (D, E) = 2

d (C, D) = 1 − (−2)
= 1 + 2 = 3
∴ d (C, D) = l(CD) = 3
అలాగే d (D, C) = 3

d(A,B) ని కనుగొందాం. A యొక్క నిరూపకము −5, B యొక్క నిరూపకము −3 మరియు −3 > −5
∴ d (A, B) = −3 − (−5) = −3+5 = 2.

పై ఉదాహరణలనుండి రెండు విభిన్న బిందువుల మధ్యదూరం ధనసంఖ్య అవుతుంది. అలాగే P, Qలు ఒకే బిందువులయినట్లయితే d(P, Q) = 0, అవుతుందని గుర్తుంచుకోండి.

ఇది గుర్తుంచుకొందాం.

- రెండు బిందువులు మధ్యదూరం వాటి నిరూపకములలోని పెద్ద నిరూపకము నుండి చిన్న నిరూపకమును తీసివేసినట్లయిన లభిస్తుంది.
- ఏవైనా రెండు బిందువుల మధ్యదూరం ఋణేతర వాస్తవ సంఖ్య అవుతుంది.

తెలుసుకొందాం.

మధ్యత (Betweenness)

P, Q, R లు సరేఖీయ బిందువులయినచో కింద ఇవ్వబడిన విధంగా మూడు రకాలుగా ఉండే అవకాశం ఉంది.

పటం 1.2

(i) బిందువు Q, P మరియు R ల మధ్య ఉంటుంది.

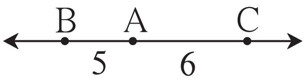
(ii) బిందువు R, P మరియు Q ల మధ్య ఉంటుంది.

(iii) బిందువు P, R మరియు Q ల మధ్య ఉంటుంది.

ఒక వేళ d (P, Q) + d (Q, R) = d (P, R) అయినట్లయితే Q అనే బిందువు, బిందువు P మరియు బిందువు R ల మధ్యన ఉందని అంటాము. ఈ మధ్యతను P – Q – R ద్వారా సూచిస్తాం.

ఉదా (1) ఒక సంఖ్యా రేఖపై A, B మరియు C అను బిందువులు d (A, B) = 5, d (B,C) = 11 మరియు d (A, C) = 6, గా ఉన్నట్లయితే వాటిలో ఏ బిందువు మిగిలిన రెండు బిందువుల మధ్య ఉంటుంది?

సాధన : ఇక్కడ A, B మరియు C వీటిలో ఏ బిందువు మిగిలిన రెండు బిందువుల మధ్య ఉందో కింది విధంగా నిర్ణయించవచ్చు.



పటం 1.3

d(B,C) = 11 . . . . (I)

d(A,B) + d(A,C)= 5+6 = 11 . . . . (II)

∴ d (B, C) = d (A, B) + d (A, C) . . . . (I) మరియు (II) లనుండి

అనగా A అనే బిందువు, బిందువు B మరియు బిందువు C ల మధ్య ఉంటుంది.

ఉదా (2) ఒక రోడ్డుపైన సరళరేఖలో U, V మరియు A అనే పట్టణాలు కలవు. U మరియు A ల మధ్య దూరం 215 కి.మీ., V మరియు A ల మధ్యదూరం 140 కి.మీ., U మరియు V ల మధ్యదూరం 75 కి.మీ. అయిన ఏ పట్టణం మిగిలిన రెండు పట్టణాల మధ్య గలదు?

సాధన : d (U,A) = 215; d (V,A) = 140; d (U,V) = 75

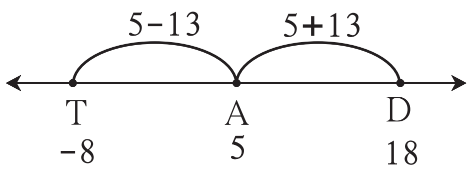
d (U,V) + d (V,A) = 75 + 140 = 215; d (U,A) = 215

∴ d (U,A) = d (U,V) + d (V,A)

∴ U మరియు A పట్టణముల మధ్య పట్టణం V గలదు.

ఉదా (3) ఒక సంఖ్యా రేఖపై బిందువు A యొక్క నిరూపకము 5. అయిన అదే రేఖపై A నుండి 13 యూనిట్ల దూరంలోని బిందువుల నిరూపకములను కనుగొనండి.

సాధన : సంఖ్యారేఖపై A నుండి 13 యూనిట్ల దూరంలో పటంలో చూపినట్లుగా A కు ఎడమవైపు T మరియు కుడివైపు D అనే రెండు బిందువులను తీసుకొందాం.



పటం 1.4

బిందువు A కు ఎడమవైపు బిందువు T యొక్క నిరూపకము $5 - 13 = -8$.

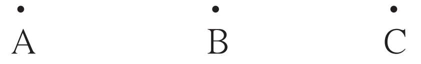
బిందువు A కు కుడివైపు బిందువు D యొక్క నిరూపకము $5 + 13 = 18$ అవుతుంది.

$\therefore$ బిందువు A నుండి 13 యూనిట్ల దూరంలోని బిందువుల నిరూపకములు -8 మరియు 18 అవుతాయి.

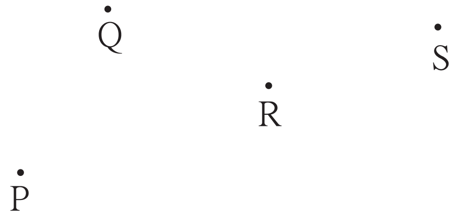
సరిచూడండి : $d(A,D) = d(A,T) = 13$

కృత్యం:

(1) పక్కపటంలో ఇచ్చిన **A, B, C** బిందువులు సరేఖీయాలు అవుతాయా, దారంను గట్టిగాలాగి పట్టుకొని పరీక్షించండి. అవి ఒకే రేఖలో ఉన్నట్లయితే ఏ బిందువు ఇతర రెండు బిందువుల మధ్య గలదో రాయండి.



(2) పక్కపటంలో **P, Q, R, S** అను నాలుగు బిందువులు ఇవ్వబడినవి. వీటిలో ఏ మూడు బిందువులు సరేఖీయాలో మరియు ఏ మూడు బిందువులు సరేఖీయాలు కావో పరీక్షించండి. సరేఖీయాలైన మూడు బిందువుల మధ్యతను రాయండి.

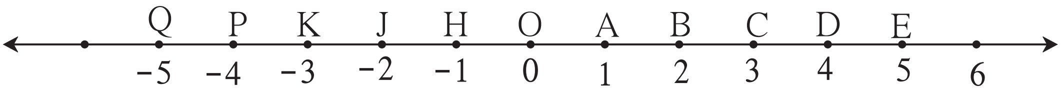


(3) పిల్లలందరిని కవాతుకొరకు సరళ రేఖలో నిలబడమని చెప్పారు. ప్రతి వరసలోని పిల్లలు సరళ రేఖలో ఉన్నారని ఎలా పరీక్షించగలవు?

(4) సూర్యకిరణాలు ఒక సరళరేఖలో ప్రయాణిస్తాయని మీరు ఎలా నిరూపణచేసుకొన్నారు? క్రింది తరగతిలో చేసిన సామాన్యశాస్త్రంలోని ప్రయోగాన్ని జ్ఞప్తికి తెచ్చుకోండి.

అభ్యాసం 1.1

1. కింది వాటి మధ్యదూరాలను సంఖ్యారేఖ ఆధారంగా కనుగొనండి.



పటం 1.5

(i) d(B,E) (ii) d(J, A) (iii) d(P, C) (iv) d(J, H)

(v) d(K, O) (vi) d(O, E) (vii) d(P, J) (viii) d(Q, B)

2. బిందువు A యొక్క నిరూపకము x మరియు బిందువు B యొక్క నిరూపకము y అయిన కింది వాటిలో d(A, B) ని కనుగొనండి.

(i) $x = 1, y = 7$ (ii) $x = 6, y = -2$ (iii) $x = -3, y = 7$

(iv) $x = -4, y = -5$ (v) $x = -3, y = -6$ (vi) $x = 4, y = -8$

3. కింద ఇవ్వబడిన సమాచారం ప్రకారం ఏ బిందువు ఇతర రెండు బిందువుల మధ్యగలదో నిర్ణయించండి. ఇవ్వబడిన బిందువులు సరేఖీయాలు కానట్లయితే అలా రాయండి.

(i) d(P, R) = 7, d(P, Q) = 10, d(Q, R) = 3

(ii) d(R, S) = 8, d(S, T) = 6, d(R, T) = 4

(iii) d(A, B) = 16, d(C, A) = 9, d(B, C) = 7

(iv) d(L, M) = 11, d(M, N) = 12, d(N, L) = 8

(v) d(X, Y) = 15, d(Y, Z) = 7, d(X, Z) = 8

(vi) d(D, E) = 5, d(E, F) = 8, d(D, F) = 6

4. d(A,C) = 10, d(C,B) = 8 అయ్యేట్లు ఒక సంఖ్యా రేఖపై A,B,C అనే బిందువులు ఉన్నట్లయితే d(A, B) ని కనుగొనండి. అన్ని అవకాశములు గురించి ఆలోచించండి.

5. X, Y, Z లు సరేఖీయ బిందువులు. d(X,Y) = 17, d(Y,Z) = 8 అయిన d(X,Z) ని కనుగొనండి.

6. పటాలను గీసి ప్రశ్నలకు సమాధానములు రాయండి.

(i) A-B-C మరియు l(AC) = 11, l(BC) = 6.5, అయిన l(AB) = ?

(ii) R-S-T మరియు l(ST) = 3.7, l(RS) = 2.5, అయిన l(RT) = ?

(iii) X-Y-Z మరియు l(XZ) = $3\sqrt{7}$, l(XY) = $\sqrt{7}$, అయిన l(YZ) = ?

7. సరేఖీయాలు కాని మూడు బిందువులతో ఏ పటం తయారవుతుంది?

తెలుసుకొందాం.

తొమ్మిదవ తరగతి గణితం భాగము-I లో సమితులు అనే అధ్యాయములో మీరు సమితుల సమ్మేళనము, సమితుల ఛేదనం గురించి నేర్చుకొన్నారు. వాటిని ఉపయోగించి రేఖాఖండం, కిరణము, రేఖలను బిందుసమితుల రూపంలో వర్ణిద్దాం.

(1) **రేఖాఖండం (Line segment) :**

బిందువు A, బిందువు B ఈ రెండు బిందువుల మధ్యగల బిందువులన్నింటి యొక్క సమ్మేళన సమితియే రేఖాఖండం AB అవుతుంది. రేఖాఖండం AB ని సంక్షిప్తంగా రే.ఖం. AB అని రాస్తారు.

పటం 1.6

రే.ఖం. AB అనగా రే.ఖం. BA.

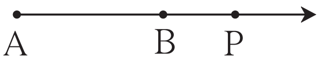
బిందువు A, బిందువు B ఇవి రే.ఖం. AB యొక్క అంత్య బిందువులు.

రేఖాఖండం యొక్క అంత్య బిందువుల మధ్య దూరాన్ని ఆ రేఖాఖండం యొక్క పొడవు అంటారు. $l(AB) = d(A,B)$

$l(AB) = 5$ ను $AB = 5$ అని కూడా రాస్తారు.

(2) **కిరణం AB (Ray AB) :**

A మరియు B ఇవి రెండు విభిన్న బిందువులు గలవని అనుకోండి. రేఖ AB పైనున్న బిందువులు మరియు A-B-P లాంటి అన్ని బిందువులు P యొక్క బిందు సమితుల సమ్మేళనం అనగా కిరణం AB అవుతుంది. బిందువు A ను కిరణం యొక్క ఆరంభబిందువని అంటారు.



పటం 1.7

(3) **సరళ రేఖ AB (Line AB) :**

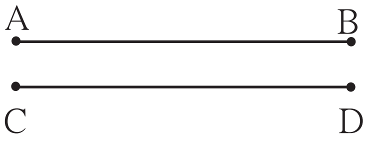
కిరణం AB యొక్క బిందు సమితి మరియు దాని వ్యతిరేక కిరణం యొక్క బిందు సమితుల సమ్మేళనం వలన ఏర్పడు బిందు సమితి రేఖ AB యొక్క బిందు సమితి అవుతుంది.

రే.ఖం. AB యొక్క బిందు సమితి సరళ రేఖ AB బిందు సమితికి ఉపసమితి అవుతుంది.

(4) **సర్వసమాన రేఖాఖండములు (Congruent segments):**

ఇచ్చిన రెండు రేఖాఖండాల యొక్క పొడవులు సమానంగా ఉన్నట్లయితే ఆ రెండు రేఖాఖండాలు సర్వసమానం అవుతాయి.

$l(AB) = l(CD)$ అయిన రేఖ $AB \cong$ రేఖ CD



పటం 1.8

(5) **సర్వసమాన రేఖాఖండాల ధర్మాలు (Properties of congruent segements) :**

(i) పరావర్తన ధర్మము (Reflexivity) రే.ఖం. AB ≅ రే.ఖం. AB

(ii) సౌష్టవ ధర్మము (Symmetry) రే.ఖం. AB ≅ రే.ఖం. CD అయినచో రే.ఖం. CD ≅ రే.ఖం. AB

(iii) సంక్రమణ ధర్మము(Transitivity) రే.ఖం. AB ≅ రే.ఖం. CD, రే.ఖం. CD ≅ రే.ఖం. EF అయినచో రే.ఖం. AB ≅ రే.ఖం. EF

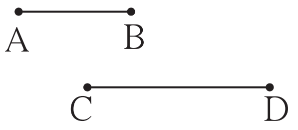
(6) **రేఖాఖండం యొక్క మధ్య బిందువు (Midpoint of a segment) :**

ఒకవేళ A-M-B మరియు రే.ఖం. AM ≅ రే.ఖం. MB, అయినచో M బిందువును రేఖా ఖండం AB యొక్క మధ్య బిందువు అని అంటారు. ప్రతి రేఖాఖండమునకు ఒకే ఒక మధ్య బిందువు ఉంటుంది.

పటం 1.9

(7) **రేఖాఖండాలను పోల్చడం (Comparison of segments):**

రే.ఖం. AB యొక్క పొడవు రే.ఖం. CD కంటే తక్కువ ఉంటే అనగా $l(AB) < l(CD)$ అయినయెడల రే.ఖం. AB<రే.ఖం. CD లేదా రే.ఖం. CD > రే.ఖం. AB అని రాస్తారు. రేఖాఖండాల యొక్క చిన్న పెద్ద తారతమ్యాలు వాటి పొడవులపై ఆధారపడి ఉంటాయి.



పటం 1.10

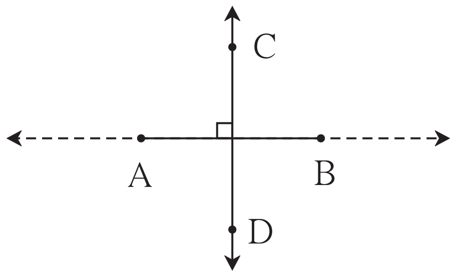
(8) **రేఖాఖండాల లేదా కిరణాల యొక్క లంబత్వం**

(Perpendicularity of segments or rays) :

రెండు రేఖాఖండములు, రెండు కిరణములు లేదా ఒక కిరణం మరియు ఒక రేఖాఖండమును కలిగివున్న రేఖలు పరస్పరం లంబముగా ఉన్నచో ఆ రెండు రేఖాఖండాలు, మరియు రెండు కిరణాలు లేదా ఒక కిరణం, ఒక రేఖాఖండం పరస్పరం లంబముగా ఉన్నాయని అంటారు.

పటం 1.11 లో రే.ఖం. AB ⊥ రే.ఖం. CD,

రే.ఖం. AB ⊥ కిరణం CD.



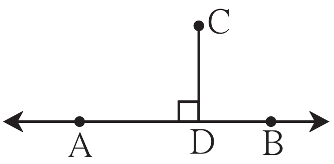
పటం 1.11

(9) **రేఖ నుండి ఒక బిందువు యొక్క దూరం**

(Distance of a point from a line) :

రే.ఖం. CD ⊥ సరళరేఖ AB మరియు సరళరేఖ AB పై బిందువు D ఉన్నచో రేఖ CD పొడవును సరళరేఖ AB నుండి బిందువు C కు గల దూరం అని అంటారు. బిందువు D ను CD లంబంనకు లంబంనకు **లంబపాదం** అను అంటారు.

$l(CD) = a$, అయిన C బిందువు రేఖ AB నుండి a దూరంలో ఉంది అని అంటారు.



పటం 1.12

అభ్యాసం 1.2

1. కింది పట్టికలో సంఖ్యారేఖపై ఉన్న బిందువుల నిరూపకములు ఇవ్వబడ్డాయి. దానిని బట్టి ఇవ్వబడిన రేఖాఖండాలు సర్వసమానాలు అవుతాయా నిర్ణయించండి.

బిందువు	A	B	C	D	E
నిరూపకము	–3	5	2	–7	9

(i) రే.ఖం. DE మరియు రే.ఖం. AB (ii) రే.ఖం. BC మరియు రే.ఖం. AD (iii) రే.ఖం. BE మరియు రే.ఖం. AD

2. రే.ఖం. AB యొక్క మధ్య బిందువు **M** మరియు AB = 8 అయిన AM = ఎంత?

3. రే.ఖం. CD యొక్క మధ్య బిందువు **P** మరియు CP = 2.5 అయిన రే.ఖం. CD యొక్క పొడవును కనుగొనండి.

4. AB = 5 సె.మీ., BP = 2 సె.మీ. మరియు AP = 3.4 సె.మీ. అయిన ఈ రేఖాఖండములలోచిన్నది పెద్దది నిర్ణయించండి.

5. పటం 1.13 ఆధారంగా కింది ప్రశ్నలకు జవాబులు రాయండి.

(i) కిరణం RP యొక్క వ్యతిరేక కిరణం యొక్క పేరు రాయండి.

(ii) కిరణం PQ మరియు కిరణం RP ల ఛేదన బిందు సమితిని రాయండి.

(iii) రే.ఖం. PQ మరియు రే.ఖం. QR ల సమ్మేళన బిందు సమితిని రాయండి.

(iv) రే.ఖం. QR ఏయే కిరణముల యొక్క ఉపసమితి అవుతుంది.

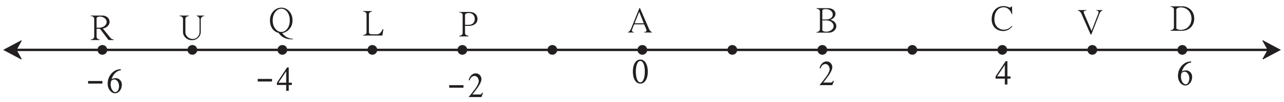
(v) R అనే ఆరంభబిందువు గల వ్యతిరేక కిరణముల జతను రాయండి.

(vi) S అనే ఆరంభబిందువు గల ఏవైన రెండు కిరణములు రాయండి.

(vii) కిరణం SP మరియు కిరణం ST ల యొక్క ఛేదన బిందుసమితిని రాయండి.

పటం 1.13

6. కింది పటం 1.14 ఆధారంగా ప్రశ్నలకు సమాధానాలు రాయండి.



పటం 1.14

(i) బిందువు B నుండి సమాన దూరంలో ఉండే బిందువులేవి?

(ii) Q నుండి సమాన దూరంలో ఉండే ఒక బిందువుల జతను రాయండి.

(iii) d (U,V), d (P,C), d (V,B), d (U, L) లను కనుగొనండి.

తెలుసుకొందాం.

నియత వాక్యములు (Conditional statements and converse)

ఏ వాక్యంలను ఒక వేళ-అయితే రూపంలో రాస్తామో వాటిని నియత వాక్యములు అంటారు.

నియత వాక్యంలో 'ఒకవేళ'తో మొదలయ్యే వాక్యాన్ని దత్తాంశం (పూర్వార్థవాక్యము) మరియు 'అయితే' తో మొదలయ్యే వాక్యాన్ని (ఉత్తరార్థ వాక్యం) అని అంటారు.

ఉదా: సమ చతుర్భుజంలోని కర్ణములు పరస్పరం లంబసమద్వి ఖండన చేసుకొంటాయి. ఇది ఒక వాక్యం

నియతవాక్యం: ఒకవేళ ఇవ్వబడిన చతుర్భుజం, సమచతుర్భుజమయితే దాని కర్ణములు పరస్పరం లంబసమద్విఖండన చేసుకొంటాయి. ఏదేని నియతవాక్యం సత్యమైనచో, దాని విపర్యము సత్యం అవుతుందనికాదు. కింది ఉదాహరణ చూడండి.

ఇవ్వబడిన నియత వాక్యంలోని పూర్వార్థ వాక్యం మరియు ఉత్తరార్థ వాక్యాలను పరస్పరం మార్చిన ఏర్పడే కొత్త వాక్యాన్ని మూల వాక్యం యొక్క విపర్యయము అని అంటారు.

నియతవాక్యం : ఒక వేళ ఒక చతుర్భుజం సమచతుర్భుజం అయితే దాని కర్ణాలు పరస్పరం లంబసమద్విఖండన రేఖలు అవుతాయి.

విపర్యయం : ఒక వేళ ఒక చతుర్భుజంలోని కర్ణాలు పరస్పరం లంబసమద్విఖండనలు అయితే ఆ చతుర్భుజం సమాంతరచతుర్భుజం అవుతుంది. ఈ ఉదాహరణలో మూలవాక్యం మరియు దాని విపర్యయములు రెండు సత్యములు.

నియతవాక్యం : ఒక వేళ ఏదేని సంఖ్య ప్రధాన సంఖ్య అయితే అది సరి లేక బేసిసంఖ్య అవుతుంది.

విపర్యయం : ఒక వేళ ఏదేని సరి లేక బేసిసంఖ్య అయితే అది ప్రధాన సంఖ్య అవుతుంది.

ఈ ఉదాహరణలో మూల(దత్త) వాక్యము సత్యము కాని విపర్యయము అసత్యము.

తెలుసుకొందాం.

ఉపపత్తులు (నిరూపణలు) (Proofs)

మీరు కోణం, త్రిభుజం, చతుర్భుజముల యొక్క ధర్మాలను నేర్చుకొన్నారు. ఈ ధర్మాలను మీరు ప్రయోగ పద్ధతిలో నేర్చుకొన్నారు. ఈ తరగతిలో మనం రేఖాగణితమును భిన్న దృష్టితో చూడబోతున్నాము. ఈ దృష్టి యొక్క కీర్తి క్రీ.పూ. 3వ శతాబ్దంలోని గ్రీకు గణిత శాస్త్రవేత్త యూక్లిడ్‌కు చెందుతుంది. ఆ కాలంలో తెలిసిన రేఖాగణిత విషయాన్ని సుసంబద్ధంగా సంకలనం (క్రోడీకరించి) చేసి, వాటికి క్రమబద్ధరూపం ఇవ్వడం జరిగింది. ఆయన ముఖ్యంగా కొన్ని స్వయంనిరూపిత మరియు ఆంగీకరించబడిన వాక్యంలను **స్వీకృతాలు** (ప్రతిపాదనలు)గా స్వీకరించడం జరిగింది. అయితే వాటి నాధారంగా చేసుకొని తార్కికంగా అమర్చి కొత్త ధర్మాలను నిరూపించవచ్చు. నిరూపించబడిన ధర్మాలను **సిద్ధాంతాలు** (Theorems) అని అంటారు.

యూక్లిడ్ ప్రతిపాదించిన స్వీకృతములలోని కొన్నింటిని కింద ఇవ్వడం జరిగింది.

(1) ఒక బిందువు నుండి అసంఖ్యాకమైన రేఖలను గీయవచ్చును.

(2) రెండు బిందువుల గుండా ఒకే ఒక రేఖ పోతుంది.

(3) ఏదైనా బిందువును కేంద్రంగా తీసుకుని ఇచ్చిన వ్యాసార్ధంతో వృత్తమును గీయవచ్చును.

(4) అన్ని లంబకోణములు పరస్పరం సర్వసమానములు అవుతాయి.

(5) రెండు రేఖలు మరియు వాటి తిర్యగ్రేఖ గీసినట్లయితే ఒకవైపు ఏర్పడే అంతరకోణాల మొత్తం రెండు లంబకోణాలకంటె తక్కువ ఉన్నచో, ఆరేఖలను అదేదిశలో పొడిగించిన ఒకదానికొకటి ఖండించుకొంటాయి.

ఇందులోని కొన్ని స్వీకృతాలను మనం కృత్యం ద్వార నిరూపణ చేసుకొన్నాం.

యూక్లిడ్

ఏదేని ధర్మము తార్కికంగా నిరూపించ వచ్చినట్లయితే ఆ ధర్మాన్ని సత్యమని అనుకోవచ్చును. అందుకై చేయబడిన తార్కిక అమరికను ఆ ధర్మంయొక్క, అనగా ఆస్వీకృతం యొక్క **ఉపపత్తి** (Proof) అని అంటారు.

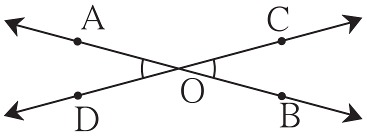
ఒక నియత వాక్యం సత్యము అని నిరూపించాల్సి వచ్చినపుడు దానిలోని పూర్వార్థవాక్యాన్ని **దత్తాంశం** మరియు ఉత్తరార్ధ వాక్యాన్ని **సారాంశం** అని అంటారు.

నిరూపణ, **ప్రత్యక్ష** మరియు **పరోక్ష** పద్ధతి అని రెండు రకాలుగా ఉంటాయి.

ఒకదానికొకటి ఖండించుకొనె రెండు రేఖలు ఏర్పరిచిన కోణాల ధర్మాలను ప్రత్యక్ష నిరూపణ పద్ధతి ద్వారా నిరూపిద్దాం.

సిద్ధాంతం : **రెండు రేఖలు పరస్పరం ఖండించుకొనినచో ఏర్పడే కోణాలు సమాన కొలతతో ఉంటాయి.**

దత్తాంశం : సరళ రేఖ AB మరియు సరళ రేఖ CD పరస్పరము బిందువు O వద్ద ఖండించుకొంటాయి. A–O–B, C–O–D



పటం 1.15

సారాంశం : (i) $\angle AOC = \angle BOD$
(ii) $\angle BOC = \angle AOD$

ఉపపత్తి : $\angle AOC + \angle BOC = 180^\circ$ . . . . (I) (రేఖీయ ద్వయ కోణాలు)
$\angle BOC + \angle BOD = 180^\circ$ . . . . (II) (రేఖీయ ద్వయకోణాలు)
$\angle AOC + \angle BOC = \angle BOC + \angle BOD$ . . . . . (I) మరియు (II) వ వాక్యంలను నుండి
$\therefore \angle AOC = \angle BOD$. . . . . . . $\angle BOC$ ని కొట్టి వేయడం వలన
ఇదే విధంగా $\angle BOC = \angle AOD$ ని నిరూపించవచ్చును.

పరోక్ష నిరూపణ పద్ధతి (Indirect proof) :

ఈ పద్ధతిలో ప్రారంభంలో సారాంశం అసత్యం అనుకొని దాని ఆధారంగా కేవలం తార్కికంగా మరియు ముందు అంగీకరింపబడిన సత్యాల ఆధారంగా అంచెలంచెలుగా ఒక ఫలితం వరకు చేరుకుంటాము. ఈ ఫలితము దత్తాంశములో ఇవ్వబడిన లేదా మనకు తెలిసిన సత్య (ధర్మాల) వాక్యాలకు అసంఘతం (విరుద్ధం) అవుతుంది. అందువలన సారాంశం అసత్యం అనుకోవడం తప్పు అని నిదర్శనం చూపవచ్చు. అనగా సారాంశం సత్యం అని స్వీకరించబడుతుంది. కింది ఉదాహరణను అభ్యసించండి.

వాక్యం : రెండు కంటె పెద్దదయిన ప్రధానసంఖ్య బేసి సంఖ్యమవుతుంది.

నియతవాక్యం : ఒకవేళ p అనేది 2 కంటె పెద్ద ప్రధానసంఖ్యఅయిన p బేసిసంఖ్య అవుతుంది.

దత్తాంశం : p అనేది 2 కంటె పెద్ద ప్రధాన సంఖ్య. అనగా 1 మరియు p ఇవి రెండు మాత్రమే p యొక్క కారణాంకాలు.

సారాంశం : p అనేది బేసి సంఖ్య

ఉపపత్తి : p అనేది బేసి సంఖ్య కాదు అనుకొందాం.
అనగా p అనేది సరిసంఖ్య అవుతుంది.
$\therefore$ 2, p యొక్క కారణాంకం అవుతుంది ..... (I)
కాని p అనేది 2 కంటె పెద్ద ప్రధాన సంఖ్య అని ఇవ్వబడింది.
$\therefore$ p యొక్క కారణాంకాలు 1 మరియు p ఈ రెండు మాత్రమే. ..... (II)
I మరియు II వ వాక్యాలను బట్టి ఇది దత్తాంశానికి విరుద్ధం.
కాబట్టి అనుకొన్న వాక్యం తప్పు.
అనగా p అనేది 2 కంటె పెద్ద ప్రధాన సంఖ్యయిన అది బేసి సంఖ్య అవుతుంది అని నిరూపించబడినది.

అభ్యాసం 1.3

1. కింది వాక్యాలను ఒక వేళ-అయితే రూపంలో రాయండి.

   (i) సమాంతర చతుర్భుజం యొక్క ఎదుటికోణాలు సర్వసమానంగా ఉంటాయి.

   (ii) దీర్ఘచతురస్రం యొక్క కర్ణములు సర్వసమానంగా ఉంటాయి.

   (iii) సమద్విబాహు త్రిభుజంలో శీర్షబిందువు మరియు భూమి యొక్క మధ్య బిందువును కలిపే రేఖాఖండం భూమికి లంబంగా ఉంటుంది.

2. కింది వాక్యముల యొక్క విపర్యయమును రాయండి.

   (i) రెండు సమాంతర రేఖలు మరియు వాటి తిర్యగ్రేఖ ఇచ్చినట్లయితే ఏర్పడే సంగత కోణాలు సర్వసమానముగా ఉంటాయి.

   (ii) ఒక తిర్యగ్రేఖ రెండు రేఖలను ఖండించినపుడు ఏర్పడే అంతర కోణాల ఒక జత సంపూరకము అయితే ఆ రేఖలు సమాంతర రేఖలు అవుతాయి.

   (iii) దీర్ఘచతురస్రం యొక్క కర్ణములు సర్వసమానం అవుతాయి.

సంకీర్ణ ప్రశ్నసంగ్రహం 1

1. కింది బహుపర్యాయము ప్రశ్నలకిచ్చిన సమాధానాలలో సరియైన పర్యాయంను గుర్తించండి.

(i) ప్రతి రేఖాఖండానికి ఎన్ని మధ్య బిందువులు ఉంటాయి?

(A) ఒకేఒక (B) రెండు (C) మూడు (D) అనేక

(ii) రెండు విభిన్న రేఖలు పరస్పరం ఖండించుకొన్నపుడు వాటి ఛేదనసమితిలో ఎన్ని బిందువులు ఉంటాయి?

(A) అనంతమైన (B) రెండు (C) ఒక (D) ఒకటి కూడ లేదు

(iii) ఎన్నిరేఖలు మూడువిభిన్న బిందువులనుకల్గివుంటాయి?

(A) రెండు (B) మూడు (C) ఒకటి లేదా మూడు (D) ఆరు

(iv) బిందువు A యొక్క నిరూపకం -2 మరియు B యొక్క నిరూపకము 5 అయిన d(A,B) = ఎంత ?

(A) -2 (B) 5 (C) 7 (D) 3

(v) ఒకవేళ P–Q–R మరియు d(P,Q) = 2, d(P,R) = 10, అయిన d(Q,R) = ఎంత?

(A) 12 (B) 8 (C) $\sqrt{96}$ (D) 20

2. సంఖ్యారేఖపై P,Q,R బిందువుల నిరూపకములు వరసగా 3, -5 మరియు 6 అయిన కింది వాక్యాలలో ఏది సత్యం, ఏది అసత్యమో రాయండి.

(i) $d(P,Q) + d(Q,R) = d(P,R)$

(ii) $d(P,R) + d(R,Q) = d(P,Q)$

(iii) $d(R,P) + d(P,Q) = d(R,Q)$

(iv) $d(P,Q) - d(P,R) = d(Q,R)$

3. కింద కొన్ని బిందువుల జతల నిరూపకములు ఇవ్వబడినవి. దానినిబట్టి ప్రతి జతలోని మధ్య దూరంను కనుగొనండి.

(i) 3, 6 (ii) −9, −1 (iii) −4, 5 (iv) 0, −2

(v) $x + 3, x - 3$ (vi) −25, −47 (vii) 80, −85

4. సంఖ్యారేఖపై P బిందువు యొక్క నిరూపకము −7 అయిన P నుండి 8 యూనిట్ల దూరంలో ఉండే బిందువుల నిరూపకములను రాయండి.

5. ఇచ్చిన సమాచారము ఆధారంగా కింది ప్రశ్నలకు సమాధానాలు రాయండి.

(i) ఒక వేళ A−B−C మరియు d(A,C) = 17, d(B,C) = 6.5 అయిన d (A,B) = ?

(ii) ఒక వేళ P−Q−R మరియు d(P,Q) = 3.4, d(Q,R)= 5.7 అయిన d(P,R) = ?

6. సంఖ్యారేఖపై A బిందువు యొక్క నిరూపకము 1. A నుండి 7 యూనిట్ల దూరంలో ఉండే బిందువుల నిరూపకములను కనుగొనండి.

7. కింది వాక్యాలను నియతవాక్యాల రూపంలోరాయండి.

(i) ప్రతి సమ చతుర్భుజం, చతురస్రం అవుతుంది.

(ii) రేఖీయజతలోని కోణాలు పరస్పరంసంపూరకాలు.

(iii) మూడు రేఖాఖండాలతో తయారైన పటం త్రిభుజం అవుతుంది.

(iv) కేవలం రెండే భాజకాలుగల సంఖ్యను ప్రధానసంఖ్యయని అంటారు.

8. కింది వాక్యాల విపర్యయమున రాయండి.

(i) ఏదేని ఒక బహుభుజి యొక్క కోణాలకొలతల మొత్తం 180^0 అయినచో, ఆ పటం త్రిభుజమవుతుంది.

(ii) రెండు కోణాల కొలతల మొత్తం 90^0 ఉన్నచో అవి పరస్పరం పూరకాలవుతాయి.

(iii) రెండు సమాంతరరేఖలను తిర్యగ్రేఖ ఖండించినపుడు ఏర్పడే సంగతకోణాలు సర్వసమానం.

(iv) సంఖ్యలోని అంకెల మొత్తం 3చే భాగించబడిన, ఆ సంఖ్య 3చే నిశ్శేషంగా భాగింపబడుతుంది.

9. కింది వాక్యాలలోని దత్తాంశము మరియు సారాంశాన్ని రాయండి.

(i) ఒక వేళ త్రిభుజం యొక్క మూడు భుజాలు సర్వసమానంగా ఉన్నచో దాని మూడు కోణాల కూడా సర్వసమానంగా ఉంటాయి.

(ii) సమాంతర చతుర్భుజం యొక్క కోణాలు పరస్పరం సమద్విఖండన చేసుకొంటాయి.

10*. కింది వాక్యాలకై పేర్లతో పటాలను గీసి దానిని దత్తాంశం, సారాంశాలను రాయండి.

(i) రెండు సమబాహుత్రిభుజాలు సమరూపాలు.

(ii) ఒకవేళ రేఖీయజతలోని కోణాలు సర్వసమానంగా ఉన్నచో వాటిలో ప్రతికోణం లంబకోణమవుతుంది.

(iii) త్రిభుజం యొక్క రెండుభుజాలపై గీయబడిన ఉన్నతులు సర్వసమానమైనయెడల ఆ రెండు భుజాలు సర్వసమానమవుతాయి.

❑❑❑

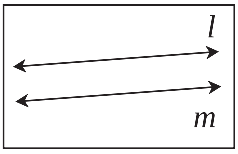
2 సమాంతర రేఖలు (Parallel Lines)

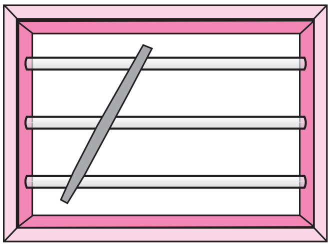
పదండి, నేర్చుకుందాం.

- సమాంతర రేఖలు మరియు తిర్యగ్రేఖ వలన ఏర్పడే అంతర కోణాల ధర్మములు
- సమాంతర రేఖల నియమాలు.
- సమాంతర రేఖల ధర్మముల ఉపయోగాలు.

కొంచెం గుర్తుతెచ్చుకుందాం

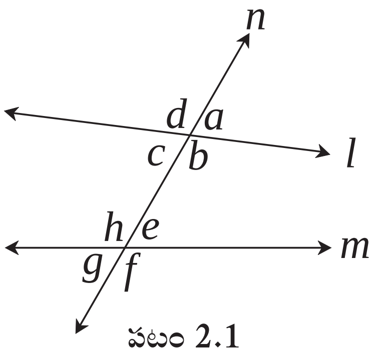
సమాంతరరేఖలు : ఏరేఖలు ఒకేతలంలో ఉండి, ఒకదానినొకటి ఖండించుకొనవో, ఆ రేఖలను సమాంతర రేఖలని అంటారు.





ప్రక్క చిత్రంలో చూపినవిధంగా క్షితిజ సమాంతర ఇనుపచువ్వలుగల కిటికీలో ఒక కర్రను అడ్డంగా పట్టుకొని చూడండి.
ఎన్ని కోణాలు ఏర్పడినట్లు కనిపిస్తుంది?

- రెండు రేఖలు మరియు వాటి తిర్యగ్రేఖ వలన ఏర్పడే కోణాల జతలు గుర్తుకొచ్చాయా?
  పటం 2.1 లో రేఖ l మరియు m వీటి యొక్క తిర్యగ్రేఖ n. ఇచ్చట మొత్తం ఎనిమిది కోణములు ఏర్పడ్డాయి. వాటిలోని జతలు కింది విధంగా ఉన్నాయి.



పటం 2.1

సంగత కోణముల జతలు

(i) ∠d, ∠h

(ii) ∠a, ☐

(iii) ∠c, ☐

(iv) ∠b, ☐

అంతర ఏకాంతర కోణముల జతలు

(i) ∠c, ∠e

(ii) ∠b, ∠h

బాహ్య ఏకాంతర కోణముల జతలు

(i) ∠d, ∠f

(ii) ∠a, ∠g

తిర్యగ్రేఖకు ఒకవైపు ఉన్న అంతర కోణముల జతలు

(i) ∠c, ∠h

(ii) ∠b, ∠e

ముఖ్యమైన కొన్ని ధర్మాలు:

(1) రెండు రేఖలు ఒకదానినొకటి ఖండించుకొనిన ఏర్పడే శీర్షాభిముఖ కోణముల కొలతలు సమానంగా ఉంటాయి.

(2) రేఖీయ ద్వయంలోని కోణాలు పరస్పరం సంపూరకములు అవుతాయి.

(3) ఎప్పుడైతే సంగత కోణముల ఒక జత సర్వసమానంగా ఉంటుందో అప్పుడు మిగిలిన సంగత కోణముల జతలు సర్వసమానం అవుతాయి.

(4) ఎప్పుడైతే ఏకాంతర కోణముల ఒక జత సర్వసమానంగా ఉంటుందో మిగిలిన ఏకాంతర కోణముల జతలు సర్వసమానం అవుతాయి.

(5) ఎప్పుడైతే తిర్యగ్రేఖకు ఒకే వైపు ఉన్న అంతరకోణముల మొత్తం 180° అయినప్పుడు అంతర కోణముల రెండవ జతలోని కోణముల మొత్తం కూడా 180° అవుతుంది.

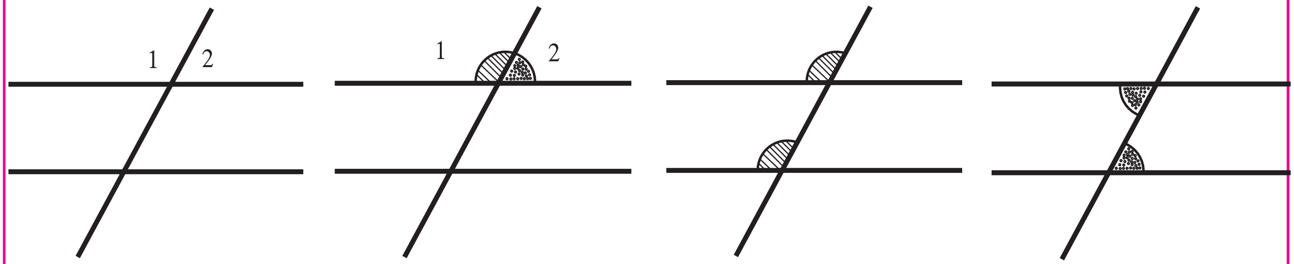
తెలుసుకొందాం.

సమాంతర రేఖల ధర్మాలు (Properties of parallel lines)

కృత్యము :

రెండు సమాంతర రేఖలు మరియు వాటి తిర్యగ్రేఖ వలన ఏర్పడే కోణముల ధర్మములను నిరూపించుట.

ఒక మందపురంగు కాగితపు ముక్కను తీసుకోండి. దానిపై రెండు సమాంతర రేఖలు గీసి ఒక తిర్యగ్రేఖను గీయండి. ఈ మూడు రేఖలపై తిన్నని పుల్లలను జిగురు సహాయంతో అతికించండి. ఇచ్చట ఏర్పడిన ఎనిమిది కోణములలో కోణము 1 మరియు కోణము 2 ల కొలతకు సమానంగా ఉండేట్లురంగు పత్రికను కత్తిరించండి. (ప్రక్క పటంలో చూపినవిధంగా) ఈ ముక్కలను సంబంధిత సంగత కోణం, ఏకాంతర కోణం, మరియు అంతర కోణముల దగ్గర ఉంచి, ధర్మములను సరిచూడండి.



రెండు సమాంతర రేఖలయొక్క తిర్యగ్రేఖ వలన ఏర్పడే కోణాల ధర్మమును కృత్యంద్వారా పరీక్షించినదానినిపుడు నిరూపిద్దాం. ఈ ధర్మములను నిరూపించుటకు మనం కిందనిచ్చిన యూక్లిడ్ యొక్క మరొక స్వీకృతాన్ని ఉపయోగించబోతున్నాం.

రెండు రేఖలు మరియు వాటి తిర్యగ్రేఖను గీసినపుడు ఒకవైపు ఏర్పడే అంతరకోణాల మొత్తం రెండు లంబకోణాలకంటె తక్కువైనచో ఆ సరళరేఖలను అదే దశలో పొడిగించినపుడు ఒకదానినొకటి ఖండించు కొంటాయి.

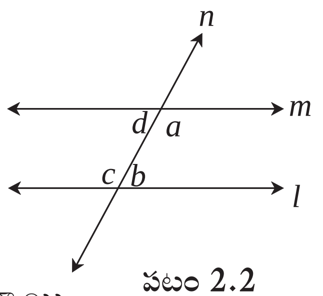
అంతరకోణముల సిద్ధాంతం (Interior angle theorem)

సిద్ధాంతము : రెండు సమాంతర రేఖలను ఒక తిర్యగ్రేఖ ఖండించిన తిర్యగ్రేఖకు ఏదేని ఒక వైపు ఉండే అంతరకోణములు ఒకదానికొకటి సంపూరకములు అవుతాయి.

దత్తాంశం : రేఖ l $\parallel$ రేఖ m మరియు రేఖ n వాటి తిర్యగ్రేఖ

పటంలో చూపిన విధంగా $\angle a$, $\angle b$, $\angle c$, $\angle d$ లు

అంతర కోణములు అవుతాయి.



పటం 2.2

సారాంశం : $\angle a + \angle b = 180^\circ$

$\angle d + \angle c = 180^\circ$

ఉపపత్తి : $\angle a$ మరియు $\angle b$ వీటి కొలతల మొత్తానికి మూడు సంభావ్యతలున్నాయి.

(i) $\angle a + \angle b < 180^\circ$ (ii) $\angle a + \angle b > 180^\circ$ (iii) $\angle a + \angle b = 180^\circ$

వీటిలో (i) $\angle a + \angle b < 180^\circ$ సత్యం అని అనుకుందాం.

రేఖ l మరియు రేఖ m లను $\angle a$, $\angle b$ తిర్యగ్రేఖకు ఏవైపు ఉన్నాయో ఆ వైపుకు పొడిగించిన అవి పరస్పరం ఖండించుకుంటాయి. (యూక్లిడ్ యొక్క స్వీకృతం ప్రకారం)

కాని, రేఖ l మరియు రేఖ m లు సమాంతర రేఖలు.

$\therefore \angle a + \angle b < 180^\circ$ అనేది సాధ్యం కాదు . . . .(I)

ఇప్పుడు $\angle a + \angle b > 180^\circ$ ఈ సంభావ్యతను సత్యం అనుకొందాం.

$\therefore \angle a + \angle b > 180^\circ$

కాని $\angle a + \angle d = 180^\circ$

అదేవిధంగా $\angle c + \angle b = 180^\circ$ . . . . . రేఖీయ ద్వయ కోణాలు

$\therefore \angle a + \angle d + \angle b + \angle c = 180^\circ + 180^\circ = 360^\circ$

$\therefore \angle c + \angle d = 360^\circ - (\angle a + \angle b)$

ఒకవేళ $\angle a + \angle b > 180^\circ$ అయిన $[360^\circ - (\angle a + \angle b)] < 180^\circ$

$\therefore \angle c + \angle d < 180^\circ$

$\therefore$ అలా ఉన్నచో $\angle c$ మరియు $\angle d$ లు తిర్యగ్రేఖకు ఏవైపునున్నాయో ఆ దిశలో పొడిగించినచో రేఖ l మరియు రేఖ m లు ఒకదానినొకటి ఖండించుకొంటాయి.

$\therefore \angle c + \angle d < 180$ ఇది అసాధ్యం

అనగా $\angle a + \angle b > 180^\circ$ ఇది అసాధ్యం. ...... (II)

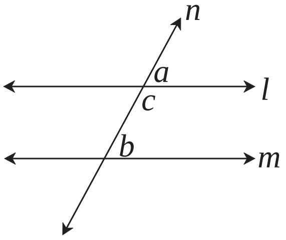
$\therefore\ \angle a + \angle b = 180^\circ$ అనే ఒకే ఒక సంభావ్యత మిగులుతంది. ......(I) మరియు (II) లనుబట్టి

$\therefore\ \angle a + \angle b = 180^\circ$ అదే విధంగా $\angle c + \angle d = 180^\circ$

ఈ నిరూపణలో మనం $\angle a + \angle b > 180^\circ$, $\angle a + \angle b < 180^\circ$ రెండు సంభావ్యతలలో విరుద్ధ ఫలితం వచ్చినందున వాటిని పరిగణలోకి తీసుకోలేదు. ఇది ఒక పరోక్ష నిరూపణ పద్ధతి (ఉపపత్తి)

సంగత కోణాల మరియు ఏకాంతర కోణాల ధర్మాలు (Corresponding angle and alternate angle theorem)

సిద్ధాంతం : రెండు సమాంతర రేఖలను ఒక తిర్యగ్రేఖ ఖండించడం వలన ఏర్పడే సంగత కోణాల కొలతలు సమానంగా ఉంటాయి.



పటం 2.3

దత్తాంశం : రేఖ l || రేఖ m

రేఖ n తిర్యగ్రేఖ

సారాంశం: $\angle a = \angle b$

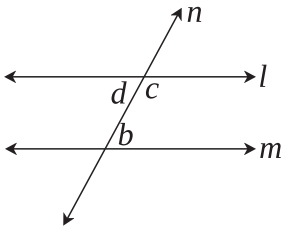
ఉపపత్తి : $\angle a + \angle c = 180^\circ$ . . . . . . (I) రేఖీయ ద్వయ కోణాలు

$\angle b + \angle c = 180^\circ$ . . . . . . (II) సమాంతర రేఖల అంతరకోణాలు ధర్మం

$\angle a + \angle c = \angle b + \angle c$ . . . సమీకరణం (I) మరియు (II) ల నుండి.

$\therefore\ \angle a = \angle b$

సిద్ధాంతం : రెండు సమాంతర రేఖలను తిర్యగ్రేఖ ఖండించడం వలన ఏర్పడే ఏకాంతర కోణముల కొలతలు సమానంగా ఉంటాయి.



పటం 2.4

దత్తాంశం : రేఖ l || రేఖ m

రేఖ n ఒక తిర్యగ్రేఖ

సారాంశం: $\angle d = \angle b$

ఉపపత్తి : $\angle d + \angle c = 180^\circ$ . . . . (I) రేఖీయ ద్వయకోణములు

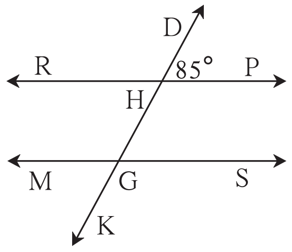
$\angle c + \angle b = 180^\circ$ . . . . (II) సమాంతర రేఖల అంతర కోణముల ధర్మం

$\angle d + \angle c = \angle c + \angle b$ . . . . సమీకరణములు (I) మరియు (II) ల నుండి.

$\therefore\ \angle d = \angle b$

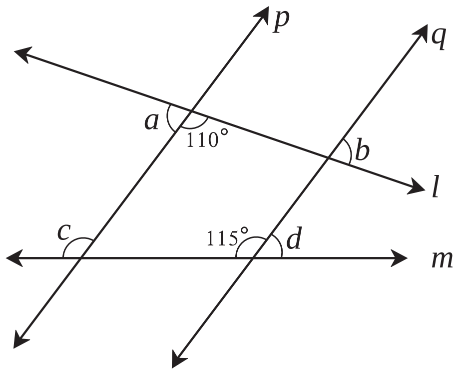
అభ్యాసం 2.1

1. పటం 2.5 లో రేఖ RP || రేఖ MS మరియు రేఖ DK అనేది వాటి తిర్యగ్రేఖ $\angle DHP = 85^\circ$ అయిన కింది కోణముల కొలతలను కనుగొనండి.
   (i) $\angle RHD$ (ii) $\angle PHG$
   (iii) $\angle HGS$ (iv) $\angle MGK$

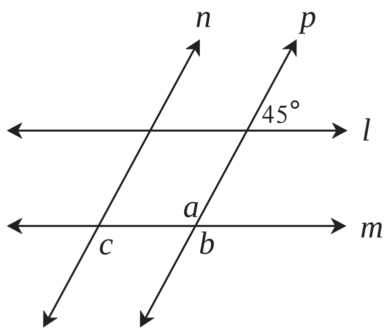


పటం 2.5

2. పటం 2.6 ను చూడండి. రేఖ p || రేఖ q మరియు రేఖ l మరియు రేఖ m లు తిర్యగ్రేఖలు. కొన్ని కోణముల కొలతలు చూపబడినవి, వాటినిబట్టి $\angle a$, $\angle b$, $\angle c$, $\angle d$ ల కొలతలను కనుగొనండి.



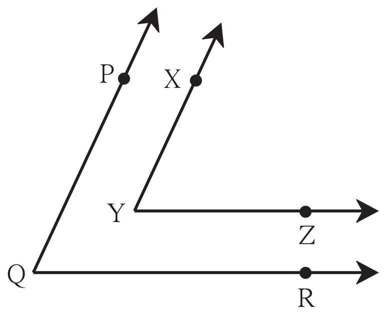
పటం 2.6



పటం 2.7

3. పటం 2.7 లో రేఖ l || రేఖ m మరియు రేఖ n || రేఖ p. ఒక కోణం యొక్క ఇచ్చిన కొలతను బట్టి $\angle a$, $\angle b$, $\angle c$ ల కొలతలను కనుగొనండి.

4*. పటం 2.8 లో $\angle PQR$ మరియు $\angle XYZ$ ల భుజాలు పరస్పరం సమాంతరం అయిన $\angle PQR \cong \angle XYZ$ అని నిరూపించండి.

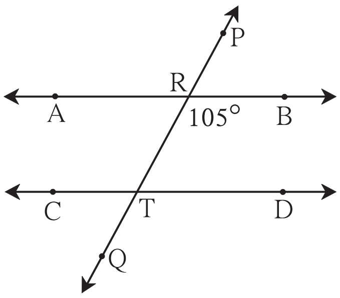


పటం 2.8

5. పటం 2.9 లో రేఖ AB || రేఖ CD మరియు రేఖ PQ తిర్యగ్రేఖ అయిన పటంలో చూపిన కోణాల కొలతల ఆధారంగా కింది కోణముల కొలతలను కనుగొనండి.

(i) ∠ART (ii) ∠CTQ

(iii) ∠DTQ (iv) ∠PRB



పటం 2.9

తెలుసుకొందాం.

సమాంతర రేఖల ధర్మాల ఉపయోగం

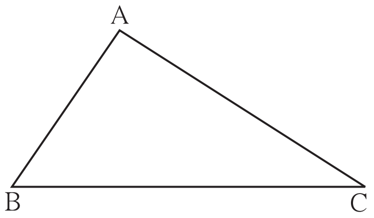
సమాంతర రేఖ మరియు తిర్యగ్రేఖ వలన ఏర్పడే కోణముల యొక్క ధర్మాలను ఉపయోగించి త్రిభుజం యొక్క ఒక ధర్మమును నిరూపించుదాం.

సిద్ధాంతం : ఏదేని త్రిభుజంలోని అన్ని కోణముల కొలతల మొత్తం 180° ఉంటుంది.

దత్తాంశం : Δ ABC ఏదేని ఒక త్రిభుజం.

సారాంశం : ∠ABC + ∠ACB + ∠BAC = 180°

నిర్మాణం : A బిందువు నుండి రేఖ BC కి సమాంతర రేఖ l ను గీయండి. దానిపై P-A-Q ఉండునట్లుగా P మరియు Q బిందువులను తీసుకోండి.



పటం 2.10

ఉపపత్తి : రేఖ PQ || రేఖ BC, రేఖ AB తిర్యగ్రేఖ

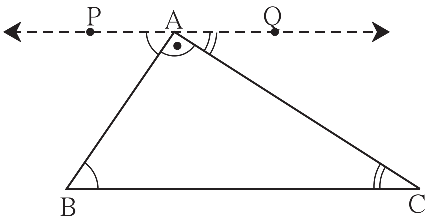
∴ ∠ABC = ∠PAB.......(ఏకాంతర కోణములు).....I

రేఖ PQ || రేఖ BC మరియు రేఖ AC తిర్యగ్రేఖ.

∴ ∠ACB = ∠QAC.......(ఏకాంతర కోణములు).....II

సమీకరణములు I మరియు II ల ను బట్టి

∠ABC + ∠ACB = ∠PAB + ∠QAC . . . III



పటం 2.11

సమీకరణము III లో రెండు వైపులా ∠BAC ని కలపగా

∠ABC + ∠ACB + ∠BAC = ∠PAB + ∠QAC + ∠BAC

= ∠PAB + ∠BAC + ∠QAC

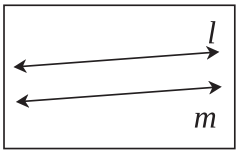
= ∠PAC + ∠QAC ...(∵ ∠PAB + ∠BAC = ∠PAC)

= 180° ...(రేఖీయ ద్వయ కోణములు)

అనగా త్రిభుజంలోని మూడు కోణముల కొలతల మొత్తం180° ఉంటుంది.

చదవండి, చర్చిద్దాం.

పక్క తలంలోని రేఖ l మరియు రేఖ m లు పరస్పరం సమాంతరంగా ఉన్నాయా ఇదెలా నిర్ణయించగలరు?



పటం 2.12

తెలుసుకొందాం.

రేఖల సమాంతరత్వం యొక్క నియమములు (Tests for parallel lines)

రెండు రేఖలు మరియు వాటి తిర్యగ్రేఖ వలన ఏర్పడే కోణములను పరీక్షించి మీరు ఆ రెండు రేఖలు సమాంతరంగా ఉన్నాయాఅని నిర్ణయించవచ్చు.

(1) తిర్యగ్రేఖకు ఒక వైపు ఉన్న అంతర కోణముల జత సంపూరక కోణములు అయిన ఆ రేఖలు సమాంతరం అవుతాయి.

(2) ఏకాంతర కోణముల ఒక జత సమానంగా ఉన్నట్లయితే ఆ రేఖలు సమాంతరం అవుతాయి.

(3) సంగత కోణముల ఒక జత సమానంగా ఉన్నట్లయితే ఆ రేఖలు సమాంతరం అవుతాయి.

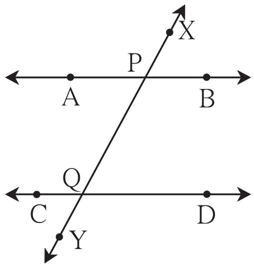
సమాంతర రేఖల అంతర కోణ నియమము (Interior angles test)

సిద్ధాంతము : రెండు విభిన్న రేఖలను ఒక తిర్యగ్రేఖ ఖండించినపుడు తిర్యగ్రేఖకు ఒక వైపు ఉన్న అంతరకోణముల మొత్తం 180° అయిన ఆ రేఖలు సమాంతర రేఖలు అవుతాయి.

దత్తాంశం : రేఖ AB మరియు రేఖ CD ల తిర్యగ్రేఖ రేఖ XY

$\angle BPQ + \angle PQD = 180^\circ$

సారాంశం : రేఖ AB $\parallel$ రేఖ CD



పటం 2.13

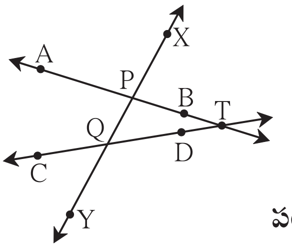
ఉపపత్తి : ఈ నియమమును మనం పరోక్ష పద్ధతిలో నిరూపించ బోతున్నాం.

సారాంశములోని వాక్యం తప్పు అనుకొందాం.

$\therefore$ రేఖ AB మరియు రేఖ CD సమాంతర రేఖలు కావు.

ఇది సత్యం అని అనుకొందాం.

రేఖ AB మరియు రేఖ CD లు T వద్ద ఖండించు కొన్నాయనుకొందాం. దానివల్ల Δ PQT ఏర్పడింది.



పటం 2.14

$\angle TPQ + \angle PQT + \angle PTQ = 180^\circ$ . . . . . . త్రిభుజంలోని కోణాల మొత్తం

కాని $\angle TPQ + \angle PQT = 180^\circ$ అని ఇవ్వబడింది. . . . . . దత్తాంశం.

అందువలన త్రిభుజంలోని రెండు కోణముల మొత్తం 180° అవుతుంది.

కాని త్రిభుజంలోని మూడు కోణముల మొత్తం 180° ఉంటుంది.

$\therefore$ $\angle PTQ = 0^\circ$ అవుతుంది.

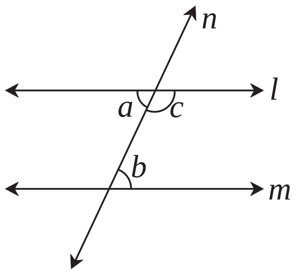
∴ PT మరియు QT ఈ రేఖలు అనగా రేఖ AB మరియు రేఖ CD లు భిన్న రేఖలు కావు.
మనకు రేఖ AB మరియు రేఖ CD విభిన్న రేఖలు అని ఇవ్వడం జరిగింది.
అనగా దత్తాంశానికి విరుద్ధ ఫలితం లభించింది.
∴ మనం అనుకొన్న వాక్యం తప్పు. అనగా రేఖ AB మరియు రేఖ CD సమాంతరంగా ఉన్నాయి.
దీనిని బట్టి రెండు రేఖలను ఒక తిర్యగ్రేఖ ఖండించినపుడు, ఒకవైపు ఏర్పడే అంతరకోణముల జత సంపూరకములు అయితే ఆ రెండు రేఖలు సమాంతర రేఖలు అవుతాయని నిరూపించబడింది. ఈ ధర్మమును సమాంతర రేఖల అంతరకోణాలనియమమని అంటారు.

ఈ నియమాన్ని బట్టి ఇతర రెండు నియమములను నిరూపిద్దాం.

ఏకాంతర కోణముల నియమము (Alternate angles test)

సిద్ధాంతము : రెండు రేఖలను ఒక తిర్యగ్రేఖ ఖండించినప్పుడు ఏర్పడే ఏకాంతర కోణముల జత సర్వసమానం అయిన ఆ రేఖలు సమాంతరంగా ఉంటాయి.

దత్తాంశం : రేఖ l మరియు రేఖ m ల యొక్క తిర్యగ్రేఖ రేఖ n.
$\angle a$ మరియు $\angle b$ లు ఏకాంతర కోణముల ఒక జత సర్వసమానం
$\therefore \angle a = \angle b$



పటం 2.15

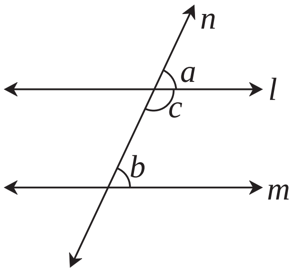
సారాంశం : రేఖ $l \parallel$ రేఖ m

ఉపపత్తి : $\angle a + \angle c = 180°$ . . . . . రేఖీయ ద్వయ కోణములు
$\angle a = \angle b$ . . . . దత్తాంశం
$\therefore \angle b + \angle c = 180°$
కాని $\angle b$ మరియు $\angle c$ లు తిర్యగ్రేఖకు ఒక వైపు ఉన్న అంతర కోణములు
$\therefore$ రేఖ $l \parallel$ రేఖ m . . . . అంతరకోణములు నియమమునుబట్టి
ఈ ధర్మంను సమాంతర రేఖల ఏకాంతరకోణాల నియమమని అంటారు.

సంగతకోణముల నియమం (Corresponding angles Test)

సిద్ధాంతము : రెండు రేఖలను ఒక తిర్యగ్రేఖ ఖండించినపుడు ఏర్పడే సంగత కోణముల ఒక జత సర్వసమానం అయిన ఆ రెండు రేఖలు సమాంతర రేఖలు అవుతాయి.

దత్తాంశం : రేఖ l మరియు రేఖ m ల తిర్యగ్రేఖ రేఖ n
$\angle a$ మరియు $\angle b$ లు సంగతకోణముల జత
$\therefore \angle a = \angle b$

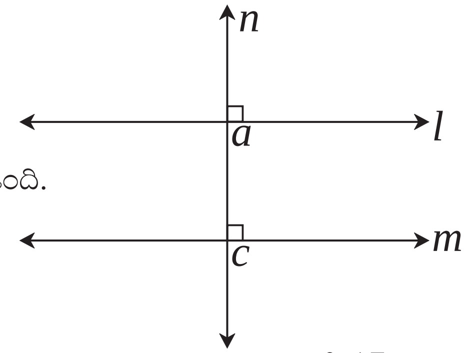


పటం 2.16

సారాంశం : రేఖ $l \parallel$ రేఖ m

ఉపపత్తి : $\angle a + \angle c = 180°$ . . . . రేఖీయ ద్వయ కోణములు
$\angle a = \angle b$ . . . . దత్తాంశం
$\therefore \angle b + \angle c = 180°$
తిర్యగ్రేఖకు ఒక వైపు ఉన్న అంతకోణములు సంపూరకకోణములు
$\therefore$ రేఖ $l \parallel$ రేఖ m . . . . అంతర కోణముల నియమము.
ఈ ధర్మంను సమాంతర రేఖల సంగతకోణాల నియమమని అంటారు.

ఉపసిద్ధాంతం I ఒక వేళ ఒక రేఖ అదే తలంలోని రెండు రేఖలకు లంబంగా ఉన్నట్లయితే ఆ రెండు రేఖలు పరస్పరం సమాంతరంగా ఉంటాయి.



పటం 2.17

దత్తాంశం : రేఖ $n \perp$ రేఖ l మరియు రేఖ $n \perp$ రేఖ m

సారాంశం : రేఖ $l \parallel$ రేఖ m

ఉపపత్తి : రేఖ $n \perp$ రేఖ l మరియు రేఖ $n \perp$ రేఖ m అని ఇవ్వబడింది.

$\therefore \angle a = \angle c = 90^\circ$

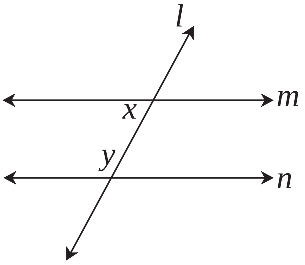
కాని $\angle a$ మరియు $\angle c$ లు రేఖ l మరియు రేఖ m ల రేఖ n అనుతిర్యగ్రేఖ వలన ఏర్పడిన సంగతకోణాలు

$\therefore$ రేఖ $l \parallel$ రేఖ m . . . . సమాంతర రేఖల అంతరకోణ నియమము.

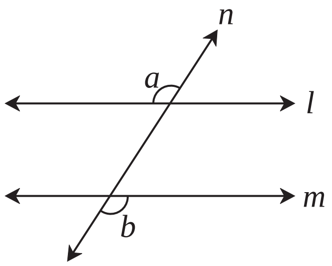
ఉపసిద్ధాంతం II ఒక వేళ రెండు రేఖలు అదే తలంలోని మరొక రేఖకు సమాంతరంగా ఉన్నట్లయితే అవి పరస్పరం సమాంతరంగా ఉంటాయని నిరూపించండి.

అభ్యాసం 2.2

1. పటం 2.18 లో $y = 108^\circ$ మరియు $x = 71^\circ$ అయిన రేఖ m మరియు రేఖ n సమాంతరం అవుతాయా? కారణం తెలపండి.



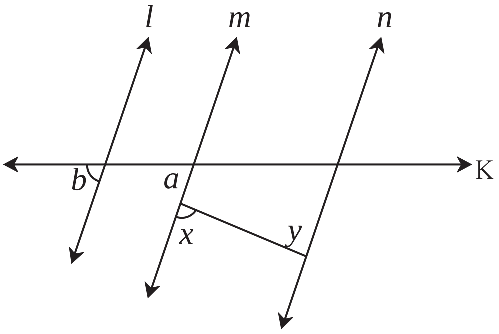
పటం 2.18



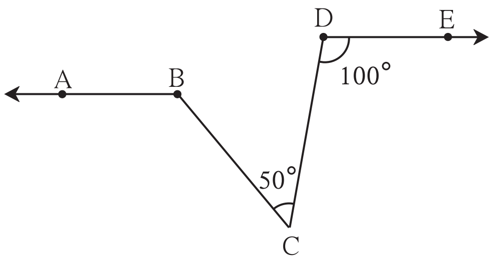
పటం 2.19

2. పటం 2.19 లో ఒక వేళ $\angle a \cong \angle b$ అయిన రేఖ $l \parallel$ రేఖ m అని నిరూపించండి.

3. పటం 2.20 లో ఒక వేళ $\angle a \cong \angle b$ మరియు $\angle x \cong \angle y$ అయిన రేఖ $l \parallel$ రేఖ n అని నిరూపించండి.



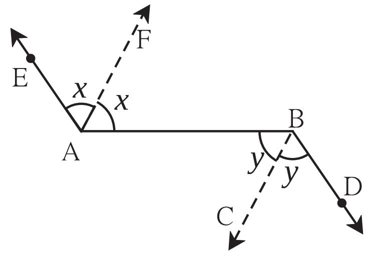
పటం 2.20



పటం 2.21

4. పటం 2.21 లో కిరణం BA $\parallel$ కిరణం DE, $\angle C = 50^\circ$ మరియు $\angle D = 100^\circ$, అయిన $\angle ABC$ యొక్క కొలతను కనుగొనండి.

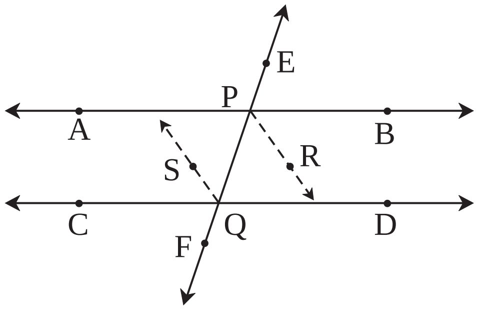
(సూచన: బిందువు C నుండి రేఖ AB నకు సమాంతర రేఖను గీయండి.)

5. 

పటం 2.22

పటం 2.22 లో కిరణం AE || కిరణం BD కిరణం AF అనేది ∠EAB యొక్క మరియు కిరణం BC అనేది ∠ABD యొక్క సమద్విఖండన రేఖ అయిన రేఖ AF || రేఖ BC అని నిరూపించండి.

6. రేఖ AB మరియు రేఖ CD లను రేఖ EF వరసగా P మరియు Q బిందువులలో ఖండించును. కిరణం PR మరియు కిరణం QS లు సమాంతర కిరణములయి వరుసగా ∠BPQ మరియు ∠PQC లను సమద్విఖండన చేసినట్లయితే రేఖ AB || రేఖ CD అని నిరూపించండి.



పటం 2.23

సంకీర్ణ ప్రశ్నసంగ్రహం 2

1. కింద ఇవ్వబడిన బహులైచ్ఛిక (బహుపర్యాయ) ప్రశ్నలలో సరియైన సమాధానాలను గుర్తించుము.

(i) రెండు సమాంతర రేఖలను ఒక తిర్యగ్రేఖ ఖండించినట్లయితే దానికి ఒకే వైపు గల అంతరకోణముల మొత్తం . . . . అవుతుంది.

(A) 0°　(B) 90°　(C) 180°　(D) 360°

(ii) రెండు రేఖలను ఒక తిర్యగ్రేఖ ఖండించినట్లయితే .... కోణములు ఏర్పడతాయి.

(A) 2　(B) 4　(C) 8　(D) 16

(iii) రెండు సమాంతర రేఖలను ఒక తిర్యగ్రేఖ ఖండించినట్లయితే ఏర్పడే కోణాలలో ఒక కోణం కొలత 40° అయిన దాని సంగత కోణం యొక్క కొంత .... అవుతుంది.

(A) 40°　(B) 140°　(C) 50°　(D) 180°

(iv) Δ ABC లో ∠A = 76°, ∠B = 48°, అయిన ∠C యొక్క కొలత . . . .

(A) 66°　(B) 56°　(C) 124°　(D) 28°

(v) రెండు సమాంతర రేఖలను ఒక తిర్యగ్రేఖ ఖండించినపుడు ఏర్పడే ఏకాంతర కోణముల జతలోని ఒక కోణం కొలత 75° అయితే రెండవ కోణం కొలత .... అవుతుంది.

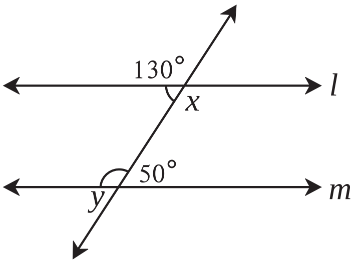
(A) 105°　(B) 15°　(C) 75°　(D) 45°

2*. కిరణం PQ మరియు కిరణం PR లు పరస్పరం లంబములు. బిందువు B, ∠QPR యొక్క అంతర్భాగంలో మరియు బిందువు A, ∠RPQ యొక్క బాహ్యభాగంలో ఉన్నాయి. కిరణం PB మరియు కిరణం PA లు పరస్పరం లంబాలు. దీనిని బట్టి పటంను గీసి కింది కోణముల జతలను రాయండి.

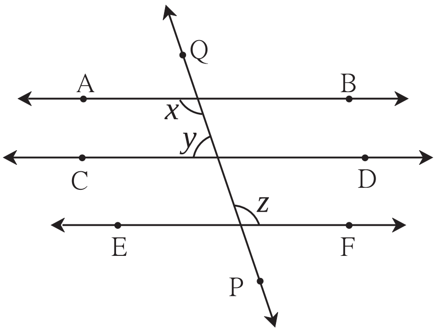
(i) లంబకోణములు　(ii) సంపూరక కోణములు　(iii) సర్వసమాన కోణములు.

3. ఏదేని ఒక రేఖ ఒక తలంలోని రెండు సమాంతర రేఖలలో ఒక రేఖకు లంబంగా ఉంటే రెండవ రేఖకు కూడ లంబంగా ఉంటుందని నిరూపించండి.

4. పటం 2.24 లో సూచించిన కోణాల కొలతలనుబట్టి $\angle x$ మరియు $\angle y$ ల కొలతలను కనుగొని రేఖ l || రేఖ m అని నిరూపించండి.



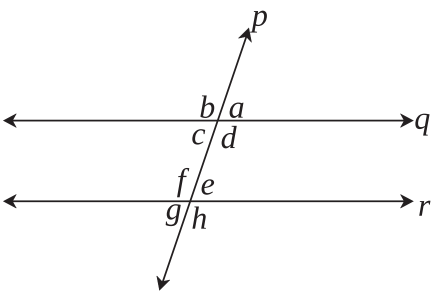
పటం 2.24



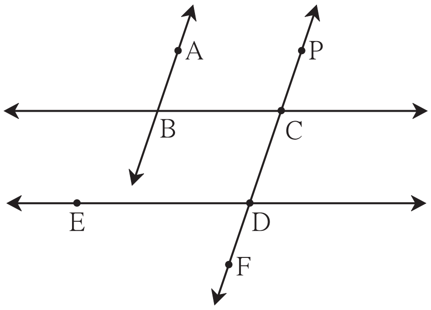
పటం 2.25

5. రేఖ AB || రేఖ CD || రేఖ EF మరియు రేఖ QP వీటి యొక్క తిర్యగ్రేఖ $y : z = 3 : 7$ అయిన x విలువను కనుకొనండి. (పటం 2.25 ను చూడండి.)

6. పటం 2.26 లో రేఖ q || రేఖ r రేఖ p వీటి యొక్క తిర్యగ్రేఖ అయిన $a = 80°$ అయిన f , g లను కనుగొనండి.



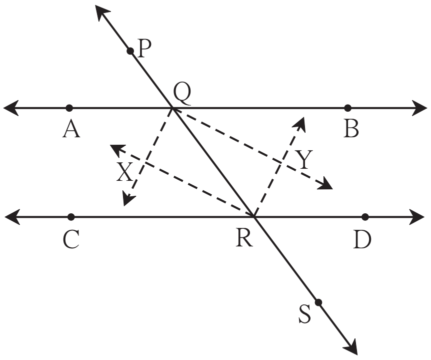
పటం 2.26



పటం 2.27

7. పటం 2.27 లో AB || CF మరియు BC || ED అయిన ∠ABC = ∠FDE అని నిరూపించండి.

8. పటం 2.28 లో రేఖ AB || రేఖ CD, రేఖ PS వాటి తిర్యగ్రేఖ. కిరణం QX, కిరణం QY, కిరణం RX, కిరణం RY లు కోణ సమద్విఖండన రేఖలైన □ QXRY దీర్ఘ చతురస్రం అని చూపండి.



పటం 2.28

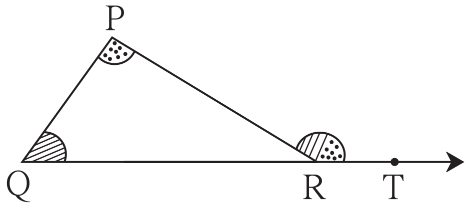
3 త్రిభుజములు

పదండి, నేర్చుకుందాం

- త్రిభుజాల యొక్క దూరాంతరకోణాల సిద్ధాంతం
- త్రిభుజముల సర్వసమానత్వం
- సమద్విబాహు త్రిభుజ సిద్ధాంతం.
- $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$ కొలతలగల త్రిభుజ ధర్మాలు
- త్రిభుజ మధ్యగత
- లంబకోణ త్రిభుజ కర్ణంపై గల మధ్యగత ధర్మము
- లంబ సమద్విఖండన రేఖల సిద్ధాంతము
- కోణసమద్విఖండన రేఖల సిద్ధాంతం.
- సమరూప త్రిభుజములు

కృత్యము

ఒక మందపు కాగితముపై ఏవేని కొలతలతో Δ PQR ను గీయండి. పటంలో చూపిన విధంగా కిరణం QR పై T అను బిందువును తీసుకోండి. మందపు రంగు కాగితంను $\angle$P మరియు $\angle$Q ల కొలతలతో కత్తిరించండి. ఆ ముక్కలను $\angle$PRT పై ఉంచిన, అవి ఈ కోణానికి సరిపోతాయని గుర్తిస్తారు.



పటం 3.1

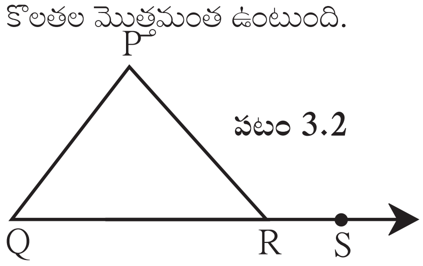
తెలుసుకొందాం.

దూరాంతర కోణాల సిద్ధాంతం (Theorem of remote interior angles of a triangle)

సిద్ధాంతము : త్రిభుజములోని బాహ్యకోణము కొలత దాని దూరాంతర కోణముల కొలతల మొత్తమంత ఉంటుంది.

దత్తాంశం : Δ PQR త్రిభుజంలో $\angle$PRS అనేది ఒక బాహ్యకోణం

సారాంశం : $\angle PRS = \angle PQR + \angle QPR$



పటం 3.2

ఉపపత్తి : త్రిభుజంలోని మూడు అంతరకోణాల మొత్తం 180° అవుతుంది.

$\therefore \angle PQR + \angle QPR + \angle PRQ = 180^\circ$---(I)

$\angle PRQ + \angle PRS = 180^\circ$---(II). . . . (రేఖీయ ద్వయ కోణములు)

$\therefore$ సమీకరణములు I మరియు II ల నుండి.

$\angle PQR + \angle QPR + \angle PRQ = \angle PRQ + \angle PRS$

$\therefore \angle PQR + \angle QPR = \angle PRS$ ---------($\angle$PRQ ను కొట్టివేయగా)

$\therefore$ త్రిభుజములోని బాహ్యకోణము కొలత దాని దూరాంతర కోణముల కొలతల మొత్తమంత ఉంటుంది.

ఆలోచించండి.

పటం 3.3 లో బిందువు R నుండి PQ కి సమాంతర రేఖను గీసి ఇదే సిద్ధాంతమును వేరొక పద్ధతిలో నిరూపించగలమా?

తెలుసుకొందాం.

త్రిభుజం యొక్క బాహ్యకోణాల సిద్ధాంతము (Property of an exterior angle of triangle)

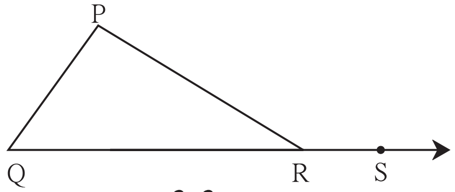
a మరియు b అనే రెండు సంఖ్యల మొత్తం $(a + b)$ అనేది a మరియు b కంటెను పెద్దది అవుతుంది.

అనగా $a + b > a, a + b > b$

దీనిని ఉపయోగించి త్రిభుజ బాహ్య కోణము యొక్క కింది ధర్మము తెలుస్తుంది.

Δ PQR లో $\angle PRS$ అనేది బాహ్యకోణం అయినట్లయితే

$\angle PRS > \angle P$, $\angle PRS > \angle Q$



పటం 3.3

$\therefore$ త్రిభుజములోని బాహ్య కోణము దాని ప్రతి దూరాంతర కోణముల కంటె పెద్దదిగా ఉంటుంది.

సాధించిన ఉదాహరణలు:

ఉదా (1) ఒక త్రిభుజంలోని కోణాల కొలతల నిష్పత్తి 5 : 6 : 7 అయిన అన్ని కోణాల కొలతలను కనుగొనండి.

సాధన : వాటి కోణాల కొలతలు $5x$, $6x$, $7x$ అనుకొందాం,

$$5x + 6x + 7x = 180^\circ$$

$$18x = 180^\circ$$

$$x = 10^\circ$$

$$5x = 5 \times 10 = 50^\circ, \quad 6x = 6 \times 10 = 60^\circ, \quad 7x = 7 \times 10 = 70^\circ$$

త్రిభుజములోని కోణముల కొలతలు వరసగా 50°, 60°, 70° అవుతాయి.

ఉదా (2) ప్రక్కనున్న పటం 3.4 ను పరిశీలించి $\angle PRS$ మరియు $\angle RTS$ ల యొక్క కొలతలను కనుగొనండి.

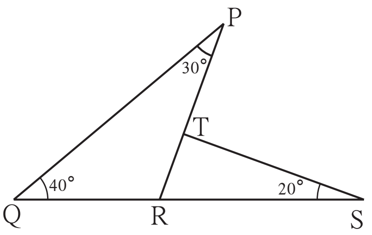
సాధన : Δ PQR, $\angle PRS$ యొక్క బాహ్యకోణం

దూరాంతర కోణముల సిద్ధాంతాన్ని బట్టి

$$\angle PRS = \angle PQR + \angle QPR$$

$$= 40^\circ + 30^\circ$$

$$\angle PRS = 70^\circ$$



పటం 3.4

Δ RTS లో

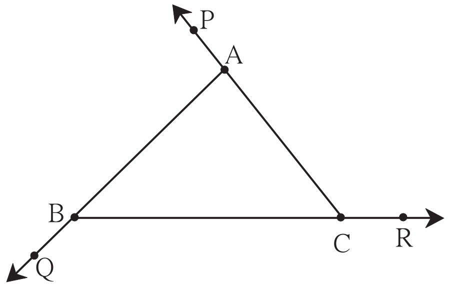
$\angle TRS + \angle RTS + \angle TSR = \square$ .... త్రిభుజం యొక్క మూడు కోణముల మొత్తం

$\therefore \square + \angle RTS + \square = 180^\circ$

$\therefore \angle RTS + 90^\circ = 180^\circ$

$\therefore \angle RTS = \square$

ఉదా (3) త్రిభుజంలోని భుజాలను ఒకే దిశలో పొడిగించిన ఏర్పడే బాహ్యకోణముల మొత్తం 360° అవుతుందని నిరూపించండి.



పటం 3.5

దత్తాంశం : $\angle PAB, \angle QBC$ మరియు $\angle ACR$ లు $\Delta\, ABC$ యొక్క బాహ్యకోణములు.

సారాంశం : $\angle PAB + \angle QBC + \angle ACR = 360^\circ$.

ఉపపత్తి : దీని నిరూపణ రెండు పద్ధతులలో చేయవచ్చు.

పద్ధతి I

$\Delta\, ABC$ లో $\angle PAB$ అనే బాహ్య కోణంను తీసుకున్నట్లయితే

$\angle ABC, \angle ACB$ దాని దూరాంతర కోణాలు అవుతాయి, కావున

$\angle BAP = \angle ABC + \angle ACB$ ---- (I)

అలాగే $\angle ACR = \angle ABC + \angle BAC$ ---- (II) . . . దూరాంతర కోణాల సిద్ధాంతం ప్రకారం

మరియు $\angle CBQ = \angle BAC + \angle ACB$ ---- (III)

సమీకరణముల (I), (II), (III) లయొక్క రెండు వైపులను కూడగా

$\angle BAP + \angle ACR + \angle CBQ$

$= \angle ABC + \angle ACB + \angle ABC + \angle BAC + \angle BAC + \angle ACB$

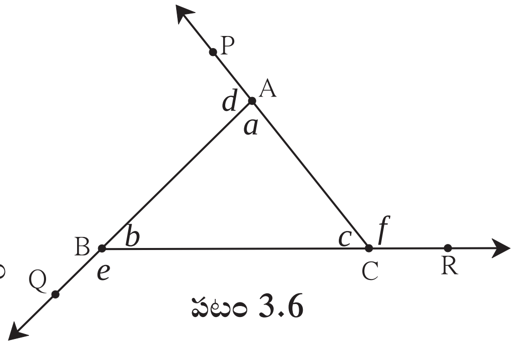
$= 2\angle ABC + 2\angle ACB + 2\angle BAC$

$= 2(\angle ABC + \angle ACB + \angle BAC)$

$= 2 \times 180^\circ$ . . . . . (త్రిభుజముల అంతరకోణాల మొత్తం)

$= 360^\circ$.

పద్ధతి II



పటం 3.6

$\angle c + \angle f = 180^\circ$ . . . . రేఖీయ ద్వయకోణములు

అదేవిధంగా $\angle a + \angle d = 180^\circ$

మరియు $\angle b + \angle e = 180^\circ$

$\therefore\ \angle c + \angle f + \angle a + \angle d + \angle b + \angle e = 180^\circ \times 3 = 540^\circ$

$\angle f + \angle d + \angle e + (\angle a + \angle b + \angle c) = 540^\circ$

$\therefore\ \angle f + \angle d + \angle e + 180^\circ = 540^\circ$

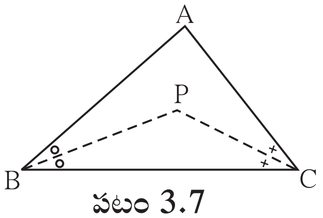
$\therefore\ f + d + e = 540^\circ - 180^\circ$

$= 360^\circ$

ఉదా (4) పక్క పటం 3.7 లో Δ ABC యొక్క $\angle B$, $\angle C$ ల సమద్విఖండనరేఖలు P బిందువు వద్ద ఖండించుకొనిన

$\angle BPC = 90 + \frac{1}{2}\angle BAC$ అని నిరూపించండి.

ఖాళీ స్థానాలను పూరించి ఉపపత్తిని పూర్తిచేయండి.



పటం 3.7

ఉపపత్తి : Δ ABC లో

$\angle BAC + \angle ABC + \angle ACB = \square$ ...... (త్రిభుజ కోణముల కొలతల మొత్తం)

$\therefore \frac{1}{2}\angle BAC + \frac{1}{2}\angle ABC + \frac{1}{2}\angle ACB = \frac{1}{2} \times \square$ ..... (ప్రతిపదాన్ని $\frac{1}{2}$ చే గుణించగా)

$\therefore \frac{1}{2}\angle BAC + \angle PBC + \angle PCB = 90^\circ$

$\therefore \angle PBC + \angle PCB = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle BAC$ ......(I)

Δ BPC లో

$\angle BPC + \angle PBC + \angle PCB = 180^\circ$ ...... (త్రిభుజ అంతర కోణముల కొలతల మొత్తం)

$\therefore \angle BPC + \square = 180^\circ$ ...... (సమీకరణం I నుండి)

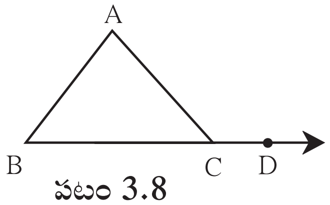
$\therefore \quad \angle BPC = 180^\circ - (90^\circ - \frac{1}{2}\angle BAC)$

$\therefore \quad = 180^\circ - 90^\circ + \frac{1}{2}\angle BAC$

$= 90^\circ + \frac{1}{2}\angle BAC$

అభ్యాసం 3.1

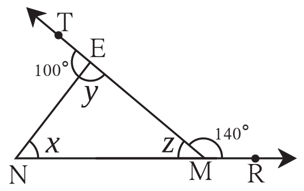
1. పటం 3.8 లో Δ ABC యొక్క బాహ్యకోణం $\angle ACD$.
   $\angle B = 40^\circ$, $\angle A = 70^\circ$
   అయిన m $\angle ACD$ ని కనుగొనండి.



పటం 3.8

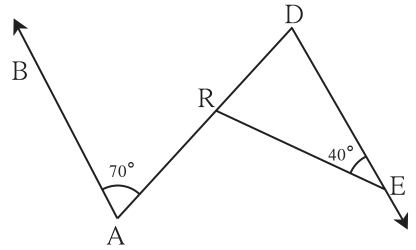
2. Δ PQR లో $\angle P = 70^\circ$, $\angle Q = 65^\circ$ అయిన $\angle R$ యొక్క కొలతను కనుగొనండి.
3. త్రిభుజములోని కోణాల కొలతలు x°, $(x-20)^\circ$, $(x-40)^\circ$ అయిన ప్రతి కోణం కొలత ఎంత?
4. త్రిభుజ మూడు కోణాలలో ఒక కోణం మిక్కిలి చిన్న కోణానికు రెట్టింపు, రెండవ కోణం మిక్కిలి చిన్న కోణానికి మూడు రెట్లు అయిన ఆ మూడు కోణాల కొలతలు కనుగొనండి.

5. పక్కనున్న పటం 3.9 లో ఇచ్చిన కోణాల కొలతలనుబట్టి x, y, z ల కొలతలను కనుగొనండి.



పటం 3.9

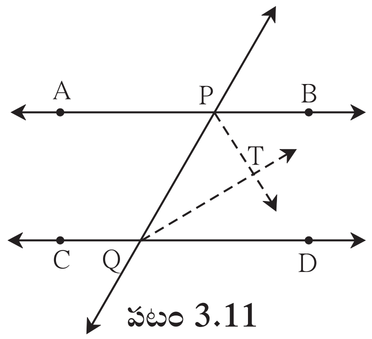
6. పక్క పటం 3.10 లో రేఖ AB || రేఖ DE. ఇచ్చిన కొలతలనుబట్టి $\angle DRE$, $\angle ARE$ ల కొలతలను కనుగొనండి.



పటం 3.10

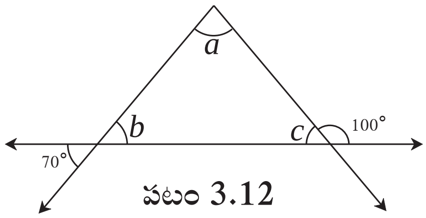
7. Δ ABC లో $\angle A$, $\angle B$ ల కోణ సమద్విఖండన రేఖలు O బిందువు వద్ద ఖండించు కొంటాయి. ఒక వేళ $\angle C = 70°$ అయిన $\angle AOB$ యొక్క కొలతను కనుగొనండి.

8. పటం 3.11 లో రేఖ AB || రేఖ CD మరియు రేఖ PQ వాటి యొక్క తిర్యగ్రేఖ. కిరణం PT, కిరణం QT లు వరసగా $\angle BPQ$, $\angle PQD$ ల కోణ సమద్విఖండన రేఖలు ఐన, $\angle PTQ = 90°$ అని నిరూపించండి.



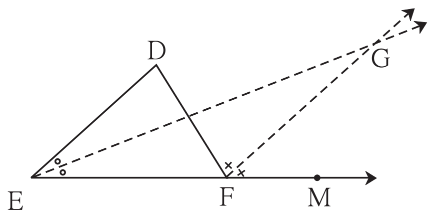
పటం 3.11

9. పటం 3.12 లో ఇచ్చిన సమాచారము ఆధారంగా $\angle a, \angle b, \angle c$ ల యొక్క కొలతలను కనుగొనండి.



పటం 3.12

10*. పటం 3.13 లో రే.ఖం. DE || రే.ఖం. GF. కిరణం EG, కిరణం FG లు క్రమంగా $\angle DEF$, $\angle DFM$ ల కోణసమద్విఖండన రేఖలు. అయితే (i) $\angle DEF = \angle EDF$ (ii) EF = FG అని నిరూపించండి.

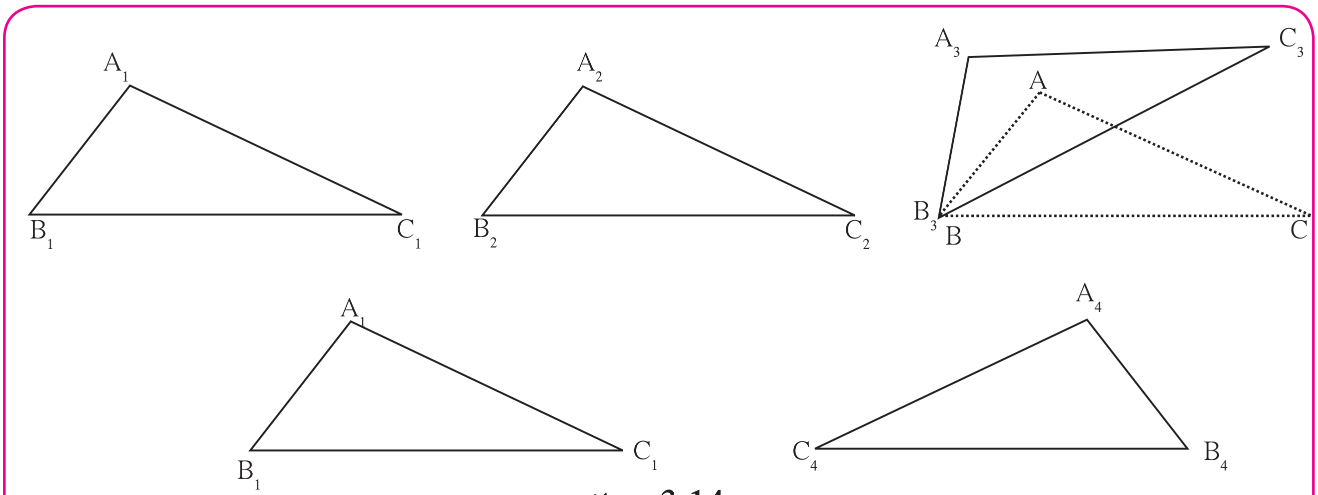


పటం 3.13

తెలుసుకొందాం.

త్రిభుజముల సర్వసమానత్వం (Congruence of triangles)

ఒక రేఖాఖండాన్ని, మరొక దానిపై ఉంచినపుడు పూర్తిగా ఏకీభవించిన, ఆ రెండు రేఖాఖండములు సర్వసమానం అవుతాయి. అదే విధంగా ఒక కోణాన్ని తీసుకొని రెండవ కోణంపై ఉంచినపుడు అవి పూర్తిగా ఏకీభవించిన ఆ రెండు కోణాలు సర్వసమానమని మనకు తెలుస్తుంది. అదే రకంగా ఒక త్రిభుజాన్ని తీసి రెండవ త్రిభుజంపై ఉంచినపుడు ఆ రెండు పూర్తిగా ఏకీభవించిన ఆ రెండు త్రిభుజాలు సర్వసమానమని అంటారు. ఒక వేళ Δ ABC మరియు Δ PQR లు సర్వసమానమైనచో $\Delta ABC \cong \Delta PQR$ అని చూపుతారు.



పటం 3.14

కృత్యము : ఏదేని కొలతగల ఒక త్రిభుజం ΔABC ని అట్టపై కత్తిరించండి. దానిని మందపు కాగితంపై ఒకచోట ఉంచి పెన్సిల్‌తో దాని చుట్టు గీతగీసి దాని ప్రతిని గీయండి. ఆ త్రిభుజానికి

$\Delta A_1B_1C_1$ అని పేరుపెట్టండి. ఇప్పుడు ఆ అట్టముక్కను పక్కకు జరిపి మరియొక ప్రతిని గీసి దానికి

$\Delta A_2B_2C_2$ అని పేరు పెట్టండి. పటంలో చూపిన విధంగా త్రిభుజమును కొంచెం తిప్పి ఇంకొక ప్రతిని గీసి దానికి $\Delta A_3B_3C_3$ గా పేరు పెట్టండి. తర్వాతా అట్ట త్రిభుజము ఇంకొకవైపుకి వేరొక చోట పెట్టి మరొక ప్రతిని తయారు చేయండి. కొత్త త్రిభుజానికి $\Delta A_4B_4C_4$ గా పేరు పెట్టండి.

ఇప్పుడు $\Delta A_1B_1C_1$, $\Delta A_2B_2C_2$, $\Delta A_3B_3C_3$ మరియు $\Delta A_4B_4C_4$ లు అన్ని ΔABC కి సర్వసమానం అని గుర్తించారా? కారణం ΔABC పై అన్ని త్రిభుజముతో పూర్తిగా ఏకీభవిస్తుంది, $\Delta A_3B_3C_3$ ని సరిచూద్దాం.

ఈ త్రిభుజం ఏకీభవిస్తున్నపుడు $\angle A$ ను $\angle A_3$ పై, $\angle B$ ను $\angle B_3$ పై, $\angle C$ ను $\angle C_3$ లపై ఉంచినపుడు మాత్రమే $\Delta ABC \cong \Delta A_3B_3C_3$ అని అంటాము.

అంతేగాక $AB = A_3B_3$, $BC = B_3C_3$, $CA = C_3A_3$ లుకూడా లభిస్తాయి.

దీనిని బట్టి రెండు త్రిభుజాల సర్వసమానత్వంమ పరిక్షీస్తున్నపుడు వాటి యొక్క కోణములను, భుజములను ప్రత్యేక క్రమంలో ఒక దానికొకటి సదృశంగా (సంగత) రాయవలసి వస్తుందని, గుర్తుంచుకోండి.

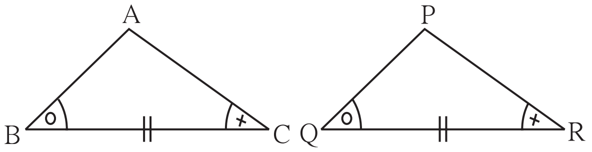
ఒకవేళ $\Delta ABC \cong \Delta PQR$, అయిన $\angle A = \angle P$, $\angle B = \angle Q$, $\angle C = \angle R$ . . . . (I)

మరియు $AB = PQ$, $BC = QR$, $CA = RP$ . . . . . . (II) ఈ విధంగా ఆరు సమీకరణములు లభిస్తాయి.

అనగా ఈ రెండు త్రిభుజములలోని కోణములు మరియు భుజములు ఒకదానికొకటి సదృశం మూడు కోణములు. మూడు భుజములు సమానంగా ఉంటాయని అర్థం.

పైన పేర్కొన్న ఆరు సమీకరణములు సర్వసమాన త్రిభుజాలకై సత్యము. దీని కొరకు ప్రత్యేకమైన మూడు సమీకరణములు సమానం అని అనుకొన్నచో ఆరు సమీకరణములు సత్యములయి ఆ రెండు త్రిభుజములు సర్వసమానం అవుతాయి. అది ఎలాగో చూద్దాం.

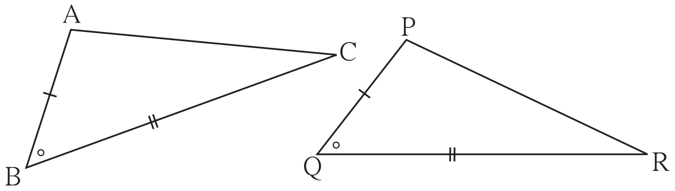
(1) ΔABC యొక్క రెండు కోణములు ΔPQR యొక్క రెండుకోణాలకు సదృశంగా ఉండి ఆ కోణాలు వాటి మధ్య భుజము సమానం అయినచో ఆ రెండు త్రిభుజాల సర్వసమానవుతాయి.



ఈ ధర్మమును కోణం-భుజం-కోణం నియమమని అంటారు. సంక్షిప్తంగా కో.భు.కో. నియమమని రాస్తారు.

పటం 3.15

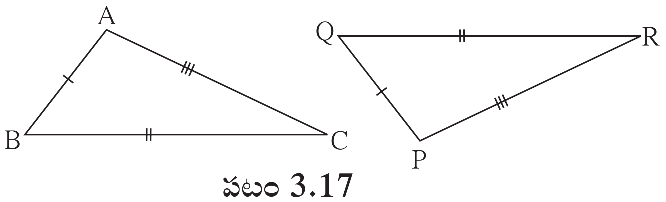
(2) రెండు త్రిభుజముల అనురూపతను బట్టి Δ ABC లోని రెండు భుజములు Δ PQR యొక్క సంగత భుజములు మరియు వాటి మధ్య కోణమునకు సమానం అయినట్లయితే ఆ రెండు త్రిభుజములు సర్వసమాన త్రిభుజములు అవుతాయి.



ఈ ధర్మమును భుజం-కోణం-భుజం నియమము అంటారు. సంక్షిప్తంగా భు.కో.భు. నియమమని రాస్తారు.

పటం 3.16

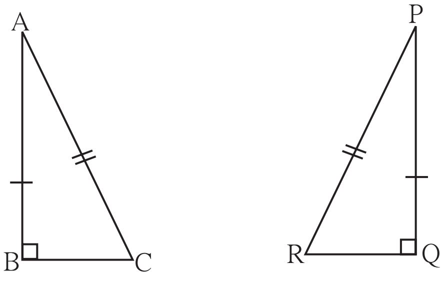
(3) Δ ABC లోని మూడు భుజాలు Δ PQR యొక్క అనురూప భుజాలకు సమానం అయినట్లయితే ఆ రెండు త్రిభుజాలు సర్వసమానాలు అవుతాయి.



ఈ ధర్మమును భుజం-భుజం-భుజం నియమము అంటారు, దీనిని సంక్షిప్తంగా భు.భు.భు. నియమమని రాస్తారు.

పటం 3.17

(4) Δ ABC, Δ PQR ఈ రెండు లంబకోణ త్రిభుజాలలో $\angle B$, $\angle Q$ లు లంబకోణములు అయి రెండు త్రిభుజముల కర్ణములు సమానం అయి, మరియు AB = PQ అయినట్లయితే ఆ రెండు త్రిభుజాలు సర్వసమానం అవుతాయి.



ఈ ధర్మంను కర్ణము భుజము నియమము అంటారు.

పటం 3.18

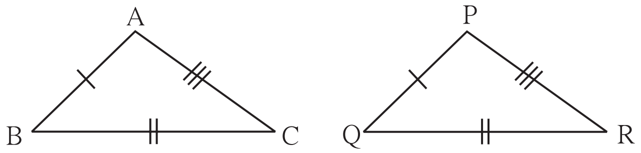
ఇది గుర్తుంచుకొందాం.

మీకు కొన్ని అంశాలు ఇచ్చినప్పుడు త్రిభుజ నిర్మాణం చేశారు. (ఉదా. రెండు కోణములు, వాటి మధ్య భుజం, మూడు భుజాలు, రెండు భుజాలు వాటి మధ్య కోణం). వాటిలో ఏదేని సమాచారం ఇచ్చినపుడు ఒకేఒక త్రిభుజమును గీయవచ్చునని మనకు తెలుసు. కావున రెండు త్రిభుజములలో అనురూపతను బట్టి ఈ మూడు అంశాలు సమానం అయిన ఆ రెండు త్రిభుజములు సర్వసమానం అవుతాయి. తర్వాత వీటి మూడు అనురూప కోణములు, మూడు భుజములు సమానం అని అర్థమవుతుంది. రెండు త్రిభుజములు సర్వసమానమయిన వాటి అనురూప కోణములు, మూడు భుజములు సమానంగా ఉంటాయి. వీటి ఉపయోగం రేఖాగణితంలో చాలా ఉదాహరణాలలో కలుగుతుంది.

అభ్యాసం 3.2

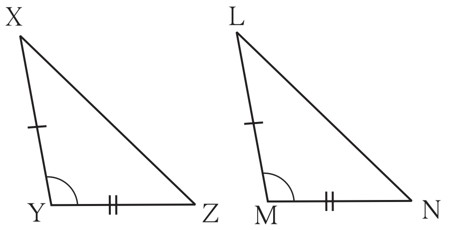
1. కింది వాటిలో ప్రతి ఉదాహరణలలోని త్రిభుజాల జతలలో ఒకే రకమైన గుర్తులతో చూపబడిని భాగాలు సర్వసమానం. దానిని బట్టి ప్రతి జతలోని త్రిభుజం ఏ నియమంచే సర్వసమానమవుతాయో, ఆ నియమాన్ని పటం కింది ఖాళీస్థలంలో రాయండి.

(i)



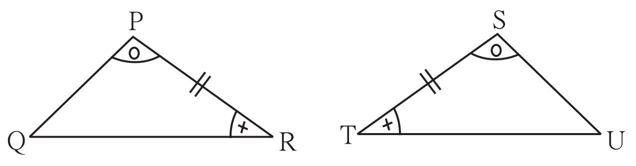
. . . . నియమముచే
Δ ABC $\cong$ Δ PQR అవుతుంది.

(ii)



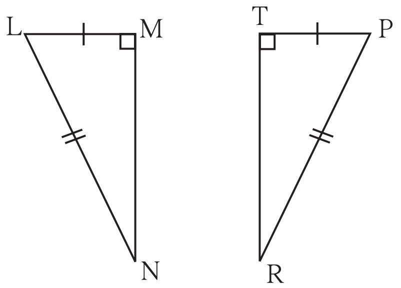
. . . . నియమముచే
Δ XYZ $\cong$ Δ LMN అవుతుంది.

(iii)



. . . . నియమముచే
Δ PRQ $\cong$ Δ STU అవుతుంది.

(iv)

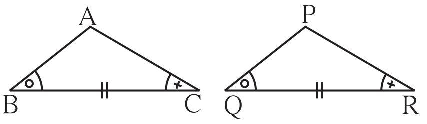


. . . . నియమముచే
Δ LMN $\cong$ Δ PTR అవుతుంది.

పటం 3.19

2. కింది త్రిభుజాల జతలలో ఇవ్వబడిన సమాచారాన్ని పరిశీలించండి. ఆ త్రిభుజాలు ఏ నియమానుసారం సర్వసమానం అవుతాయో రాసి, వాటి మిగిలిన సదృశ భాగాలను రాయండి.

(i)



పటం 3.20

పటంలో ఇచ్చిన గుర్తులనుబట్టి

Δ ABC మరియు Δ PQR లలో

$\angle ABC \cong \angle PQR$

రే.ఖం. BC $\cong$ రే.ఖం. QR

$\angle ACB \cong \angle PRQ$

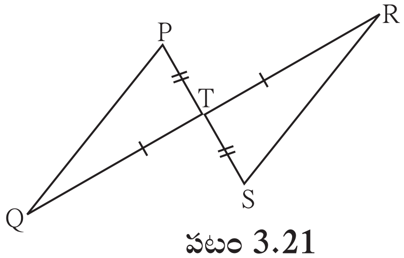
$\therefore \Delta ABC \cong \Delta PQR$ ...... ________ నియమము

$\therefore \angle BAC \cong$ ________ .... సర్వసమాన త్రిభుజాల అనురూప కోణము.

రే.ఖం.AB $\cong$ ________ మరియు ________ $\cong$ రే.ఖం. PR

.....సర్వసమాన త్రిభుజాల అనురూప భుజములు

(ii)



పటం 3.21

పటంలో ఇచ్చిన గుర్తులనుబట్టి

Δ PTQ మరియు Δ STR లలో

రే.ఖం. PT $\cong$ రే.ఖం. ST

$\angle PTQ \cong \angle STR$ .... శీర్షాభిముఖ కోణములు

రే.ఖం. TQ $\cong$ రే.ఖం. TR

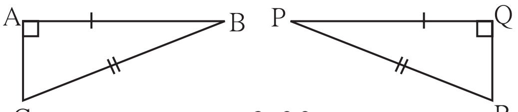
$\therefore \Delta PTQ \cong \Delta STR$ ...... ________ నియమము

$\therefore \angle TPQ \cong$ ________ } ..... సర్వసమాన త్రిభుజముల అనురూపకోణము

మరియు ________ $\cong \angle TRS$

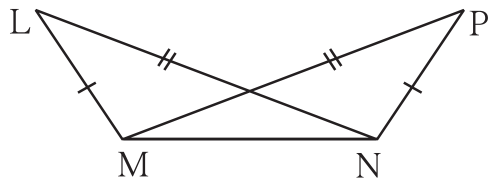
రే.ఖం. PQ $\cong$ ________ సర్వసమాన త్రిభుజముల అనురూప భుజాలు

3. కింది పటంలోని సమాచారం బట్టి Δ ABC మరియు Δ PQR ల సర్వసమానత్వ నియమమును రాసి మిగిలిన సదృశ భాగాలను రాయండి.



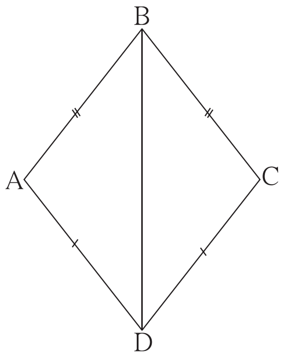
పటం 3.22

4. కింది పటంలో చూపిన విధంగా Δ LMN మరియు ΔPNM ఈ త్రిభుజాలలో LM=PN, LN=PM అయిన ఈ త్రిభుజముల సర్వసమానత్వ నియమము రాసి, మిగిలిన సదృశ భాగాలను రాయండి.



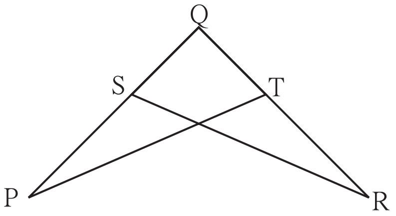
పటం 3.23

5. పటం 3.24 లో రేఖ AB $\cong$ రేఖ BC మరియు రే.ఖం. AD $\cong$ రే.ఖం. CD. అయిన $\Delta ABD \cong \Delta CBD$ అని నిరూపించండి.



పటం 3.24

6. పటం 3.25 లో $\angle P \cong \angle R$
రే.ఖం. $PQ \cong$ రే.ఖం. QR
అయిన $\Delta PQT \cong \Delta RQS$ అని నిరూపించండి.



పటం 3.25

తెలుసుకొందాం.

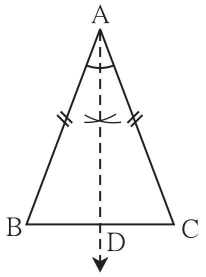
సమద్విబాహు త్రిభుజ సిద్ధాంతం (Isosceles triangle theorem)

సిద్ధాంతము : త్రిభుజంలోని రెండు భుజముల సర్వసమానం అయిన ఆ భుజాల అభిముఖ కోణములు సర్వసమానం అవుతాయి.

దత్తాంశం : ΔABC లో భుజము $AB \cong$ భుజము AC

సారాంశం : $\angle ABC \cong \angle ACB$

నిర్మాణం : ΔABC లోని $\angle BAC$ నకు కోణ సమద్విఖండన రేఖను గీయండి,
అది భుజం BC ని ఖండించిన చోట ఆ బిందువుకు D అని పేరు పెట్టండి.



పటం 3.26

ఉపపత్తి : ΔABD మరియు ΔACD లలో

రే.ఖం. $AB \cong$ రే.ఖం. AC .... దత్తాంశం

$\angle BAD \cong \angle CAD$........నిర్మాణం

రే.ఖం. $AD \cong$ రే.ఖం. AD .... ఉమ్మడి భుజం

$\therefore \Delta ABD \cong \Delta ACD$ ...... ☐

$\therefore \angle ABD \cong$ ☐ ....సర్వసమాన త్రిభుజ సదృశ కోణాలు

$\therefore \angle ABC \cong \angle ACB$ $\because$ B – D – C

ఉపసిద్ధాంతం : త్రిభుజంలోని మూడు భుజాలు సర్వసమానమైన, దానియొక్క మూడు కోణములు సర్వసమానం మరియు ప్రతి కోణము కొలత 60° అవుతుంది.(ఈ ఉపసిద్ధాంతము యొక్క ఉపపత్తిని మీరు రాయండి).

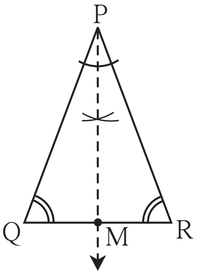
సమద్విబాహు త్రిభుజ సిద్ధాంత విపర్యయము (Converse of an isosceles triangle theorem)

సిద్ధాంతము : త్రిభుజంలోని రెండు కోణములు సర్వ సమానం అయిన ఆ కోణముల అభిముఖ భుజములు సర్వసమానం అవుతాయి.

దత్తాంశం : ΔPQR లో $\angle PQR \cong \angle PRQ$

సారాంశం : భుజము $PQ \cong$ భుజము PR

నిర్మాణము : $\angle P$ యొక్క కోణం సమద్విఖండన రేఖను గీయండి. అది
భుజము QR ను ఖండించిన చోట ఆ బిందువుకు M అని పేరు పెట్టండి.



పటం 3.27

ఉపపత్తి : ΔPQM మరియు ΔPRM లలో

$\angle PQM \cong$ ☐........ దత్తాంశం

$\angle QPM \cong \angle RPM$........☐

రే.ఖం. $PM \cong$ ☐ .... ఉమ్మడి భుజము

$\therefore \Delta PQM \cong \Delta PRM$ ...... ☐ నియమము

$\therefore$ రే.ఖం. $PQ \cong$ రే.ఖం. PR.......సర్వసమాన త్రిభుజ సదృశ భుజాలు

ఉపసిద్ధాంతం : త్రిభుజములోని మూడు కోణములు సర్వసమానం అయినట్లయితే దాని మూడు భుజములు సర్వసమానం అవుతాయి. (ఈ ఉపసిద్ధాంతం యొక్క ఉపపత్తిని మీరు రాయండి.)

పై రెండు సిద్ధాంతాల వాక్యాలు పరస్పరం విపర్యయంగా ఉన్నాయి.

పై రెండు ఉపసిద్ధాంతాల వాక్యాలు పరస్పరం విపర్యంగా ఉన్నాయి.

ఆలోచించుదాం

(1) సమద్విబాహు త్రిభుజ సిద్ధాంతం యొక్క నిరూపణ వేరొక విధంగా నిర్మించి చేయవచ్చునా?

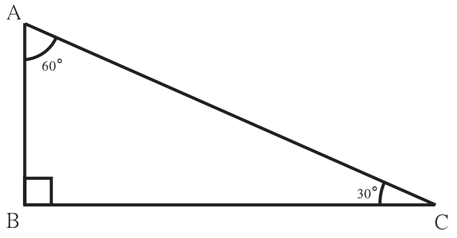
(2) సమద్విబాహు త్రిభుజ సిద్ధాంతం యొక్క నిరూపణ ఎటువంటి నిర్మాణం చేయ కుండా నిరూపించవచ్చునా?

తెలుసుకొందాం.

$30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$ కొలతగల త్రిభుజ ధర్మము (Property of $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$ triangle)

కృత్యము I

జట్టులోని ప్రతి ఒక్కరు ఒక కోణం కొలత 30° ఉండునట్లు ఒక లంబకోణ త్రిభుజంను గీయండి. ప్రతి ఒక్కరు 30° కోణానికి ఎదురుగానున్న భుజం మరియు కర్ణాల పొడవును కొలవండి. జట్టులోని ఒక విద్యార్థి అందరు గీసిన త్రిభుజముల కొలతలను కింది పట్టికలో నింపాలి.



పటం 3.28

త్రిభుజం నం.	1	2	3	4
30° ల కోణం యొక్క అభిముఖ భుజం పొడవు.				
కర్ణం యొక్క పొడవు				

ఈ పట్టికను బట్టి కోణాల కొలతలు 30°, 60°, 90° లు ఉండే త్రిభుజము యొక్క ఏవైనా ధర్మములు లభిస్తాయా?

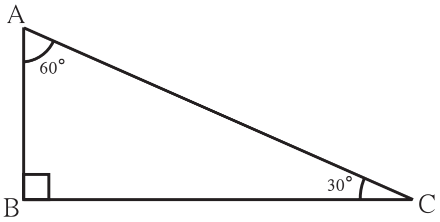
కృత్యము II

కంపాస్ పెట్టెలోని ఒక మూల మట్టం 30°,60°, 90° లు ఉంటుంది. దాని భుజాలకు సంబంధించి ఈ ధర్మములు సరిపోతాయా సరిచూడండి.

ఈ కృత్యముద్వారా మనకు లభించిన ఒక ముఖ్యమైన ధర్మమును నిరూపిద్దాం.

సిద్ధాంతము : ఒక లంబకోణ త్రిభుజంలో 30°, 60° అల్ప కోణములు అయిన 30° ల కోణము యొక్క ఎదుటి భుజం కర్ణంలో సగం ఉంటుంది.

(కిందనిచ్చిన ఉపపత్తిలోని ఖాళీలను పూరించండి.)



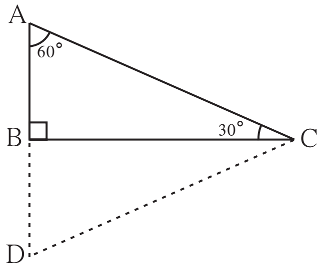
పటం 3.29

దత్తాంశం : Δ ABC లంబకోణ త్రిభుజంలో

$\angle B = 90^\circ, \angle C = 30^\circ, \angle A = 60^\circ$

సారాంశం : $AB = \frac{1}{2} AC$

నిర్మాణం : AB రేఖాఖండం పొడిగించి దానిపై D బిందువును గుర్తించి తర్వాత AB = BD, అయ్యేట్లు DC ని కలపండి.



పటం 3.30

ఉపపత్తి : Δ ABC, Δ DBC లలో

రే.ఖం. AB $\cong$ రే.ఖం. DB .... [ ]

$\angle ABC \cong \angle DBC$ .... [ ]

రే.ఖం. BC $\cong$ రే.ఖం. BC .... [ ]

$\therefore \Delta ABC \cong \Delta DBC$ ..... [ ]

$\therefore \angle BAC \cong \angle BDC$ .... సర్వసమాన త్రిభుజ సదృశ కోణములు

Δ ABC లో $\angle BAC = 60^\circ \therefore \angle BDC = 60^\circ$

ఇప్పుడు Δ ADC లో,

$\angle DAC = \angle ADC = \angle ACD = 60^\circ$ ... ($\because$ త్రిభుజ కోణముల మొత్తం 180°)

$\therefore \Delta$ ADC సమబాహు త్రిభుజం అవుతుంది.

$\therefore$ AC = AD = DC .... సమద్విబాహుత్రిభుజం యొక్క విపర్యయం యొక్క ఉపసిద్ధాంతం.

కాని $AB = \frac{1}{2} AD$........ నిర్మాణం $\therefore AB = \frac{1}{2} AC$ .... ($\because$ AD = AC)

కృత్యము :

పై పటం 3.29 ఆధారంగా ఖాళీ గడులను పూరించి కింది సిద్ధాంతం ఉపపత్తిని పూర్తిచేయండి.

లంబకోణం త్రిభుజంలో ఇతర కోణాలు 30°, 60° ఉన్నచో 60° కోణానికి ఎదురుగానున్న భుజం $\frac{\sqrt{3}}{2} \times$ కర్ణము అవుతుంది.

పై సిద్ధాంతంలో $AB = \frac{1}{2} AC$ ని మనం రాసాం.

$AB^2 + BC^2 =$ [ ] . . . . . పైథాగోరస్ సిద్ధాంతమునుపయోగించి.

$\frac{1}{4} AC^2 + BC^2 =$ [ ]

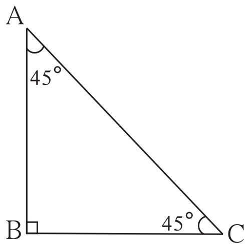
$\therefore BC^2 = AC^2 - \frac{1}{4} AC^2$

$\therefore BC^2 =$ [ ]

$\therefore BC = \frac{\sqrt{3}}{2} AC$

కృత్యము

లంబకోణం త్రిభుజంలో కోణాలు గనుక 45°, 45°, 90° ఉన్నచో లంబకోణాన్ని ఏర్పరుచు ప్రతిభుజం $\frac{1}{\sqrt{2}} \times$ కర్ణము అవుతుంది.



పటం 3.31

Δ ABC లో $\angle B = 90°$ మరియు $\angle A = \angle C = 45°$

$\therefore BC = AB$

పైథాగోరస్ సిద్ధాంతం ప్రకారం

$AB^2 + BC^2 = \square$

$AB^2 + \square = AC^2 \ldots (\because BC = AB)$

$\therefore 2AB^2 = \square$

$\therefore AB^2 = \square$

$\therefore AB = \frac{1}{\sqrt{2}} AC$

ఈ ధర్మంను 45° – 45° – 90° ల త్రిభుజం సిద్ధాంతమని అంటారు.

ఇది గుర్తుంచుకొందాం.

(1) లంబకోణ త్రిభుజ కోణాలు 30°, 60°, 90° లు అయినట్లయితే 30° ల కోణము యొక్క ఎదుటి భుజం $\frac{\text{కర్ణం}}{2}$ అవుతుంది. మరియు 60° కోణము యొక్క ఎదుటి భుజం $\frac{\sqrt{3}}{2}$ కర్ణం అవుతుంది. ఈ సిద్ధాంతమును 30°–60°–90° ల సిద్ధాంతమంటారు.

(2) లంబకోణ త్రిభుజ కోణములు 45°, 45°, 90° అయినట్లయితే లంబకోణంను ఏర్పరిచే ప్రతి భుజం $\frac{\text{కర్ణం}}{\sqrt{2}}$ అవుతుంది. ఈ సిద్ధాంతమును 45°–45°–90° సిద్ధాంతమంటారు.

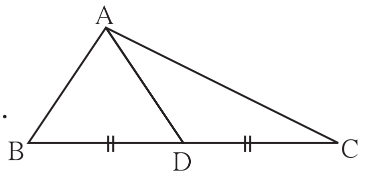
కొంచెం గుర్తుతెచ్చుకుందాం.

త్రిభుజ మధ్యగత రేఖ

త్రిభుజము యొక్క శీర్ష బిందువును, దానికి ఎదుటి భుజం యొక్క మధ్య బిందువుతో కలిపే రేఖాఖండము ఆ త్రిభుజం యొక్క మధ్యగత రేఖ అవుతుంది.

పటంలో BC భుజము యొక్క మధ్య బిందువు 'D'

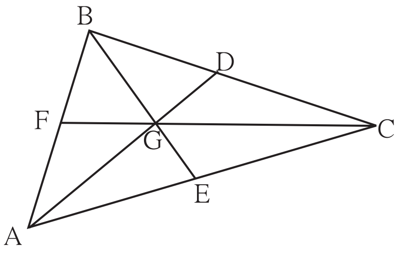
$\therefore$ రే.ఖం. AD, Δ ABC యొక్క ఒక మధ్యగత రేఖ అవుతుంది.



పటం 3.32

కృత్యము I: ఏదేని ఒక త్రిభుజం ABC ని గీయండి. ఈ త్రిభుజం యొక్క మధ్యగత రేఖలు AD, BE, CF లను గీయండి. వాటి మిళిత బిందువునకు G అని పేరు పెట్టండి.

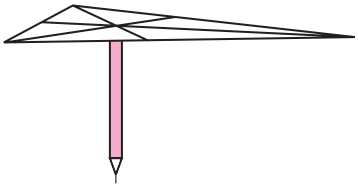
AG మరియు GD ల పొడవులను విభాగిని సహాయంతో పోల్చండి. AG యొక్క పొడవు GD కి రెట్టింపు ఉంటుంది. దీనిని సరిచూడండి. అదేవిధంగా BG యొక్క పొడవు GE కి రెట్టింపు మరియు CG యొక్క పొడవు GF కు రెట్టింపు అవుతుందా? దీనిని సరిచూడండి.



పటం 3.33

దీనిని బట్టి మధ్యగత రేఖల మిళిత బిందువు ప్రతి మధ్యగత రేఖను 2:1 నిష్పత్తిలో విభజిస్తుందనే ధర్మమును గుర్తుంచుకోండి.

కృత్యము II : Δ ABC త్రిభుజంను ఒక అట్టముక్కపై గీసి కత్తిరించుము. దానియొక్క మూడు మధ్యగత రేఖలను గీయండి. వాటి మిళిత బిందువుకు G అని పేరుపెట్టండి. తలంపైభాగం సమతలంగా గల పెన్సిల్ తీసుకొని సమతలంగానున్న భాగంను పైకెత్తండి. పెన్సిల్‌పై బిందువు G ని ఉంచి త్రిభుజాన్ని సమతలంగా పట్టుకొనవచ్చునని పరిక్షించండి. దీనిని బట్టి **G** బిందువు అనగా మధ్యగత రేఖల మిళిత బిందువుల యొక్క ఒక ముఖ్యమైన ధర్మం గుర్తుకువస్తుంది.


పటం 3.34

తెలుసుకొందాం.

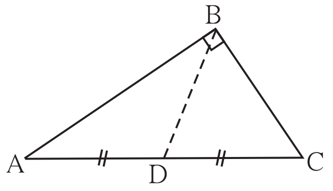
లంబకోణ త్రిభుజంలోని కర్ణంపై గల మధ్యగత రేఖ ధర్మము.

కృత్యము : పటం 3.35 లోని Δ ABC ఒక లంబకోణ త్రిభుజం అనుకోండి. రేఖ BD అనేది ఒక మధ్యగత రేఖ. కింది రేఖాఖండముల పొడవును కొలవండి.

l(AD) =......... l(DC) =............ l(BD) = ...

దీనిబట్టి (BD) = $\frac{1}{2}$ (AC) అనే ధర్మం లభిస్తుంది. దీనిని సరిచూడండి.

ఈ ధర్మమును నిరూపించుదాం.



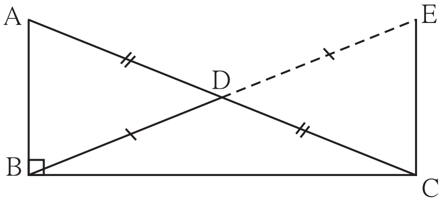
పటం 3.35

సిద్ధాంతము : లంబకోణ త్రిభుజములో కర్ణంపై గీసిన మధ్యగతరేఖ పొడవు కర్ణంలో సగం ఉంటుంది.

దత్తాంశం : లంబకోణ త్రిభుజం Δ ABC లో రే.ఖం. BD మధ్యగత రేఖ.

సారాంశం: $BD = \frac{1}{2} AC$

నిర్మాణం : కిరణం BD పై E బిందువును B - D - E అయ్యేట్లు మరియు $l(BD) = l(DE)$ గా రేఖ EC ని గీయుము.



పటం 3.36

ఉపపత్తి : (ఈ ఉపపత్తిలో ముఖ్యమైన సోపానాలు చూపడం జరిగింది. మధ్యలోని సోపానాలు, వాక్యాలు మరియు కారణాల రూపంలో రాసి ఉపపత్తిని పూర్తి చేయండి.)

Δ ADB $\cong$ Δ CDE ...... భు.కో.భు. నియమము

రేఖ AB || రేఖ EC ....ఏకాంతర కోణములు నియమము

Δ ABC $\cong$ Δ ECB ...... భు.కో.భు. నియమము

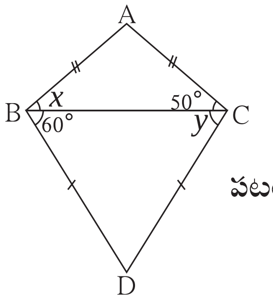
$BD = \frac{1}{2} (AC)$

ఇది గుర్తుంచుకొందాం.

ఏదేని ఒక లంబకోణ త్రిభుజములో కర్ణంపై గీసిన మధ్యగత రేఖ పొడవు కర్ణములో సగం ఉంటుంది.

అభ్యాసం 3.3

1. పటం 3.37 చూపిన విధంగా వివరణను చూడండి. x మరియు y ల విలువలను కనుగొనండి. అదేవిధంగా $\angle ABD$ మరియు $\angle ACD$ ల కొలతలను కనుగొనండి.

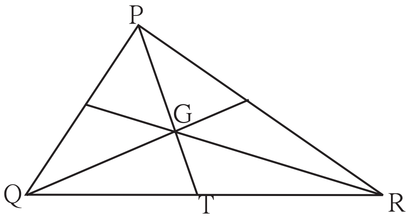


పటం 3.37

2. లంబకోణ, త్రిభుజములోని కర్ణం పొడవు 15 అయిన దానిపైగల మధ్యగత రేఖ పొడవును కనుగొనండి.

3. Δ PQR లో $\angle Q = 90°$, PQ = 12, QR = 5 మరియు QS అనేది PR యొక్క మధ్యగత రేఖ అయిన QS ను కనుగొనండి.

4. పటం 3.38 లో Δ PQR లో G మధ్యగతమిళిత బిందువు. GT = 2.5 సె.మీ., అయిన PG మరియు PT ల పొడవులను కనుగొనండి.

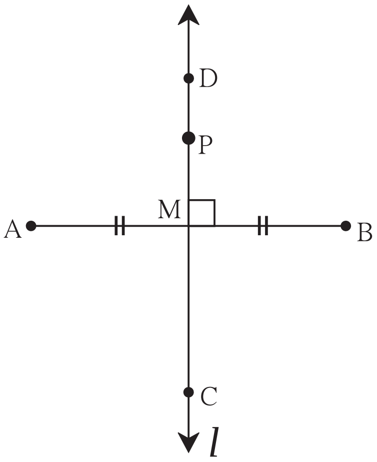


పటం 3.38

కొంచెం గుర్తుతెచ్చుకుందాం

కృత్యము : రేఖ ABని తగినంతపొడవుతో గీయండి. దాని మధ్య బిందువుకు M అని పేరివ్వండి. బిందువు M నుండి పోవునట్లే మరియు రేఖ AB నకు లంబంగా ఉండే రేఖ l ను గీయండి. రేఖ l రే.ఖం. AB నకు లంబసమద్విఖండన రేఖ అవుతుందని గుర్తుకొచ్చిందా?

సరళరేఖ l పై ఎక్కడైనా P బిందువును తీసుకొని PA మరియు PB ఈ దూరాలను విభాగినితో పోల్చండి. ఏమితెలిసింది? PA=PB అని తెల్సిందికదా? దీనినిబట్టి రేఖాఖండం యొక్క లంబ సమద్విఖండన రేఖపైగల ఏదేని బిందువు ఆ రేఖాఖండం చివరలనుండి సమాన దూరంలో ఉంటుందని తెలుస్తుంది. ఇప్పుడు వృత్త లేఖిని సహాయంతో బిందువు A మరియు B ల నుండి సమానదూరంలోగల C మరియు D లాంటి కొన్ని బిందువులను తీసుకోండి. అన్ని బిందువులు రేఖ l పైనే వచ్చాయికదా? దీనిని బట్టి ఏం గుర్తుకొచ్చింది? రేఖాఖండం యొక్క చివరలనుండి సమానదూరంలో నుండే ప్రతిబిందువు ఆ రేఖాఖండం యొక్క లంబసమద్విఖండన రేఖపై ఉంటుంది. ఈ రెండు ధర్మాలు లంబ సమద్విఖండన రేఖ సిద్ధాంతంయొక్క రెండు భాగాలు దీనినిపుడు మనం నిరూపించుదాం.



పటం 3.39

తెలుసుకొందాం.

లంబసమద్వి ఖండన రేఖ సిద్ధాంతం (Perpendicular bisector theorem)

భాగం I : రేఖాఖండం యొక్క లంబ సమద్విఖండన రేఖపై గల ప్రతి బిందువు ఆ రేఖాఖండ అంత్య బిందువుల నుండి సమాన దూరంలో ఉంటుంది.

దత్తాంశం : రేఖ l అనేది రే.ఖం. AB యొక్క లంబ సమద్విఖండన రేఖ

రే.ఖం. AB ను M వద్ద ఖండిస్తుంది.

బిందువు P రేఖ l పైగల ఏదేని బిందువు.

సారాంశం : l (PA) = l (PB)

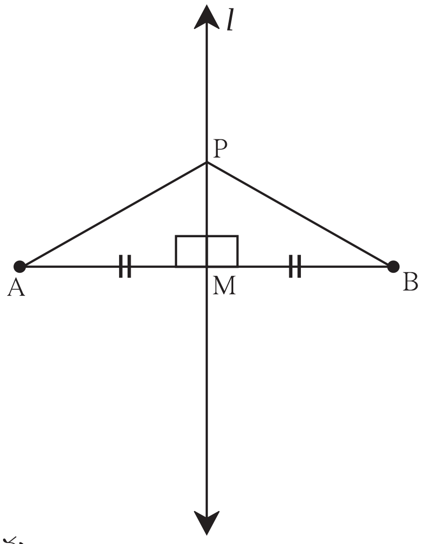
నిర్మాణం : రే.ఖం. AP మరియు రే.ఖం. BP లను గీయండి.

ఉపపత్తి : Δ PMA , Δ PMB లలో

రే.ఖం. PM $\cong$ రే.ఖం. PM .... ఉమ్మడి భుజం

$\angle$PMA $\cong$ $\angle$PMB .... ప్రతిదీ లంబకోణము

రే.ఖం. AM $\cong$ రే.ఖం. BM .... M అనేది మధ్య బిందువు



పటం 3.40

∴ Δ PMA ≅ Δ PMB ...... భు.కో.భు. నియమము

∴ రే.ఖం. PA ≅ రే.ఖం. PB....... సర్వసమాన త్రిభుజముల సదృశ భుజాలు

∴ l (PA) = l (PB)

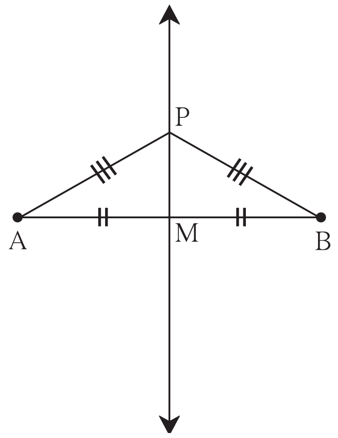
దీనిని బట్టి రేఖాఖండం యొక్క లంబ సమద్విఖండన రేఖపైగల ప్రతి బిందువు ఆ రేఖాఖండం అంత్య బిందువుల నుండి సమాన దూరంలో ఉంటుంది.

భాగం II : రేఖా ఖండం యొక్క చివరల నుండి సమాన దూరంలో ఉండే ప్రతిబిందువు ఆ రేఖా ఖండం యొక్క రేఖా లంబ సమద్విఖండన రేఖ పై ఉంటుంది.

దత్తాంశం : బిందువు P రేఖాఖండం AB చివరల నుండి సమాన దూరంలో గల ఏదేని బిందువు, అనగా PA = PB

సారాంశం : P రే.ఖం. AB యొక్క లంబసమద్వి ఖండన రేఖపైనందు.

నిర్మాణం : రేఖ AB యొక్క M మధ్య బిందువును తీసుకొని రేఖ PM గీసాం.



పటం 3.41

ఉపపత్తి : Δ PAM మరియు Δ PBM లలో

రే.ఖం. PA ≅ రే.ఖం. PB .... ☐

రే.ఖం. AM ≅ రే.ఖం. BM .... ☐

రే.ఖం. PM ≅ ☐ .... ఉమ్మడిభుజం

∴ Δ PAM ≅ Δ PBM ...... ☐ నియమము

∴ ∠PMA ≅ ∠PMB....... సర్వసమాన త్రిభుజాల సదృశకోణాలు

కాని ∠PMA + ☐ = 180°

∠PMA + ∠PMA = 180° .... (∵ ∠PMB = ∠PMA)

2 ∠PMA = ☐

∴ ∠PMA = 90°

∴ రే.ఖం. PM ⊥ రే.ఖం. AB ......(1)

రే.ఖం. AB యొక్క M మధ్య బిందవు ......(2) (నిర్మాణం)

∴ రేఖ PM అనేది రే.ఖం. AB యొక్క లంబసమద్విఖండన రేఖ అనగా P అనే రే.ఖం. AB యొక్క లంబసమద్విఖండన రేఖపై గలదు.

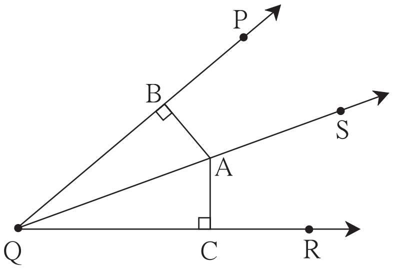
కోణ సమద్విఖండన రేఖ సిద్ధాంతము (Angle bisector theorem)

భాగం I : కోణ సమద్విఖండన రేఖపై గల ప్రతి బిందువు ఆ కోణం యొక్క భుజముల నుండి సమాన దూరంలో ఉంటాయి.

దత్తాంశం : కిరణం QS, ∠PQR యొక్క సమద్విఖండన రేఖ.
కోణసమద్విఖండన రేఖపై A ఒక బిందువు.
రే.ఖం. AB ⊥ కిరణం QP రే.ఖం. AC ⊥ కిరణం QR

సారాంశం : రే.ఖం. AB ≅ రే.ఖం. AC

ఉపపత్తి : త్రిభుజముల సర్వసమాన నియమములను ఉపయోగించి ఉపపత్తిని రాయుము.



పటం 3.42

భాగం II : కోణం యొక్క భుజముల నుండి సమాన దూరంలో ఉండే ఏదైనా బిందువు ఆ కోణం యొక్క సమద్విఖండన రేఖపై ఉంటుంది.

దత్తాంశం : $\angle PQR$ యొక్క అంతరంలోని బిందువు A

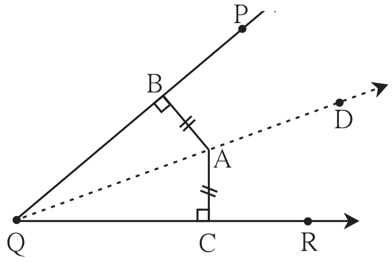
రే.ఖం. $AC \perp$ రే.ఖం. QR

రే.ఖం. $AB \perp$ కిరణం QP

$AB = AC$

సారాంశం : కిరణం QA అనేది $\angle PQR$ యొక్క సమద్విఖండన రేఖ

అనగా $\angle BQA = \angle CQA$



పటం 3.43

ఉపపత్తి : త్రిభుజ సర్వసమాన నియమములను ఉపయోగించి ఉపపత్తిని రాయండి.

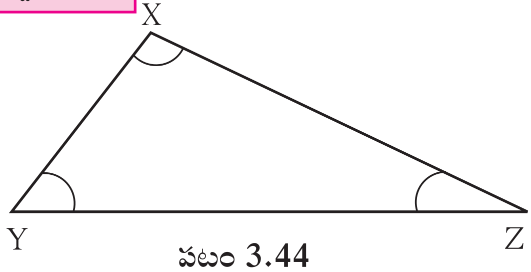
కొంచెం గుర్తుతెచ్చుకుందాం

కృత్యము

పటంలో చూపిన విధంగా $XZ > XY$ అయ్యేట్లు

Δ XYZ ని గీయుము.

$\angle Z$ మరియు $\angle Y$ లను కొలవండి. ఏ కోణం పెద్దది?



పటం 3.44

తెలుసుకొందాం.

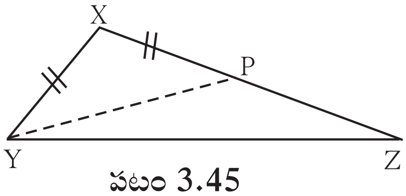
త్రిభుజములోని భుజాలు, కోణముల అసమానతల ధర్మములు

సిద్ధాంతము : త్రిభుజములోని రెండు భుజాలలో ఒక భుజం రెండవ భుజం కంటె పెద్దదైన దానికి ఎదురుగా ఉన్న కోణం చిన్నభుజానికి ఎదురుగానున్న కోణం కంటె పెద్దగా ఉంటుంది.

దత్తాంశం : Δ XYZ లో భుజం XZ > భుజం XY

సారాంశం : $\angle XYZ > \angle XZY$

నిర్మాణం : $l(XY) = l(XP)$, అగునట్లు, భుజం XZ పై P బిందువు తీసుకొని రే.ఖం. YP ని గీయండి.



పటం 3.45

ఉపపత్తి : Δ XYP లో

XY = XP ....నిర్మాణం

$\therefore$ $\angle XYP = \angle XPY$.....సమాన భుజాలకు ఎదురుగా ఉన్న కోణాల కొలతలు సమానం .....(I)

$\angle XPY$ हा Δ YPZ యొక్క బాహ్యకోణం

$\therefore$ $\angle XPY > \angle PZY$ .... బాహ్యకోణ సిద్ధాంతం

$\angle XYP > \angle PZY$ .... సమీకరణం (I) నుండి

$\angle XYP + \angle PYZ > \angle PZY$ (a > b మరియు c > 0 అయిన a + c > b)

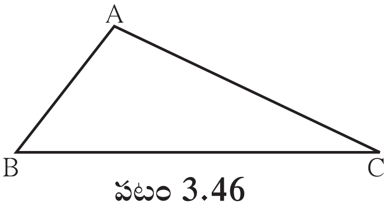
$\angle XYZ > \angle PZY$ అనగా $\angle XYZ > \angle XZY$

సిద్ధాంతము : త్రిభుజములోని రెండుకోణాలు అసమాన కొలతతో ఉన్నట్లయితే పెద్ద కోణమునకు ఎదురుగానున్న భుజం చిన్న కోణమునకు ఎదురుగానున్న భుజం కంటె పెద్దదిగా ఉంటుంది.

ఈ సిద్ధాంత నిరూపణ పరోక్ష పద్ధతి ద్వారా చేయవచ్చును. కింద నివ్వబడిన ఉపపత్తిలోని ఖాళీ ప్రదేశాలను నింపి ఉపపత్తిని పూర్తి చేయుము.

దత్తాంశం : ΔABC లో $\angle B > \angle C$

సారాంశం: $AC > AB$



పటం 3.46

ఉపపత్తి : Δ ABC యొక్క భుజం AB, భుజం AC ల పొడవుల మధ్య కింది వాటిలో ఒకే ఒక అవకాశం ఉంటుంది.

(i) $AC < AB$ (ii) ______ (iii) ______

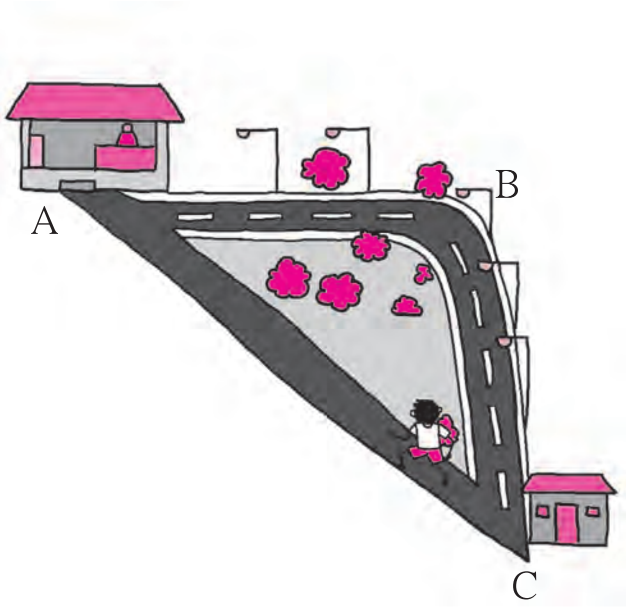
(i) $AC < AB$ అని అనుకుందాం.
త్రిభుజంలోని అసమాన భుజాలలోని పెద్ద భుజము ఎదుటి కోణం చిన్న భుజం ఎదుటి కోణం కంటే ______ గా ఉంటుంది.
$\therefore \angle C >$ ______
కాని $\angle C < \angle B$ .... దత్తాంశం
అనగా విరుద్ధ ఏర్పడింది.
$\therefore$ ______ < ______ ఇది తప్పు

(ii) ఒక వేళ $AC = AB$
అయిన $\angle B = \angle C$
కాని ______ > ______ ...... దత్తాంశం.
అనగా మళ్ళీ విరుద్ధత ఏర్పడింది.
$\therefore$ ______ = ______ ఇది తప్పు
$\therefore$ $AC > AB$ ఈ ఒకే అవకాశం మిగిలింది.
$\therefore$ $AC > AB$

కొంచెం గుర్తుతెచ్చుకుందాం.

కింది తరగతిలో మనం ఒక కృత్యమును చేశాం. దానిననుసరించి రేఖాగణితములో ఒక ధర్మమును చూశాం. దానిని గుర్తుకు తెచ్చుకుందాం.

ప్రక్క పటంలో చిత్రములో చూపిన విధంగా A వద్ద ఒక దుకాణం ఉంది. C వద్ద సమీర్ నిలబడి ఉన్నాడు. అతడు దుకాణంనకు చేరుకోవడానికి $C \rightarrow B \rightarrow A$ అను రోడ్డు మార్గానికి బదులుగా చిన్నకాలిబాట $C \rightarrow A$ ని ఎంచుకున్నాడు. ఎందుకంటే అతనికి ఈ మార్గం తక్కువ దూరం అని అనిపించింది. రేఖాగణితంలోని ఏ ధర్మము అతనికి గుర్తుకొచ్చింది? త్రిభుజములోని ఏరెండు భుజాల మొత్తమైన మూడవ భుజం కంటె పెద్దదిగా ఉంటుంది. ఆ ధర్మమును నిరూపిద్దాం.



సిద్ధాంతము : త్రిభుజములోని ఏ రెండు భుజాల మొత్తమైన మూడవ భుజంపొడవు కంటె ఎక్కువగా ఉంటుంది.

దత్తాంశం : Δ ABC ఏదేని త్రిభుజం

సారాంశం : AB + AC > BC

AB + BC > AC

AC + BC > AB

నిర్మాణం : కిరణం BA పై D బిందువును AD = AC నుండునట్లుగా తీసుకోండి.

ఉపపత్తి : Δ ACD లో, AC = AD ..... నిర్మాణం

$\therefore$ $\angle$ACD = $\angle$ADC ...... (సర్వసమాన భుజాల ఎదుటి కోణములు)

$\therefore$ $\angle$ACD + $\angle$ACB > $\angle$ADC

$\therefore$ $\angle$BCD > $\angle$ADC

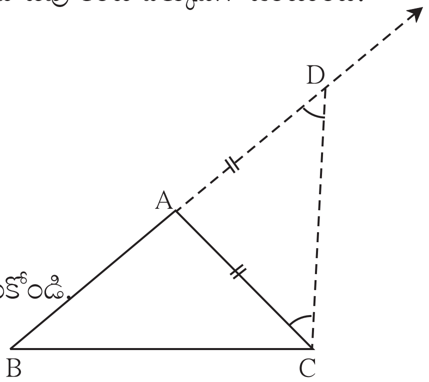
$\therefore$ భుజం BD > భుజం BC ....(త్రిభుజంలోని పెద్ద కోణము ఎదుటి భుజం పెద్దది)

$\therefore$ BA + AD > BC ....($\because$ BD = BA + AD)

BA + AC > BC .... ($\because$ AD = AC)

అదే విధంగా AB + BC > AC

మరియు BC + AC > AB అని నిరూపించవచ్చును.

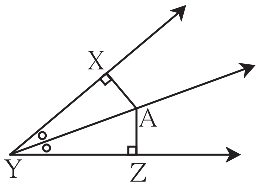


పటం 3.47

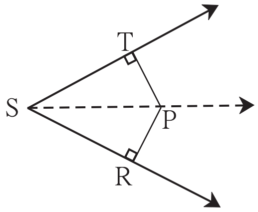
అభ్యాసం 3.4

1. $\angle$XYZ యొక్క సమద్విఖండన రేఖపై బిందువు A ఉంది.

   AX = 2 సె.మీ. అయిన AZ కనుగొనండి.



పటం 3.48

2. 

పటం 3.49

   పటం 3.49లో $\angle$RST = 56°, రే.ఖం. PT $\perp$ కిరణం ST, రే.ఖం. PR $\perp$ కిరణం SR మరియు రే.ఖం. PR $\cong$ రే.ఖం. PT అయిన $\angle$RSP ని కనుగొని కారణాలు రాయండి.

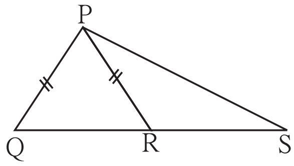
3. Δ PQR లో PQ = 10 సె.మీ., QR = 12 సె.మీ., PR = 8 సె.మీ. అయిన ఈ త్రిభుజంలో అతిపెద్ద మరియు అతి చిన్న కోణములను గుర్తించండి.

4. Δ FAN లో $\angle$F = 80°, $\angle$A = 40° అయిన త్రిభుజములోని అతి పెద్ద మరియు అతి చిన్న భుజముల పేర్లు సకారణంగా రాయండి.

5. సమబాహు త్రిభుజము సమకోణ త్రిభుజం అవుతుందని నిరూపించండి.

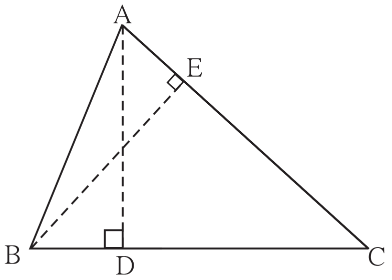
6. Δ ABC లో $\angle$BAC యొక్క సమద్విఖండన రేఖ భుజం BC పై లంబంగా ఉన్నచో Δ ABC ఒక సమద్విబాహు త్రిభుజం అని నిరూపించండి.

7. పటం 3.50 లో రే.ఖం. PR $\cong$ రే.ఖం. PQ అయిన రే.ఖం. PS > రే.ఖం. PQ అని చూపండి.



పటం 3.50

8. పటం 3.51 లో Δ ABC లో రే.ఖం. AD మరియు రే.ఖం. BE లు శీర్ష బిందువుల నుండి లంబాలు మరియు AE = BD అయిన రే.ఖం. AD $\cong$ రే.ఖం. BE అని నిరూపించండి.

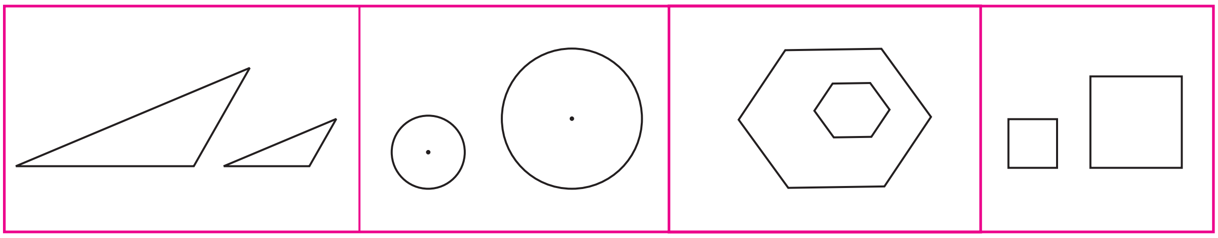


పటం 3.51

తెలుసుకొందాం.

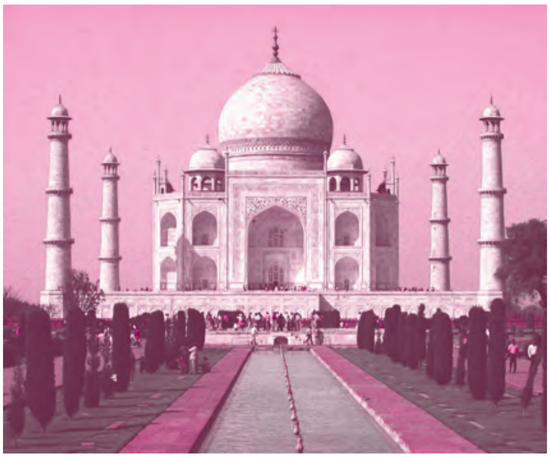
సరూప త్రిభుజము (Similar triangles)

కింది పటములను పరిశీలించండి.



ప్రతి భాగంలో చూపిన రెండ్రెండు పటాలలోని ఆకారాలు ఒకేలా ఉన్నాయి. కానీ ఆ పటాలు చిన్నగా పెద్దగా ఉన్నాయి అంటే అవి సర్వసమానాలు కావు.

కావున ఇలా ఒకేలా కనిపించే పటాలను అనగా సమాన రూపంను కల్గిన పటాలను **సరూప** పటాలని అంటారు.



ఏదేని ఫోటో (ఛాయా చిత్రము), దాని నుండి తీసిన పెద్ద ఫోటో (Enlargement) లలో సమరూపం కనిపిస్తుంది. అలాగే (దారులు) రోడ్లు, రోడ్ల పటాలు సరూపంగా కనిపిస్తాయి.

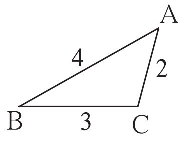
రెండు పటాల (ఆకృతుల)లోని భుజముల అనుపాతము సరూప త్రిభుజాల యొక్క ముఖ్యమైన ధర్మము. ఒకవేళ ఆకృతులలో కోణాలు ఉన్నట్లయితే అవి సర్వసమానంగా అదే కొలతలో ఉండవలసి ఉంటుంది. రెండు రోడ్ల మధ్య ఏ కోణం ఉంటుందో అదేకోణం వాటి పటాలలో లేనట్లయితే ఆ పటాలు తప్పుదోవ పట్టించేవిగా నిర్ణయించబడతాయి.

ICT Tools or Links

మొబైల్ లేదా కంప్యూటర్‌లో ఒక ఫోటోను తీయండి. దానిని చిన్నగా, పెద్దగా చేస్తున్నపుడు మీరు ఏం చేస్తారో గుర్తుకు తెచ్చుకోండి. అలాగే ఒక ఫోటోలోని ఒక భాగంను చూడడానికి మీరు ఏం చేస్తారోగుర్తుకు తెచ్చుకోండి.

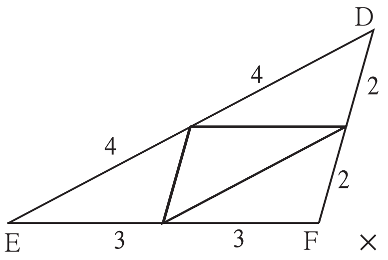
ఇప్పుడు మనం సరూప త్రిభుజాలు అనగా ఏమిటో ఒక కృత్యం ద్వారా అర్థం చేసుకుందాం.

కృత్యం: 4 సె.మీ., 3 సె.మీ. మరియు 2 సె.మీ. భుజాలు గల త్రిభుజంను కాగితంపై గీయుము. ఈ త్రిభుజాలను ఒక మందపాటి కాగితంపై ఉంచండి. దాని చుట్టు పెన్సిల్‌తో గీసి అలాంటి 14 త్రిభుజాలను కత్తిరించి తయారుచేయండి. ఇప్పుడు త్రికోణాకృతిలో ఉన్న కాగితములు సర్వసమానములు అని గమనిస్తారు. కింద చూపిన విధంగా వాటిని అమర్చి మూడు త్రిభుజములను తయారు చేయండి.



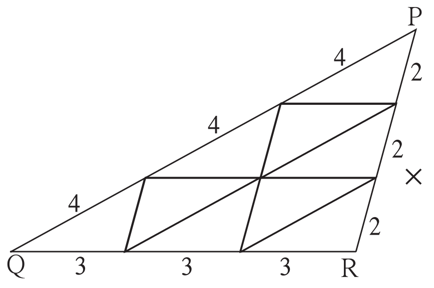
పటం 3.52

త్రిభుజాల సంఖ్య 1



పటం 3.53

త్రిభుజాల సంఖ్య 4



పటం 3.54

త్రిభుజాల సంఖ్య 9

Δ ABC, Δ DEF లు ABC $\leftrightarrow$ DEF ఈ అనురూపంలోని సరుపాలు.

$\angle A \cong \angle D, \angle B \cong \angle E, \angle C \cong \angle F$

$\frac{AB}{DE} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$; $\frac{BC}{EF} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$; $\frac{AC}{DF} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, అనగా అనురూప భుజాలు అనుపాతములో ఉన్నాయి.

అదే విధంగా Δ DEF మరియు Δ PQR ల గురించి ఆలోచించండి. DEF $\leftrightarrow$ PQR ఈ అనురూపంలో వాటి కోణములు సర్వసమానం మరియు భుజములు అనుపాతంలో ఉన్నాయా?

తెలుసుకొందాం.

త్రిభుజముల సరూపత

Δ ABC మరియు Δ PQR లలో (i) $\angle A = \angle P$, $\angle B = \angle Q$, $\angle C = \angle R$ మరియు

$\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{AC}{PR}$; అయిన Δ ABC మరియు Δ PQR లు సరూప త్రిభుజాలు అని అంటారు.

'Δ ABC, Δ PQR సరూపములు'. దీనిని '$\Delta ABC \sim \Delta PQR$' అని రాస్తారు.

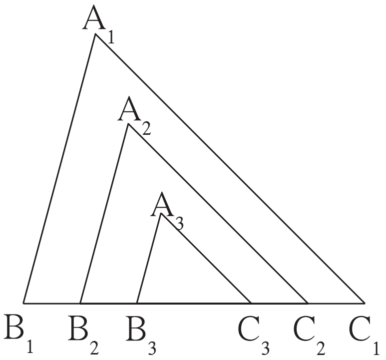
సరూప త్రిభుజాల భుజముల ధర్మాలు కింది కృత్యం ద్వారా అర్థం చేసుకుందాం.

కృత్యం: $\Delta A_1B_1C_1$ అనే ఒక త్రిభుజంను అట్టముక్కపై గీసి కత్తిరించండి. $\angle A_1, \angle B_1, \angle C_1$ లను కొలవండి. అలాగే అట్టముక్కపై $\Delta A_2B_2C_2$, $\Delta A_3B_3C_3$ ఇంకోరెండు త్రిభుజాలను.

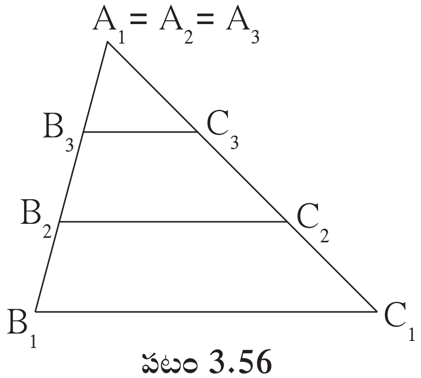
$\angle A_1 = \angle A_2 = \angle A_3$, $\angle B_1 = \angle B_2 = \angle B_3$, $\angle C_1 = \angle C_2 = \angle C_3$ నుండునట్లుగా గీయండి.

కాని $B_1C_1 > B_2C_2 > B_3C_3$ ఇప్పుడు ఆ మూడు త్రిభుజములను కత్తిరించి ప్రక్కకు ఉంచండి.

మూడు త్రిభుజాల భుజాల పొడవులను కొలవండి. ఈ త్రిభుజాలను కింది విధంగా రెండు రకాలుగా అమర్చండి.



పటం 3.55



పటం 3.56

$\frac{A_1B_1}{A_2B_2}, \frac{B_1C_1}{B_2C_2}, \frac{A_1C_1}{A_2C_2}$ ఈ నిష్పత్తులను పరీక్షించండి. అవి సమానంగా ఉన్నాయని తెలుస్తుంది.

అదే విధంగా $\frac{A_1C_1}{A_3C_3}, \frac{B_1C_1}{B_3C_3}, \frac{A_1B_1}{A_3B_3}$ ల నిష్పత్తులు కూడా సమానం అవుతాయా చూడండి.

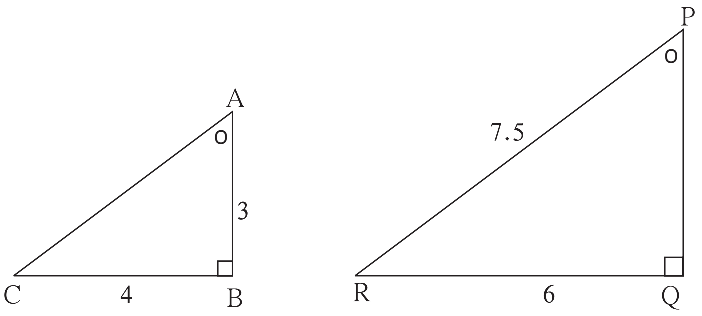
ఈ కృత్యం నుండి మనకు ఏ త్రిభుజాల అనురూప కోణాలు సమానంగా ఉంటాయో వాటి అనురూప భుజాల నిష్పత్తి కూడా సమానంగా ఉంటుంది. అనగా వాటి అనురూప భుజాలు ఒకే అనుపాతంలో ఉంటాయని తెలుస్తుంది.

Δ ABC మరియు Δ PQR లో (i) $\angle A = \angle P$, $\angle B = \angle Q$, $\angle C = \angle R$, అయిన (ii) $\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{AC}{PR}$ అనగా ఒకవేళ అనురూపకోణాలు సమానంగా ఉన్నచో అనురూపభుజాలు ఒకే అనుపాతంలో ఉంటాయి. ఈ నియమాన్ని కొంచెం శ్రమ తీసుకొని నిరూపించవచ్చు. మనం దీనిని అనేక ఉదాహరణలలో ఉపయోగించబోతున్నాం.

ఇది గుర్తుంచుకొందాం.

- రెండు త్రిభుజాల అనురూప భుజాలు సమానంగా ఉన్నపుడు ఆ త్రిభుజాలు సరూపాలవుతాయి.
- రెండు త్రిభుజాలు సరూపాలు అయితే వాటి అనురూప భుజాలు అనుపాతంలో ఉండి అనురూప కోణాలు సర్వ సమానం అవుతాయి.

ఉదా. పటం 3.57 ΔABC మరియు ΔPQR లు చూపబడినవి. ఆ త్రిభుజాలలో చూపిన సమాచారంను పరిశీలించండి. వాటిని బట్టి వేటి పొడవును ఇవ్వలేదో ఆ భుజము పొడవును కనుగొనండి.



పటం 3.57

సాధన: ప్రతి త్రిభుజంలోని కోణముల మొత్తం 180°

ఇచ్చిన సమాచారం నుండి

$\angle A = \angle P$, $\angle B = \angle Q$ $\quad \therefore \angle C = \angle R$

$\therefore \Delta$ ABC, Δ PQR లు సమకోణ త్రిభుజములు

$\therefore$ వాటి భుజాలు అనుపాతంలో ఉన్నాయి.

$$\therefore \frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{AC}{PR}$$

$$\therefore \frac{3}{PQ} = \frac{4}{6} = \frac{AC}{7.5}$$

$$\therefore 4 \times PQ = 18$$

$$\therefore PQ = \frac{18}{4} = 4.5$$

అలాగే $6 \times AC = 7.5 \times 4$

$$\therefore AC = \frac{7.5 \times 4}{6} = \frac{30}{6} = 5$$

అభ్యాసం 3.5

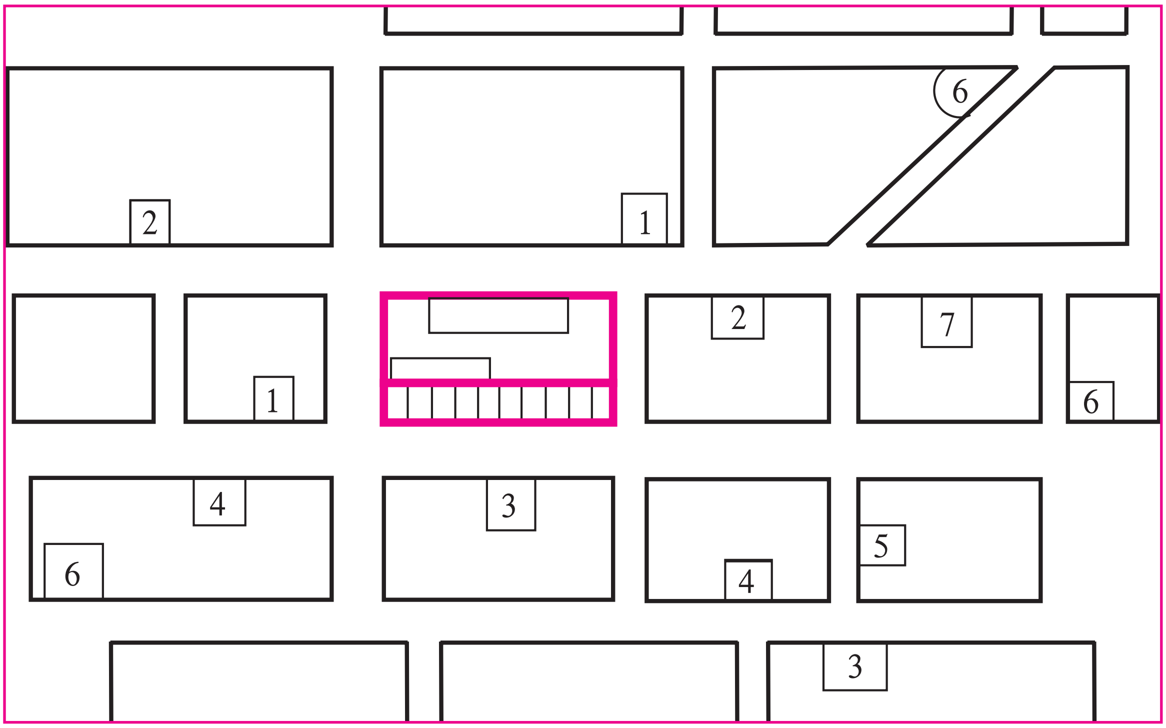
1. Δ XYZ ~ Δ LMN అయిన వాటి సర్వసమాన అనురూప కోణాలను రాసి, అనురూప భుజాల నిష్పత్తిని రాయండి.
2. Δ XYZ లో XY = 4 సె.మీ., YZ = 6 సె.మీ., XZ = 5 సె.మీ., అయిన Δ XYZ ~ Δ PQR మరియు PQ = 8 సె.మీ. అయినచో Δ PQR యొక్క మిగిలిన భుజాలను కనుగొనండి.
3. సరూప త్రిభుజాల జత చిత్తు పటంను గీయండి. వాటికి పేర్లు పెట్టండి. వాటి అనురూప కోణములను ఒకేరకమైన గుర్తులతో చూపండి. త్రిభుజాలలోని అనురూపభుజాల పొడవులు అనుపాతంలో ఉన్న సంఖ్యలలో చూపండి.

కొంచెం గుర్తుతెచ్చుకుందాం

మీరు పటం తయారుచేసేటప్పుడు రోడ్ల మధ్య దూరాలు తగిన అనుపాతంలో చూపాలి. అనగా 1 సె.మీ. = 100 మీ. లేదా 1 సె.మీ. = 50 మీ. త్రిభుజ ధర్మాలనుగూర్చి ఆలోచించారా? త్రిభుజంలో పెద్ద కోణానికి ఎదురుగానున్న భుజం పెద్దగా ఉంటుందని గుర్తు తెచ్చుకోండి.

ప్రాజెక్టు (ఉపక్రమము)

మీ పాఠశాల లేదా ఇంటి చుట్టు ప్రక్కల 500 మీ. పరిసరాలలోని రోడ్ల పటంను తయారు చేయండి. రెండు ప్రదేశాల మధ్య దూరం ఎలా లెక్కిస్తారు? సాధారణంగా 2 మీ. దూరం మీరు ఎన్ని అడుగులలో పోగలరో చూడండి. రెండు మీటర్లలో మూడు అడుగులలో పోయినట్లయితే ఆ ప్రమాణంలో 90 అడుగులు అనగా 60 మీటర్లుగా తీసుకొని దూరంను నిర్ణయించండి. పరిసరాలలోని అన్ని రోడ్లలో నడిచి మీరు వేర్వేరు దూరాలను నిర్ణయించవలసి వస్తుంది. తర్వాత రోడ్లు ఎక్కడైతే ఒకదానికొకటి ఖండించుకొన్నచోట ఏ కోణం ఏర్పడుతుందో దాని రమారమి కొలతను తీసుకోండి. కొలిచిన దారిపొడవుకు తగిన ప్రమాణాన్ని తీసుకొని మానచిత్రపటం తయారు చేయండి. పరిసరాలలోని దుకాణాలు, బడ్డీకోట్లు, బిల్డింగులు, బస్‌స్టాప్ మరియు రిక్షాస్టాండ్‌లు మొదలైనవి చూపించే ప్రయత్నం చేయండి. దీనిలో ఒక పటం నమూనా సూచికలతో సహా ఇవ్వబడింది.



సూచిక: 1. పుస్తకాల దుకాణం 2. బస్‌స్టాండ్ 3. స్టేషనరిదుకాణం 4. బ్యాంక్ 5. మందుల దుకాణం 6. టిఫిన్‌సెంటర్ 7. సైకిల్‌దుకాణం

1. కింది బహుపర్యాయల ప్రశ్నలకిచ్చిన సమాధానాల్లోంచి సరియైన పర్యాయమును ఎన్నుకోండి.

(i) ఒక త్రిభుజం యొక్క రెండు భుజాలు 5 సె.మీ., 1.5 సె.మీ. అయిన త్రిభుజం మూడవ భుజం యొక్క పొడవు .... ఉండదు.

(A) 3.7 సె.మీ. (B) 4.1 సె.మీ. (C) 3.8 సె.మీ. (D) 3.4 సె.మీ.

(ii) Δ PQR లో $\angle R > \angle Q$ అయిన .... అవుతుంది.

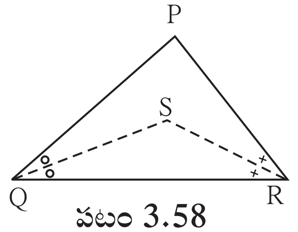
(A) QR > PR (B) PQ > PR (C) PQ < PR (D) QR < PR

(iii) Δ TPQ లో $\angle T = 65°$, $\angle P = 95°$ అయిన కింది వాక్యాలలో ఏది సత్య వాక్యము అవుతుంది?

(A) PQ < TP (B) PQ < TQ (C) TQ < TP < PQ (D) PQ < TP < TQ

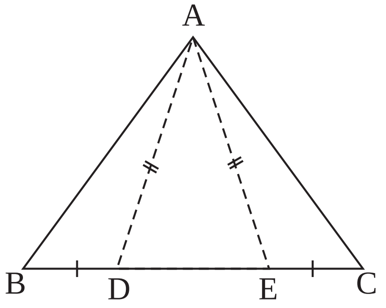
2. Δ ABC ఒక సమద్విబాహు త్రిభుజం. దానిలో AB = AC అయితే BD మరియు CE మధ్యగత రేఖలు అయిన BD = CE అని చూపండి.

3. Δ PQR లో PQ > PR మరియు $\angle Q$ మరియు $\angle R$ ల సమద్విఖండన రేఖలు S వద్ద ఖండించుకొనిన SQ > SR అని చూపండి.



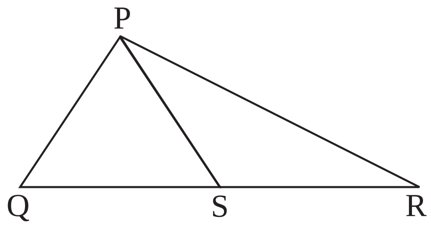
పటం 3.58

4. పటం 3.59 లో Δ ABC యొక్క భుజం BC పై BD = CE అదేవిధంగా AD = AE అయ్యే విధంగా D మరియు E బిందువులు గలవు అయిన $\Delta ABD \cong \Delta ACE$ అని చూపండి.



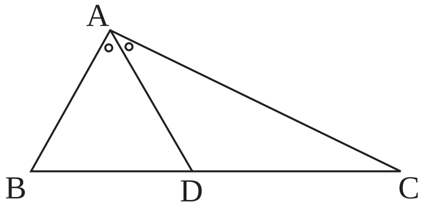
పటం 3.59

5. పటం 3.60 లో Δ PQR యొక్క భుజం QR పై S ఏదేని ఒక బిందువు అయిన PQ + QR + RP > 2PS అని నిరూపించండి.



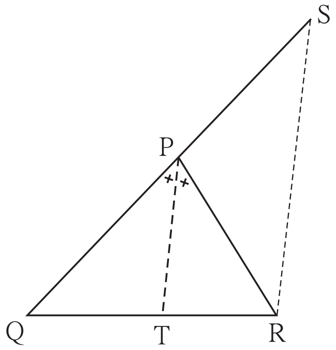
పటం 3.60

6. పటం 3.61 లోని Δ ABC యొక్క $\angle BAC$ కోణ సమద్విఖండన రేఖ BC ని D వద్ద ఖండించినట్లయితే AB > BD అని నిరూపించండి.



పటం 3.61

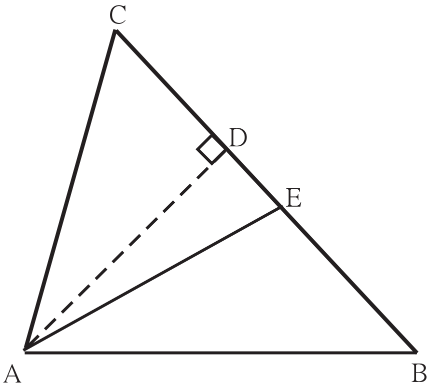
7. పటం 3.62 లో రే.ఖం. PT, $\angle QPR$ యొక్క కోణ సమద్విఖండనరేఖ. బిందువు R నుండి గీయబడిన రే.ఖం. PT నకు సమాంతరంగానుండే రేఖ, కిరణం QP ను S బిందువువద్ద ఖండిస్తుంది, అయిన PS = PR అని నిరూపించండి.



పటం 3.62

8. పటం 3.63 లో రే.ఖం. AD $\perp$ రే.ఖం. BC. రే.ఖం. AE, $\angle CAB$ యొక్క కోణసమద్విఖండన రేఖ, E–D–C అయిన

$$m\angle DAE = \frac{1}{2}(m\angle C - m\angle B)$$



పటం 3.63

ఆలోచిద్దాం.

రెండు త్రిభుజాలు సమకోణాలయినచో, వాటి అనురూప భుజాలు ఒకే అనుపాతంలో ఉంటాయని మనం నేర్చుకొన్నాం. రెండు చతుర్భుజాలు సమకోణాలైనచో వాటి అనురూప భుజాలు ప్రమాణంలో ఉంటాయా? వివిధరకాల పటాలను గీసి పరిశీలించండి.

ఇదేధర్మాన్ని ఇతర బహుభుజాలకు వర్తింపజేసి పరిశీలించి చూడండి.

4 త్రిభుజ నిర్మాణాలు

RY38Y8

పదండి, నేర్చుకుందాం.

త్రిభుజం యొక్క కింది వివరణాంశాలనిచ్చిన త్రిభుజం గీయుట.

- భూమి, మిగిలిన రెండు భుజములు మొత్తం మరియు ఒక భూకోణము.
- భూమి, మిగిలిన రెండు భుజములు భేదము మరియు ఒక భూకోణము
- చుట్టకొలత మరియు భూకోణము

కొంచెం గుర్తుతెచ్చుకుందాం.

క్రింది తరగతులలో మనము క్రింది త్రిభుజ నిర్మాణాల గురించి తెలుసుకున్నాము.

✻ అన్ని భుజాల పొడవులనిచ్చిన త్రిభుజ నిర్మాణము చేయుట.

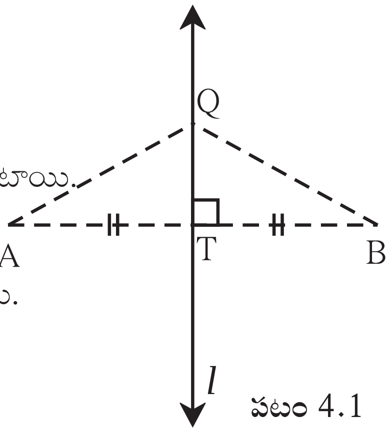
✻ భూమి, దానిని కలిగిన మిగిలిన రెండు కోణములు ఇచ్చిన త్రిభుజ నిర్మాణము చేయుట.

✻ రెండు భుజాలు మరియు వాటి మధ్య కోణము కొలతనిచ్చిన త్రిభుజ నిర్మాణం చేయుట.

✻ కర్ణము మరియు ఒక భుజం నిచ్చిన లంబకోణ త్రిభుజ నిర్మాణం చేయుట.

లంబ సమద్విఖండన రేఖ సిద్ధాంతం.

- ఇచ్చిన రేఖాఖండము యొక్క లంబసమద్విఖండన రేఖ పై గల ప్రతి బిందువు ఆ రేఖాఖండం అంత్య బిందువుల నుండి సమాన దూరంలో ఉంటాయి.
- రేఖాఖండం యొక్క అంత్యబిందువులనుండి సమాన దూరంలో గల ప్రతి బిందువు, రేఖా ఖండం యొక్క చివరలనుండి సమానదూరంలోనుంటాయి.



పటం 4.1

తెలుసుకొందాం.

త్రిభుజాల నిర్మాణం (Constructions of triangles)

త్రిభుజమును నిర్మించుటకొరకు మూడు అంశాలు అవసరం. మూడు కోణాలు మరియుమూడు భుజాలు వీటిలో కేవలం రెండు అంశాలు ఇచ్చిన, ఇవి గాకుండా ఆ త్రిభుజమునకు సంబంధించిన ఏదేని సమాచారం, ఇచ్చినచో ఆ సమాచారం మరియు ఇచ్చిన రెండు అంశాలనుఉపయోగించి త్రిభుజమును ఎలా నిర్మించవచ్చో దాన్ని చూద్దాం.

ఏదేని బిందువు రెండు భిన్న రేఖలపై ఉన్నచో ఆ బిందువు ఆ రేఖ యొక్క ఖండన బిందువు అగుననే ధర్మంను ఈ క్రింది నిర్మాణాలలో అనేకసార్లు ఉపయోగించడమైనది.

నిర్మాణం I

త్రిభుజములో భూమి, భూమికి ఆసన్నంగానున్న ఒక కోణము మరియు మిగిలిన రెండు భుజముల పొడవుల మొత్తము ఇచ్చినప్పుడు త్రిభుజమును నిర్మించుట.

ఉదా. BC = 6.3 సె.మీ., $\angle B = 75^\circ$ మరియు AB + AC = 9 సె.మీ. నుండునట్లుగా Δ ABC ని నిర్మించుము.

సాధన : ముందుగా కావలసిన త్రిభుజం యొక్క చిత్తుపటంను గీస్తాం.

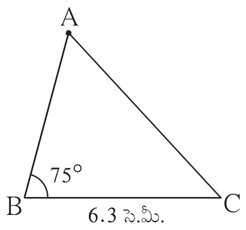
వివరణ : చిత్తుపటంలో చూపిన విధముగా BC = 6.3 సె.మీ. రేఖాఖండంను ముందుగా గీద్దాం. బిందువు B వద్ద రేఖాఖండం BC తో 75° కోణము ఏర్పరచు కిరణముపై D బిందువును BD = AB + AC = 9 సె.మీ. అయ్యేవిధంగా తీసుకుందాం. కిరణం BD పై A ని గుర్తించవలెను.

BA + AD = BA + AC = 9

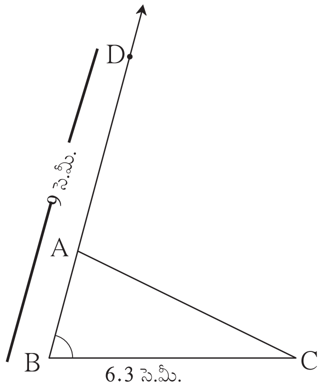
$\therefore$ AD = AC

$\therefore$ బిందువు A రే.ఖం. CD యొక్క లంబసమద్విఖండన రేఖపై గలదు.

$\therefore$ కిరణం BD మరియు రే.ఖం. CD ల లంబసమద్విఖండన రేఖల ఖండన బిందువు A అగును.



చిత్తు పటం 4.2



చిత్తు పటం 4.3

నిర్మాణ క్రమము

(1) 6.3 సె.మీ. పొడవుగల రే.ఖం. BC గీయుము.

(2) B బిందువువద్ద 75° కోణాన్ని ఏర్పరుచు కిరణం BP గీయుము.

(3) కిరణం BP పై d(B,D) = 9 సె.మీ. నుండునట్లుగా D బిందువు ను తీసుకోండి.

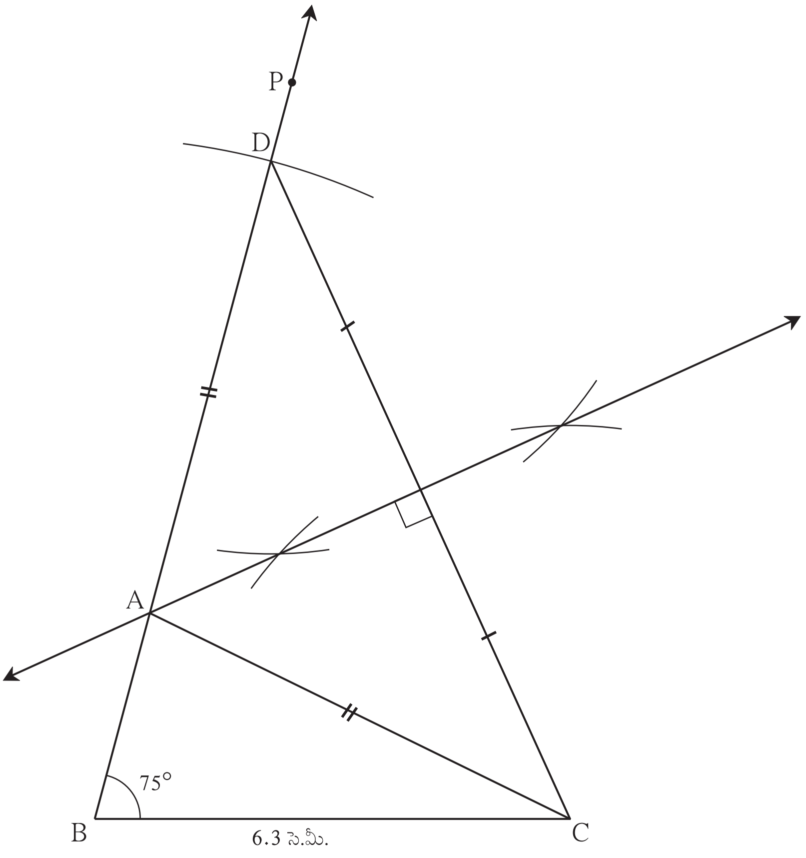
(4) రే.ఖం. DC ని కలుపుము.

(5) రే.ఖం. DC యొక్క లంబసమద్విఖండన రేఖను గీయండి.

(6) రే.ఖం. DC యొక్క లంబసమద్విఖండన రేఖ మరియు కిరణం BP ల ఖండన బిందువుకు A అని పేరివ్వండి.

(7) రే.ఖం. AC ని గీయండి.

ఈ విధంగా కావలసిన ΔABC ఏర్పడినది.



పటం 4.4

అభ్యాసం 4.1

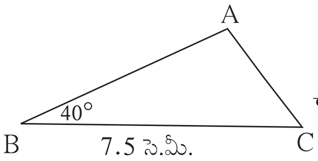
1. భూమి QR = 4.2 సె.మీ., $m\angle Q = 40^\circ$ మరియు PQ + PR = 8.5 సె.మీ. నుండునట్లుగా Δ PQR నిర్మించుము.
2. భూమి YZ = 6 సె.మీ., XY + XZ = 9 సె.మీ.. $m\angle XYZ = 50^\circ$ నుండునట్లుగా Δ XYZ నిర్మించుము.
3. భూమి BC = 6.2 సె.మీ., $m\angle ACB = 50^\circ$, AB + AC = 9.8 సె.మీ. నుండునట్లుగా Δ ABC నిర్మించుము.
4. భూమి BC = 3.2 సె.మీ., $\angle ACB = 45^\circ$ మరియు Δ ABC యొక్క చుట్టుకొలత 10 సె.మీ. నుండునట్లుగా Δ ABC నిర్మించుము.

నిర్మాణం II

త్రిభుజములో భూమి, మిగిలిన రెండు భుజముల భేదము మరియు ఒక భూకోణము ఇచ్చినప్పుడు త్రిభుజమును నిర్మించుట.

ఉదా (1) BC = 7.5 సె.మీ., $m\angle ABC = 40^\circ$, AB – AC = 3 సె.మీ. గల Δ ABC నిర్మించండి.

సాధన: ముందుగా చిత్తుపటంను గీద్దాం.



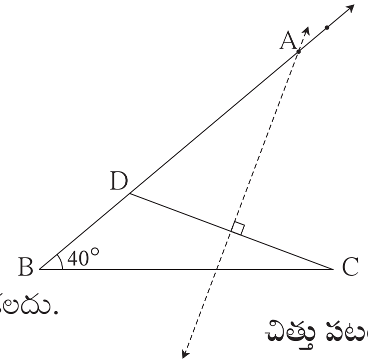
చిత్తు పటం 4.5

వివరణ : AB – AC = 3 సె.మీ. $\therefore$ AB > AC అగును.
రేఖాఖండం BC ని గీద్దాం. రే.ఖం. BC తో 40° కోణం ఏర్పరుచు కిరణము BL ని గీయవచ్చును. ఆ కిరణముపై A బిందువును గుర్తించవలెను. బిందువు D ని, BD = 3 సె.మీ. ఉండునట్లు కిరణముపై తీసుకొన్నాం. అయితే B–D–A మరియు BD = AB –AD = 3 మరియు AB – AC = 3 అని ఇచ్చారు.

$\therefore$ AD = AC

$\therefore$ రే.ఖం. DC యొక్క లంబసమద్విఖండన రేఖ పై బిందువు A కలదు.

$\therefore$ కిరణం BL మరియు రే.ఖం. DC ల లంబసమద్విఖండన రేఖ యొక్క ఖండన బిందువు A అగును.



చిత్తు పటం 4.6

నిర్మాణక్రమము :

(1) 7.5 సె.మీ. గల రే.ఖం. BC గీయండి.

(2) B బిందువు వద్ద 40° కోణము నేర్పరుచు కిరణము BL గీయుము.

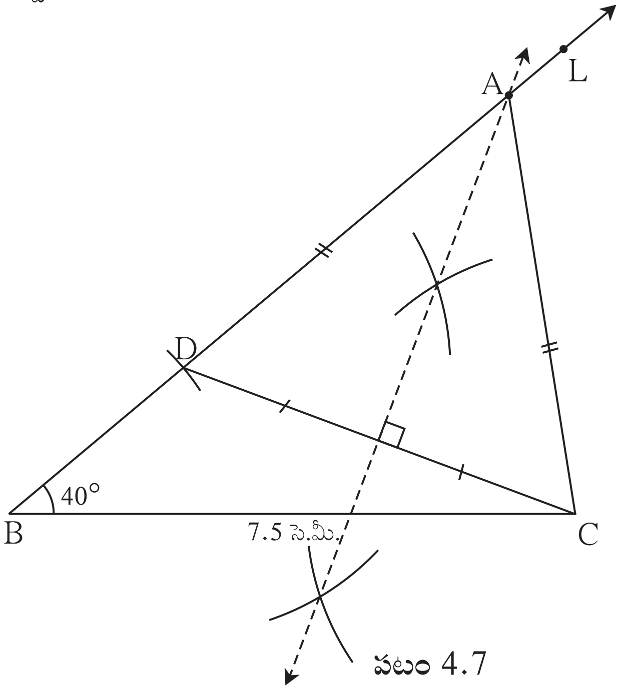
(3) కిరణం BL పై BD = 3 సె.మీ. అగునట్లు D బిందువు గుర్తించండి.

(4) రే.ఖం. CD గీసి దానికి లంబసమద్విఖండన రేఖను గీయుము.

(5) రే.ఖం. CD యొక్క లంబసమద్విఖండన రేఖ కిరణము BL ని ఖండించిన స్థానములో బిందువు A గుర్తించండి.

(6) రే.ఖం. AC గీయండి.

ఈ విధంగా కావలసిన Δ ABC ఏర్పడినది.

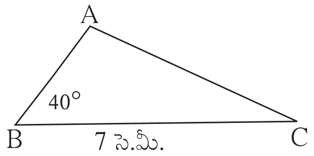


పటం 4.7

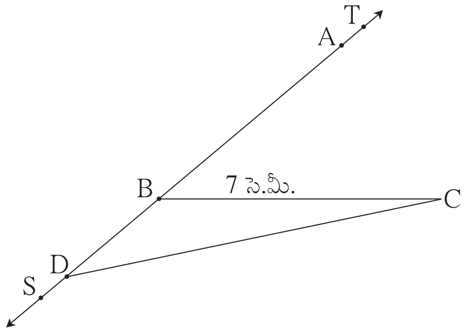
ఉదా. 2 భుజం BC = 7 సె.మీ., $\angle B = 40^\circ$ మరియు AC − AB = 3 సె.మీ. గల Δ ABC నిర్మించుము.

వివరణ : చిత్తు పటంను గీద్దాం.

BC = 7 సె.మీ. గీద్దాం. AC > AB. రేఖాఖండం BC యొక్క బిందువు B వద్ద 40° కోణము ఏర్పరుచు కిరణము BT ని గీయవచ్చు. ఈ కిరణముపై బిందువు A గలదు. BD = 3 సె.మీ. నుండునట్లుగా కిరణం BT వ్యతిరేక కిరణము పై బిందువు D ని తీసుకోండి.



పటం 4.8



పటం 4.9

ఇప్పుడు AD = AB + BD = AB + 3 = AC

(ఎందుకనగా AC − AB = 3 సె.మీ. ఇవ్వబడినది.)

$\therefore$ AD = AC

$\therefore$ రే.ఖం. CD యొక్క లంబ సమద్విఖండన రేఖ పై బిందువు A కలదు.

నిర్మాణ క్రమము

(1) 7 సె.మీ.ల పొడవుతో BC రేఖా ఖండంనుగీయండి.

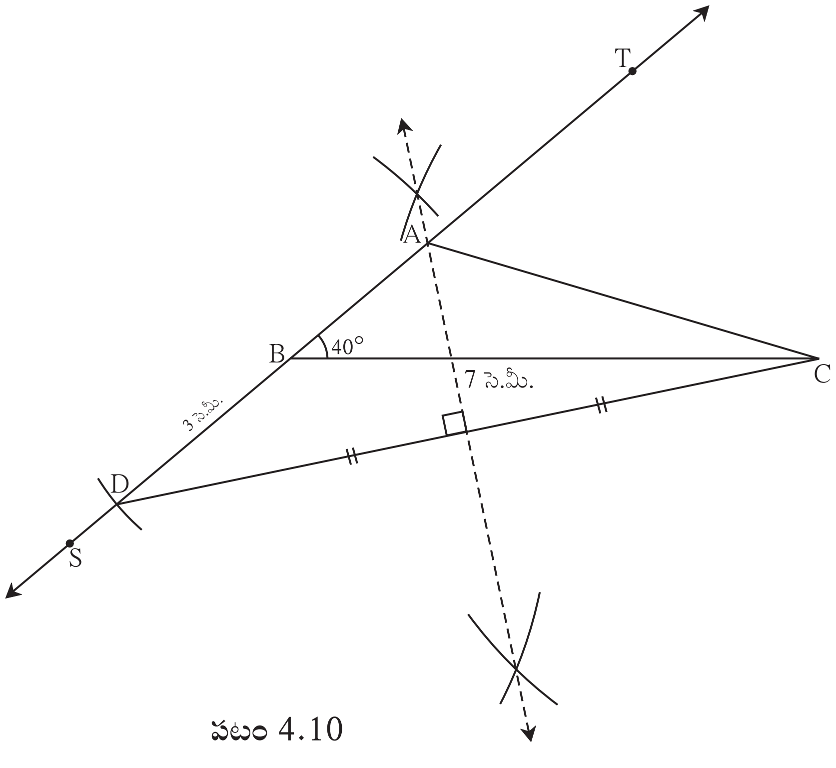
(2) బిందువు B వద్ద 40° కోణము నేర్పరుచు కిరణం BT ని గీయండి.

(3) కిరణం BT నకు వ్యతిరేక కిరణం BS పై బిందువు D ని BD = 3 సె.మీ. ఉండునట్లుగా తీసుకోండి.

(4) రే.ఖం. DC యొక్క లంబసమద్విఖండన రేఖను గీయండి.

(5)రే.ఖం. DC యొక్క లంబసమద్విఖండన రేఖ కిరణం BT ను ఏ బిందువు వద్ద ఖండించునో దానికి A పేరునివ్వండి.

(6) రే.ఖం. AC ని గీయండి విధంగా కావలసిన Δ ABC ఏర్పడినది.



పటం 4.10

అభ్యాసం 4.2

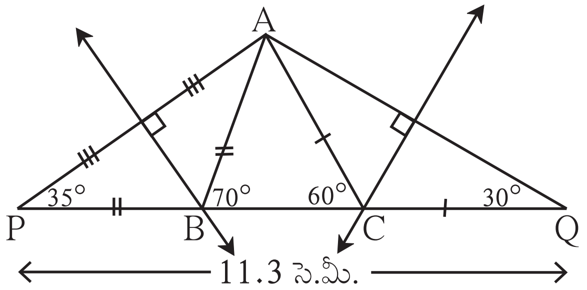
1. భూమి YZ = 7.4 సె.మీ.. $m\angle XYZ = 45^\circ$ మరియు XY − XZ = 2.7 సె.మీ. ఉండునట్లుగా Δ XYZ నిర్మించుము.
2. భూమి QR = 6.5 సె.మీ.. $m\angle PQR = 40^\circ$ మరియు PQ − PR = 2.5 సె.మీ. ఉండునట్లుగా Δ PQR నిర్మించుము.
3. భూమి BC = 6 సె.మీ.. $m\angle ABC = 100^\circ$ మరియు AC − AB = 2.5 సె.మీ. ఉండునట్లుగా Δ ABC నిర్మించుము.

నిర్మాణం III

త్రిభుజము చుట్టు కొలత మరియు రెండు భూకోణములు ఇచ్చినప్పుడు త్రిభుజమును నిర్మించుట.

ఉదా. $\angle B = 70^\circ$, $\angle C = 60^\circ$ మరియు AB + BC + CA = 11.3 సె.మీ., గల Δ ABC నిర్మించుము.

వివరణ : చిత్తు పటముగీద్దాం.



చిత్తు పటం 4.11

వివరణ : ఈ పటములో రే.ఖం. BC పై బిందువు P మరియు Q లను

PB = AB, CQ = AC నుండునట్లుగా తీసుకొన్నారు.

$\therefore$ PQ = PB + BC + CQ = AB + BC +AC = 11.3 సె.మీ..

ఇప్పుడు ΔPBA లో PB = BA

$\therefore$ $\angle$APB = $\angle$PAB మరియు $\angle$APB + $\angle$PAB = బాహ్యకోణము ABC = 70°. . . .

(దూరాంతర కోణ సిద్ధాంతం)

$\therefore$ $\angle$APB = $\angle$PAB = 35° ఇదే విధంగా $\angle$CQA = $\angle$CAQ = 30°

ఇప్పుడు PAQ త్రిభుజంను గీయవచ్చు, ఏందుకనగా రెండు కోణములు మరియు అవిగల్గిన భుజము PQ తెలిసినది కనుక.

కాని BA=BP $\therefore$ రే.ఖం. AP యొక్క లంబసమద్విఖండన రేఖ పై బిందువు **B** కలదు. మరియు CA = CQ

$\therefore$ రే.ఖం. AQ యొక్క లంబసమద్విఖండన రేఖ పై బిందువు **C** గలదు.

$\therefore$ AP మరియు AQ ల లంబసమద్విఖండన రేఖలను గీయండి. అవి రేఖ PQ లను ఎక్కడ ఖండించునో అక్కడ క్రమంగా B మరియు C బిందువులు లభించును.

నిర్మాణ క్రమము:

(1) రేఖ PQ = 11.3 సె.మీ. పొడవుల రేఖాఖండం గీయండి.

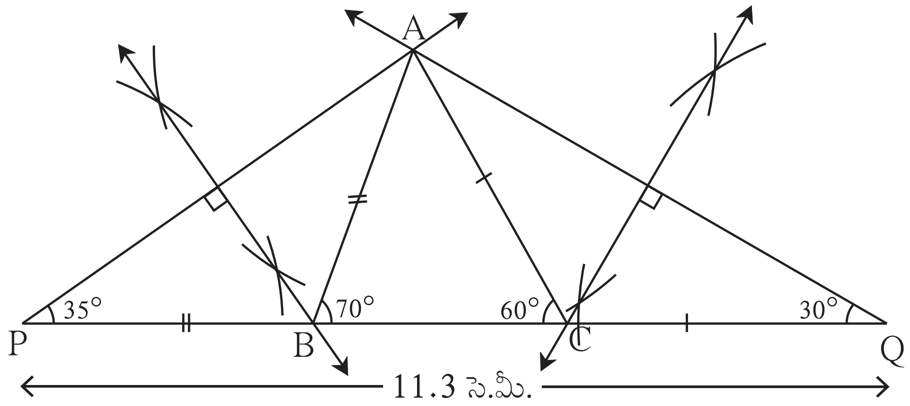
(2) బిందువు P వద్ద 35° కోణాన్ని ఏర్పరచు కిరణంను గీయండి.

(3) బిందువు Q వద్ద 30° కోణాన్ని ఏర్పరచు కిరణంను గీయండి.

(4) రెండు కిరణాల యొక్క ఖండన బిందువునకు A అని పేరివ్వండి.

(5) రే.ఖం. AP మరియు రే.ఖం. AQ ల లంబసమద్విఖండన రేఖను గీయండి.
అది రేఖ PQ ను ఏ బిందువు వద్ద ఖండిస్తుందో వాటికివరుసగా B మరియు C అని పేర్లివ్వండి.

(6) రే.ఖం. AB మరియు రే.ఖం. AC గీయుము.
ఈ విధంగా కావలసిన Δ ABC ఏర్పడినది.



పటం 4.12

అభ్యాసం 4.3

1. $\angle Q = 70^\circ$, $\angle R = 80^\circ$ మరియు $PQ + QR + PR = 9.5$ సె.మీ. నుండునట్లుగా Δ PQR నిర్మించుము.
2. $\angle Y = 58^\circ$, $\angle X = 46^\circ$ నుండునట్లుగా మరియు త్రిభుజం చుట్టు కొలత 10.5 సె.మీ. గల ΔXYZ నిర్మించుము.
3. $\angle M = 60^\circ$, $\angle N = 80^\circ$ మరియు $LM + MN + NL = 11$ సె.మీ. నుండునట్లుగా Δ LMN నిర్మించుము.

సంకీర్ణ ప్రశ్నసంగ్రహం 4

1. $XY + XZ = 10.3$ సె.మీ., $YZ = 4.9$ సె.మీ., $\angle XYZ = 45^\circ$ నుండునట్లుగా Δ XYZ నిర్మించుము.
2. $\angle B = 70^\circ$, $\angle C = 60^\circ$, $AB + BC + AC = 11.2$ సె.మీ. నుండునట్లుగా Δ ABC నిర్మించుము.
3. ఏ త్రిభుజం చుట్టుకొలత 14.4 సె.మీ. మరియు దాని భుజాల నిష్పత్తి 2:3:4 గలదో అలాంటి త్రిభుజంను నిర్మించుము.
4. $PQ - PR = 2.4$ సె.మీ., $QR = 6.4$ సె.మీ. మరియు $\angle PQR = 55^\circ$ గల Δ PQR నిర్మించుము.

ICT Tools or Links

కంప్యూటర్‌లో ఈ త్రిభుజ నిర్మాణాలను జియోజిబ్రా సాఫ్ట్‌వేర్ సహాయంతో గీసి ఆనందించగలరు. 3వ నిర్మాణక్రమంను ఈ సాఫ్ట్‌వేర్‌లో వేరేతీరుగా చేసి చూపబడినది, ఈ పద్ధతిని కూడా అభ్యసించండి.

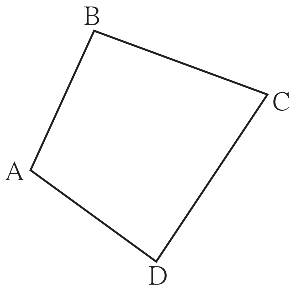
5 చతుర్భుజములు

RYC4ZV

పదండి, నేర్చుకుందాం.

- సమాంతర చతుర్భుజం
- సమాంతర చతుర్భుజ నియమాలు
- సమచతుర్భుజం
- దీర్ఘచతురస్రము
- చతురస్రము
- సమలంబ చతుర్భుజం
- త్రిభుజములోని రెండు భుజముల మధ్య బిందువుల సిద్ధాంతం.

కొంచెం గుర్తుతెచ్చుకుందాం.



పటం 5.1

1. □ABCD చతుర్భుజానికి సంబంధించి క్రింది జతలను రాయుము.

ఆసన్న భుజాలజతలు :
(1) … , … (2) … , …
(3) … , … (4) … , …

ఆసన్న కోణాలు జతలు :
(1) … , … (2) … , …
(3) … , … (4) … , …

ఎదుటి భుజాల జతలు (1) ….. , ….. (2) ….. , …..

ఎదుటి కోణాల జతలు (1) ….. , ….. (2) ….. , …..

నా రకము మరియు నా ధర్మాలను గుర్తుపట్టండి చూద్దాం.

నేను చతుర్భుజమును

నా ఎదుటి భుజాల జతలు రెండు సమాంతరము
[ ]
నా ధర్మం
- ఎదుటిభుజాలు సర్వసమానం
- ఎదుటి కోణాలు . .
- కర్ణము . . . .

నా అన్ని కోణాలు లంబకోణాలు
[ ]
నా ధర్మం
- ఎదుటి భుజం …
- కర్ణం … . .

నా అన్ని భుజాల పొడవులు సమానం
[ ]
నా ధర్మం
- ఎదుటి కోణం
- కర్ణం . . . . .

నా అన్నికోణాలు సమానం, అన్ని భుజాలు సమానం
[ ]
నా ధర్మం
- కర్ణం ….

నా ఎదుటి భుజాలలో ఒకేజత సమాంతరం.
[ ]

వేర్వేరు రకాల చతుర్భుజములు మరియు వాటి ధర్మాలు మీకు తెలుసు. భుజాలు మరియు కోణాలను కొలవడం, మడతలు పెట్టడం ఈ విధమైన కృత్యముల ద్వారా మీరు వీటి గురించి తెలుసుకున్నారు. ఈ ధర్మాలు తార్కికంగా ఎలా నిరూపితమవుతాయో ఇప్పుడు నేర్చుకోబోతున్నారు.

ఏదేని ధర్మమును తార్కికంగా నిరుపించుతామో ఆ ధర్మమును సిద్ధాంతము అంటారు.

దీర్ఘచతురస్రం, సమచతుర్భుజం మరియు చతురస్రములన్నియు ఒక ప్రత్యేక సమాంతర చతుర్భుజములు అవుతాయి. మీరు ఈ అధ్యాయము చదువుతున్నప్పుడు మీకు అర్థమవుతుంది. కావున సమాంతర చతుర్భుజం నుండి అభ్యాసాన్ని ప్రారంభించుదాం.

తెలుసుకొందాం.

సమాంతర చతుర్భుజము (Parallelogram)

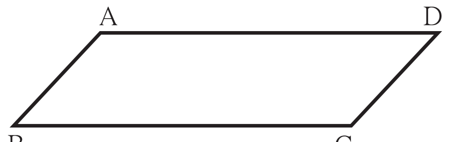
ఏ చతుర్భుజము యొక్క ఎదుటి భుజాల జతలు రెండు, సమాంతరంగా ఉంటాయో, ఆ చతుర్భుజమును సమాంతర చతుర్భుజము అని అంటారు.

సిద్ధాంతాలు నిరూపణచేయునపుడు, ఉదాహరణములు సాధించేటప్పుడు ఈ చతుర్భుజ పటము పదేపదే గీయవలసి ఉంటుంది. కావున ఈ పటంను ఏ విధంగా గీయాలో ఇప్పుడు చూద్దాం.

□ABCD ఈ సమాంతర చతుర్భుజమును గీయాలని అని అనుకోండి.

పద్ధతి I :

- మొదట AB మరియు BC అను ఏదేని పొడవుతో ఒకదానితొనొకటి ఏదేని కోణంను నేర్పరుచు రేఖాఖండంలను గీయండి.
- ఇప్పుడు రే.ఖం. AD మరియు రే.ఖం. BC సమాంతరంగా ఉండాలి, కాబట్టి బిందువు A నుండి రే.ఖం. BC నకు సమాంతరరేఖను గీద్దాం.

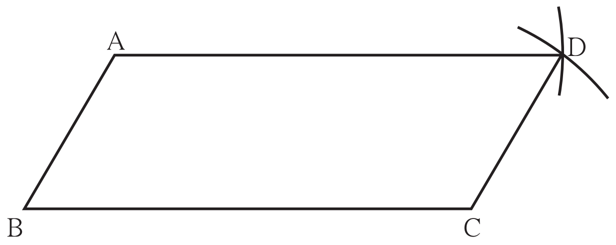


పటం 5.2

- ఇదేవిధంగా రే.ఖం. AB || రే.ఖం. DC, కావున బిందువు C నుండి రే.ఖం. AB కు సమాంతర రేఖను గీద్దాం. రెండు రేఖలు ఏ బిందువు వద్ద ఖండించు కొన్నచో ఆ బిందువు D అగును. కావున తయారైన చతుర్భుజం ABCD సమాంతర చతుర్భుజం అగును.

పద్ధతి II :

- రే.ఖం. AB మరియు రే.ఖం. BC లను ఏదేని పొడవుతో, ఒక దానితొనొకటి ఏదేని కోణాన్ని ఏర్పరుచునట్లుగా రేఖాఖండాలనుగీద్దాం.
- వృత్తలేఖినిలో BC మధ్య దూరంగా బిందువు Aను కేంద్రంగా తీసుకొని ఒక చాపంనుగీద్దాం.
- వృత్తలేఖినిలో AB మధ్యదూరమును, C కేంద్రబిందువుగా తీసుకొని మొదటి చాపమును ఖండించే చాపమును గీద్దాం.
- ఖండన బిందువుకు D అని పేరునిద్దాం. రే.ఖం. AD మరియు రే.ఖం. CD లను కలపండి. తయారైన □ABCD ఒక సమాంతర చతుర్భుజం అగును.



పటం 5.3

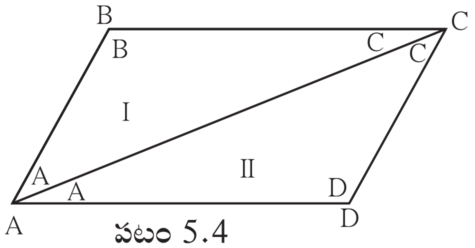
మనము రెండవపద్ధతిలో గీసిన చతురస్రంలో ఎదుటి భుజాలు సమానంగల చతుర్భుజంను గీసినాము. వాటి ఎదుటి భుజాలు సమాంతరంగా ఎందుకు వస్తాయో ఒక సిద్ధాంతం నిరూపణ తర్వాత మీకు అర్థమవుతుంది.

కృత్యము I వేర్వేరు పొడవుగల ఆసన్నభుజాలు మరియు వేర్వేరు కొలతలు గల వాటి మధ్య కోణాలను తీసుకొని ఐదు వేర్వేరు సమాంతర చతుర్భుజములను గీయుము.

సమాంతర చతుర్భుజం సిద్ధాంతం నిరూపించుట కొరకు సర్వసమాన త్రిభుజములు ఉపయోగమువుతాయి. ఇది ఎలాసాధ్యమగునో తెలుసుకొనుట కొరకు క్రింది కృత్యంను చేయండి.

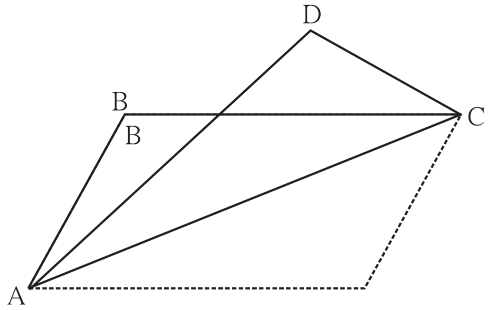
కృత్యము II

- ఒక మందపు కాగితముపై □ABCD సమాంతరచతుర్భుజమును గీయుము. దాని కర్ణం AC ని గీయుము. పటములో చూపిన విధంగా శీర్ష బిందువుల పేర్లు చతుర్భుజం లోపలకూడా రాయండి.



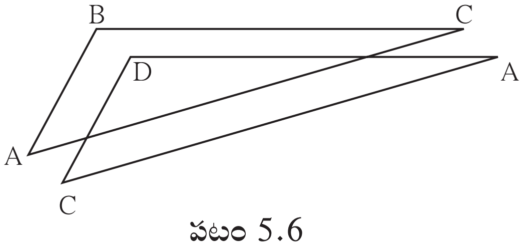
పటం 5.4

- కర్ణం AC పై మడిచిన ΔADC మరియు ΔCBA ఒకదానికొకటి ఏకీభవిస్తున్నాయా అని చూడండి.



పటం 5.5

- □ABCD యొక్క కర్ణం AC పై కత్తిరించి ΔADC మరియు ΔCBA లను వేరుచేయుము. ΔCBA ని త్రిప్పి ΔADC తో ఏకీభవిస్తుందా అని చూడండి.



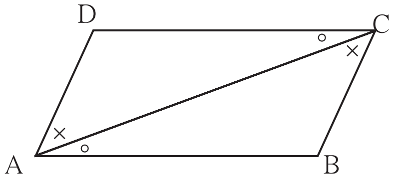
పటం 5.6

ఏమి గమనించారు? ΔCBA యొక్క ఏభుజం ΔADC యొక్క ఏభుజంతో ఏకీభవించింది? ΔCBA యొక్క ఏకోణం ΔADC యొక్క ఏ కోణముతో ఏకీభవించింది?

భుజం DC భుజం AB తో మరియు భుజం AD తో భుజం CB పరస్పరం ఏకీభవిస్తాయి. ఇదేవిధంగా ∠D తో ∠B ఏకీభవిస్తాయి.

అనగా సమాంతర చతుర్భుజం యొక్క ఎదుటి భుజాలు మరియు ఎదుటి కోణాలు సర్వసమానము అని తెలుస్తుంది. సమాంతర చతుర్భుజం యొక్క ఇదే ధర్మంను మనము నిరూపించుదాము.

సిద్ధాంతము 1. సమాంతర చతుర్భుజము యొక్క ఎదుటి భుజాలు సర్వసమానము మరియు ఎదుటికోణాలు సర్వసమానము.



పటం 5.7

దత్తాంశం: □ABCD ఒక సమాంతర చతుర్భుజము

అనగా భుజం AB || భుజం DC, భుజం AD || భుజం BC.

సారాంశం: రే.ఖం. AD ≅ రే.ఖం. BC ; రే.ఖం. DC ≅ రే.ఖం. AB

$\angle ADC \cong \angle CBA$, మరియు $\angle DAB \cong \angle BCD$.

నిర్మాణం: కర్ణం AC ని గీయండి.

ఉపపత్తి : రే.ఖం. DC || రే.ఖం. AB మరియు కర్ణం AC తిర్యగ్రేఖ,

$\therefore\ \angle DCA \cong \angle BAC$ ....(1) }

మరియు $\angle DAC \cong \angle BCA$ ....(2) } .....ఏకాంతర కోణాలు

ΔADC మరియు ΔCBA లలో

$\angle DAC \cong \angle BCA$ .... సమీకరణము (2) నుండి

$\angle DCA \cong \angle BAC$ .... సమీకరణము (1) నుండి.

భుజం AC ≅ భుజం CA .... ఉమ్మడి భుజము

$\therefore\ \Delta ADC \cong \Delta CBA$ ...... కో-భు-కో నియమం

$\therefore$ భుజం AD ≅ భుజం CB .... సర్వసమాన త్రిభుజాల సంగత భుజాలు

భుజం DC ≅ భుజం AB .... సర్వసమాన త్రిభుజాల సంగత భుజాలు

$\angle ADC \cong \angle CBA$ .... సర్వసమాన త్రిభుజాల సంగత కోణాలు

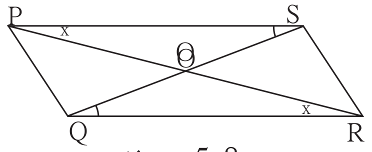
ఇదేవిధంగా $\angle DAB \cong \angle BCD$ అని నిరూపించవచ్చును.

ఆలోచిద్దాం.

పై సిద్ధాంతములో $\angle DAB \cong \angle BCD$ అని నిరూపించుట కొరకు నిర్మాణములో ఏమైన మార్పులు చేయాల్సిన అవసరం ఉందా? ఆ మార్పును చేసి నిరూపణ ఎలా రాయవచ్చును?

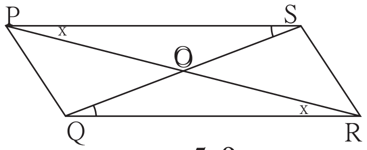
సమాంతర చతుర్భుజాల మరొక ధర్మాన్ని అర్థం చేసుకొనుటకు కింది కృత్యంను చేయండి.

కృత్యం : □PQRS ఏదేని సమాంతర చతుర్భుజమును గీయుము. కర్ణము PR మరియు కర్ణము QS లను గీసి వాటి ఖండన బిందువును O పేరుతో గుర్తించుము. ప్రతి కర్ణంలో అయిన రెండుభాగాల పొడవులను విభాగిని సహాయముతో పోల్చి చూడుము. ఏమి గుర్తించారు?



పటం 5.8

సిద్ధాంతము : సమాంతర చతుర్భుజములోని కర్ణములు పరస్పరము సమద్విఖండన చేసుకొనును.



పటం 5.9

దత్తాంశం: □PQRS సమాంతర చతుర్భుజము. కర్ణము PR మరియు కర్ణము QS లు O బిందువు వద్ద ఖండించుకొనుచున్నవి.

సారాంశం: రే.ఖం. PO ≅ రే.ఖం. RO, రే.ఖం. SO ≅ రే.ఖం. QO

ఉపపత్తి : ΔPOS మరియు ΔROQ లలో

∠OPS ≅ ∠ORQ .... ఏకాంతర కోణములు

భుజం PS ≅ భుజం RQ .... సమాంతర చతుర్భుజము యొక్క ఎదుటి భుజాలు.

∠PSO ≅ ∠RQO .... ఏకాంతర కోణములు

∴ ΔPOS ≅ ΔROQ .... కో.భు.కో. నియమం

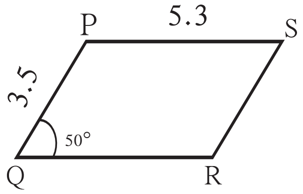
∴ రే.ఖం. PO ≅ రే.ఖం. RO ....
రే.ఖం. SO ≅ రే.ఖం. QO .... } ..... సర్వసమాన త్రిభుజాలు సంగత భుజాలు

ఇది గుర్తుంచుకొందాం.

- సమాంతర చతుర్భుజములోని ఎదుటి భుజాలు సర్వసమానంగా ఉంటాయి.
- సమాంతర చతుర్భుజములోని ఎదుటి కోణాలు సర్వసమానంగా ఉంటాయి.
- సమాంతర చతుర్భుజములోని కర్ణాలు పరస్పరము సమద్విఖండన చేసుకొంటాయి.

సాధించిన ఉదాహరణలు

ఉదా (1) □PQRS సమాంతర చతుర్భుజము. PQ = 3.5, PS = 5.3 ∠Q = 50° అయినచో □PQRS యొక్క మిగిలిన భుజాలు మరియు కోణాల పొడవులను కనుగొనండి.



పటం 5.10

సాధన : □PQRS సమాంతర చతుర్భుజము

∴ ∠Q + ∠P = 180° .... అంతర కోణాలు

∴ 50° + ∠P = 180°

∴ ∠P = 180° − 50° = 130°

ఇప్పుడు, ∠P = ∠R మరియు ∠Q = ∠S .... సమాంతర చతుర్భుజం ఎదుటి కోణాలు

∴ ∠R = 130° మరియు ∠S = 50°

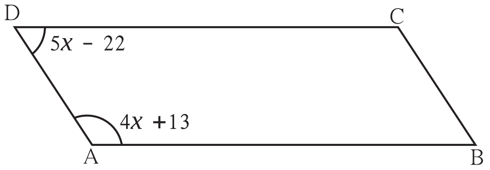
ఇదే విధంగా, PS = QR మరియు PQ = SR .... సమాంతర చతుర్భుజం ఎదుటి భుజాలు.

∴ QR = 5.3 మరియు SR = 3.5

ఉదా (2) □ABCD సమాంతర చతుర్భుజము. □ABCD లో $\angle A = (4x + 13)^\circ$ మరియు $\angle D = (5x - 22)^\circ$ అయినచో $\angle B$ మరియు $\angle C$ ల కొలతలు కనుగొనండి.

సాధన : సమాంతర చతుర్భుజం యొక్క ఆసన్న కోణాలు సంపూరకాలు.

$\angle A$ మరియు $\angle D$ లు ఆసన్న కోణాలు.



పటం 5.11

$\therefore (4x + 13)^\circ + (5x - 22)^\circ = 180$

$\therefore 9x - 9 = 180$

$\therefore 9x = 189$

$\therefore x = 21$

$\therefore \angle A = 4x + 13 = 4 \times 21 + 13 = 84 + 13 = 97^\circ \quad \therefore \angle C = 97^\circ$

$\angle D = 5x - 22 = 5 \times 21 - 22 = 105 - 22 = 83^\circ \quad \therefore \angle B = 83^\circ$

అభ్యాసం 5.1

1. □WXYZ సమాంతర చతుర్భుజములో కర్ణాలు O బిందువు వద్ద ఖండించుకొనుచున్నవి. $\angle XYZ = 135^\circ$ అయిన $\angle XWZ = ?$, $\angle YZW = ?$ ఒకవేళ $l(OY) = 5$ సె.మీ. అయినచో $l(WY) = ?$

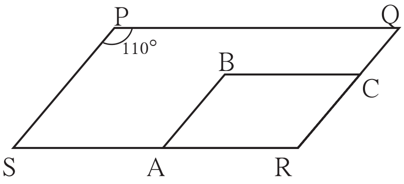
2. □ABCD సమాంతర చతుర్భుజములో $\angle A = (3x + 12)^\circ$, $\angle B = (2x - 32)^\circ$ అయినచో x విలువ కనుగొనుము, దానిని బట్టి $\angle C$ మరియు $\angle D$ ల కొలతలు కనుగొనండి.

3. ఒక సమాంతర చతుర్భుజము చుట్టుకొలత 150 సె.మీ. ఒక భుజము రెండవ భుజము కంటే 25 సె.మీ. ఎక్కువ అయినచో ఆ సమాంతర చతుర్భుజము యొక్క అన్ని భుజాల పొడవులు కనుగొనండి.

4. ఒక సమాంతర చతుర్భుజము యొక్క రెండు ఆసన్న కోణముల నిష్పత్తి 1:2 అయినచో సమాంతర చతుర్భుజము యొక్క అన్ని కోణాల కొలతలు కనుగొనండి.

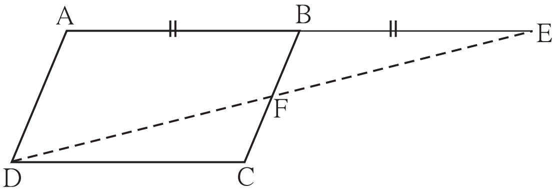
5*. □ABCD సమాంతర చతుర్భుజము యొక్క కర్ణాలు పరస్పరం O బిందువు వద్ద ఖండించుకొనుచున్నవి. AO = 5, BO = 12 మరియు AB = 13 అయినచో □ABCD సమాంతర భుజాలు అవుతాయని నిరూపించుము.

6. పటం 5.12 లో □PQRS మరియు □ABCR ఇవి రెండు సమాంతర చతుర్భుజాలు. $\angle P = 110^\circ$ అయినచో □ABCR యొక్క అన్ని కోణముల కొలతలు కనుగొనండి.



పటం 5.12

7. పటం 5.13లో □ABCD సమాంతర చతుర్భుజము. BE = AB అగునట్లుగా కిరణము AB పై బిందువు E ని తీసుకొనినచో రేఖ ED రే.ఖం. BC ని F బిందువు వద్ద సమద్విఖండనము చేయునని నిరూపించుము.



పటం 5.13

కొంచెం గుర్తుతెచ్చుకుందాం.

సమాంతర రేఖల నియమాలు

1. రెండు రేఖలను ఒక తిర్యగ్రేఖ ఖండించినచో సంగత కోణముల ఒక జత సర్వసమానము అయిన ఆ రెండు రేఖలు ఒకదానికొకటి సమాంతరంగా ఉండును.
2. రెండు రేఖలను ఒక తిర్యగ్రేఖ ఖండించినచో ఏకాంతర కోణముల ఒక జత సర్వసమానము అయిన ఆ రెండు రేఖలు ఒకదానికొకటి సమాంతరంగా ఉండును.
3. రెండు రేఖలను ఒక తిర్యగ్రేఖ ఖండించినచో అంతర కోణముల ఒక జత సంపూరకము అయిన ఆ రెండు రేఖలు ఒకదానికొకటి సమాంతరంగా ఉండును.

తెలుసుకొందాం.

సమాంతర చతుర్భుజ నియమాలు (Tests for parallelogram)

□PQRS లో PS = QR మరియు PQ = SR అయిన □PQRS సమాంతర చతుర్భుజము అని నిరూపించవలెను. దానికై ఈ చతుర్భుజం యొక్క ఏకోణాల జతలు సమాంతరముగా ఉంటాయని చూపవలెను?

పటం 5.14

దీనికై సమాంతర రేఖల ఏ నియమాలు ఉపయోగపడును? నియమాల కొరకు అవసరమైన కోణం పొందడానికి ఏ రేఖను తిర్యగ్రేఖగా తీసుకొంటె అనువుగా ఉంటుంది?

సిద్ధాంతము : చతుర్భుజములోని ఎదుటి భుజాల జతలు సర్వసమానము అయినచో ఆ చతుర్భుజము సమాంతర చతుర్భుజము అవుతుంది.

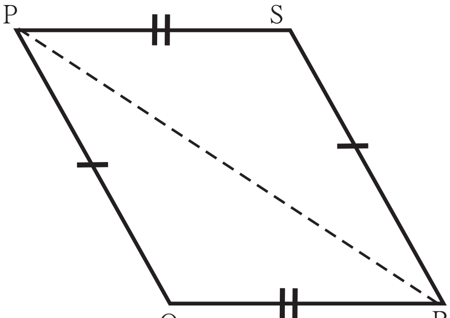
దత్తాంశం : □PQRS లో

భుజం PS ≅ భుజం QR

భుజం PQ ≅ భుజం SR

సారాంశం : □PQRS ఒక సమాంతర చతుర్భుజము.

నిర్మాణం : కర్ణము PR గీసాం.



పటం 5.15

ఉపపత్తి : Δ SPR మరియు Δ QRP లో

భుజం SP ≅ భుజం QR ....(దత్తాంశము)

భుజం SR ≅ భుజం QP .... (దత్తాంశము)

భుజం PR ≅ భుజం RP .... (ఉమ్మడి భుజము)

∴Δ SPR ≅ Δ QRP ...... భు.భు.భు. నియమం.

∴∠SPR ≅ ∠QRP .... సర్వసమాన త్రిభుజాల సంగత కోణములు.

ఇదేవిధంగా ∠PRS ≅ ∠RPQ ..... సర్వసమాన త్రిభుజాల సంగత కోణములు

∠SPR మరియు ∠QRP లు రే.ఖం. PS మరియు రే.ఖం. QR ల తిర్యగ్రేఖ PR ద్వారా ఏర్పడిన ఏకాంతర కోణములు

∴ భుజం PS || భుజం QR ......(I) సమాంతరరేఖల ఏకాంతర కోణాల నియమం.

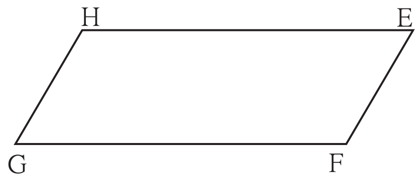
ఇదేవిధంగా ∠PRS మరియు ∠RPQ లు రే.ఖం. PQ మరియు రే.ఖం. SR లయొక్క తిర్యగ్రేఖ PR వల్ల ఏర్పడిన ఏకాంతర కోణములు.

∴ భుజం PQ || భుజం SR ......(II) సమాంతరరేఖల ఏకాంతర కోణాల నియమం

∴ (I) మరియు (II) ల నుండి □PQRS సమాంతర చతుర్భుజము.

ప్రారంభంలో రెండు పద్ధతులద్వారా సమాంతర చతుర్భుజమును గీయవచ్చునని ఇవ్వబడింది. రెండవ పద్ధతిలో ప్రత్యక్షంగా ఎదుటి భుజములు సమానంగా గల చతుర్భుజమును గీసాం. ఇలాంటి చతుర్భుజము సమాంతర చతుర్భుజము ఎలా అవుతుందో గుర్తుకొచ్చిందా?

సిద్ధాంతము : చతుర్భుజములోని ఏకాంతర కోణముల జతలు సర్వసమానమైనచో అది సమాంతర చతుర్భుజమవుతుంది. క్రింద ఇవ్వబడిన దత్తాంశము, సారాంశము మరియు ఉపపత్తిలోని ఖాళీలను మీరు పూరించండి.



పటం 5.16

దత్తాంశం : □EFGH లో ∠E ≅ ∠G

మరియు ∠.......... ≅ ∠..........

సారాంశం: □EFGH ఒక ....

ఉపపత్తి : ∠E = ∠G = x మరియు ∠H = ∠F = y అనుకొనుము.

చతుర్భుజంలో కోణముల మొత్తము .... ఉంటుంది.

∴ ∠E + ∠G + ∠H + ∠F = ...

∴ x + y + ... + ... = ...

∴ □x + □y = ...

∴ $x + y = 180°$

∴ ∠G + ∠H = ...

రే.ఖం. HE మరియు రే.ఖం. GF లను తిర్యగ్రేఖ HG ఖండించడం వలన ∠G మరియు ∠H అను అంతరకోణాలు ఏర్పడినవి.

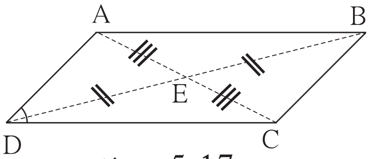
∴ భుజం HE || భుజం GF .... (I) సమాంతర రేఖల అంతరకోణాల నియమం.

ఇదే విధముగా ∠G + ∠F = ...

∴ భుజం .... || భుజం .... (II) సమాంతరేఖల అంతర కోణాల నియమం.

∴ (I) మరియు (II) ల నుండి □EFGH ఒక .... అవుతుంది.

సిద్ధాంతము : చతుర్భుజములోని కర్ణములు పరస్పరము సమద్విఖండన చేసుకొన్నచో ఆ చతుర్భుజము సమాంతర చతుర్భుజము అవుతుంది.



పటం 5.17

దత్తాంశం : □ABCD యొక్క కర్ణములు పరస్పరము బిందువు E వద్ద సమద్విఖండన చేసుకొంటున్నాయి.

అనగా రే.ఖం. AE ≅ రే.ఖం. CE రే.ఖం. BE ≅ రే.ఖం. DE

సారాంశం : □ABCD సమాంతర చతుర్భుజం.

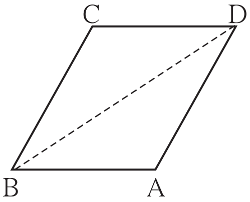
ఉపపత్తి : క్రింది ప్రశ్నలకు సమాధానాములు వెదికి ఉపపత్తిని మీరు సొంతంగా రాయండి.

1. రే.ఖం. AB || రే.ఖం. DC అని నిరూపించుటకొరకు ఏ ఏకాంతర కోణముల జతలను సర్వ సమానములని చూపవలెను? ఏకాంతర కోణాల జత ఏ తిర్యగ్రేఖ వలన లభిస్తుంది?
2. ఏకాంతర కోణములలోఎన్నుకోబడిన జతలోని కోణాలు ఏయే త్రిభుజముల కోణములు?
3. దానిలో ఏ త్రిభుజాలు ఏ నియమమును బట్టి సర్వసమానం అవుతాయి?
4. ఈ విధముగా ఆలోచించి రే.ఖం. AD || రే.ఖం. BC ని నిరూపించవచ్చునా?

ఏదేని చతుర్భుజము సమాంతర చతుర్భుజము అగునని నిరూపించుట కొరకు పై సిద్ధాంతము ఉపయోగ పడుతుంది. కావున ఈ సిద్ధాంతమును సమాంతర చతుర్భుజ నియమాలని అంటారు.

మరొక సిద్ధాంతం సమాంతర చతుర్భుజ నియమంగా ఉపయోగపడుతుంది.

సిద్ధాంతము : చతుర్భుజములోని ఎదుటి భుజాలలో ఒక జత సర్వ సమానము మరియు సమాంతరముగా ఉన్నచో ఆ చతుర్భుజము సమాంతర చతుర్భుజము అవుతుంది.



పటం 5.18

దత్తాంశం : □ABCD లో రే.ఖం. CB≅రే.ఖం. DA మరియు రే.ఖం. CB||రే.ఖం. DA

సారాంశం : □ABCD సమాంతర చతుర్భుజము.

నిర్మాణం : కర్ణము BD ని గీసాం.

కింద సంక్షిప్తంగా ఇవ్వబడిన ఉపపత్తిని మీరు విస్తరించి రాయండి.

Δ CBD ≅ Δ ADB ....భు.కో.భు. నియమం.

∴ ∠CDB ≅ ∠ABD ..... సర్వసమాన త్రిభుజాల సంగత కోణములు

∴ రే.ఖం. CD || రే.ఖం. BA ..... సమాంతర రేఖల ఏకాంతర కోణముల నియమం.

ఇది గుర్తుంచుకొందాం.

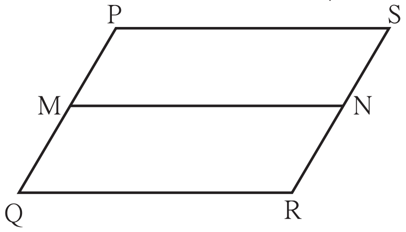
- ఏ చతుర్భుజం యొక్క ఎదుటి కోణాల జతలు సర్వసమానంగా ఉంటాయో ఆ చతుర్భుజము సమాంతర చతుర్భుజము అవుతుంది.
- ఏ చతుర్భుజము యొక్క ఎదుటి భుజాల జతలు సర్వసమానంగా ఉంటాయో ఆ చతుర్భుజము సమాంతర చతుర్భుజము అవుతుంది.
- ఏ చతుర్భుజము కర్ణములు పరస్పరం సమద్విఖండన చేసుకొంటాయో ఆ చతుర్భుజము సమాంతర చతుర్భుజము అవుతుంది.
- చతుర్భుజము యొక్క ఎదుటి భుజముల ఒక జత సర్వసమానం మరియు సమాంతరముగా ఉన్నచో ఆ చతుర్భుజము సమాంతర చతుర్భుజము అవుతుంది. ఈ సిద్ధాంతమును సమాంతర చతుర్భుజ నియమాలని అంటారు.

ఆలోచిద్దాం.

నోటుబుక్‌లో ముద్రించబడిన రేఖలు సమాంతరముగా ఉంటాయి. ఈ రేఖలను ఉపయోగించి ఏదేని సమాంతర చతుర్భుజమును ఎలా గీయవచ్చు?

సాధించిన ఉదాహరణములు -

ఉదా (1) □PQRS సమాంతర చతుర్భుజము. భుజం PQ యొక్క మధ్యబిందువు M మరియు భుజము RS యొక్క మధ్య బిందువు N అయినచో □PMNS మరియు □MQRN లు సమాంతర చతుర్భుజములని నిరూపించండి.



పటం 5.19

దత్తాంశం : □PQRS సమాంతర చతుర్భుజము, భుజం PQ మరియు భుజం RS ల మధ్య బిందువులు వరసగా M మరియు N.

సారాంశం : □PMNS సమాంతర చతుర్భుజము.
□MQRN సమాంతర చతుర్భుజము.

ఉపపత్తి : భుజం PQ || భుజం SR

∴ భుజం PM || భుజం SN ...... (∵ P-M-Q; S-N-R) ......(I)

ఇదే విధంగా భుజం PQ = భుజం SR.

∴ $\frac{1}{2}$ భుజం PQ = $\frac{1}{2}$ భుజం SR

∴ భుజం PM = భుజం SN ..... (∵ M మరియు N ల మధ్య బిందువులు.)......(II)

∴ (I) మరియు (II) ను బట్టి □PMNQ సమాంతర చతుర్భుజమవుతుంది.

ఇదేవిధముగా □MQRN సమాంతర చతుర్భుజము అని నిరూపించవచ్చును.

ఉదా (2) Δ ABC యొక్క భుజములు AB మరియు AC ల యొక్క వరుసగా D మరియు E ల మధ్యబిందువులు. ED = DF అగునట్లుగా కిరణముED పై బిందువు F గలదు. అయితే □AFBE ని సమాంతర చతుర్భుజము అని నిరూపించుము. ఈ ఉదాహరణకై దత్తాంశం మరియు సారాంశం మీరు రాసి ఉపపత్తిలోని ఖాళీలను పూరించండి.

దత్తాంశం : -------------------

సారాంశం : ----------------------

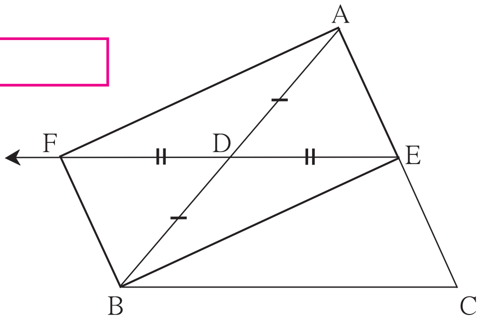
ఉపపత్తి : రే.ఖం. AB మరియు రే.ఖం. EF లు □AFBE యొక్క ______

రే.ఖం. AD ≅ రే.ఖం. DB....... ______

రే.ఖం. ______ ≅ రే.ఖం. ______ ....**నిర్మాణం.**

∴ □AFBE యొక్క కర్ణములు పరస్పరము ______

∴ ______ నియమము ప్రకారం □AFBE సమాంతర చతుర్భుజము.



పటం 5.20

ఉదా (3) ఏదేని సమచతుర్భుజము సమాంతర చతుర్భుజమని నిరూపించుము.

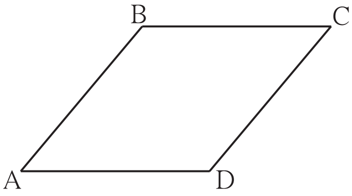
దత్తాంశం : □ABCD సమ చతుర్భుజము.

సారాంశం : □ABCD సమాంతర చతుర్భుజము.

ఉపపత్తి : భుజం AB=భుజం BC=భుజం CD=భుజం DA (దత్తాంశము)

∴ భుజం AB=భుజం CD మరియు భుజం BC=భుజం AD

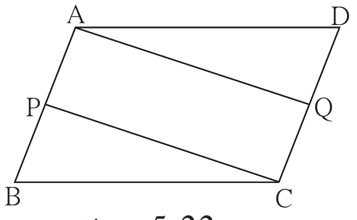
∴ □ABCD సమాంతర చతుర్భుజము.....(సమాంతర చతుర్భుజముల సంగత భుజముల నియమము)



పటం 5.21

అభ్యాసం 5.2

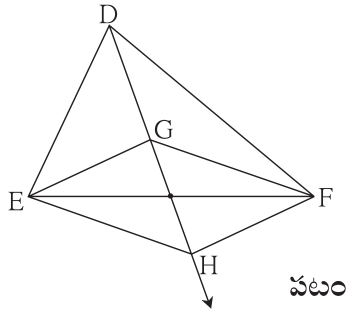
1. పటంలో 5.22లో □ABCD సమాంతర చతుర్భుజము. బిందువు P మరియు బిందువు Q లు వరుసగా భుజం AB మరియు భుజం DC ల మధ్య బిందువులు అయినచో □APCQ సమాంతర చతుర్భుజము అని నిరూపించుము.



పటం 5.22

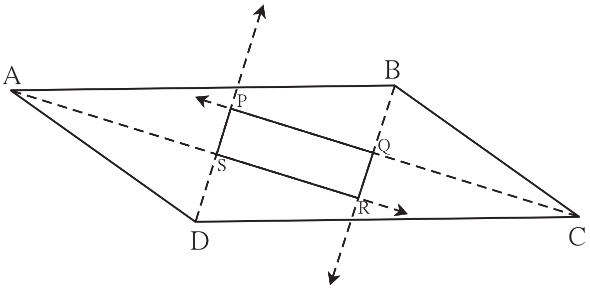
2. ఏదేని దీర్ఘచతురస్రం సమాంతర చతుర్భుజమవుతుందని నిరూపించుము.

3. బిందువు G, Δ DEF యొక్క మధ్యగత మిళిత బిందువు. కిరణం DG పై బిందువు H ను D-G-H మరియు DG = GH, అగునట్లు తీసుకొనుము అయితే □GEHF సమాంతర చతుర్భుజము అని నిరూపించుము.



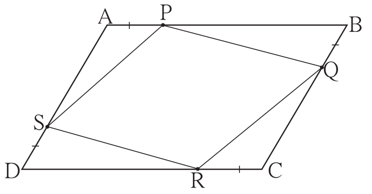
పటం 5.23

4*. సమాంతర చతుర్భుజము లోని నాలుగు కోణసమద్విఖండన రేఖలవలన తయారైన చతుర్భుజము దీర్ఘచతురస్రం అవుతుందని నిరూపించుము. (పటం 5.24)



పటం 5.24

5. ప్రక్కపటము 5.25లో □ABCD అను సమాంతర చతుర్భుజం భుజములపై P, Q, R, S బిందువులు AP = BQ = CR = DS అగునట్లు ఉన్నచో, □PQRS సమాంతర చతుర్భుజము అని నిరూపించుము.



పటం 5.25

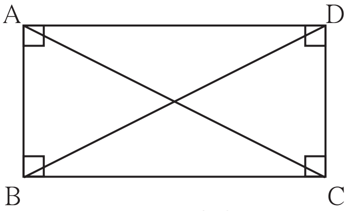
తెలుసుకొందాం.

దీర్ఘచతురస్రం, సమచతుర్భుజము మరియు చతురస్రముల ప్రత్యేక ధర్మాలు (Properties of rectangle, rhombus and square)

దీర్ఘచతురస్రం, సమచతుర్భుజము మరియు చతురస్రములన్నియు సమాంతర చతుర్భుజములవుతాయి. అందువలన ఎదుటి భుజాలు మరియు ఎదుటి కోణములు సమానముగా ఉండుట మరియు కర్ణములు పరస్పరం సమద్విఖండనము చేసుకొనుట అనే ధర్మాలు ఈ మూడు రకాల చతుర్భుజములలో ఉంటాయి.

కాని ఇవే గాకుండా కొన్ని అధిక ధర్మాలు ఈ ప్రతి చతుర్భుజములో ఉంటాయి. అవి మనము చూద్దాం. ఈ ధర్మాల ఉపపత్తి కింద సంక్షిప్తంగా ఇవ్వబడింది. ఇచ్చిన సోపానాలను దృష్టిలో పెట్టుకొని ఈ ఉపపత్తిని మీరు విస్తరించి రాయండి.

సిద్ధాంతము: దీర్ఘ చతురస్రములోని కర్ణములు సర్వసమానము.



పటం 5.26

దత్తాంశం : □ABCD దీర్ఘచతురస్రము

సారాంశం : కర్ణము AC ≅ కర్ణము BD

: సంక్షిప్తంగా ఇచ్చిన ఉపపత్తిని కారణములిచ్చి పూర్తిచేయండి.

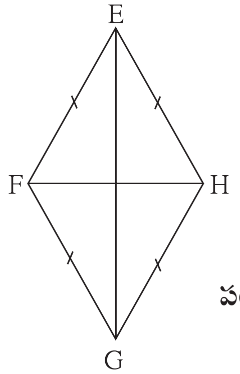
Δ ADC ≅ Δ DAB ...... భుకోభు నియమము

కర్ణము AC ≅ కర్ణము BD..... (సర్వసమాన త్రిభుజాల సంగతభుజాలు)

సిద్ధాంతము: చతురస్రములోని కర్ణములు సర్వసమానము.

దత్తాంశము, సారాంశము మరియు ఉపపత్తులను మీరే వ్రాయండి.

సిద్ధాంతము: సమచతుర్భుజములోని కర్ణములు పరస్పరం లంబసమద్విఖండన చేసుకొంటాయి.



పటం 5.27

దత్తాంశం : □EFGH సమచతుర్భుజము.

సారాంశం : (i) కర్ణము EG కర్ణము HF నకు లంబసమద్విఖండనం.

(ii) కర్ణము HF కర్ణము EG నకు లంబసమద్విఖండనం.

ఉపపత్తి : (i) రే.ఖం. EF ≅ రే.ఖం. EH
రే.ఖం. GF ≅ రే.ఖం. GH } దత్తాంశము

రేఖాఖండము యొక్క చివరినుండి సమాన దూరములోగల ప్రతి బిందువు ఆ రేఖాఖండం యొక్క లంబసమద్విఖండనరేఖపై ఉంటాయి.

∴ బిందువు E మరియు బిందువు G లు రేఖ HF యొక్క లంబసమద్విఖండన రేఖపై గలవు.

రెండు భిన్నబిందువుల నుండి ఒకే ఒక రేఖ వెళుతుంది.

∴ రేఖ EG కర్ణము HF యొక్క లంబసమద్విఖండన రేఖ.

∴ కర్ణము EG కర్ణము HF యొక్క లంబసమద్విఖండన రేఖ.

(ii) ఇదే విధముగా కర్ణము HF కర్ణము EG యొక్క లంబ సమద్విఖండన రేఖ అని నిరూపించవచ్చును.

క్రింది సిద్ధాంతముల ఉపపత్తిని మీరు రాయండి.

- చతురస్రము యొక్క కర్ణములు పరస్పరము లంబసమద్విఖండనములవుతాయి.
- సమచతుర్భుజముల కర్ణములు, దాని ఎదుట్టి కోణములను సమద్విఖండన చేస్తాయి.
- చతురస్ర కర్ణములు దాని ఎదుటి కోణములను సమద్విఖండనము చేస్తాయి.

ఇది గుర్తుంచుకొందాం.

- దీర్ఘచతురస్రం కర్ణములు సర్వసమానము.
- సమచతుర్భుజం కర్ణములు పరస్పరం లంబసమద్విఖండనములువుతాయి.
- సమచతుర్భుజము కర్ణములు ఎదుటికోణములను కోణసమద్విఖండన చేస్తాయి.
- చతురస్రం కర్ణములు సర్వసమానము.
- చతురస్రం కర్ణములు పరస్పరం లంబసమద్విఖండనములవుతాయి.
- చతురస్ర కర్ణములు ఎదుటికోణములను సమద్విఖండన చేస్తాయి.

అభ్యాసం 5.3

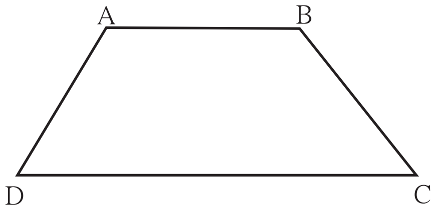
1. □ABCD దీర్ఘచతురస్రం యొక్క కర్ణములు O బిందువు వద్ద ఖండించు కొంటున్నాయి. అయితే AC = 8 సె.మీ., అయినచో BO = ? ∠CAD = 35° అయినచో ∠ACB = ?
2. □PQRS సమచతుర్భుజములో PQ = 7.5 సె.మీ., అయినచో QR = ? ∠QPS = 75° అయినచో ∠PQR = ?, ∠SRQ = ?
3. □ IJKL చతురస్రం కర్ణములు పరస్పరం బిందువు M వద్ద ఖండించు కొంటున్నాయి. అయిన ∠IMJ, ∠JIK మరియు ∠LJK ల కొలతలు నిర్ణయించండి.
4. ఒక సమచతుర్భుజ కర్ణముల పొడవులు వరుసగా 20 సె.మీ., 21 సె.మీ. లు అయినచో ఆ చతుర్భుజం భుజములు మరియు చుట్టుకొలతను కనుగొనండి.
5. క్రింది వాక్యములు సత్యమో లేక అసత్యమో సకారణంగా రాయండి.
   (i) ప్రతి సమాంతరచతుర్భుజము సమచతుర్భుజము అవుతుంది.
   (ii) ప్రతి సమచతుర్భుజము దీర్ఘచతుస్రము అవుతుంది.
   (iii) ప్రతి దీర్ఘచతురస్రము సమాంతర చతుర్భుజము అవుతుంది.
   (iv) ప్రతి చతురస్రము దీర్ఘచతురస్రము అవుతుంది.
   (v) ప్రతి చతురస్రము సమచతుర్భుజము అవుతుంది.
   (vi) ప్రతి సమాంతర చతుర్భుజము దీర్ఘచతురస్రము అవుతుంది.

తెలుసుకొందాం.

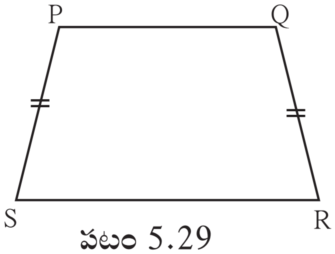
సమలంబచతుర్భుజము (Trapezium)

ఏ చతుర్భుజములోని ఎదుటి భుజాల ఒకే ఒక జత సమాంతరముగా ఉంటుందో, ఆ చతుర్భుజమును సమలంబచతుర్భుజమని అంటారు.

ప్రక్క పటములో □ABCD లో కేవలం AB మరియు DC భుజములు మాత్రమే ఒకదానికొకటి సమాంతరంగా ఉన్నవి. అనగా ఇది సమలంబ చతుర్భుజం అవుతుంది. సమాంతర రేఖల ధర్మం ప్రకారం ∠A మరియు ∠D ఆసన్న కోణాలజత సంపూరకములు. అదేవిధంగా ∠B మరియు ∠C ఈ ఆసన్న కోణాల జతలు కూడా సంపూరకములు. సమలంబ చతుర్భజములో ఆసన్న కోణాల రెండు జతలు సంపూరకములవుతాయి. సమలంబచతుర్భుజంలో సమాంతరముగా లేని (అసమాంతరము) భుజాల జత సర్వసమానం అయినచో ఆ చతుర్భుజాన్ని **సమద్విబాహు సమలంబ చతుర్భుజమని** (Isosceles Trapezium) అంటారు.



పటం 5.28

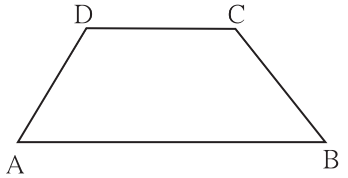


పటం 5.29

ఏదేని సమలంబ చతుర్భుజములో అసమాంతర భుజాల మధ్యబిందువులను కలుపు రేఖాఖండమును ఆ సమలంబ చతుర్భుజము యొక్క మధ్యగత అని అంటారు.

సాధించిన ఉదాహరణములు :

ఉదా (1) □ABCD యొక్క కోణముల కొలతలు 4 : 5 : 7 : 8 ఈ నిష్పత్తిలో ఉన్నాయి. అయినచో □ABCD సమలంబ చతుర్భుజము అని చూపండి.



పటం 5.30

వివరణ : ∠A, ∠B, ∠C, ∠D ల కొలతలువరసగా

$(4x)^\circ$, $(5x)^\circ$, $(7x)^\circ$, మరియు $(8x)^\circ$ అనుకొనుము.

చతుర్భుజంలోని అన్ని కోణాల మొత్తం 360° ఉంటుంది.

$\therefore\ 4x + 5x + 7x + 8x = 360$

$\therefore\ 24x = 360 \qquad \therefore\ x = 15$

$\angle A = 4 \times 15 = 60^\circ$, $\angle B = 5 \times 15 = 75^\circ$, $\angle C = 7 \times 15 = 105^\circ$,

మరియు $\angle D = 8 \times 15 = 120^\circ$

ఇప్పుడు, $\angle B + \angle C = 75^\circ + 105^\circ = 180^\circ$

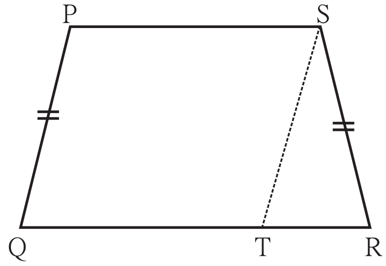
∴ భుజం CD || భుజం BA...... (I)

కాని $\angle B + \angle A = 75^\circ + 60^\circ = 135^\circ \neq 180^\circ$

∴ భుజం BC మరియు భుజం AD ఒక దానికొకటి సమాంతరముగా లేవు.........(II)

∴ □ABCD సమలంబచతుర్భుజం అవుతుంది. ....(I) మరియు (II) లను బట్టి

ఉదా (2) సమలంబ □PQRS లో భుజం PS || భుజం QR మరియు భుజం PQ ≅ భుజం SR, భుజం QR > భుజం PS అయిన ∠PQR ≅ ∠SRQ అనినిరూపించండి.



పటం 5.31

దత్తాంశం : □PQRS లో భుజం PS || భుజం QR

మరియు భుజం PQ ≅ భుజం SR

సారాంశం : ∠PQR ≅ ∠SRQ

నిర్మాణం : బిందువు S నుండి భుజం PQ నకు సమాంతర రేఖను గీసినచో భుజం QR ను T బిందువు వద్ద ఖండిస్తుంది.

ఉపపత్తి : □PQRS లో

రే.ఖం. PS || రే.ఖం. QT ....దత్తాంశము మరియు Q-T-R

రే.ఖం. PQ || రే.ఖం. ST ....నిర్మాణం

∴ □PQTS సమాంతర చతుర్భుజము.

∴∠PQT ≅ ∠STR ..... సంగత కోణము (I)

ఇదేవిధముగా రే.ఖం. PQ ≅ రే.ఖం. ST

కాని రే.ఖం. PQ ≅ రే.ఖం. SR ......(దత్తాంశము)

∴ రే.ఖం. ST ≅ రే.ఖం. SR

∴∠STR ≅ ∠SRT.....సమద్విబాహు త్రిభుజ సిద్ధాంతం (II)

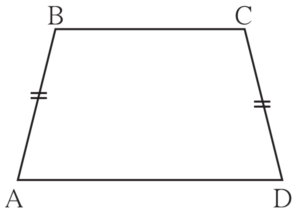
∴∠PQT ≅ ∠SRT ....(I) మరియు (II) లను బట్టి

∴ ∠PQR ≅ ∠SRQ .... Q-T-R.

దీనిని బట్టి సమద్విబాహు సమలంబచతుర్భుజములో భూమికి ఆసన్నంగానున్న కోణములు సర్వసమానంగా ఉంటాయి.

అభ్యాసం 5.4

1. $\square$IJKL లో భుజం IJ $\parallel$ భుజం KL, $\angle I = 108^\circ$ $\angle K = 53^\circ$ అయిన $\angle J$ మరియు $\angle L$ ల విలువలు కనుగొనండి.
2. $\square$ABCD లో భుజం BC $\parallel$ భుజం AD, భుజం AB $\cong$ భుజం DC అయితే $\angle A = 72^\circ$ అయినచో $\angle B$, మరియు $\angle D$ విలువలు నిర్ణయించండి.
3. పటం 5.32లోని $\square$ABCD లో భుజము BC < భుజము AD అయిన భుజము BC $\parallel$ భుజం AD మరియు అయితే భుజం BA $\cong$ భుజం CD అయినచో $\angle ABC \cong \angle DCB$ అని నిరూపించుము.

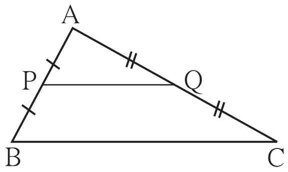


పటం 5.32

తెలుసుకొందాం.

త్రిభుజములోని రెండు భుజముల మధ్య బిందువుల సిద్ధాంతం
(Theorem of midpoints of two sides of a triangle)

సిద్ధాంతము : ఒక త్రిభుజములోని ఏవేని రెండు భుజాల మధ్య బిందువులను కలుపు రేఖాఖండము మూడవ భుజమునకు సమాంతరంగా ఉండి ఆభుజం యొక్క పొడవులో సగం ఉంటుంది.



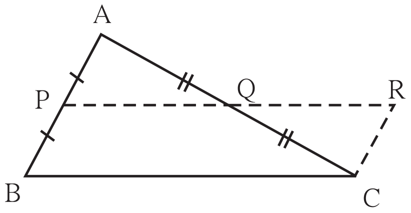
పటం 5.33

దత్తాంశం : Δ ABC లో బిందువు P రే.ఖం. AB మధ్యబిందువు మరియు బిందువు Q రే.ఖం. AC మధ్య బిందువు.

సారాంశం : రే.ఖం. PQ $\parallel$ రే.ఖం. BC

మరియు $PQ = \frac{1}{2}$ BC

నిర్మాణం : రే.ఖం. PQ ను PQ = QR, అగునట్లు R వరకు పొడిగించి, రే.ఖం. RC ని గీయండి.



పటం 5.34

ఉపపత్తి : Δ AQP మరియు Δ CQR లో

రే.ఖం. PQ $\cong$ రే.ఖం. QR ...... నిర్మాణం

రే.ఖం. AQ $\cong$ రే.ఖం. QC ...... AC మధ్యబిందువు Q

$\angle AQP \cong \angle CQR$ ..... పరస్పర వ్యతిరేక కోణము.

$\therefore$ Δ AQP $\cong$ Δ CQR .... భు.కో.భు నియమం.

$\angle PAQ \cong \angle RCQ$ ..... (1) సర్వసమాన త్రిభుజాల సంగత కోణము.

$\therefore$ రే.ఖం. AP $\cong$ రే.ఖం. CR ......(2) సర్వసమాన త్రిభుజాల సంగత భుజము

సమీకరణము (1) నుండి రేఖ AB $\parallel$ రేఖ CR.........ఏకాంతర కోణముల నియమం.

సమీకరణము (2) నుండి రే.ఖం. AP $\cong$ రే.ఖం. CR

కాని రే.ఖం. AP $\cong$ రే.ఖం. PB $\cong$ రే.ఖం. CR మరియు రే.ఖం. PB $\parallel$ రే.ఖం. CR

$\therefore$ $\square$PBCR సమాంతర చతుర్భుజము అవుతుంది.

$\therefore$ రే.ఖం. PQ$\parallel$ రే.ఖం. BC మరియు PR=BC ఎందుకనగా ఎదుటి భుజాలు సమాన పొడవుతో ఉంటాయి.

$PQ = \frac{1}{2}$ PR ...... నిర్మాణం

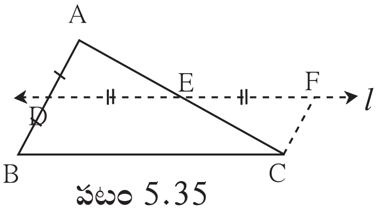
$\therefore$ $PQ = \frac{1}{2}$ BC $\qquad \because$ PR = BC

త్రిభుజములోని రెండు భుజముల మధ్య బిందువుల సిద్ధాంత విపర్యయము

సిద్ధాంతము: త్రిభుజములోని ఒక భుజము మధ్య బిందువు నుండి వెళ్ళు రేఖాఖండము, రెండవ భుజమునకు సమాంతరముగా ఉండి మూడవ భుజమును సమద్విఖండన చేయును.

ఈ వివరణ కొరకు పటము, దత్తాంశము, సారంశము, నిర్మాణము ఇవ్వబడెను. దాని ఆధారంగా ఆ వివరణ ఉపపత్తిని రాయడానికి ప్రయత్నించుము.

దత్తాంశం : Δ ABC యొక్క భుజం AB మధ్య బిందువు D. బిందువు D గుండా పోవు భుజము BC కి సమాంతరంగా గల రేఖ l భుజము AC ని బిందువు E వద్ద ఖండిస్తుంది.



పటం 5.35

సారాంశం : AE = EC

నిర్మాణం : బిందువు C నుండి రేఖ ABకి సమాంతర రేఖ గీయండి. ఈ రేఖ l రేఖను ఏ బిందువు వద్ద ఖండిస్తుందో దానికి F అని పేరు పెట్టండి.

ఉపపత్తి : రేఖ l || రే.ఖం. BC (దత్తాంశము) మరియు చేసిన నిర్మాణమును ఉపయోగించి □BCFD సమాంతర చతుర్భుజమని నిరూపించుము.

$\Delta ADE \cong \Delta CFE$ అని నిరూపించుము మరియు దాని ఆధారంగా సారాంశమును నిరూపించువచ్చును.

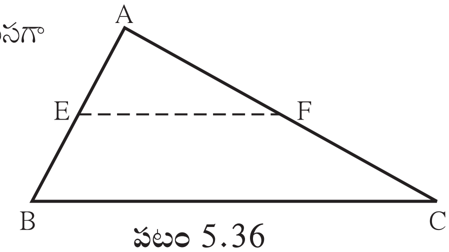
సాధించిన ఉదాహరణములు:

ఉదా (1) Δ ABC యొక్క భుజాలు AB మరియు AC ల మధ్య బిందువులు వరుసగా E మరియు F. అయితే EF = 5.6 అయినచో BC యొక్క పొడవు కనుగొనండి.

వివరణ : Δ ABC లో బిందువు E మరియు బిందువు F లు వరుసగా భుజం AB మరియు భుజం AC ల మధ్య బిందువులు.

$EF = \frac{1}{2}$ BC ......మధ్య బిందువుల సిద్ధాంతం.

$5.6 = \frac{1}{2}$ BC $\qquad \therefore$ BC = 5.6 × 2 = 11.2



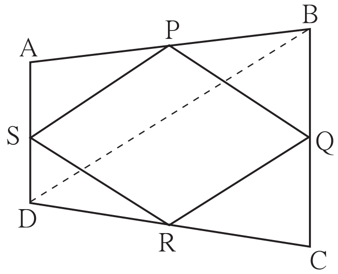
పటం 5.36

ఉదా (2) ఏదేని చతుర్భుజము యొక్క భుజాలు మధ్య బిందువులను వరుసగా కలుపగా తయారైన చతుర్భుజము సమాంతర చతుర్భుజము అవుతుందని అని నిరూపించుము.

దత్తాంశం : □ABCD భుజము AB, BC, CD మరియు AD ల మధ్య బిందువులు వరసగా P, Q, R, S లు

సారాంశం : □PQRS సమాంతర చతుర్భుజము

నిర్మాణం : కర్ణము BD గీయుము.



పటం 5.37

ఉపపత్తి : Δ ABD లో AD మధ్య బిందువు S మరియు AB మధ్యబిందువు P

$\therefore$ మధ్యబిందువు సిద్ధాంతము ప్రకారము, PS || DB, PS = $\frac{1}{2}$ BD .... (1)

ఇదే విధంగా Δ DBCలో Q మరియు Rలు వరుసగా BC మరియు DC ఈ భుజముల మధ్యబిందువులు.

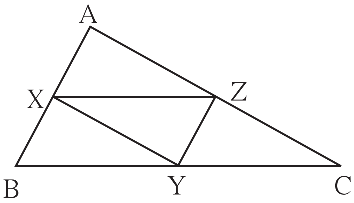
$\therefore$ QR || BD, QR = $\frac{1}{2}$ BD .... (2) మధ్య బిందువుల సిద్ధాంతము ప్రకారం

$\therefore$ PS || QR, PS = QR .... (1) మరియు (2) ల నుండి బట్టి

$\therefore$ □PQRS సమాంతర చతుర్భుజము అవుతుంది.

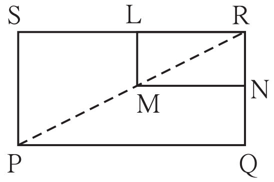
అభ్యాసం 5.5

1. పటము 5.38 లో Δ ABC యొక్క భుజము AB, భుజము BC మరియు భుజం AC లకు బిందువులు X, Y, Z లు వరుసగా మధ్య బిందువులు. AB=5 సె.మీ., AC=9 సె.మీ. మరియు BC = 11 సె.మీ., అయినచో XY, YZ, XZ ల పొడవులు కనుగొనండి.



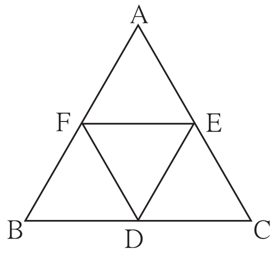
పటం 5.38

2. పటము 5.39 లో □PQRS మరియు □MNRL లు దీర్ఘ చతురస్రములు. బిందువు M, PR యొక్క మధ్యబిందువు. అయినచో (i) SL = LR, (ii) LN = $\frac{1}{2}$SQ అని నిరూపించుము.



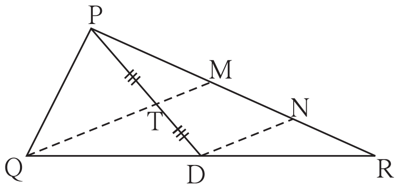
పటం 5.39

3. పటం 5.40 లో Δ ABC సమబాహుత్రిభుజములో భుజము AB, భుజం BC, భుజము AC ల మధ్య బిందువులు వరుసగా F, D, E అయినచో Δ FED సమబాహు త్రిభుజము అని నిరూపించుము.



పటం 5.40

4. పటం 5.41 లో రే.ఖం. PD Δ PQR యొక్క మధ్యగతరేఖ. బిందువు T, PD యొక్క మధ్య బిందువు. QT ని పొడిగించినచో PR ను M బిందువు వద్ద ఖండిస్తుంది, అయిన $\frac{PM}{PR} = \frac{1}{3}$ అని చూపండి. [సూచన : DN || QM ను గీయండి.]



పటం 5.41

సంకీర్ణ ప్రశ్నసంగ్రహం 5

1. కింది బహు పర్యాయాల ప్రశ్నలకిచ్చిన సమాధానాలలోనుంచి సరియైన పర్యాయాన్ని ఎన్నుకొండి.

(i) ఏ చతుర్భుజంలో ఆసన్న భుజాలజతలన్నియు సర్వసమానమో ఆ చతుర్భుజం పేరేమిటి?

(A) దీర్ఘచతురస్రం (B) సమాంతరచతుర్భుజం (C) సమలంబచతుర్భుజం (D) సమచతుర్భుజం

(ii) ఒకచతురస్రంలోని కర్ణములపొడవు $12\sqrt{2}$ సె.మీ. గలదు. అయిన దాని చుట్టుకొలతెంత?

(A) 24 సె.మీ. (B) $24\sqrt{2}$ సె.మీ. (C) 48 సె.మీ. (D) $48\sqrt{2}$ సె.మీ.

(iii) ఒక సమచతుర్భుజం యొక్క ఎదుటి కోణాల కొలతలు $(2x)^\circ$ మరియు $(3x-40)^\circ$ అయినచో x = ?

(A) 100 ° (B) 80 ° (C) 160 ° (D) 40 °

2. ఒక లంబకోణ చతుర్భుజం యొక్క ఆసన్న భుజాలు వరుసగా 7 సె.మీ. మరియు 24 సె.మీ. అయినచో ఆ చతుర్భుజం కర్ణముల పొడవులు కనుగొనండి.

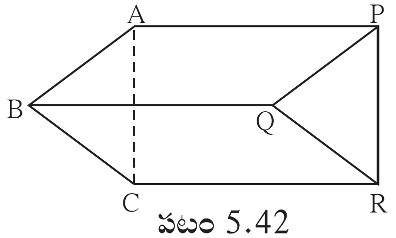
3. చతురస్ర కర్ణముల పొడవు 13 సె.మీ. అయినచో చతురస్ర భుజమును కనుగొనండి.

4. సమాంతర చతుర్భుజంలోని రెండు ఆసన్న భుజాల నిష్పత్తి 3:4 అయితే చుట్టు కొలత 112 సె.మీ. అయినచో దాని ప్రతిభుజం పొడవును కనుగొనండి.

5. సమచతుర్భుజ కర్ణము PR మరియు కర్ణము QS ల పొడవులు వరుసగా 20 సె.మీ. మరియు 48 సె.మీ. అయినచో సమచతుర్భుజము PQRS యొక్క భుజము PQ పొడవును కనుగొనండి.

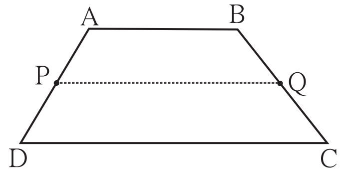
6. దీర్ఘచతురస్రం PQRS కర్ణములు పరస్పరము M బిందువు వద్ద ఖండించుకొనును. అయితే $\angle QMR = 50^\circ$ అయినచో $\angle MPS$ కొలతను కనుగొనండి.

7. ప్రక్క పటము 5.42లో రే.ఖం. AB || రే.ఖం. PQ, రే.ఖం. AB ≅ రే.ఖం. PQ, రే.ఖం. AC || రే.ఖం. PR, రే.ఖం. AC ≅ రే.ఖం. PR అయిన రే.ఖం. BC || రే.ఖం. QR, రే.ఖం. BC ≅ రే.ఖం. QR అని నిరూపించుము.



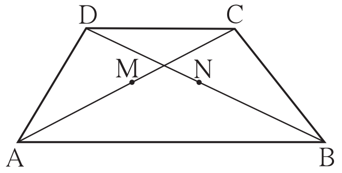
పటం 5.42

8*. ప్రక్క పటము 5.43 లో □ABCD సమలంబ చతుర్భుజము AB || DC. P మరియు Q లు వరుసగా రే.ఖం. AD మరియు రే.ఖం. BC ల మధ్య బిందువులు, అయినచో PQ || AB మరియు $PQ = \frac{1}{2}(AB + DC)$ అని నిరూపించుము.



పటం 5.43

9. ప్రక్క పటము 5.44లో □ABCD సమలంబ చతుర్భుజము. AB || DC. M మరియు N లు వరుసగా కర్ణము AC మరియు కర్ణము DB ల మధ్య బిందువు అయిన MN || AB అని నిరూపించుము.



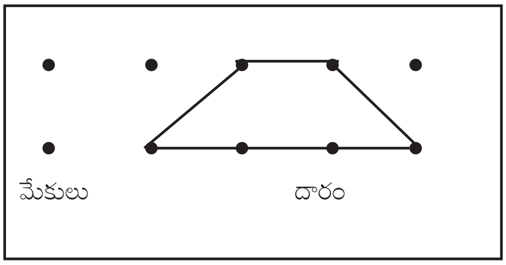
పటం 5.44

కృత్యము

చతుర్భుజము యొక్క వివిధ ధర్మములను సరిచూడడం.

కావల్సిన వస్తువులు : 15 సె.మీ. × 10 సె.మీ. ఫ్లైవుడ్ ముక్క; 12 నుండి 15 మేకులు, మందపు దారము, కత్తెర.

సూచన: 15 సె.మీ. × 10 సె.మీ. ఫ్లైవుడ్ ముక్కపై సరళరేఖలో 2 సె.మీ. దూరంలో 5 మేకులు కొట్టండి. అదేవిధముగా కింది సరళరేఖలో కూడా మేకులు కొట్టండి. రెండు రేఖల మధ్యదూరము 2 సె.మీ. ఉంచండి. దారముతో వేర్వేరు చతుర్భుజములు (మేకుల ఆధారంగా) తయారుచేయండి. భుజాలకు సంబంధించి ధర్మములను దారంతో సరిచూడండి. దీనినిబట్టి చతుర్భుజము కోణముల ధర్మంను సరిచూడండి.



పటం 5.45

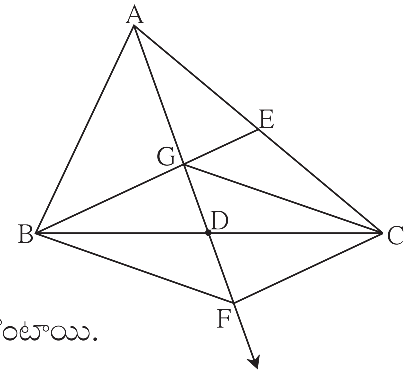
అధిక వివరాలకై

త్రిభుజములయొక్క మధ్యగతరేఖల మిళిత బిందువు ప్రతి మధ్యగతను 2:1 నిష్పత్తిలో విభజించును. ఈ ధర్మం మీకు తెలిసేవుంటుంది. క్రింద ఇవ్వబడిన దాని ఉపపత్తిని అభ్యసించుము.

దత్తాంశం : Δ ABC యొక్క రే.ఖం. AD మరియు రే.ఖం. BE ఈ మధ్యగత రేఖలు బిందువు G వద్ద ఖండించుకొంటాయి.

సారాంశం : AG : GD = 2 : 1

నిర్మాణం : కిరణం AD పై బిందువు F, G–D–F మరియు GD = DF అగునట్లుగా తీసుకొన్నాం.



పటం 5.46

ఉపపత్తి □BGCF యొక్క కర్ణములు పరస్పరము సమద్విఖండనము చేసుకొంటాయి.

.... దత్తాంశము మరియు నిర్మాణము.

∴ □BGCF సమాంతర భుజాలు.

∴ రేఖ BE || రేఖ FC .... సమాంతర చతుర్భుజముల ఎదుటి భుజాలను చేర్చుకొన్న రేఖ

ఇప్పుడు Δ AFC యొక్క భుజము AC మధ్య బిందువు E. .... (దత్తాంశము)

రే.ఖం. EB || రేఖ FC

త్రిభుజము యొక్క ఒక భుజము మధ్య బిందువు నుండి రెండవ భుజమునకు సమాంతరము గల రేఖ మూడవ భుజమును సమద్విఖండన చేయును.

∴ రే.ఖం. AF మధ్యబిందువు G

∴ AG = GF

కాని AG = 2 GD

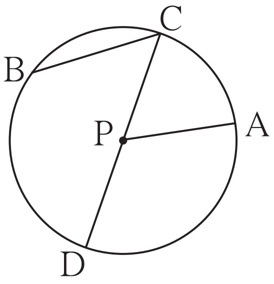
$\frac{AG}{GD} = \frac{2}{1}$ అనగా AG : GD = 2 : 1

6 వృత్తము

చదవండి, నేర్చుకుందాం

- వృత్తము
- వృత్తంలోని జ్యాయొక్క ధర్మాలు
- అంతర వృత్తము
- పరివృత్తము

కొంచెం గుర్తుతెచ్చుకుందాం.



పటం 6.1

ప్రక్క పటములో P కేంద్రముగల వృత్తమును పరిశీలించి, పటము ఆధారంగా క్రింది ఖాళీలను పూరింపుము.

---	రే.ఖం. PA	---	---	---	---	∠CPA
జ్యా	---	వ్యాసము	వ్యాసార్థం	కేంద్రము	కేంద్రీయ కోణం	---

తెలుసుకొందాం.

వృత్తము (Circle)

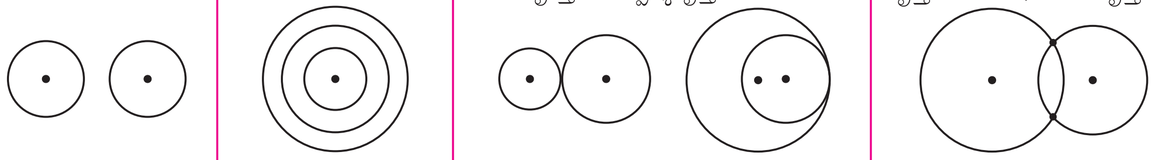
బిందు సమితి రూపంలో ఈ వృత్తమును వర్ణిద్దాం.

- తలములోని ఒక స్థిరబిందువు నుండి సమాన దూరములో గల అన్ని బిందువుల సమితిని **వృత్తము** (Circle) అంటారు. ఆ స్థిరబిందువును వృత్తము యొక్క **కేంద్రబిందువు** లేదా **వృత్త కేంద్రము**(Centre of a circle) అంటారు.

వృత్తానికి సంబంధించి కొన్ని పదములు

- వృత్త కేంద్రము నుండి వృత్తము పై గల ఏదేని బిందువును కలిపే రేఖాఖండమును వృత్తము యొక్క **వ్యాసార్థం** (radius) అంటారు.
- వృత్త కేంద్రము మరియు వృత్తము పై గల ఏదేని బిందువుల మధ్యనున్న అంతరాన్ని గూడా **వృత్తవ్యాసార్థం** అని అంటారు.
- వృత్తము పైగల ఏవేని రెండు బిందువులను కలిపే రేఖాఖండమును వృత్తము యొక్క **చాపము** (Chord) అంటారు.
- వృత్త కేంద్రము నుండి పోయే జ్యాను ఆ వృత్త **వ్యాసము** (Diameter) అని అంటారు. వ్యాసము వృత్తము యొక్క అతిపెద్ద జ్యా.

తలములోని వృత్తములు.



సర్వసమాన వృత్తములు	ఏకకేంద్ర వృత్తములు	ఒకే బిందువు వద్ద ఖండించుకొనే వృత్తాలు (స్పర్శవృత్తములు)	రెండు బిందువులవద్ద ఖండించుకొనే వృత్తములు (ఖండన వృత్తములు)
• వ్యాసార్థాలు సమానం	• ఒక కేంద్రము విభిన్న వ్యాసార్థములు	• విభిన్న కేంద్రములు, విభిన్న వ్యాసార్థములు, ఒకే ఉమ్మడి బిందువు	• విభిన్న కేంద్రములు, విభిన్న వ్యాసార్థాలు, రెండు ఉమ్మడి బిందువులు.

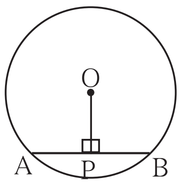
పటం 6.2

వృత్తములోని జ్యా యొక్క ధర్మాలు (Properties of chord)

కృత్యము I : జట్టులోని ప్రతి విద్యార్థి క్రింది కృత్యమును చేయవలెను.

మీ-మీ పుస్తకాలలో ఒక వృత్తం గీయండి. దానిలో ఒక జ్యాను గీయండి. వృత్త కేంద్రము నుండి జ్యా పై లంబం గీయుము. ఇప్పుడు జ్యా రెండు భాగాలు అయింది. వాటి పొడవులు కొలవండి.

జట్టు నాయకుడు కింది విధంగా ఒక పట్టిక తయారు చేయాలి. అందులో అందరి పరిశీలనలను నమోదు చేయాలి.



పటం 6.3

విద్యార్థి / పొడవు	1	2	3	4	5	6
l (AP)	...... సె.మీ.					
l (PB)	...... సె.మీ.					

ఈ పరిశీలన నుండి గుర్తుకు వచ్చే ధర్మంను రాయండి. ఆ ధర్మం ఉపపత్తిని చూద్దాం.

సిద్ధాంతము: వృత్త కేంద్రము నుండి జ్యాపైకి గీచిన లంబ రేఖ ఆ జ్యాను సమద్విఖండన చేస్తుంది.

దత్తాంశం : O కేంద్రముగల వృత్తములో రే.ఖం. AB జ్యా

రే.ఖం. OP $\perp$ జ్యా AB

సారాంశం : రే.ఖం. AP $\cong$ రే.ఖం. BP

ఉపపత్తి : రే.ఖం. OA మరియు రే.ఖం. OB గీయండి.

Δ OPA మరియు Δ OPB లలో

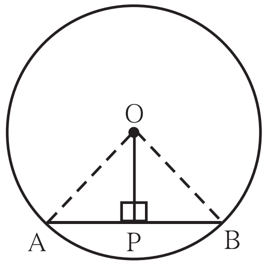
$\angle$OPA $\cong$ $\angle$OPB . . . . రే.ఖం. OP $\perp$ జ్యా AB,

రే.ఖం. OP $\cong$ రే.ఖం. OP . . . . ఉమ్మడి భుజము

కర్ణము OA $\cong$ కర్ణము OB . . . . ఒకే వృత్త వ్యాసార్ధాలు

$\therefore$ Δ OPA $\cong$ Δ OPB . . . . కర్ణము భుజము సిద్ధాంతము.

రే.ఖం. PA $\cong$ రే.ఖం. PB . . . . సర్వసమాన త్రిభుజముల యందలి సంగత భుజములు



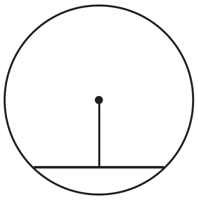
పటం 6.4

కృత్యము II : జట్టులోని ప్రతి విద్యార్థి క్రింది కృత్యమును చేయవలెను.

మీ-మీ నోటు పుస్తకాలలో ఒక వృత్తము గీయండి. దానిలో ఒక జ్యాను గీయండి. జ్యా మధ్య బిందువును గుర్తించండి. ఆ మధ్య బిందువు మరియు వృత్త కేంద్రాన్ని కలిపే రేఖాఖండాన్ని గీయండి. ఈ రేఖాఖండం జ్యాతో చేసిన కోణాన్ని కొలువుము. ఏమి తెలుస్తుంది?

మీరు కొలిచిన కోణముల కొలతలను ఒకరికొకరు చెప్పుకోండి.

దీనిని బట్టి ఏ ధర్మం గుర్తుకొస్తుందో నిర్ణయించండి.



పటం 6.5

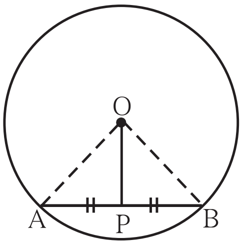
సిద్ధాంతము : వృత్త కేంద్రమును మరియు మధ్య బిందువును కలుపు రేఖాఖండం ఆ జ్యాకు లంబముగా ఉంటుంది.

దత్తాంశం : O కేంద్రము గల వృత్తములో రే.ఖం. AB జ్యా

జ్యా AB యొక్క మధ్య బిందువు P అనగా రే.ఖం. AP ≅ రే.ఖం. PB

సారాంశం : రే.ఖం. OP ⊥ జ్యా AB

ఉపపత్తి : రే.ఖం. OA మరియు రే.ఖం. OB గీయండి.



పటం 6.6

Δ AOP మరియు Δ BOP లలో

రే.ఖం. OA ≅ రే.ఖం. OB . . . . (ఒకే వృత్త వ్యాసార్థములు)

రే.ఖం. OP ≅ రే.ఖం. OP. . . . . (ఉమ్మడి భుజము)

రే.ఖం. AP ≅ రే.ఖం. BP . . . . (దత్తాంశము)

∴ Δ AOP ≅ Δ BOP . . . . (భు-భు-భు నియమం)

∴ ∠OPA ≅ ∠OPB . . . . (సర్వసమాన త్రిభుజము యందలి సంగతికోణాలు) . . . .(I)

ఇప్పుడు ∠OPA + ∠OPB = 180° . . . (రేఖీయద్వయంలోని కోణాలు)

∠OPB + ∠OPB = 180° . . . . . . (I) (నుండి)

2 ∠OPB = 180°

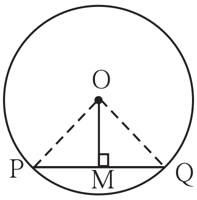
∠OPB = 90°

∴ రే.ఖం. OP ⊥ జ్యా AB

సాధించిన ఉదాహరణములు:

ఉదా (1) ఒక వృత్త వ్యాసార్థము 5 సె.మీ. ఆ వృత్తము యొక్క ఒక జ్యా పొడవు 8 సె.మీ. అయిన ఆ జ్యా నుండి కేంద్రమునకు మధ్య గల దూరంను కనుగొనండి.

వివరణ :



పటం 6.7

ముందుగా ఇచ్చిన వివరణనుబట్టి పటమును గీయండి.

O కేంద్రముగల వృత్త జ్యా PQ పొడవు 8 సె.మీ. అని అనుకోండి.

రే.ఖం. OM ⊥ జ్యా PQ గీసాం.

వృత్త కేంద్రము నుండి జ్యాపై గీచిన లంబరేఖ ఆ జ్యాను సమద్విఖండన చేస్తుందని మనకు తెలుసు.

∴ PM = MQ = 4 సె.మీ.

వృత్యా వ్యాసార్థం 5 సె.మీ. అనగా OQ = 5 సె.మీ. అని ఇచ్చారు.

లంబకోణ Δ OMQ లో పైథాగరస్ సిద్ధాంతం ప్రకారం

$OM^2 + MQ^2 = OQ^2$

$OM^2 + 4^2 = 5^2$

$\therefore \; OM^2 = 5^2 - 4^2 = 25 - 16 = 9 = 3^2$

$\therefore \; OM = 3$

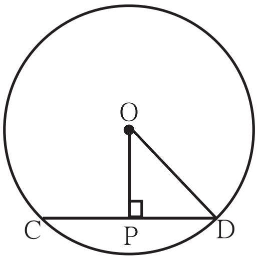
అనగా, జ్యా నుండి వృత్త కేంద్రమునకు మధ్యగల దూరం 3 సె.మీ.

ఉదా (2) ఒక వృత్త వ్యాసార్థము 20 సె.మీ. ఈ వృత్తంలోని ఒక జ్యావృత్త కేంద్రంనుండి 12 సె.మీ. దూరంలోగలదు, అయినచో జ్యా పొడవును కనుగొనండి.

వివరణ : వృత్త కేంద్రమును O అనుకొనుము. వ్యాసార్థము = OD = 20 సె.మీ. జ్యా CD కేంద్రము O నుండి 12 సె.మీ. దూరములో గలదు. రే.ఖం. OP $\perp$ రే.ఖం. CD

$\therefore$ OP = 12 సె.మీ.

$\therefore$ CP = PD ...... వృత్త కేంద్రము నుండి జ్యా పైకి గీచిన లంబరేఖ జ్యాను సమద్విఖండన చేస్తుంది.



పటం 6.8

లంబకోణ Δ OPD లో పైథాగరస్ సిద్ధాంతము ప్రకారం

$$OP^2 + PD^2 = OD^2$$

$$(12)^2 + PD^2 = 20^2$$

$$PD^2 = 20^2 - 12^2$$

$$PD^2 = (20+12)(20-12)$$

$$= 32 \times 8 = 256$$

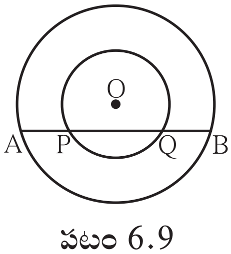
$\therefore$ PD = 16 $\qquad$ $\therefore$ CP = 16

CD = CP + PD = 16 + 16 = 32

$\therefore$ జ్యా పొడవు 32 సె.మీ.

అభ్యాసం 6.1

1. వృత్త కేంద్రము O నుండి జ్యా AB మధ్య దూరం 8 సె.మీ. జ్యా AB పొడవు 12 సె.మీ. అయినచో వృత్త వ్యాసంను కనుగొనండి.
2. ఒక వృత్త వ్యాసము 26 సె.మీ. జ్యా పొడవు 24 సె.మీ. అయినచో కేంద్రము నుండి జ్యాకుగల దూరంను కనుగొనండి.
3. వృత్త కేంద్రము నుండి జ్యాకు మధ్యగల దూరం 30 సె.మీ. వృత్య వాసార్థం 34 సె.మీ. అయినచో జ్యా పొడవును కనుగొనండి.
4. O కేంద్రము గల వృత్త వ్యాసార్థము 41 సె.మీ. వృత్త జ్యా PQ పొడవు 80 సె.మీ. కేంద్రము నుండి జ్యా PQ నకు గల దూరంను కనుగొనండి.
5. పటము 6.9 లో O కేంద్రము గల రెండు వృత్తములు గలవు. పెద్ద వృత్తము జ్యా AB చిన్న వృత్తమును బిందువులు P మరియు Q వద్ద ఖండించుచున్నచో, AP = BQ అని నిరూపించండి.
6. వృత్తవ్యాసము వృత్తం యొక్క రెండు జ్యాలను సమద్విఖండనము చేసినచో ఆ జ్యాలు పరస్పరము సమాంతరము అని నిరూపించండి.



పటం 6.9

కృత్యము I

(1) అనువైన వ్యాసార్థాలతో వృత్తములు గీయండి.

(2) ప్రతివృత్తములో సమాన పొడవుగల రెండు జ్యాలను గీయండి.

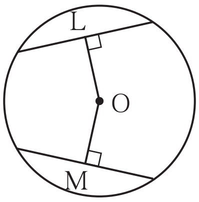
(3) వృత్త కేంద్రమునుండి ప్రతి జ్యాపై లంబం గీయండి.

(4) వృత్త కేంద్రమునుండి ప్రతి జ్యామధ్యగల దూరంను కొలవండి.

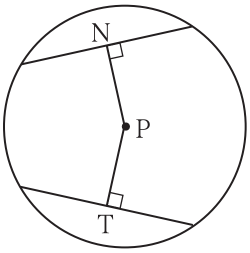
తెలుసుకొందాం.

వృత్తము నందలి సర్వసమాన జ్యాలు మరియు కేంద్రం నుండి వాటికి మధ్యగల దూరముల ధర్మము.

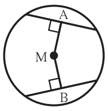
కృత్యము II



పటం (i)



పటం (ii)



పటం (iii)

పటం (i) లో OL = OM, పటం (ii) లో PN = PT, పటం (iii) లో MA = MB ఇలా కనిపించిందా?
ఈ కృత్యం నుండి గుర్తుకొచ్చే ధర్మంను రాయండి.

తెలుసుకొందాం.

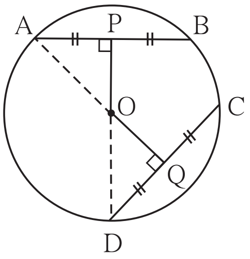
సర్వ సమాన జ్యాల ధర్మాలు (Properties of congruent chords)

సిద్ధాంతము: ఒకే వృత్తముయందలి సర్వసమాన జ్యాలు కేంద్రము నుండి సమాన దూరములో ఉంటాయి.

దత్తాంశం : O కేంద్రము గల వృత్తములో
జ్యా AB $\cong$ జ్యా CD
OP $\perp$ AB, OQ $\perp$ CD

సారాంశం : OP = OQ

నిర్మాణం : రే.ఖం. OA మరియు రే.ఖం. OD లను కలపండి.



పటం 6.10

ఉపపత్తి : AP = $\frac{1}{2}$ AB, DQ = $\frac{1}{2}$ CD . వృత్తకేంద్రము నుండి జ్యాపైకి గీచిన లంబరేఖ ఆజ్యాను సమద్విఖండన చేస్తుంది

AB = CD . . . . దత్తాంశము

$\therefore$ AP = DQ

$\therefore$ రే.ఖం. AP $\cong$ రే.ఖం. DQ . . . . (I) . . . సమాన పొడవుగల రేఖాఖండాలు

లంబకోణ Δ APO మరియు లంబకోణ Δ DQO లో

రే.ఖం. AP $\cong$ రే.ఖం. DQ . . . . (I) నుండి

కర్ణము OA $\cong$ కర్ణము OD . . . . ఒకే వృత్త వ్యాసార్థాలు

$\therefore$ Δ APO $\cong$ Δ DQO . . . . కర్ణము భుజము సిద్ధాంతం

రే.ఖం. OP $\cong$ రే.ఖం. OQ . . . . సర్వసమాన త్రిభుజాల సంగత భుజాలు

$\therefore$ OP = OQ . . . . సర్వసమాన రేఖాఖండముల పొడవులు సమానం

వృత్తము నందలి సర్వసమాన జ్యాలు కేంద్రము నుండి సమాన దూరంలో ఉంటాయి.

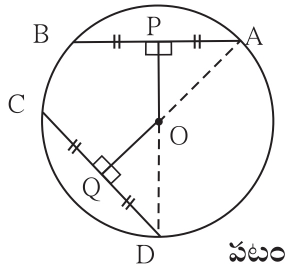
సిద్ధాంతము : ఒక వృత్తములో కేంద్రం నుండి సమాన దూరములో గల జ్యాలు సర్వసమానంగా ఉంటాయి.

దత్తాంశం : O కేంద్రముగల వృత్తంలో

రే.ఖం. OP ⊥ జ్యా AB

రే.ఖం. OQ ⊥ జ్యా CD

మరియు OP = OQ



పటం 6.11

సారాంశం : జ్యా AB ≅ జ్యా CD

నిర్మాణం : రే.ఖం. OA మరియు రే.ఖం. OD లను గీయండి.

ఉపపత్తి : క్రింది వాక్యాలలో ఖాళీలను పూరించండి.

లంబకోణము Δ OPA మరియు లంబకోణం Δ OQD లో

కర్ణము OA ≅ కర్ణము OD . . . . [ ]

రే.ఖం. OP ≅ రే.ఖం. OQ . . . . దత్తాంశము

∴ Δ OPA ≅ Δ OQD . . . . [ ]

∴ రే.ఖం. AP ≅ రే.ఖం. QD . . . . సర్వసమాన త్రిభుజాల సంగత భుజాలు.

∴ AP = QD . . . . (I)

కాని AP = $\frac{1}{2}$ AB, OQ = $\frac{1}{2}$ CD . . . . . [ ]

∴ AP = QD . . . . (I) వివరణ నుండి

∴ AB = CD

∴ రే.ఖం. AB ≅ రే.ఖం. CD

పై రెండు సిద్ధాంతములు ఒకదానికొకటి విపర్యయములు అని తెలుసుకోండి.

ఇది గుర్తుంచుకొందాం.

ఒక వృత్తంలోని సర్వసమాన జ్యాలు వృత్తం కేంద్రం నుండి సమాన దూరంలో ఉంటాయి.

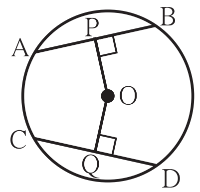
కృత్యము : పై రెండు సిద్ధాంతాలు ఒకే వృత్తంగాకుండా సర్వసమాన వృత్తాలు తీసికొని నిరూపించవచ్చు.

1. సర్వసమాన వృత్తములలో సర్వసమాన జ్యాలు వృత్తకేంద్రము నుండి సమాన దూరములో ఉంటాయి.
2. సర్వసమాన వృత్తాలలో వృత్తకేంద్రమునుండి సమాన దూరములో గల జ్యాలు సర్వ సమానంగా ఉంటాయి.

ఈ రెండు సిద్ధాంతాల దత్తాంశం, సారాంశం, ఉపపత్తిని రాయండి.

సాధించిన ఉదాహరణములు:

ఉదా. ఇచ్చిన పటంలో AB = CD. బిందువు O వృత్త కేంద్రము, అయితే OP = 4 సె.మీ. అయినచో OQ పొడవు కనుగొనండి



పటం 6.12

సాధన : O కేంద్రముగల వృత్తంలో

జ్యా AB ≅ జ్యా CD అని ఇవ్వబడింది.

OP ⊥ AB, OQ ⊥ CD

OP = 4 సె.మీ. అనగా జ్యా AB, వృత్త కేంద్రం O నుండి 4 సె.మీ. దూరంలో గలదు.

ఒకే వృత్తంలోని సర్వసమాన జ్యాలు కేంద్రం నుండి సమాన దూరంలో ఉంటాయని మనకు తెలుసు.

∴ OQ = 4 సె.మీ.

అభ్యాసం 6.2

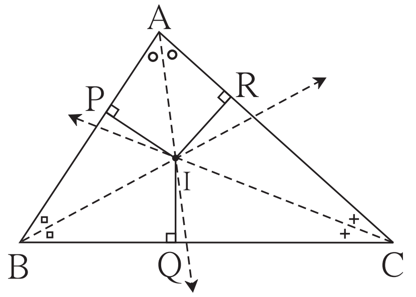
1. ఒక వృత్త వ్యాసార్థము 10 సె.మీ. ఆ వృత్తములో ప్రతిది 16 సె.మీ. ల పొడవు గల రెండుజ్యాలు గలవు. అయితే ఆ జ్యాలు వృత్తకేంద్రము నుండి ఎంత దూరంలో ఉండవచ్చును?
2. ఒక వృత్తములో రెండు సమాన పొడవుగల జ్యాలు గలవు. అవి కేంద్రము నుండి 5 సె.మీ. దూరములో వుండి వృత్త వ్యాసార్థం 13 సె.మీ. అయినచో ఆ జ్యా పొడవు కనుగొనండి.
3. C కేంద్రము గల వృత్తములో రే.ఖం. PM మరియు రే.ఖం. PN లు సర్వసమాన జ్యాలు. అయిన కిరణము PC, ∠NPM యొక్క సమద్విఖండన రేఖ అని నిరూపించుము.

కొంచెం గుర్తుతెచ్చుకుందాం

కింది తరగతులలో మనము వివిధ త్రిభుజాలు గీసి వాటి కోణసమద్విఖండన రేఖలు మిళితాలు అవుతాయనిన ధర్మంను మనము నిరూపణ చేసుకొన్నాం. త్రిభుజం యొక్క కోణసమద్విఖండన రేఖల మిళిత బిందువును 'I' అను అక్షరంతో సూచిస్తారని మనకు తెలుసు.

తెలుసుకొందాం.

త్రిభుజ అంతరవృత్తము (Incircle of a triangle)



పటం 6.13

Δ ABC యొక్క మూడు కోణసమద్విఖండనరేఖలు I బిందువు వద్ద కలిసినవి.

కోణసమద్విఖండన రేఖల యొక్క I మిళిత బిందువు నుండి త్రిభుజము యొక్క మూడు భుజాలపై లంబాలు గీయబడ్డాయి.

IP ⊥ AB, IQ ⊥ BC, IR ⊥ AC

కోణ సమద్విఖండన రేఖపై గల ప్రతి బిందువు కోణంయొక్క రెండు భుజాల నుండి సమాన దూరంలో ఉంటాయని మనం నేర్చుకున్నాం.

∠B యొక్క కోణసమద్విఖండన రేఖపై I బిందువు కలదు. కావున IP = IQ.

∠C యొక్క కోణ సమద్విఖండన రేఖపై I బిందువు కలదు. కావున IQ = IR

IP = IQ= IR

బిందువు I త్రిభుజము యొక్క మూడు భుజముల నుండి అనగా AB, AC, BC లనుండి సమాన దూరంలోనున్నది.

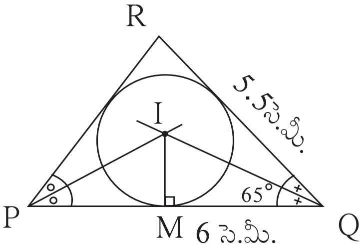
∴ బిందువు I కేంద్రము అనుకొని మరియు IP వ్యాసార్థముగా తీసుకొని గీసిన వృత్తము భుజము AB, AC మరియు BC లను లోపలి నుండి స్పర్శించును. ఇలాంటి వృత్తమును అంతర వృత్తము అంటారు.

తెలుసుకొందాం.

త్రిభుజము యొక్క అంతరవృత్తమును గీయుట. (To construct incircle of a triangle)

ఉదా. Δ PQR లో PQ = 6 సె.మీ., $\angle Q = 35^\circ$, QR = 5.5 సె.మీ. నుండునట్లుగా Δ PQR యొక్క అంతరవృత్తమును గీయండి.

ముందుగా చిత్తు పటము గీసి దానిలో ఇచ్చిన సమాచారమును చూపండి.



చిత్తుపటం 6.14

నిర్మాణ క్రమము:

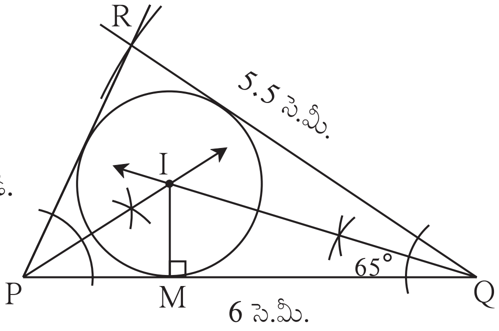
(1) ఇచ్చిన కొలతలుగల Δ PQR గీయండి.

(2) ఏవేని రెండు కోణముల కోణసమద్విఖండన రేఖలను గీయండి.

(3) కోణసమద్విఖండన రేఖల ఖండనబిందువుకు I అని పేరివ్వండి.

(4) బిందువు I నుండి రేఖ PQ పై IM అను లంబమును గీయండి.

(5) IM ను వ్యాసార్థముగా మరియు I ని కేంద్రముగా తీసుకొని వృత్తమును గీయండి.



పటం 6.15

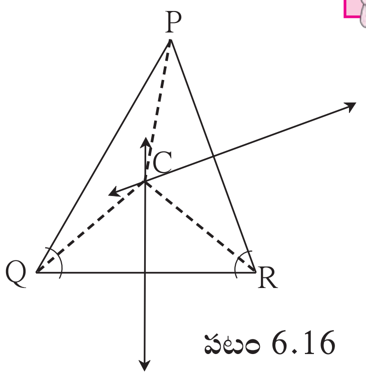
ఇది గుర్తుంచుకొందాం.

త్రిభుజం యొక్క మూడు భుజాలను స్పర్శించే వృత్తంను త్రిభుజఅంతరవృత్తమని అంటారు. మరియు ఆ వృత్తంయొక్క కేంద్రంను అంతరవృత్త కేంద్రం లేదా అంతరమధ్యమం లేదా అంతరకేంద్రమని అంటారు.

కొంచెం గుర్తుతెచ్చుకుందాం

క్రింది తరగతులలో మీరు త్రిభుజం యొక్క భుజాల లంబ సమద్విఖండన రేఖలు మిళితాలు అవుతాయి అనే ధర్మాన్ని వివిధ త్రిభుజాలను గీసి సరిచూడడం జరిగింది. త్రిభుజ భుజాల యొక్క లంబసమద్విఖండన రేఖల మిళితబిందువును C అనే అక్షరంతో చూపుతారు.

తెలుసుకొందాం.



పటం 6.16

Δ PQR యొక్క భుజాల లంబసమద్విఖండన రేఖలు C వద్ద కలుస్తున్నాయి. కావున C అనేది లంబసమద్విఖండన రేఖల మిళిత బిందువు అవుతుంది.

త్రిభుజం యొక్క పరివృత్తము (Circumcircle)

బిందువు C త్రిభుజము PQR యొక్క మూడు భుజాల లంబ సమద్విఖండన రేఖలపై గల బిందువు. PC, QC, RC లను కలుపుము. రేఖాఖండము యొక్క లంబ సమద్విఖండన రేఖ పైగల ప్రతి బిందువు ఆ రేఖాఖండం చివరి బిందువుల నుండి సమాన దూరములో కలవు. దీనిని మనం అభ్యసించాం.

బిందువు C రే.ఖం. PQ యొక్క లంబసమద్విఖండన రేఖపై కలదు $\therefore$ PC = QC I

బిందువు C రే.ఖం. QR యొక్క లంబసమద్విఖండన రేఖపై కలదు $\therefore$ QC = RC II

$\therefore$ PC = QC = RC . . . . . I మరియు II వాక్యముల నుండి

$\therefore$ C బిందువు కేంద్రంగా మరియు PC ని వ్యాసార్థముగా తీసుకొని గీసిన వృత్తము త్రిభుజముయొక్క మూడు శీర్ష బిందువులనుండి పోవును. ఇలాంటి వృత్తంను త్రిభుజంయొక్క పరివృత్తమని అంటారు.

ఇది గుర్తుంచుకొందాం.

త్రిభుజము యొక్క అన్ని శీర్షబిందువుల నుండి వెళ్ళే వృత్తమును త్రిభుజము యొక్క పరివృత్తం అని అంటారు. ఆ వృత్త కేంద్రంను పరికేంద్రం అని అంటారు.

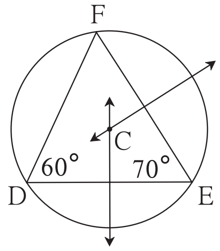
తెలుసుకొందాం.

త్రిభుజము యొక్క పరివృత్తమును గీయుట.

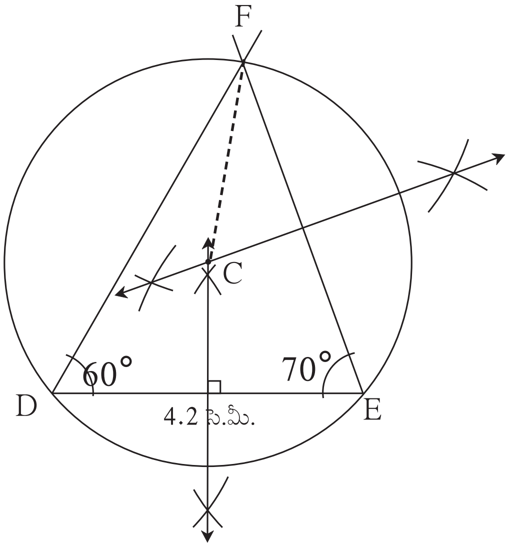
ఉదా. Δ DEF లో DE = 4.2 సె.మీ., $\angle D = 60°$, $\angle E = 70°$ అయినచో Δ DEF గీసి దాని పరివృత్తంను గీయండి.

ముందుగా చిత్తుపటంను గీసి, అందులో ఇచ్చిన సమాచారంను రాయండి.

చిత్తు పటము



పటం 6.17



పటం 6.18

నిర్మాణ క్రమము:

(1) ఇచ్చిన కొలతలతో త్రిభుజం DEF గీయండి.

(2) ఏవేని రెండు భుజములకు లంబసమద్విఖండన రేఖలను గీయండి.

(3) ఆ లంబసమద్విఖండన రేఖలు ఎక్కడ కలుస్తాయో ఆ బిందువుకు C అని పేర్పొండి.

(4) రే.ఖం. CF గీయండి.

(5) CF వ్యాసార్థంతో C కేంద్రంగా తీసుకొని వృత్తాన్ని గీయండి.

కృత్యము

వివిధ కొలతలతో మరియు వివిధ రకాల త్రిభుజాలు గీయండి. వాటి అంతరవృత్తాలు మరియు పరివృత్తాలు గీయండి. మీ పరిశీలనలను క్రింది పట్టికలో రాసి, చర్చించండి.

త్రిభుజ రకాలు	సమబాహు త్రిభుజం	సమద్విబాహు త్రిభుజం	విషమబాహు త్రిభుజం
అంతరవృత్త కేంద్రం యొక్క స్థానం	త్రిభుజం లోపల	త్రిభుజం లోపల	త్రిభుజం లోపల
పరివృత్త కేంద్రం యొక్క స్థానము	త్రిభుజం లోపల	త్రిభుజం లోపల లేక బయటలేక త్రిభుజంపై	

త్రిభుజ రకాలు	అల్పకోణ త్రిభుజం	లంబకోణ త్రిభుజం	అధికకోణ త్రిభుజం
అంతరవృత్త కేంద్రం యొక్క స్థానము			
పరివృత్త కేంద్రం యొక్క స్థానము		కర్ణము యొక్క మధ్య బిందువు	

ఇది గుర్తుంచుకొందాం.

- త్రిభుజం యొక్క అంతరవృత్తం త్రిభుజం యొక్క అన్ని భుజములను లోపలినుండి స్పర్శిస్తుంది.
- త్రిభుజ అంతరవృత్తం గీయుటకొరకు త్రిభుజం యొక్క ఏవేని రెండు కోణాల కోణ సమద్విఖండన రేఖలను గీయవలసివస్తుంది.
- త్రిభుజం యొక్క పరివృత్తము త్రిభుజం యొక్క మూడు శీర్షబిందువుల నుండి వెళ్ళుతుంది.
- త్రిభుజ పరివృత్తం గీయుటకు ఏవేని రెండు భుజములకు లంబసమద్విఖండన రేఖలను గీయవలసి వస్తుంది.
- అల్పకోణ త్రిభుజం యొక్క పరికేంద్రము త్రిభుజం లోపల ఉంటుంది.
- లంబకోణ త్రిభుజం యొక్క పరికేంద్రం కర్ణం మధ్య బిందువుపై ఉంటుంది.
- అధికకోణ త్రిభుజం యొక్క పరికేంద్రము త్రిభుజం బయట ఉంటుంది.
- ఏదేని త్రిభుజం యొక్క అంతరమధ్యమము త్రిభుజంయొక్క అంతర్భాగములో ఉంటుంది.

కృత్యము : ఏదేని ఒక సమబాహు త్రిభుజం గీసి దాని పరివృత్తం మరియు అంతరవృత్తం గీయండి. పై కృత్యము చేసేటప్పుడు మీకు క్రింది వాటిలో ఏమి కనిపించాయి?

(1) త్రిభుజము యొక్క పరివృత్తము మరియు అంతరవృత్తము గీయునప్పుడు వాటి కోణ సమద్విఖండన రేఖ మరియు భుజాల లంబసమద్విఖండన రేఖలుగా ఒకే రేఖ వచ్చిందా?

(2) పరివృత్తము మరియు అంతర వృత్తముల కేంద్రము ఒకటేనా? అలా ఉన్నచో దానికారణమేమై ఉండవచ్చును?

(3) పరివృత్తము యొక్క వ్యాసార్థము మరియు అంతరవృత్తము యొక్క వ్యాసార్థాలను కొలిచి వాటి నిష్పత్తిని కనుగొనండి.

ఇది గుర్తుంచుకొందాం.

- సమబాహు త్రిభుజపరివృత్తం మరియు అంతరవృత్తములు గీయునప్పుడు వాటి కోణసమద్విఖండన రేఖ మరియు భుజాల లంబసమద్విఖండన రేఖలుగా ఒకటే వస్తుంది.
- సమబాహు త్రిభుజము యొక్క పరివృత్తము మరియు అంతరవృత్తముల కేంద్రము ఒకటే వస్తుంది.
- సమబాహు త్రిభుజము యొక్క పరివృత్తము యొక్క వ్యాసార్థమునకు అంతరవృత్తము యొక్క వ్యాసార్థముతో నిష్పత్తి 2:1 గా ఉంటుంది.

అభ్యాసం 6.3

1. $\angle B=100^\circ$, BC=6.4 సె.మీ. $\angle C=50^\circ$ గల Δ ABC ని గీసి త్రిభుజం యొక్క అంతరవృత్తమును గీయండి.

2. $\angle P=70^\circ$, $\angle R=50^\circ$, QR=7.3 సె.మీ. గల Δ PQR ని గీసి ఆ త్రిభుజం యొక్క పరివృత్తమును గీయండి.

3. XY=6.7 సె.మీ., YZ=5.8 సె.మీ., XZ=6.9 సె.మీ. గల Δ XYZ గీసి త్రిభుజం యొక్క అంతరవృత్తమును గీయండి.

4. Δ LMN లో LM=7.2 సె.మీ., $\angle M=105^\circ$, MN=6.4 సె.మీ. అయిన త్రిభుజం LMN ను గీసి దాని పరివృత్తంను గీయండి.

5. DE=EF = 6 సె.మీ. $\angle F=45^\circ$ గల Δ DEF ను గీసి ఆ త్రిభుజంయొక్క పరివృత్తమును గీయండి.

సంకీర్ణ ప్రశ్నసంగ్రహం 6

1. కింది బహుపర్యాయ ప్రశ్నలకిచ్చిన సమాధానాలలోనుంచి సరైన పర్యాయమును ఎన్నుకొనుము.

(i) ఒక వృత్తం యొక్క వ్యాసార్థము 10 సె.మీ. ఉండి ఒక జ్యా కేంద్రము నుండి 6 సె.మీ. దూరంలో గలదు. అయిన ఆ జ్యా పొడవు ఎంత?

(A) 16 సె.మీ. (B) 8 సె.మీ. (C) 12 సె.మీ. (D) 32 సె.మీ.

(ii) త్రిభుజం యొక్క మూడు కోణముల సమద్విఖండన రేఖలు మిళితాలు అవుతాయి. ఆ మిళితబిందువును ఏమంటారు?

(A) మధ్యగత మిళిత బిందువు (B) పరికేంద్రము (C) అంతరకేంద్రము (D) లంబమిళిత బిందువు

(iii) త్రిభుజం యొక్క అన్ని శీర్షముల నుండి పోయే వృత్తమును ఏమంటారు?

(A) పరివృత్తం (B) అంతరవృత్తం (C) సర్వసమాన వృత్తాలు (D) ఏక కేంద్రవృత్తం

(iv) ఒక వృత్తము యొక్క జ్యా 24 సె.మీ. పొడవు ఉండి అది కేంద్రము నుండి 5 సె.మీ. దూరములో ఉన్నచో ఆ వృత్త వ్యాసార్థము ఎంతుండవచ్చు?

(A) 12 సె.మీ. (B) 13 సె.మీ. (C) 14 సె.మీ. (D) 15 సె.మీ.

(v) 2.9 సె.మీ. వ్యాసార్థముగల వృత్తములో ఎక్కువలో ఎక్కువ ఎంత పొడవుగల జ్యా ఉండవచ్చును?

(A) 3.5 సె.మీ. (B) 7 సె.మీ. (C) 10 సె.మీ. (D) 5.8 సె.మీ.

(vi) ఒక వృత్తం యొక్క వ్యాసార్థము 4 సె.మీ. O కేంద్రము గల వృత్తములో l(OP) = 4.2 సె.మీ. ఉన్నచో బిందువు 'P' యొక్క స్థానము ఎక్కడవుండును?

(A) కేంద్రబిందువు వద్ద (B) వృత్తం యొక్క అంతరభాగములో

(C) వృత్తముయొక్క బాహ్యాభాగములో (D) వృత్తంపై

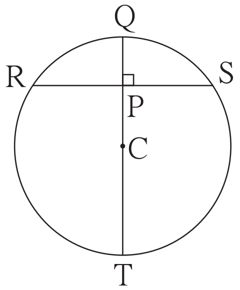
(vii) ఒకవృత్తములోసమాంతరముగావున్నజ్యాలపొడవులు 6సె.మీ.మరియు 8సె.మీ.ఆవృత్తముయొక్కవ్యాసార్థము 5 సె.మీ. ఉన్నచో ఆ జ్యాల మధ్యగల దూరం ఎంత?

(A) 2 సె.మీ. (B) 1 సె.మీ. (C) 8 సె.మీ. (D) 7 సె.మీ.

2. సమబాహు Δ DSP లో DS = 7.5 సె.మీ. అయిన Δ DSP యొక్క పరివృత్తము మరియు అంతరవృత్తములను గీయండి. పరివృత్తము మరియు అంతరవృత్తముల వ్యాసార్థాలను కొలిచి రాయండి. పరివృత్త వ్యాసార్థంతో అంతరవృత్త వ్యాసార్థమునకు గల నిష్పత్తిని కనుగొనండి.

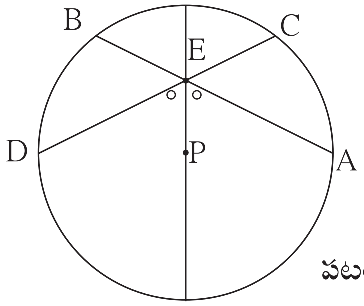
3. Δ NTS లో NT = 5.7 సె.మీ., TS = 7.5 సె.మీ. మరియు $\angle NTS = 110^\circ$ అయినచో Δ NTS గీసి దాని పరివృత్తము మరియు అంతరవృత్తములను గీయండి.

4. ప్రక్క పటము 6.19లో బిందువు C వృత్తకేంద్రము. రే.ఖం. QT వ్యాసం. CT = 13, CP = 5 అయినచో జ్యా RS ను కనుగొనండి.



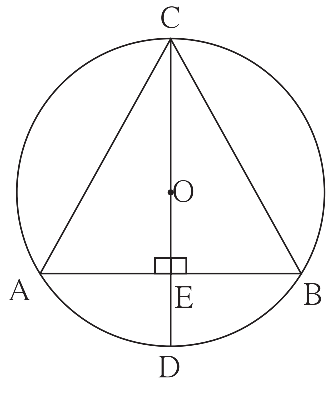
పటం 6.19

5. ప్రక్క పటము 6.20 లో P వృత్త కేంద్రము. జ్యా AB మరియు జ్యా CD వ్యాసముపై E బిందువు వద్ద ఖండించుకొంటాయి. ఐతే $\angle AEP \cong \angle DEP$ అయినచో AB = CD అని నిరూపించుము.



పటం 6.20

6. పటము 6.21 లో O కేంద్రముగల వృత్తములో CD వ్యాసము మరియు AB జ్యా. వ్యాసము CD జ్యా AB నకు E బిందువు వద్ద లంబముగాగలదు. అయిన Δ ABC సమద్విబాహు త్రిభుజము అని నిరూపించుము.



పటం 6.21

ICT Tools or Links

Geogebra software సహాయంతో వివిధ వృత్తములు గీసి వాటిలో జ్యాల ధర్మమును ప్రయోగములద్వారా తెలుసుకోండి. వివిధ త్రిభుజాల పరివృత్తము, అంతరవృత్తములు గీయండి. Move option ని ఉపయోగించి తొలి త్రిభుజముల యొక్క అకారాన్ని మార్చి అంతరకేంద్రము, పరికేంద్రముల స్థానములు ఎలా మారునో ప్రయోగ పూర్వకముగా తెలుసుకోండి.

7 నిరూపక రేఖాగణితము

పదండి, నేర్చుకుందాం

- అక్షం, ఆరంభబిందువు, పాదం
- తలములోనున్న బిందువుల నిరూపకాలు
- బిందువులను సమావేశపరుచుట.
- X−అక్షమునకు సమాంతరరేఖ
- Y−అక్షమునకు సమాంతరరేఖ
- రేఖీయ సమీకరణము.

ఒక భవనం ఆవరణలో చింటు మరియు అతని మిత్రులు క్రికెట్ ఆడుకుంటున్నారు. ఒక తాత అక్కడికి వచ్చాడు.

తాతయ్య : ఓరేయ్ చింటు, దత్తాభావు ఈ సొసైటిలోనే ఉంటాడు కదా?

చింటు : అవును, ఇక్కడే ఉంటాడు. మూడవ అంతస్తులో అతని ఇల్లు. ఇక్కడనుండి కిటికీ కన్పిస్తుందికదా, అక్కడే.

తాతయ్య : అరే, మూడవ అంతస్తులో నాకు ఐదు కిటికీలు కనిపిస్తున్నాయి. కచ్చితంగా ఏ ఇల్లు?

చింటు : మూడవ అంతస్తులో ఎడమవైపు నుండి మూడవ కిటికీ వారిది.

చింటు చెప్పిన దత్తాభావు ఇంటిస్థానంయొక్క వర్ణనే నిరూపక రేఖాగణితంలోని మూల సంకల్పనలు.

ఇంటి స్థానము కచ్చితంగా అర్థంగావడానికి కేవలం ఎన్నవ అంతస్తులో చెబితే చాలదు, అయితే ఎడమవైపు లేదా కుడివైపున ఎన్నవఇల్లు అని చెప్పటం అవసరము. అనగా వరసగా రెండు సంఖ్యలను చెప్పవలసివస్తుంది. నేల నుండి **రెండవ** అంతస్తు మరియు ఎడమ నుండి **మూడవ** కిటికీ. ఈ విధంగా రెండు **క్రమసూచిక** సంఖ్యలను ఇక్కడ ఉపయోగించ వలసివచ్చింది.

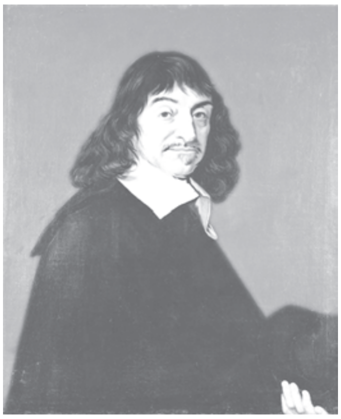
తెలుసుకొందాం.

అక్షం, ఆరంభబిందువు, పాదం (Axes, origin, quadrants)

దత్తాభావు ఇంటిస్థానాన్ని రెండు క్రమసూచిక సంఖ్యలచే కచ్చితంగా చెప్పగలిగాం. అలాగే ఒకదానికొకటి లంబంగానున్న రెండు రేఖలనుండి దూరంలోగల తలంలోని ఏదేని బిందువు స్థానాన్ని కచ్చితంగా చెప్పవచ్చు.

తలంలో ఏదేని బిందువుయొక్క స్థానాన్ని చెప్పడానికి, అదే తలంలో అనువైనచోట ఒక అడ్డ సంఖ్యా రేఖను గీస్తారు. ఈ సంఖ్యారేఖను X−అక్షమని అంటారు.

రేనె డేకార్ట్ (1596–1650)



పదిహేడవ శతాబ్దంలో ఫ్రెంచ్ గణితజ్ఞుడు రేనె డేకార్ట్ తలంలోని బిందువుల స్థానాన్ని నిర్దిష్టంగా గుర్తించుటకు 'నిరూపక పద్ధతిని' సూచించాడు, ఈ పద్ధతిని 'కార్టీసియన్ నిరూపక పద్ధతి' అని సంభోదిస్తారు. డేకార్ట్ పేరు మీదుగా, ఇది పేరు పొందింది. డేకార్ట్ ప్రథమంగా యూక్లిడ్ రేఖాగణితం మరియు బీజగణితంల మధ్య సంబంధాన్ని నెలకొల్పడం వల్ల గణితంలో విప్లవాత్మక మార్పులు సంభవించాయి.

కార్టీసియన్ నిరూపకపద్ధతి విశ్లేషణాత్మక గణితానికి (Analytical Geometry) పునాది వంటిది. రెనేడేకార్ట్ గారి మొదటి పుస్తకము 'లాజ్యామెట్రీ' ఈ పుస్తకములో రేఖాగణిత అభ్యాసము కొరకు బీజగణితమును ఉపయోగించాడు. మొదటి సారిగా ఈ పుస్తకములో తలంలోని బిందువులను వాస్తవసంఖ్యల ఆదేశిత జతలతో సూచించవచ్చునని ప్రతిపాదించాడు. ఈ ఆవేశితజతలను 'కార్టీసియన్ నిరూపకము' అని అంటారు.

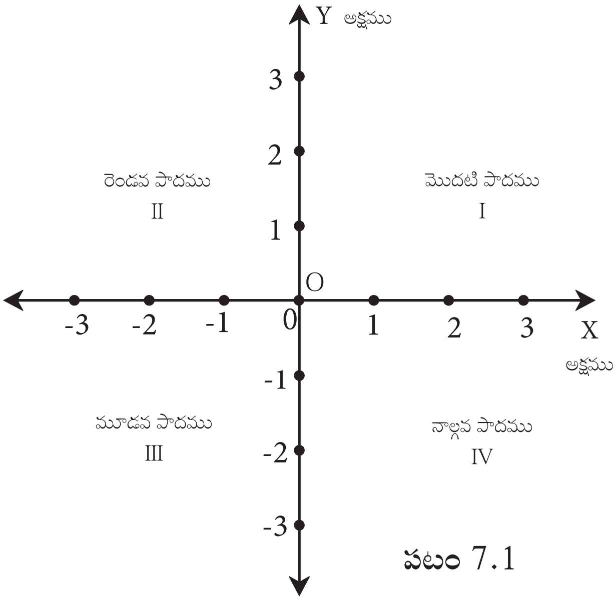
నిరూపక రేఖగణితము ఫిజిక్స్, ఇంజినీరింగ్, నౌకాయానశాస్త్రం, భూకంపశాస్త్రం మరియు కళలు ఇలా వివిధ క్షేత్రాలలో విరివిగా ఉపయోగించబడుతుంది. సాంకేతిక రంగాల అభివృద్ధిలో నిరూపక రేఖగణితము ముఖ్యమైన పాత్రను వహిస్తుంది. జియోజెబ్రాలో రేఖాగణితం మరియు బీజగణితంల మధ్యసంబంధం స్పష్టంగా కన్పిస్తుంది. Geometry మరియు Algebra ఈ పదాలను బట్టి Geogebra అని పేరిచ్చారు.

X–అక్షంపై 0 నిరూపకం గల బిందువు నుండి X–అక్షంనకు లంబంగా వున్నా రెండవ రేఖయే Y–అక్షం. సామాన్యంగా రెండు సంఖ్యారేఖల పైనున్న 0 సంఖ్యను ఒకే బిందువుచే సూచించబడుతుంది. ఆ బిందువును ఆరంభ బిందువు (Orgin) అంటారు. దీనిని ఆంగ్లభాషలోని 'O' అక్షరముచే సూచిస్తారు.

X–అక్షముపై 'O' కి కుడివైపున ధన సంఖ్యలు ఎడమవైపు ఋణ సంఖ్యలను సూచిస్తారు.

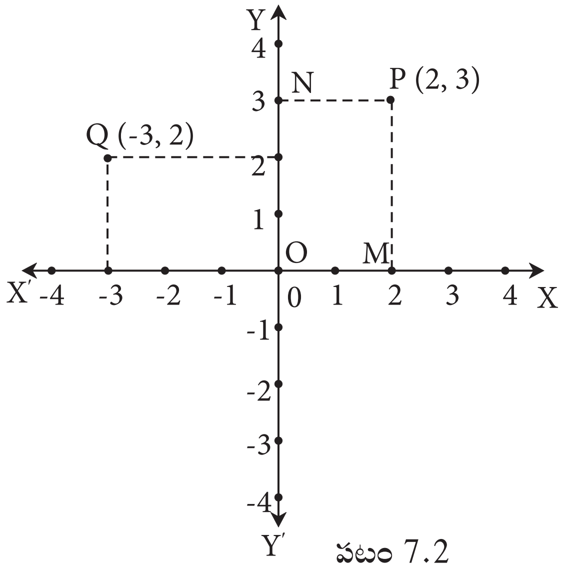
Y–అక్షముపై O కి పైవైపున ధనసంఖ్యలు మరియు క్రింది వైపున ఋణ సంఖ్యలను సూచిస్తారు.

X మరియు Y–అక్షములవల్ల తలములో నాలుగు భాగాలగును. ప్రతి భాగమును **పాదము** అంటారు. ఈ పాదములలో అక్షంపైనున్న బిందువులు చేర్చబడవు. పటములో చూపినవిధముగా గడియారపు అపసవ్యదిశలో ఈ పాదముల క్రమసంఖ్యలుగా భావించాలని సూచన.



పటం 7.1

తలములోనున్న బిందువులు నిరూపకము (Co-ordinates of a point in a plane)



పటం 7.2

X-అక్షం మరియు Y-అక్షంలు నిర్ణయించబడిన తలంలో బిందువు P చూపబడింది. దాని స్థానాన్ని అది రెండు అక్షాల నుండి గల దూరాన్ని బట్టి నిర్ణయించబడుతుంది. అందుకే రే.ఖం. PM ⊥ X-అక్షం మరియు రే.ఖం. PN ⊥ Y-అక్షం గీయబడింది.

X-అక్షంపై M నిరూపకం 2. Y-అక్షంపై N నిరూపకం 3, కాబట్టి P యొక్క x నిరూపకం 2 మరియు Y నిరూపకం 3 అవుతుంది.

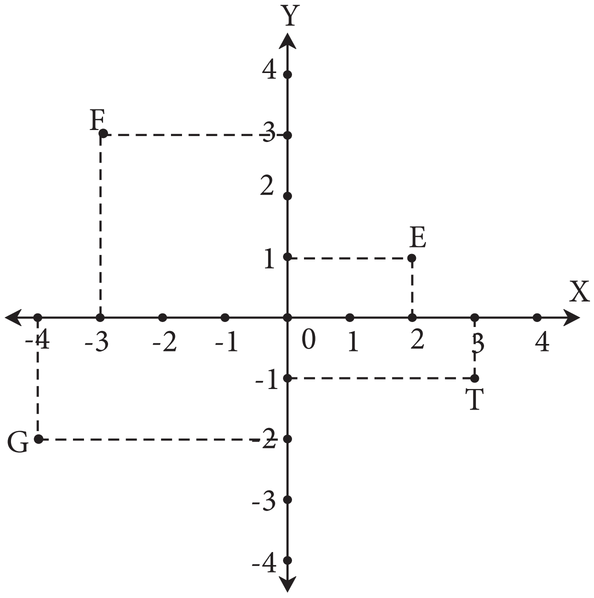
బిందువుల స్థానాన్ని చెబుతున్నపుడు x నిరూపకం ముందు చెప్పాలని సంకేతంగలదు. ఈ సంకేతాన్ని బట్టి P బిందువుయొక్క నిరూపకముల దూరం 2, 3 ఈ క్రమంలో నిర్ణయించబడుతుంది. అలాగే బిందువు P స్థానం యొక్క సంఖ్యలను (2, 3) ఈ యుగ్మములో సంక్షిప్తంగా చెప్పబడుతుంది.

బిందువు Q నుండి X-అక్షంపై QS లంబాన్ని, Y-అక్షంపై QR లంబాన్ని గీసాం. X-అక్షంపై Q నిరూపకం-3 మరియు Y-అక్షంపై నిరూపకం 2 కాబట్టి బిందువు Q నిరూపకములు (-3,2) అవుతాయి.

ఉదా. ప్రక్క పటములో చూపిన బిందువుల E, F, G, T నిరూపకములు రాయండి.

వివరణ :

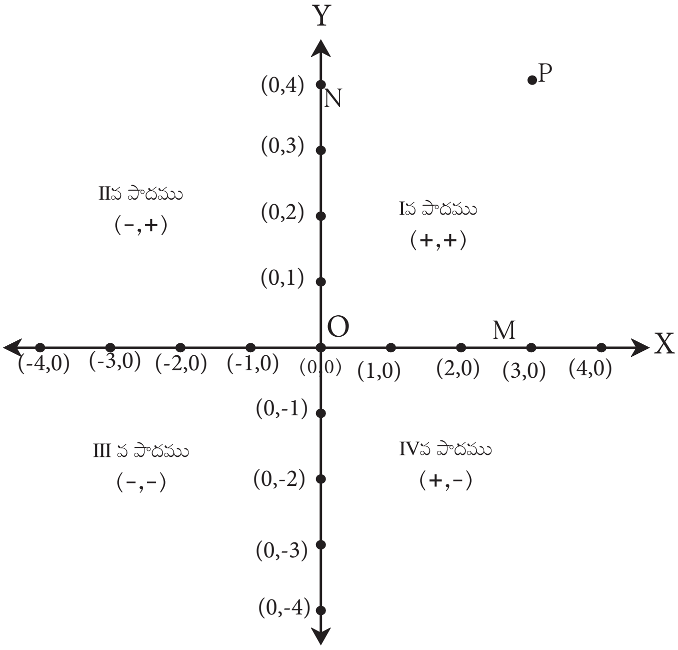
- బిందువు E నిరూపకము (2,1).
- బిందువు F నిరూపకము (-3,3).
- బిందువు G నిరూపకము (-4,-2).
- బిందువు T నిరూపకము (3,-1).



పటం 7.3

తెలుసుకొందాం.

అక్షములపై బిందువు యొక్క నిరూపకము (Co-ordinates of points on the axes)



పటం 7.4

M బిందువు యొక్క x -నిరూపకం అనగా M బిందువుకు y-అక్షం నుండి గల దూరము. ఆ బిందువుకు X-అక్షము నుండి గల దూరం శూన్యం (సున్న). కావున M యొక్క y-నిరూపకం 0.

దీనినిబట్టి X-అక్షముపై M బిందువు సహనిరూపకము (3,0). Y-అక్షము పై N బిందువు యొక్క y-నిరూపకము 4. ఎందుకనగా ఆ బిందువు X-అక్షమునుండి గల దూరము 4 మరియు Y-అక్షంనుండి గల దూరం సున్న కాబట్టి దాని Y నిరూపకం 0 అవుతుంది.

దీనినిబట్టి Y-అక్షముపై N యొక్క బిందువు సహనిరూపకము (0,4)

ఇప్పుడు 'O' అరంభ బిందువు X మరియు Y అక్షములపై ఉంది అనగా ఆ బిందువులు X మరియు Y ఈ రెండు అక్షముల నుండి గల దూరము 0 కావున 'O' నిరూపకము (0,0)

దీనిని బట్టి తలములోని ప్రతి బిందువుతో నిరూపకము ఒకటి మరియు ఒకేఒక జత (ఆదేశిత జత)తో సంబంధం ఉంటుంది.

ఇది గుర్తుంచుకొందాం.

- X -అక్షముపైగల ప్రతి ఒక బిందువు యొక్క y-నిరూపకం సున్న అవుతుంది.
- Y -అక్షముపైగల ప్రతి ఒక బిందువు యొక్క x నిరూపకం సున్న అవుతుంది.
- ఆరంభ బిందువు నిరూపకము (0,0) అవుతుంది.

ఉదా. కింది బిందువులు ఏ పాదములో లేక ఏ అక్షముపై గలవో గుర్తించండి.

A(5,7), B(−6,4), C(4,−7), D(−8,−9), P(−3,0), Q(0,8)

సాధన : A(5,7) యొక్క x నిరూపకము మరియు y నిరూపకము ధనాత్మకము ∴ A బిందువు (మొదటి) ఒకటవ పాదములో గలదు.

B(−6,4) యొక్క x నిరూపకము ఋణాత్మకం మరియు x నిరూపకము ధనాత్మకము ∴ B బిందువు రెండవ పాదములో గలదు.

C(4,−7) యొక్క x నిరూపకము ధనాత్మకం మరియు y నిరూపకము ఋణాత్మకం ∴ C బిందువు నాల్గవ పాదములో గలదు.

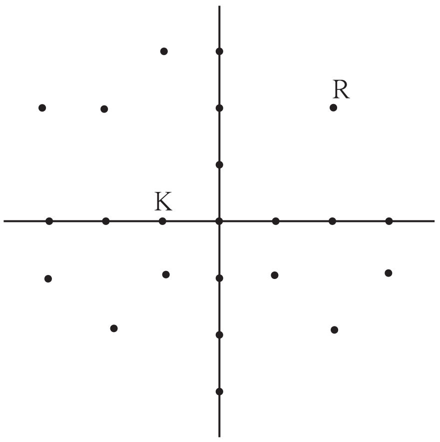
D(−8,−9) యొక్క x నిరూపకము ఋణాత్మకం మరియు y నిరూపకము ఋణాత్మకం ∴ D బిందువు మూడవ పాదములో గలదు.

P(−3,0) యొక్క y నిరూపకము (శూన్యము) సున్న ∴ P బిందువు X అక్షముపై గలదు.

Q(0,8) యొక్క x నిరూపకము (శూన్యము) సున్న ∴ Q బిందువు Y అక్షముపై గలదు.

కృత్యము పాఠశాల మైదానములో ప్రక్క పటంలో చూపిన విధముగా అడ్డ మరియు నిలువు వరసలలో విద్యార్థినులను కూర్చోబెట్టడం వలన X- మరియు Y- అక్షములు తయారవుతాయి.

- రంగులలో చూపిన బిందువుల దగ్గర నాలుగు పాదములలో విద్యార్థులను కూర్చోబెట్టండి.
- ఇప్పుడు వేర్వేరు విద్యార్థుల యొక్క పేరులోని మొదటి అక్షరాన్ని పలికి పటంలో చూపిన విధంగా నిల్చోబెట్టి వారి నిరూపకములనడగండి. **ఉదా.** రాజేంద్ర (2, 2) మరియు కీర్తి (−1, 0)
- ఈ విధముగా మైదానములోని కృత్యంతో తలంలోని బిందువుల స్థానము సులభంగా స్పష్టమవుతాయి.



పటం 7.5

తెలుసుకొందాం.

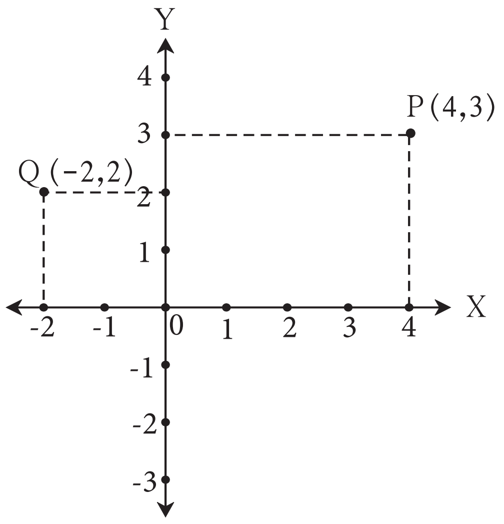
ఇచ్చిన నిరూపకములకు సంబంధించిన బిందువులను గుర్తించుట (To plot the points of given co-ordinates)

P (4,3) మరియు Q (−2,2) ఈ బిందువులను గుర్తించాలి అని అనుకోండి.

బిందువులను గుర్తించే (విధానం) ప్రక్రియ:

(i) తలములో X మరియు Y- అక్షములను గీయండి. ఆరంభ బిందువును సూచించండి.

(ii) P (4,3) బిందువు సూచించుట కొరకు X అక్షముపై 4 సంఖ్యను సూచించే బిందువునుండి Y-అక్షమునకు సమాంతర రేఖను గీయండి. Y-అక్షముపై 3 సంఖ్యను సూచించే బిందువునుండి X అక్షమునకు సమాంతర రేఖను గీయండి.



పటం 7.6

(iii) ఈ రెండు సమాంతర రేఖల ఖండన బిందువే P (4,3) అవుతుంది. ఈ బిందువు ఏ పాదములో ఉంది? పరిశీలించండి.

(iv) అదే విధముగా Q (−2,2) బిందువును గుర్తించండి. ఈ బిందువు రెండవ పాదములో వచ్చిందా? ఈ నిరూపక పద్ధతిలోనే R(−3,−4), S(3,−1) బిందువులను గుర్తించండి.

ఉదా. క్రింది బిందువులు ఏ పాదములో లేక ఏ అక్షముపై గలవో రాయండి.

(i) (5,3) (ii) (−2,4) (iii) (2,−5) (iv) (0,4)

(v) (−3,0) (vi) (−2,2.5) (vii) (5,3.5) (viii) (−3.5,1.5)

(ix) (0, −4) (x) (2,−4)

సాధన :

	నిరూపకము	పాదము/అక్షము
(i)	(5,3)	I వ పాదము
(ii)	(−2,4)	II వ పాదము
(iii)	(2,−5)	IV వ పాదము
(iv)	(0,4)	Y అక్షము
(v)	(−3,0)	X అక్షము

	నిరూపకము	పాదము/అక్షము
(vi)	(−2, −2.5)	III వ పాదము
(vii)	(5,3.5)	I వ పాదము
(viii)	(−3.5,1.5)	II వ పాదము
(ix)	(0, −4)	Y అక్షము
(x)	(2,−4)	II వ పాదము

అభ్యాసం 7.1

1. క్రింద నీయబడిన బిందువులు వాటి నిరూపకమును బట్టి ఏ పాదములో లేక ఏ అక్షముపై గలవో రాయుము.

- A(−3,2), • B(−5,−2), • K(3.5,1.5), • D(2,10),
- E(37,35), • F(15,−18), • G(3,−7), • H(0,−5),
- M(12,0), • N(0,9), • P(0,2.5), • Q(−7,−3)

2. క్రింది బిందువులు ఏ పాదములో ఉండవచ్చును?

(i) వాటి రెండు బిందువుల నిరూపకాలు ధనాత్మకం.

(ii) వాటి రెండు బిందువులు నిరూపకములు ఋణాత్మకం.

(iii) వాటి x నిరూపకం ధనాత్మకం మరియు y నిరూపకం ఋణాత్మకం.

(iv) వాటి x నిరూపకం ఋణాత్మకం మరియు y నిరూపకం ధనాత్మకం.

3. తలంలో, నిరూపక పద్ధతిని నిర్ధారించి క్రింది బిందువులను గుర్తించుము.

L(−2,4), M(5,6), N(−3,−4), P(2,−3), Q(6,−5), S(7,0), T(0,−5)

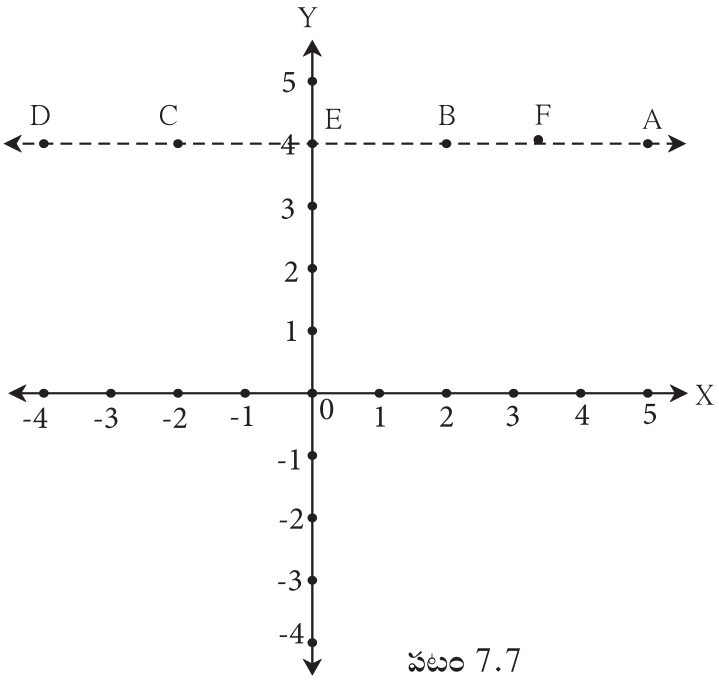
తెలుసుకొందాం.

X −అక్షమునకు సమాంతర రేఖ (Lines parallel to X−axis)

- గ్రాఫ్ పేపర్ పై క్రింది బిందువులను గుర్తించుము.
  A(5,4), B(2,4), C(−2,4), D(−4,4), E(0,4), F(3,4)
- బిందువుల సహనిరూపకములను పరిశీలించండి.
- అన్ని బిందువుల y−నిరూపకము సమానంగా వున్నాయని గుర్తించారా?
- అన్ని బిందువులు సరేఖీయములు.
- ఈ రేఖ ఏ అక్షమునకు సమాంతరముగా గలదు?
- రేఖ DA పై గల ప్రతి బిందువు యొక్క y నిరూపకము సమానంఅనగా 4. ఇది స్థిరముగా ఉంటుంది. కావున రేఖ DA ను సమీకరణము $y = 4$ గా రాస్తారు.

  ఏదేని బిందువు యొక్క Y నిరూపకం 4 అయినచో ఆ బిందువు ఆ రేఖపై అనగా రేఖ DA పై ఉంటుంది.

  ఇక్కడ X−అక్షమునకు 4 యూనిట్ల దూరంలో సమాంతరముగా ఉన్న రేఖసమీకరణము y=4 అవుతుంది.



పటం 7.7

పదండి, చర్చిందాం.

- X అక్షమునకు సమాంతరముగా మరియు దానినుండి 6 యూనిట్ల దూరంలో X −అక్షమునకు క్రిందివైపు ఈ విధంగా రేఖను గీయగలమా?
- (−3,−6), (10,−6), ($\frac{1}{2}$, −6) ఈ అన్ని బిందువులు ఆ రేఖ పై ఉంటాయా?
- ఈ రేఖీయ సమీకరణము ఎలా ఉండును?

ఇది గుర్తుంచుకొందాం.

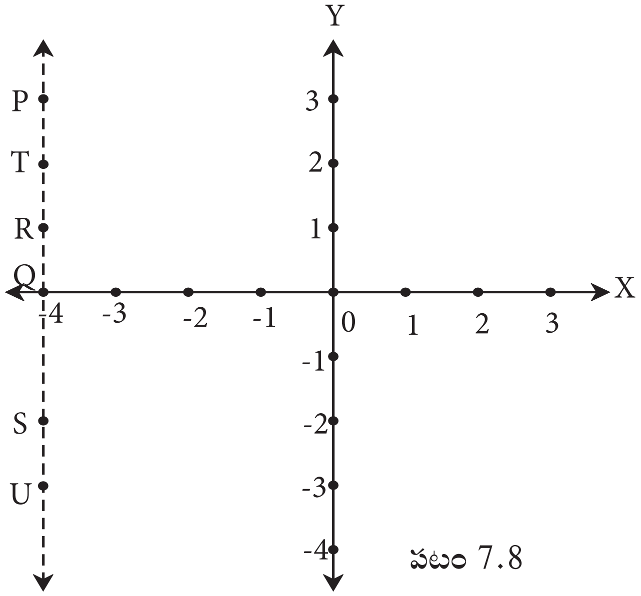
ఒక వేళ b > 0 అయినచో మరియు y = b, X అక్షమునకు సమాంతరముగా గల (0, b) బిందువునుండి వెళ్ళే రేఖను గీసినచో ఆ రేఖ X అక్షమునకుదాని పై వైపున సమాంతరంగా ఉంటుంది మరియు b < 0 అయినచో ఈ రేఖ X అక్షమునకుదాని క్రింది వైపునకు సమాంతరంగా ఉంటుంది.

X అక్షమునకు సమాంతరముగా గల రేఖీయ సమీకరణము y = b ఈ రూపంలో ఉంటుంది

తెలుసుకొందాం.

Y−అక్షమునకు సమాంతర రేఖ (Lines parallel to Y−axis)

- గ్రాఫ్ కాగితముపై క్రింది బిందువులను గుర్తించుము.
  P(−4,3), Q(−4,0), R(−4,1), S(−4,−2), T(−4,2), U(−4,−3)
- బిందువుల సహనిరూపకములను పరిశీలించండి.
- అన్ని బిందువుల x నిరూపకము సమానంగా ఉన్నాయని గమనించారా?
- అన్ని బిందువులు సరేఖీయములేనా?
- ఈ రేఖ ఏ అక్షమునకు సమాంతరముగా గలదు?
- రేఖ PS పై గల ప్రతి బిందువు యొక్క x నిరూపకము సమానముగా అనగా −4. అది స్థిరముగా ఉంటుంది. కావున రేఖ PS సమీకరణమును $x = -4$ గా రాస్తారు. ఏ బిందువు యొక్క x నిరూపకము −4 గా గలదో ఆ బిందువు రేఖ PS పై ఉంటుంది.
  Y − అక్షమునకు దాని ఎడమవైపు 4 యూనిట్ల దూరములో సమాంతరగల రేఖీయసమీకరణము $x=-4$ అవుతుంది.



పటం 7.8

పదండి, చర్చిద్దాం.

- Y అక్షమునకు సమాంతరముగా మరియు దాని నుండి కుడివైపు 3 యూనిట్ల దూరములో ఇలాంటి రేఖను గీయగలమా?
- (2,10), (2,8), $(2, -\frac{1}{2})$ ఈ అన్ని బిందువులు ఆ రేఖ పైన ఉంటాయా?
- ఈ రేఖీయ సమీకరణము ఏమైయుండును?

ఇది గుర్తుంచుకొందాం.

ఒకవేళ $x = a$ అనేది Y అక్షమునకు సమాంతరముగల $(a, 0)$ బిందువునుండి వెళ్ళే రేఖను గీసిన మరియు $a > 0$ అయినచో ఆ రేఖ Y అక్షమునకు కుడివైపున ఉంటుంది. అయితే $a < 0$ అయినచో ఆ రేఖ Y అక్షమునకు ఎడమవైపున ఉంటుంది.

Y అక్షమునకు సమాంతరముగా గల రేఖీయ సమీకరణము $x = a$ రూపంలో ఉండును.

ఇది గుర్తుంచుకొందాం.

(1) X−అక్షముపై ప్రతి బిందువుయొక్క y నిరూపకము 0 అవుతుంది దీనికి విరుద్ధంగా ఏ బిందువు యొక్క y నిరూపకము 0 ఉంటుందో ఆ బిందువు X−అక్షము పై ఉంటుంది, కావున X అక్షముయొక్క సమీకరణము $y = 0$ గా రాస్తారు.

(2) Y−అక్షముపై ప్రతి బిందువు యొక్క x నిరూపకము 0 అవుతుంది దీనికి విరుద్ధంగా ఏ బిందువు యొక్క x నిరూపకము 0 ఉంటుందో ఆ బిందువు Y−అక్షము పై ఉంటుంది, కావున Y అక్షము యొక్క సమీకరణము $x = 0$ గా రాస్తారు.

తెలుసుకొందాం.

రేఖీయ సమీకరణం యొక్క గ్రాఫ్ (Graph of linear equations)

ఉదా. $x=2$ మరియు $y=-3$ ఈ సమీకరణముల గ్రాఫ్ గీయుము.

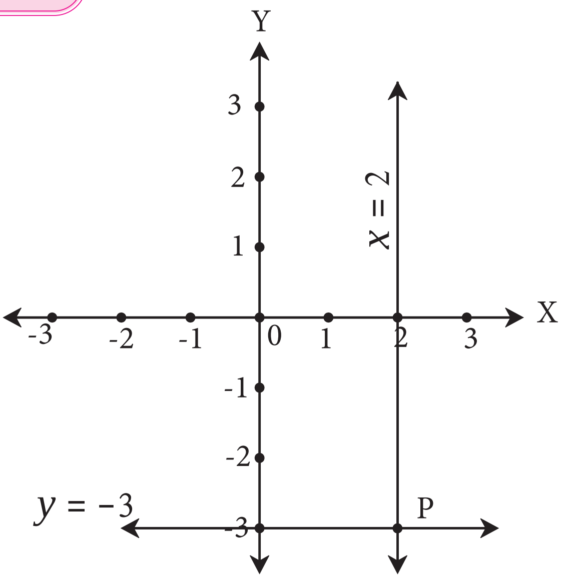
సాధన (i) గ్రాఫ్ కాగితము పై X అక్షము మరియు Y అక్షము గీయండి.

(ii) $x = 2$ అని ఇవ్వబడింది కావున Y అక్షమునకు కుడివైపున 2 యూనిట్ల దూరములో Y అక్షమునకు సమాంతర రేఖను గీయండి.

(iii) $y = -3$ అని ఇవ్వబడింది, కావున X అక్షమునకు క్రిందివైపున 3 యూనిట్ల దూరంలో X అక్షమునకు సమాంతర రేఖను గీయండి.

(iv) అక్షములకు సమాంతరముగా గీసిన ఈ రేఖలు అనగా ఆ సమీకరణముల గ్రాఫ్.

(v) ఈ రెండు రేఖలు ఒకదానికొకటి ఎక్కడ ఖండించుకొనునో ఆ బిందువు Pయొక్క నిరూపకము వ్రాయుము.



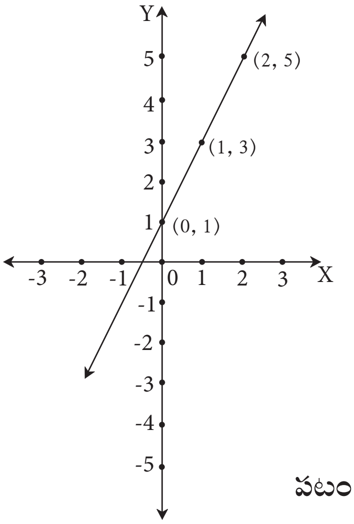
పటం 7.9

(vi) P యొక్క నిరూపకము (2,−3) అవుతాయా దీనిని పరిక్షించిచూడండి.

సామాన్యరూపంలోని రేఖీయసమీకరణం యొక్క గ్రాఫ్

కృత్యము: గ్రాఫ్ కాగితముపై (0,1) (1,3) (2,5) ఈ బిందువులను గుర్తించుము. అవి సరేఖీయముల పరీక్షించుము, ఒక వేళ సరేఖీయములయినచో దాని నుండి వెళ్ళే రేఖను గీయండి.

- ఈ రేఖ ఏయే పాదములనుండి వెళ్ళునో చూడండి.
- ఈ రేఖ Y అక్షమును ఎక్కడ ఖండించునో ఆ బిందువు యొక్క నిరూపకమును రాయండి.
- ఆ రేఖపై మూడవ పాదములో ఏదేని ఒక బిందువును చూపించి దాని నిరూపకము రాయండి.



పటం 7.10

ఉదా. $2x - y + 1 = 0$ అనేది రెండు చరరాశులుగల సామాన్యరూపంలోని ఒక సమీకరణం. ఈ సమీకరణము యొక్క గ్రాఫ్ గీద్దాం.

వివరణ : $2x - y + 1 = 0$ అనగా $y = 2x + 1$

x కు ఏదేని విలువను తీసుకొని దాని ఆధారముగా y యొక్క సంగత విలువను కనుగొందాం.

ఉదాహరణకు, $x = 0$ ఈ విలువను సమీకరణములో ప్రతిక్షేపించినచో $y = 1$ ఈ విలువ వస్తుంది.

ఈ విధంగా x యొక్క విలువలను $0, 1, 2, \frac{1}{2}, -2$ గా తీసికొని y విలువను కనుగొందాం.

ఈ విలువలను ఆదేశితజతల పట్టిక రూపములో పట్టికలో రాద్దాం.

x	0	1	2	$\frac{1}{2}$	-2
y	1	3	5	2	-3
(x, y)	$(0,1)$	$(1,3)$	$(2,5)$	$(\frac{1}{2}, 2)$	$(-2,-3)$

ఈ బిందువు గుర్తిద్దాం. గుర్తించిన బిందువులు సరేఖీయాలని అని ధృవపరచుకొందాం. ఈ అన్ని బిందువులనుండి వెళ్ళు రేఖను గీద్దాం. ఈ రేఖయే $2x - y + 1 = 0$ ఈ సమీకరణం యొక్క గ్రాఫ్ అవుతుంది.

ICT Tools or Links

Geogebra Software సహాయముతో X-అక్షము, Y-అక్షము గీయుము. వివిధ బిందువులను గుర్తించుము. Algebric View లో బిందువుల నిరూపకాలను చూసి అభ్యసించుము. అక్షములకు సమాంతరము గల రేఖల సమీకరణాలను గమనించండి. Move Option ను ఉపయోగించి రేఖల స్థానమును మార్చుతూ ఉండండి. X-అక్షము మరియు Y-అక్షముల సమీకరణము ఏది వచ్చును?

అభ్యాసం 7.2

1. గ్రాఫ్ పేపరుపై A $(3,0)$, B$(3,3)$, C$(0,3)$ బిందువులను గుర్తించుము. AB మరియు BC లను కలపండి. ఏ పటము లభిస్తుందో రాయండి.
2. Y-అక్షమునకు సమాంతరముగా మరియు ఆ అక్షమునకు ఎడమ వైపున 7 యూనిట్ల దూరములోగల రేఖీయసమీకరణమును రాయండి.
3. X-అక్షమునకు సమాంతరముగా మరియు ఆ అక్షమునకు క్రిందివైపున 5 యూనిట్ల దూరములోగల రేఖీయ సమీకరణమును రాయండి.
4. Q$(-3,-2)$ ఈ బిందువు Y-అక్షమునకు సమాంతరముగా గల రేఖపై గలదు. ఆ రేఖీయ సమీకరణము రాసి దాని గ్రాఫ్ గీయండి.

5. Y–అక్షం మరియురేఖ $x=-4$లు సమాంతరరేఖలు, అయిన ఈ రెండు రేఖల మధ్యదూరమెంత?

6. క్రింది వాటిలో ఏ సమీకరణముయొక్క గ్రాఫ్ X అక్షమునకు సమాంతరగా గలదు మరియు ఏ సమీకరణముయొక్క గ్రాఫ్ Y అక్షమునకు సమాంతరముగా గలదో రాయండి.

(i) $x = 3$ (ii) $y - 2 = 0$ (iii) $x + 6 = 0$ (iv) $y = -5$

7. గ్రాఫ్ కాగితంపై A(2,3), B(6,−1) మరియు C(0,5) ఈ బిందువులను గుర్తించండి. ఒకవేళ ఈ బిందువులు సరేఖీయాలైనచో వాటిని కలిగివున్న రేఖను గీయండి. ఈ రేఖ X అక్షం మరియు Y అక్షంలను ఏ బిందువు వద్ద ఖండిస్తుందో ఆ బిందువు యొక్క నిరూపకములను రాయండి.

8. క్రింది సమీకరణముల గ్రాఫ్‌లను ఒకే నిరూపక పద్ధతిపై గీసి వాటి ఖండన బిందువుల నిరూపకములను రాయండి.

$x + 4 = 0$, $y - 1 = 0$, $2x + 3 = 0$, $3y - 15 = 0$

9. క్రింది సమీకరణముల గ్రాఫ్‌లను గీయండి.

(i) $x + y = 2$ (ii) $3x - y = 0$ (iii) $2x + y = 1$

సంకీర్ణ ప్రశ్నసంగ్రహం 7

1. క్రింది పర్యాయములోని ప్రశ్నలకిచ్చిన సమాధానములలో నుంచి సరైన పర్యాయమును ఎన్నుకొండి.

(i) X అక్షంపై గల ఏవేని బిందువులు కింది వాటిలో ఏరూపంలో ఉండును?

(A) (b, b) (B) $(0, b)$ (C) $(a, 0)$ (D) (a, a)

(ii) రేఖ $y = x$ ఈ రేఖ పైగల ప్రతి బిందువు నిరూపకము క్రింది వాటిలో ఏ రూపంలో ఉంటుంది?

(A) (a, a) (B) $(0, a)$ (C) $(a, 0)$ (D) $(a, -a)$

(iii) క్రింది వాటిలో X–అక్షమునకు సమీకరణము ఏది?

(A) $x = 0$ (B) $y = 0$ (C) $x + y = 0$ (D) $x = y$

(iv) (−4, −3) ఈ బిందువులు ఏ పాదములో ఉంటాయి?

(A) ఒకటవ (B) రెండవ (C) మూడవ (D) నాల్గవ

(v) (−5,5), (6,5), (−3,5), (0,5) ఈ బిందువులను కలిగిన రేఖ స్వరూపం ఏ విధముగా ఉండును?

(A) ఆరంభ బిందువునుండి వెళ్ళునట్లుగా (B) Y అక్షమునకు సమాంతరంగా

(C) X అక్షమునకు సమాంతరముగా (D) వీటిలో ఏది కాదు.

(vi) P(−1,1), Q(3,−4), R(1,−1), S(−2,−3), T(−4,4) వీటిలో నాల్గవ పాదములో గల బిందువులు ఏవి?

(A) P మరియు T (B) Q మరియు R (C) కేవలం S (D) P మరియు R

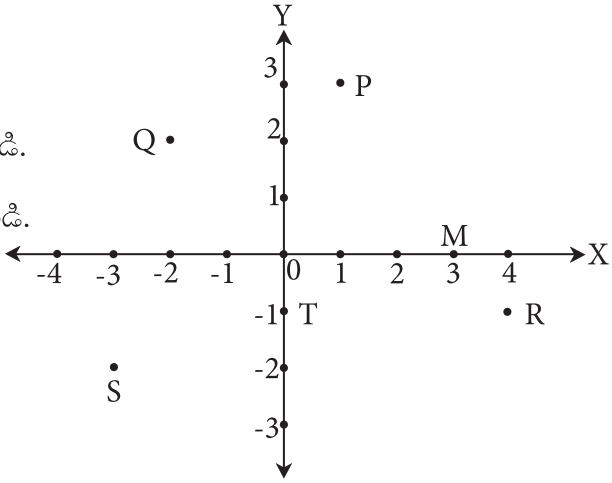
2. పటములో కొన్ని బిందువులు చూపబడినవి.
క్రింది ప్రశ్నలను సమాధానములిమ్ము.

(i) Q మరియు R బిందువుల నిరూపకములు రాయండి.

(ii) T మరియు M బిందువుల నిరూపకములు రాయండి.

(iii) మూడవ పాదములో ఏ బిందువు గలదు?

(iv) ఏ బిందువు యొక్క x మరియు y నిరూపకములు సమానంగా ఉన్నాయి.



పటం 7.11

3. క్రింది బిందువులను గ్రాఫ్‌పై గుర్తించకుండా ఏ పాదములో లేక ఏ అక్షముపై గలవో రాయండి.

(i) (5, −3) (ii) (−7, −12) (iii) (−23, 4)

(iv) (−9, 5) (v) (0, −3) (vi) (−6, 0)

4. క్రింది బిందువులను గ్రాఫ్ కాగితముపై గుర్తించుము.

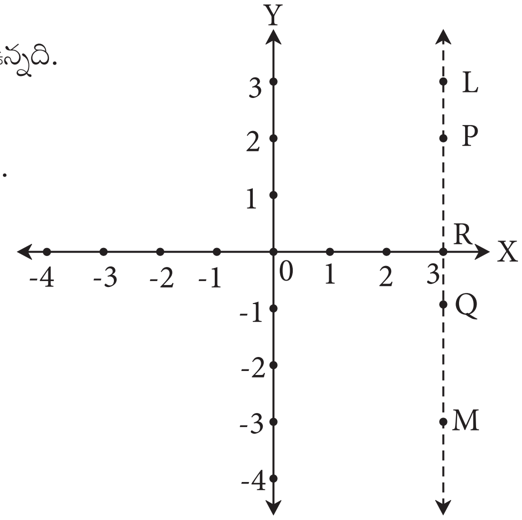
A(1,3), B(−3,−1), C(1,−4), D(−2,3), E(0,−8), F(1,0)

5. ప్రక్క గ్రాఫ్‌లో రేఖ LM ,Y అక్షమునకు సమాంతరముగా ఉన్నది.

(i) రేఖ LM, Y అక్షమునుండి ఎంత దూరంలో ఉంది?

(ii) P, Q, R బిందువుల సహనిరూపకములు రాయండి.

(iii) బిందువు L మరియు M ల x నిరూపకముల భేదం ఎంత?



పటం 7.12

6. X− అక్షంనకు సమాంతరంగా మరియు X−అక్షం నుండి 5 యూనిట్ల దూరంలో ఎన్ని రేఖలుగలవు? వాటి రేఖీయసమీకరణాలను రాయండి.

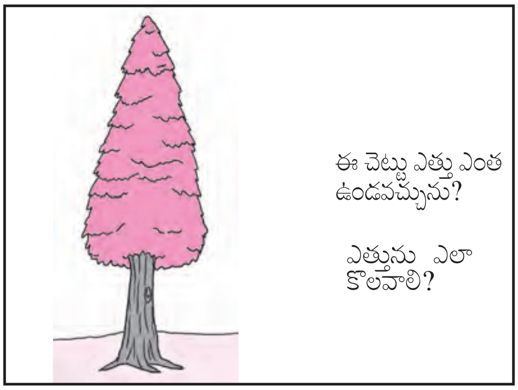
7. ఏదేని వాస్తవసంఖ్య a ను తీసుకొని Y−అక్షం మరియు $x = a$ ఈ రేఖల మధ్య దూరాన్ని నిర్ణయించండి.

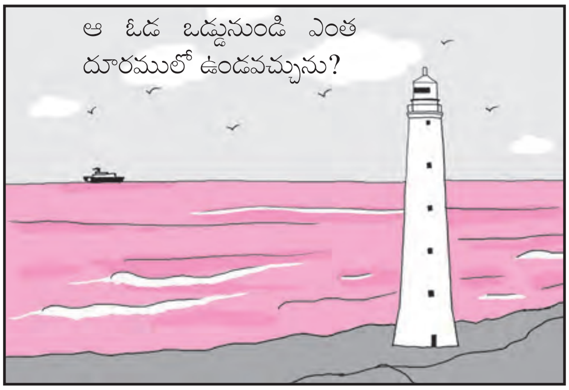
8 త్రికోణమితి

పదండి, నేర్చుకుందాం

- త్రికోణమితి పరిచయం
- త్రికోణమితి నిష్పత్తులు
- త్రికోణమితి నిష్పత్తుల మధ్య సంబంధం
- ప్రత్యేక కోణముల యొక్క త్రికోణమితి నిష్పత్తులు

త్రికోణమితియొక్క పరిచయం (Introduction to trigonometry)





మనం భూమిపైగల దూరాలను తాడుతో, నడుస్తూ వెళుతు కొలవవచ్చును, కాని సముద్రంలోని ఓడ, దీపస్తంభంనుండి గల దూరమును ఎలా కొలుస్తారు? చెట్టు ఎత్తును కొలవాలి?

పై చిత్రాలను పరిశీలించండి. చిత్రంలోని ప్రశ్నలు గణితానికి సంబంధించినవి. ఈ ప్రశ్నల జవాబులను పొందుటకై మనం గణితములోని త్రికోణమితి ఈ భాగం ఉపయోగపడుతుంది. వాస్తుశాస్త్రం, ఖగోళ శాస్త్రము, నౌకా శాస్త్రము మొదలైన విభాగాలలో త్రికోణమితి ఉపయోగపడుతుంది.

త్రికోణమితి (Trigonometry) అనుపదం మూడు గ్రీకు పదముల నుండి ఏర్పడినది. Tri అనగా మూడు, gona అనగా భుజం, metron అనగా కొలచుట అని అర్థము.

కొంచెం గుర్తుతెచ్చుకుందాం.

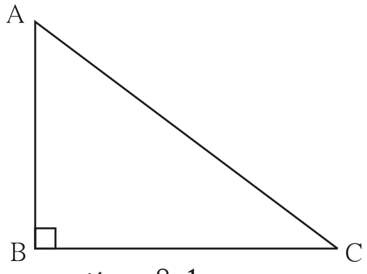
మనం త్రిభుజము గురించి నేర్చుకున్నాం. లంబకోణ త్రిభుజం, పైథాగరస్ సిద్ధాంతం మరియు సరూప త్రిభుజాల ధర్మముల ఆధారముగా త్రికోణమితి విషయం ఆరంభమవుతుంది.

దానిని పునర్విమర్శ చేసుకొందాం.

- Δ ABC లో $\angle B$ లంబకోణము అయితే $\angle B$ లంబకోణం ఎదుటి భుజం AC కర్ణము అవుతుంది $\angle A$ ఎదుటి భుజం BC, $\angle C$ ఎదుటి భుజం AB.

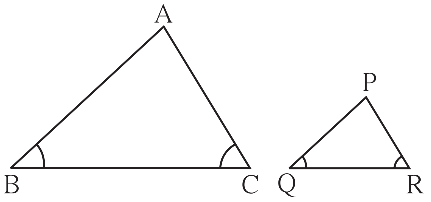
ఈ త్రిభుజ సందర్భంలో పైథాగరస్ సిద్ధాంతం ప్రకారం

$(AB)^2 + (BC)^2 = (AC)^2$



పటం 8.1

- ఒక వేళ Δ ABC ~ Δ PQR అయితే వాటి అనురూప భుజాలు అనుపాతంలో ఉంటాయి, అనగా $\frac{AB}{PQ}=\frac{BC}{QR}=\frac{AC}{PR}$



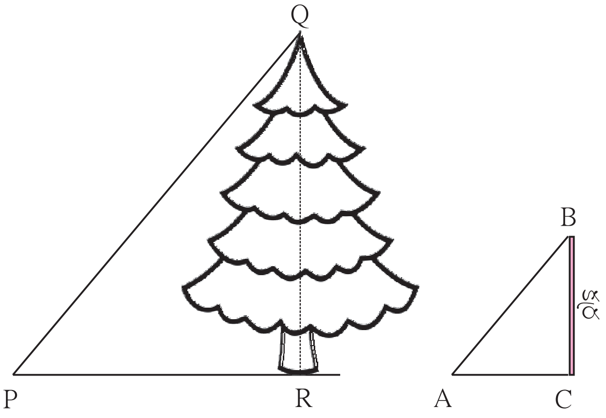
పటం 8.2

ఏదేని పెద్ద చెట్టు ఎత్తును కొలవ వలసినట్లయితే సరూప త్రిభుజాల ధర్మమునుపయోగించి దానిని ఎలా కనుగొనవచ్చునో చూద్దాం.

కృత్యం: ఈ ప్రయోగం పగటి పూట ఎండ బాగా ఉన్నా సమయంలో చేయవచ్చును. పక్క పటమును చూడండి.

QR చెట్టుయొక్క ఎత్తు. BC ఒక కర్ర ఎత్తు.

చిన్న కర్రను భూమిలో నిలువుగాపాతి దాని ఎత్తు మరియు దాని నీడ పొడవును కొలవండి. చెట్టు నీడ పొడవును కొలవండి. సూర్యుడి కిరణములు సమాంతరముగా ఉండుటవలన Δ PQR మరియు Δ ABC సమకోణ అనగా సరూప త్రిభుజాలు, అని తెలుసుకోండి. సరూప త్రిభుజాల అనురూప భుజాలు అనుపాతంలో ఉంటాయి దీనిని ఉపయోగించిన $\frac{QR}{PR}=\frac{BC}{AC}$ లభించును. కావున చెట్టు ఎత్తు QR = $\frac{BC}{AC}\times PR$ ఈ సమీకరణం లభిస్తుంది.



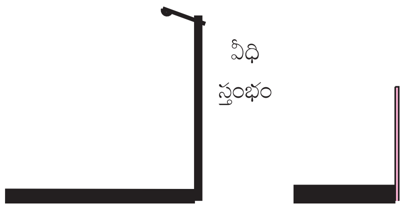
పటం 8.3

PR, BC మరియు AC ల విలువలు మనకు తెలుసు. ఈ విలువలను సమీకరణంలో ప్రతిక్షేపించి QR యొక్క పొడవు, అనగా చెట్టు ఎత్తును నిర్ణయించవచ్చు.

ఆలోచిద్దాం.

ఈ ప్రయోగం ఉదయం 8 గం॥లకు చేయకుండా మధ్యాహ్నం 11:30 లేదా 1:30 కు చేయడం శ్రేయస్కరం. ఎందుకు?

కృత్యము : పై కృత్యంను చేసి మీరు స్వయంగా మీ పరిసరాలలో గల ఎత్తైన చెట్ల యొక్క ఎత్తును కనుగొనండి. పరిసరాలలో చెట్టు లేకపోతే ఏదేని స్తంభం యొక్క ఎత్తును కనుగొనండి.

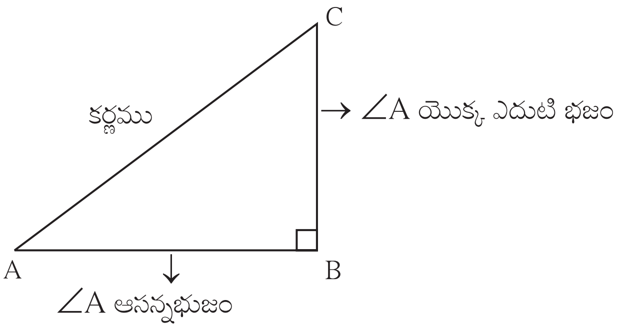


పటం 8.4

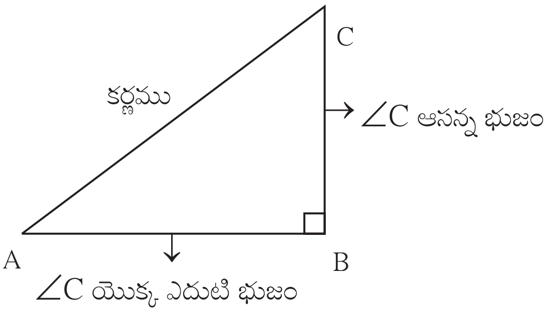
తెలుసుకొందాం.

త్రిభుజ సందర్భంలోని సంజ్ఞలు (Terms related to triangle)

లంబకోణ Δ ABC లో, $\angle B = 90^\circ$ అయితే $\angle A$ మరియు $\angle C$ లు అల్పకోణాలు.

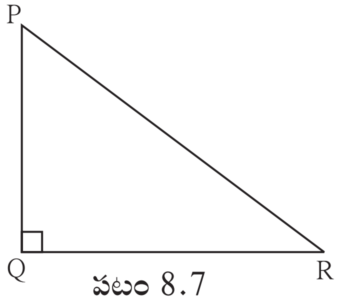


పటం 8.5



పటం 8.6

ఉదా: లంబకోణం Δ PQR లో



పటం 8.7

$\angle P$ యొక్క ఎదుటి భుజం = . . . $\angle P$ యొక్క ఆసన్న భుజం = ...

$\angle R$ యొక్క ఎదుటి భుజం = . . . $\angle R$ యొక్క ఆసన్న భుజం = ...

త్రికోణమితీయ నిష్పత్తులు (Trigonometic ratios)

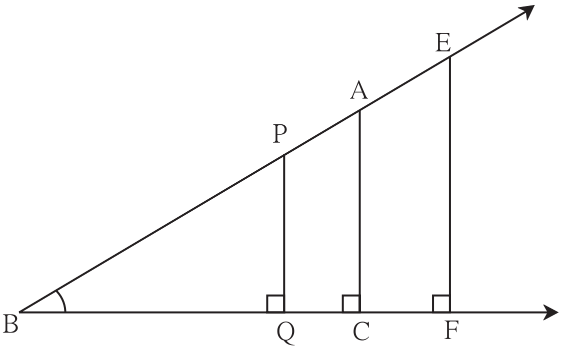
పటం 8.8 లో కొన్ని లంబకోణ త్రిభుజాలు చూపబడినవి. వాటిలో $\angle B$ ఉమ్మడికోణం. అందువలన ఈ అన్ని లంబకోణ త్రిభుజాలు సరూపాలు.

ఇక్కడ Δ PQB ~ Δ ACB లో

$$\therefore \frac{PB}{AB} = \frac{PQ}{AC} = \frac{BQ}{BC}$$

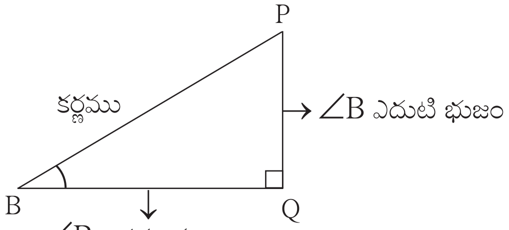
$$\frac{PQ}{AC} = \frac{PB}{AB} \quad \therefore \frac{PQ}{PB} = \frac{AC}{AB}$$ . . . ఏకాంతర నియమం

$$\frac{QB}{BC} = \frac{PB}{AB} \quad \therefore \frac{QB}{PB} = \frac{BC}{AB}$$ . . . ఏకాంతర నియమం

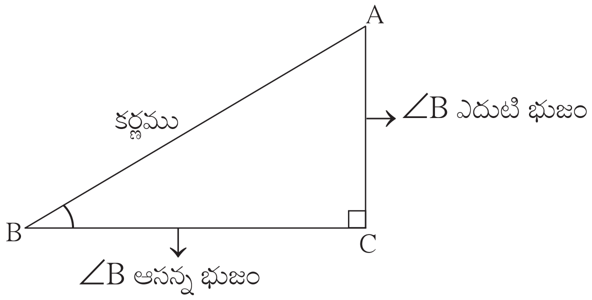


పటం 8.8

కింది పటము 8.9 మరియు 8.10 లు పటము 8.8 నుండి వేరు చేయబడిన త్రిభుజాలు.



పటం 8.9



పటం 8.10

(i) Δ PQB లో,

$$\frac{PQ}{PB} = \frac{\angle B \text{ యొక్క ఎదుటి భుజం}}{\text{కర్ణము}}$$

Δ ACB లో,

$$\frac{AC}{AB} = \frac{\angle B \text{ యొక్క ఎదుటి భుజం}}{\text{కర్ణము}}$$

$\frac{PQ}{PB}$ మరియు $\frac{AC}{AB}$ నిష్పత్తులు సమానం.

$$\frac{PQ}{PB} = \frac{AC}{AB} = \frac{\angle B \text{ యొక్క ఎదుటి భుజం}}{\text{కర్ణము}}$$

ఈ నిష్పత్తిని కోణము B యొక్క సైన్ (sine) నిష్పత్తి అని అంటారు. ఈ నిష్పత్తిని క్లుప్తంగా **sinB** అని రాస్తారు.

(ii) Δ PQB మరియు Δ ACB లో

$$\frac{BQ}{PB} = \frac{\angle B \text{ యొక్క ఆసన్న భుజం}}{\text{కర్ణము}} \quad \text{మరియు} \quad \frac{BC}{AB} = \frac{\angle B \text{ యొక్క ఆసన్న భుజం}}{\text{కర్ణము}}$$

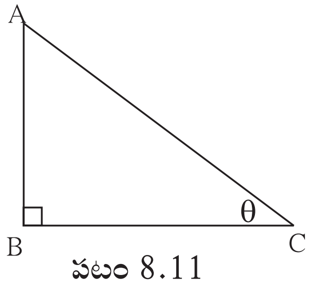
$$\frac{BQ}{PB} = \frac{BC}{AB} = \frac{\angle B \text{ యొక్క ఆసన్న భుజం}}{\text{కర్ణము}}$$

ఈ నిష్పత్తిని కోణం B యొక్క కొసైన్ (cosine) నిష్పత్తి అని అంటారు. ఈ నిష్పత్తిని దీనిని క్లుప్తంగా **cosB** అని రాస్తారు.

(iii) $$\frac{PQ}{BQ} = \frac{AC}{BC} = \frac{\angle B \text{ యొక్క ఎదుటి భుజం}}{\angle B \text{ యొక్క ఆసన్న భుజం}}$$

ఈ నిష్పత్తిని కోణం B యొక్క టాన్‌జెంట్ (tangent) నిష్పత్తి అని అంటారు. ఈ నిష్పత్తిని క్లుప్తంగా **tanB** అని రాస్తారు.

ఉదా.



పటం 8.11

కొన్ని సందర్భాలలో లంబకోణ త్రిభుజం యొక్క అల్పకోణముల కొలతలను θ(థీటా),α (ఆల్ఫా), β (బీటా) మొదలగు గ్రీకు అక్షరాలలో సూచిస్తారు. పక్క పటంలో Δ ABC యొక్క అల్పకోణము C యొక్క కొలతను θ అక్షరంతో చూపించబడింది. ఇలాంటి సందర్భములో sinC, cosC, tanC ఈ నిష్పత్తులను వరసగా $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$ ఇలాకూడా రాస్తారు.

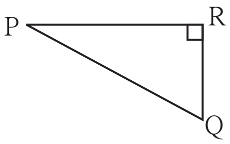
$$\sin C = \sin\theta = \frac{AB}{AC}, \quad \cos C = \cos\theta = \frac{BC}{AC}, \quad \tan C = \tan\theta = \frac{AB}{BC}$$

ఇది గుర్తుంచుకొందాం.

- sin నిష్పత్తి $=$ $\dfrac{\text{కోణము యొక్క ఎదుటి భుజం}}{\text{కర్ణము}}$
- cos నిష్పత్తి $=$ $\dfrac{\text{కోణము యొక్క ఆసన్న భుజం}}{\text{కర్ణము}}$
- tan నిష్పత్తి $=$ $\dfrac{\text{కోణము యొక్క ఎదుటి భుజం}}{\text{కోణము యొక్క ఆసన్న భుజం}}$

అభ్యాసం 8.1

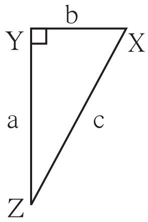
1.



పటం 8.12

పక్క పటం 8.12 లో Δ PQR లో $\angle R$ లంబకోణము అయినచో కింది నిష్పత్తులు రాయండి.
(i) sin P (ii) cos Q (iii) tan P (iv) tan Q

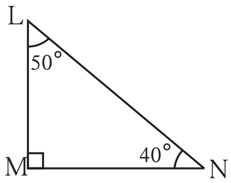
2.



పటం 8.13

పక్క పటం 8.13 లో Δ XYZ లంబకోణ త్రిభుజం. $\angle XYZ = 90^\circ$. భుజాల పొడవులు a,b,c అని ఇవ్వబడినవి. దీని ఆధారంగా కింది నిష్పత్తులు రాయండి.
(i) sin X (ii) tan Z (iii) cos X (iv) tan X

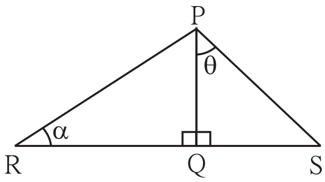
3.



పటం 8.14

లంబకోణ Δ LMN లో, $\angle LMN = 90^\circ$
$\angle L = 50^\circ$ మరియు $\angle N = 40^\circ$.
దీని ఆధారంగా కింది నిష్పత్తులను రాయండి.
(i) $\sin 50^\circ$ (ii) $\cos 50^\circ$
(iii) $\tan 40^\circ$ (iv) $\cos 40^\circ$

4.



పటం 8.15

ఇచ్చిన పటంలో $\angle PQR = 90^\circ$,
$\angle PQS = 90^\circ$, $\angle PRQ = \alpha$, $\angle QPS = \theta$ అయితే
కింది త్రికోణమితీయ నిష్పత్తులు రాయండి.
(i) $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\tan\alpha$
(ii) $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$

తెలుసుకొందాం.

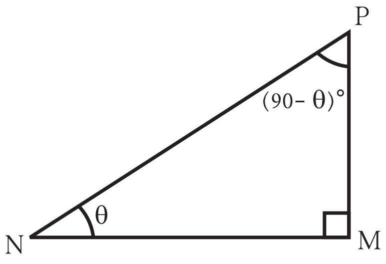
త్రికోణమితీయ నిష్పత్తుల మధ్య సంబంధం (Relation between trigonometric ratios)

పటం 8.16 లో,

Δ PMN అనేది లంబకోణ త్రిభుజం

$m\angle M = 90°$, $\angle P$ మరియు $\angle N$ పరస్పరం పూరక కోణాలు.

$\therefore$ ఒకవేళ $m\angle N = \theta$ అయిన $m\angle P = 90 - \theta$



పటం 8.16

$\sin \theta = \frac{PM}{PN}$ ....(1)

$\cos \theta = \frac{NM}{PN}$ ....(2)

$\tan \theta = \frac{PM}{NM}$ ....(3)

$\sin(90 - \theta) = \frac{NM}{PN}$ ....(4)

$\cos(90 - \theta) = \frac{PM}{PN}$ ....(5)

$\tan(90 - \theta) = \frac{NM}{PM}$ ....(6)

$\therefore \sin \theta = \cos(90 - \theta)$ .... (1) మరియు (5) ల నుండి.

$\cos \theta = \sin(90 - \theta)$ .... (2) మరియు (4) ల నుండి.

ఇప్పుడు ఇది కూడా గుర్తుంచుకోండి: $\tan \theta \times \tan(90 - \theta) = \frac{PM}{NM} \times \frac{NM}{PM}$ .... (3) మరియు (6) ల నుండి.

$$\therefore \tan \theta \times \tan(90 - \theta) = 1$$

ఇదే విధంగా $\frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\frac{PM}{PN}}{\frac{NM}{PN}} = \frac{PM}{PN} \times \frac{PN}{NM} = \frac{PM}{NM} = \tan \theta$

ఇది గుర్తుంచుకొందాం.

$\cos(90 - \theta) = \sin \theta$, $\sin(90 - \theta) = \cos \theta$

$\frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \tan \theta$, $\tan \theta \times \tan(90 - \theta) = 1$

✻ అధిక వివరాలకొరకై

$$\frac{1}{\sin\theta} = \operatorname{cosec}\theta, \quad \frac{1}{\cos\theta} = \sec\theta, \quad \frac{1}{\tan\theta} = \cot\theta$$

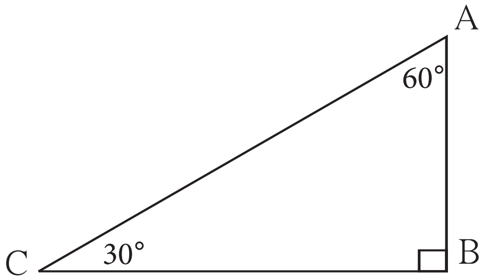
అనగా $\operatorname{cosec}\theta$, $\sec\theta$ మరియు $\cot\theta$ లు వరుసగా $\sin\theta$, $\cos\theta$ మరియు $\tan\theta$ ల యొక్క గుణకార విలోమ నిష్పత్తులు అవుతాయి.

- $\sec\theta = \operatorname{cosec}(90 - \theta)$
- $\operatorname{cosec}\theta = \sec(90 - \theta)$
- $\tan\theta = \cot(90 - \theta)$
- $\cot\theta = \tan(90 - \theta)$

కొంచెం గుర్తుతెచ్చుకుందాం.

$30° - 60° - 90°$ కొలతలుగల త్రిభుజ ధర్మములు:

ఏదేని త్రిభుజములోని కోణములు కొలతల $30°, 60°, 90°$ ఉన్నచో, $30°$ కోణము ఎదుటి భుజం కర్ణం పొడవులో సగం మరియు $60°$ కోణము ఎదుటి భుజం కర్ణం పొడవునకు $\frac{\sqrt{3}}{2}$ రెట్లు ఉంటుంది అని మనకు తెలుసు.



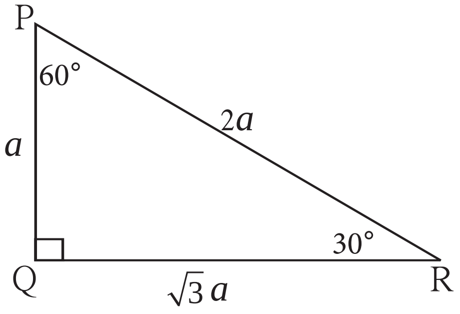
పటం 8.17

పక్క పటంలోని లంబకోణ ΔABC లో $\angle C = 30°$, $\angle A = 60°$, $\angle B = 90°$.

$\therefore AB = \frac{1}{2} AC$ మరియు $BC = \frac{\sqrt{3}}{2} AC$

తెలుసుకొందాం.

$30°$ మరియు $60°$ కొలతలుగల కోణముల త్రికోణమితీయ నిష్పత్తులు (Trignometric ratios of $30°$ and $60°$)



పటం 8.18

లంబకోణ ΔPQR లో $\angle R = 30°$, $\angle P = 60°$, $\angle Q = 90°$ మరియు $PQ = a$ అనుకొనిన

అయితే $PQ = \frac{1}{2} PR$

$a = \frac{1}{2} PR$

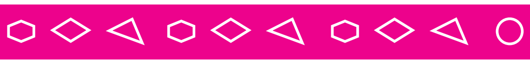
$\therefore PR = 2a$

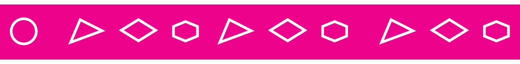
$QR = \frac{\sqrt{3}}{2} PR$

$QR = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2a$

$QR = \sqrt{3}\, a$

$\therefore$ ఒక వేళ $PQ = a$ అయితే $PR = 2a$ మరియు $QR = \sqrt{3}\, a$





(I) 30° కోణముకొలతగల త్రికోణమితీయ నిష్పతులు.

$$\sin 30^\circ = \frac{PQ}{PR} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{QR}{PR} = \frac{\sqrt{3}a}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{PQ}{QR} = \frac{a}{\sqrt{3}a} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

(II) 60° కోణముకొలతగల త్రికోణమితీయ నిష్పత్తులు.

$$\sin 60^\circ = \frac{QR}{PR} = \frac{\sqrt{3}\,a}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{PQ}{PR} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$$

$$\tan 60^\circ = \frac{QR}{PQ} = \frac{\sqrt{3}\,a}{a} = \sqrt{3}$$

లంబకోణ Δ PQR లో $\angle Q = 90^\circ$ అని ఇవ్వబడింది. $\angle P$ మరియు $\angle R$ లు పరస్పరం పూరక కోణములు కాబట్టి పూరక కోణాల యొక్కసైన్ మరియు కొసైన్ ఈ నిష్పత్తుల మధ్య సంబంధమును ఇక్కడ సరిచూడండి.

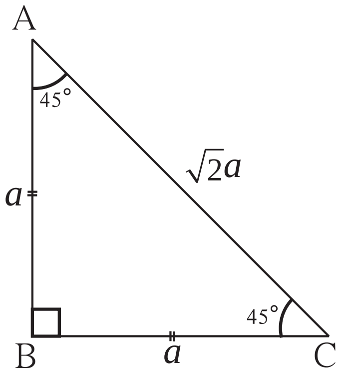
$\sin \theta = \cos(90-\theta)$
$\sin 30^\circ = \cos(90^\circ - 30^\circ) = \cos 60^\circ$
$\sin 30^\circ = \cos 60^\circ$

$\cos \theta = \sin(90-\theta)$
$\cos 30^\circ = \sin(90^\circ - 30^\circ) = \sin 60^\circ$
$\cos 30^\circ = \sin 60^\circ$

ఇది గుర్తుంచుకొందాం.

$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$	$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$
$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$	$\tan 60^\circ = \sqrt{3}$

(III) 45° కోణము యొక్క త్రికోణమితీయ నిష్పత్తులు



పటం 8.19

లంబకోణ Δ ABC లో $\angle B = 90^\circ$, $\angle A = 45^\circ$, $\angle C = 45^\circ$ $\therefore$ ఇది సమద్విబాహు లంబకోణ త్రిభుజం. AB $= a$ అయితే BC $= a$ అనుకోండి.

పైథాగరస్ సిద్ధాంతం ప్రకారం AC పొడవును కనుగొందాం.

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$
$$= a^2 + a^2$$
$$AC^2 = 2a^2$$
$$\therefore AC = \sqrt{2}\,a$$

ముందు పటం 8.19 లో $\angle C = 45°$ గలదు.

$$\sin 45° = \frac{AB}{AC} = \frac{a}{\sqrt{2}\,a} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

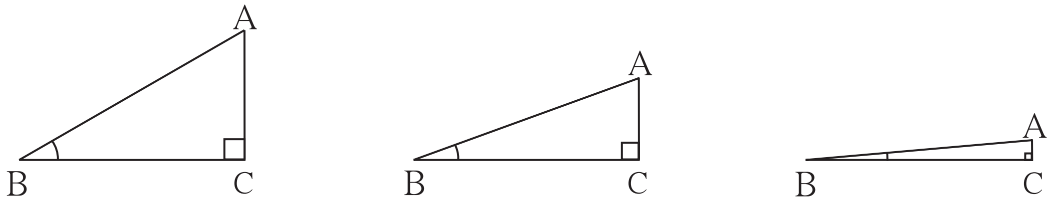
$$\cos 45° = \frac{BC}{AC} = \frac{a}{\sqrt{2}\,a} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\tan 45° = \frac{AB}{BC} = \frac{a}{a} = 1$$

ఇది గుర్తుంచుకొందాం.

$\sin 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\tan 45° = 1$

(IV) $0°$ మరియు $90°$ కోణము కొలతలుగల త్రికోణమితీయ నిష్పత్తులు.

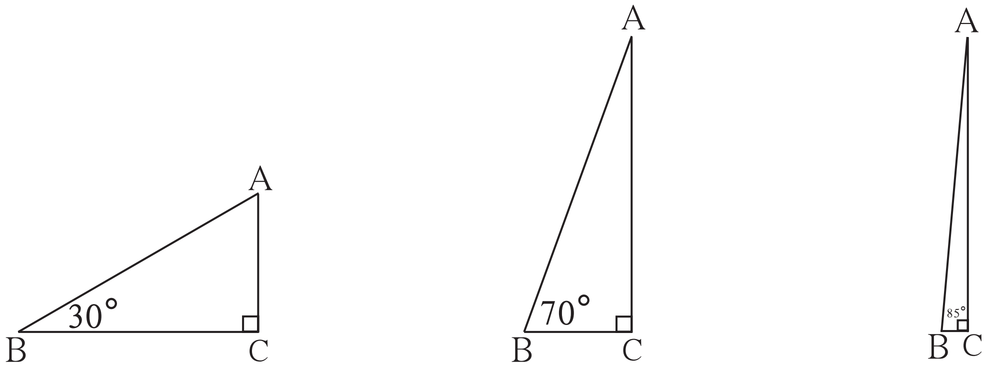


పటం 8.20

లంబకోణం Δ ACB లో $\angle C = 90°$ మరియు $\angle B = 30°$. $\sin 30° = \frac{AC}{AB}$ అని మనకు తెలుసు. AB పొడవును స్థిరముగా ఉంచి, $\angle B$ కొలత ఏవిధంగానైతే తక్కువ అవుతుందో అదే విధంగా $\angle B$ యొక్క ఎదుటి భుజం AC పొడవు తగ్గుతుంది కావున $\angle B$ యొక్క కొలత తగ్గినచో $\sin\theta$ విలువ తగ్గుతుంది.

$\therefore$ $\angle B$ యొక్క కొలత $0°$ అయినప్పుడు AC యొక్క పొడవు కూడ 0 అవుతుంది.

$\therefore \sin 0° = \frac{AC}{AB} = \frac{0}{AB}$ $\qquad$ $\therefore \sin 0° = 0$



పటం 8.21

ఇప్పుడు పటం 8.21 ని చూడండి. ఈ లంబకోణం త్రిభుజంలో $\angle B$ యొక్క కొలత ఏ విధంగా నైతే పెరుగుతూ పోతుందో అదే విధంగా AC యొక్క పొడవు పెరుగుచున్నట్లు కనిపిస్తుంది. అయితే $\angle B$ యొక్క కొలత $90°$ ఐన AC అనేది AB అంతవుతుంది.

$$\therefore \sin 90° = \frac{AC}{AB} \qquad \therefore \sin 90° = 1$$

మీరు పూరకకోణాల త్రికోణమితీయ నిష్పత్తులను చూశారు.

$\sin \theta = \cos (90 - \theta)$ మరియు $\cos \theta = \sin (90 - \theta)$

$\therefore \cos 0° = \sin (90 - 0)° = \sin 90° = 1$

మరియు $\cos 90° = \sin (90 - 90)° = \sin 0° = 0$

ఇది గుర్తుంచుకొందాం.

$\sin 0° = 0, \qquad \sin 90° = 1, \qquad \cos 0° = 1, \qquad \cos 90° = 0$

$\tan \theta = \dfrac{\sin \theta}{\cos \theta} \qquad \therefore \tan 0 = \dfrac{\sin 0}{\cos 0} = \dfrac{0}{1} = 0$, అని మనకు తెలుసు

కాని $\tan 90° = \dfrac{\sin 90°}{\cos 90°} = \dfrac{1}{0}$

కాని $\dfrac{1}{0}$ ని భాగించలేము. θ అల్పకోణం అయి అది పెద్దపెద్దగా అవుతు $90°$ సమీపంగా వెళుతుంది. ఆ విధంగా $\tan \theta$ అనిర్భందంగా పెద్దగా ఆవుతుపోతుంది. కాని tan 90 విలువను నిర్ణయించలేము.

ఇది గుర్తుంచుకొందాం.

ప్రత్యేక కోణముల యొక్క త్రికోణమితీయ నిష్పత్తులు:

కోణముల కొలతలు / నిష్పత్తులు	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
tan	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	నిర్ణయించలేము.

సాధించిన ఉదాహరణాలు :

ఉదా 1 $2\tan 45^\circ + \cos 30^\circ - \sin 60^\circ$ విలువను కనుగొనండి.

సాధన : $2\tan 45^\circ + \cos 30^\circ - \sin 60^\circ$

$= 2 \times 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$

$= 2 + 0$

$= 2$

ఉదా 2 $\frac{\cos 56^\circ}{\sin 34^\circ}$ యొక్క విలువను కనుగొనండి.

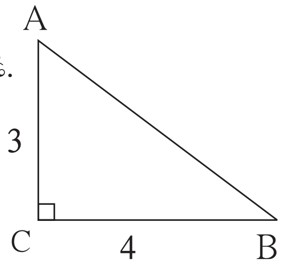
సాధన : $56^\circ + 34^\circ = 90^\circ$ అనగా 56 మరియు 34 లు పూరక కోణముల కొలతలు.

$\sin \theta = \cos (90 - \theta)$

$\therefore \sin 34^\circ = \cos (90 - 34)^\circ = \cos 56^\circ$

$\therefore \frac{\cos 56^\circ}{\sin 34^\circ} = \frac{\cos 56^\circ}{\cos 56^\circ} = 1$

ఉదా 3 లంబకోణ Δ ACB లో ఒక వేళ $\angle C = 90^\circ$, AC = 3, BC = 4 అయినచో $\angle A$ మరియు $\angle B$ల కింది త్రికోణమితీయ నిష్పత్తులను కనుగొనండి.
sin A, sin B, cos A, tan B



పటం 8.22

సాధన : లంబకోణ Δ ACB లో పైథాగరస్ సిద్ధాంతం ను బట్టి

$AB^2 = AC^2 + BC^2$

$= 3^2 + 4^2$

$= 5^2$

AB = 5

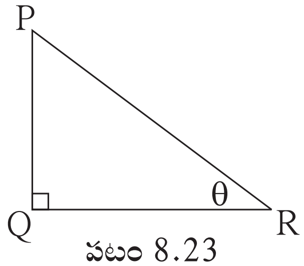
$\sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{4}{5}$ $\quad\quad$ $\cos A = \frac{AC}{AB} = \frac{3}{5}$

$\sin B = \frac{AC}{AB} = \frac{3}{5}$ $\quad\quad$ $\tan B = \frac{AC}{BC} = \frac{3}{4}$

ఉదా 4 లంబకోణ Δ PQR లో $\angle Q = 90^\circ$, $\angle R = \theta$

ఒక వేళ $\sin \theta = \frac{5}{13}$ అయితే $\cos \theta$, $\tan \theta$ లను కనుగొనండి.

సాధన :



పటం 8.23

లంబకోణ Δ PQR లో $\angle R = \theta$

$\sin \theta = \frac{5}{13}$

$\therefore \frac{PQ}{PR} = \frac{5}{13}$

$\therefore$ PQ = $5k$ మరియు PR = $13k$ అనుకొనుము.

పైథాగరస్ సిద్ధాంతంను బట్టి QR ని కనుగొందాం.

$PQ^2 + QR^2 = PR^2$

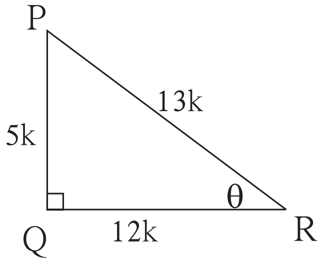
$(5k)^2 + QR^2 = (13k)^2$

$25k^2 + QR^2 = 169\ k^2$

$QR^2 = 169\ k^2 - 25k^2$

$QR^2 = 144\ k^2$

$QR = 12k$



పటం 8.24

ఇప్పుడు లంబకోణ Δ PQR లో PQ = $5k$ మరియు PR = $13k$, QR = $12k$

$$\cos\theta = \frac{QR}{PR} = \frac{12k}{13k} = \frac{12}{13}, \quad \tan\theta = \frac{PQ}{QR} = \frac{5k}{12k} = \frac{5}{12}$$

ఆలోచించండి

(1) పై ఉదాహరణను సాధిస్తున్నపుడు PQ మరియు PR భుజముల పొడవులు 5k మరియు 13k అని ఎందుకు తీసుకున్నారు?

(2) PQ మరియు PR పొడవులు వరసగా 5 మరియు 13 గా తీసుకోవచ్చునా? తీసుకోవచ్చినచో రాయడంలో ఏమైన మార్పులు చేయవలెనా?

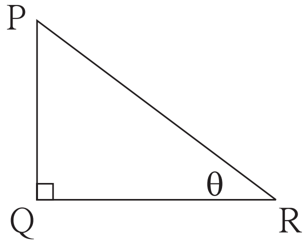
త్రికోణమితిలోని ముఖ్యమైన సమీకరణము

Δ PQR అనేది లంబకోణ త్రిభుజము

$\angle PQR = 90°$, $\angle R = \theta$ అనుకుందాం

$$\sin\theta = \frac{PQ}{PR} \quad ....(1)$$

$$\cos\theta = \frac{QR}{PR} \quad ....(2)$$



పటం 8.25

పైథాగరస్ సిద్ధాంతం నుండి

$PQ^2 + QR^2 = PR^2$

$$\therefore \frac{PQ^2}{PR^2} + \frac{QR^2}{PR^2} = \frac{PR^2}{PR^2} \quad ....$$ ప్రతి పదమును PR^2 చే భాగించగా

$$\therefore \left(\frac{PQ}{PR}\right)^2 + \left(\frac{QR}{PR}\right)^2 = 1$$

$\therefore (\sin\theta)^2 + (\cos\theta)^2 = 1....$

(1) మరియు (2) లనుండి

ఇది గుర్తుంచుకొందాం.

$(\sin\theta)^2$ అనగా $\sin\theta$ యొక్క వర్గం, దీనిని $\sin^2\theta$ అని రాస్తారు.

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ ఈ సమీకరణమును మనం పైథాగరస్ సిద్ధాంతమునుపయోగించి θ అల్పకోణముగల లంబకోణ త్రిభుజ సహాయంతో నిరూపించాము. $\theta = 0^\circ$ లేదా $\theta = 90^\circ$ అయినట్లయితే ఈ సమీకరణం సత్యము అని సరిచూడుము.

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ అనే సమీకరణము ఏ కొలతగల కోణానికైనా సత్యం కావడం వలన దానిని త్రికోణమితిలోని ప్రాథమిక నిత్యసమానత్వం అంటారు.

(i) $0 \le \sin\theta \le 1,\ 0 \le \sin^2\theta \le 1$ (ii) $0 \le \cos\theta \le 1,\ 0 \le \cos^2\theta \le 1$

అభ్యాసం 8.2

1. కింది పట్టికలో ప్రతి నిలువు వరసలో ఒక నిష్పత్తి ఇవ్వబడింది. దానినుండి మిగిలిన రెండు నిష్పత్తులను కనుగొని, ఖాళీలను పూరించండి.

$\sin\theta$		$\frac{11}{61}$		$\frac{1}{2}$				$\frac{3}{5}$	
$\cos\theta$	$\frac{35}{37}$				$\frac{1}{\sqrt{3}}$				
$\tan\theta$			1			$\frac{21}{20}$	$\frac{8}{15}$		$\frac{1}{2\sqrt{2}}$

2. విలువలను కనుగొనండి.

(i) $5\sin 30^\circ + 3\tan 45^\circ$

(ii) $\frac{4}{5}\tan^2 60^\circ + 3\sin^2 60^\circ$

(iii) $2\sin 30^\circ + \cos 0^\circ + 3\sin 90^\circ$

(iv) $\frac{\tan 60}{\sin 60 + \cos 60}$

(v) $\cos^2 45^\circ + \sin^2 30^\circ$

(vi) $\cos 60^\circ \times \cos 30^\circ + \sin 60^\circ \times \sin 30^\circ$

3. ఒక వేళ $\sin\theta = \frac{4}{5}$ అయిన $\cos\theta$ ను కనుగొనండి.

4. ఒకవేళ $\cos\theta = \frac{15}{17}$ అయిన $\sin\theta$ ను కనుగొనండి.

1. కింది బహుపర్యాయ ప్రశ్నల యొక్క సరియైన పర్యాయమును ఎన్నుకొనండి.

(i) కింది వాటిలో ఏది సత్యము.

(A) $\sin\theta = \cos(90-\theta)$ (B) $\cos\theta = \tan(90-\theta)$

(C) $\sin\theta = \tan(90-\theta)$ (D) $\tan\theta = \tan(90-\theta)$

(ii) కింది వాటిలో $\sin 90^\circ$ యొక్క విలువ ఏది?

(A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (B) 0 (C) $\frac{1}{2}$ (D) 1

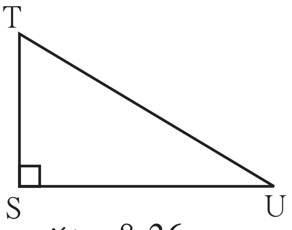
(iii) $2\tan 45^\circ + \cos 45^\circ - \sin 45^\circ$ యొక్క విలువ ఎంత?

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

(iv) $\frac{\cos 28^\circ}{\sin 62^\circ} =$ ఎంత?

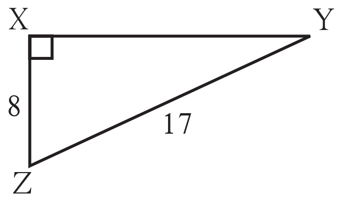
(A) 2 (B) −1 (C) 0 (D) 1

2. లంబకోణ Δ TSU లో TS = 5, $\angle S = 90^\circ$, SU = 12 అయినచో sin T, cos T, tan T లను, కనుగొనండి, అదే విధంగా sin U, cos U, tan U లను కనుగొనండి.



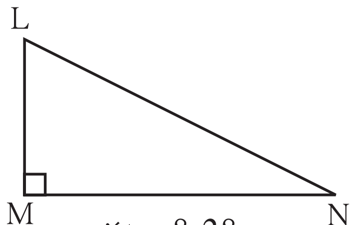
పటం 8.26

3. లంబకోణ Δ YXZ లో, $\angle X = 90^\circ$, XZ = 8 సె.మీ., YZ = 17 సె.మీ. అయితే sin Y, cos Y, tan Y, sin Z, cos Z, tan Z లను కనుగొనండి.



పటం 8.27

4. లంబకోణ Δ LMN లో $\angle N = \theta$, $\angle M = 90^\circ$, $\cos\theta = \frac{24}{25}$ అయిన $\sin\theta$ మరియు $\tan\theta$ ల నిష్పత్తులను కనుగొనండి, అదే విధంగా $(\sin^2\theta)$ మరియు $(\cos^2\theta)$ ల విలువలను కనుగొనండి.



పటం 8.28

5. ఖాళీలను పూరించండి.

(i) $\sin 20^\circ = \cos \square^\circ$

(ii) $\tan 30^\circ \times \tan \square^\circ = 1$

(iii) $\cos 40^\circ = \sin \square^\circ$

9 ఉపరితలవైశాల్యం మరియు ఘనపరిమాణం

RZDN7G

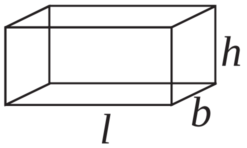
పదండి, నేర్చుకుందాం.

- శంకువు ఉపరితల వైశాల్యం
- శంకువు ఘనపరిమాణం
- గోళం ఉపరితలవైశాల్యం
- గోళం ఘనపరిమాణం

కొంచెం గుర్తుతెచ్చుకుందాం.

కింది తరగతిలో దీర్ఘఘనము, ఘనం మరియు స్థూపములాంటి ఘనాకృతుల ఉపరితల వైశాల్యము మరియు ఘనపరిమాణంలను ఏ విధంగా కనుగొంటారో నేర్చుకున్నాము.

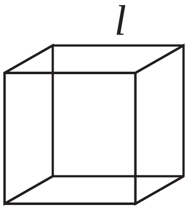
దీర్ఘఘనం



పటం 9.1

- దీర్ఘఘనం యొక్క పొడవు, వెడల్పు, ఎత్తులు వరుసగా l , b, h అయితే
  - (i) దీర్ఘఘనం ఉపరితల వైశాల్యం = $2(l + b) \times h$
    ఇక్కడ దీర్ఘఘనంలో 4 తలాల వైశాల్యాలను తీసుకోబడినవి.
  - (ii) దీర్ఘఘనం సంపూర్ణతల వైశాల్యం = $2(lb + bh + lh)$
    ఇక్కడ దీర్ఘఘనంలో ఆరు తలాల వైశాల్యాలను తీసుకోబడినవి.
  - (iii) దీర్ఘఘనం ఘనపరిమాణం = $l \times b \times h$

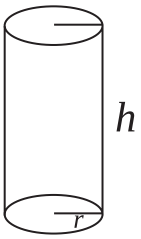
ఘనం



పటం 9.2

- ఘనం యొక్క అంచు (edge) l అయిన
  - (i) ఘనం సంపూర్ణతల వైశాల్యం = $6l^2$
  - (ii) ఘనం ప్రక్కతల వైశాల్యం = $4l^2$
  - (iii)ఘనం ఘనపరిమాణం = l^3

క్రమస్థూపం



పటం 9.3

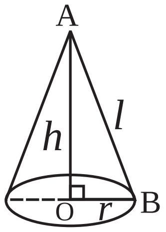
- క్రమ స్థూపంలోని భూతల వ్యాసార్థం r మరియు ఎత్తు h అయిన
  - (i) క్రమస్థూపం వక్రతలవైశాల్యం = $2\pi rh$
  - (ii) క్రమస్థూపం సంపూర్ణతలవైశాల్యం = $2\pi r(r + h)$
  - (iii) క్రమస్థూపం ఘనపరిమాణం = $\pi r^2 h$

అభ్యాసం 9.1

1. ఒక దీర్ఘఘనాకార ఔషధపెట్టె యొక్క పొడవు, వెడల్పు మరియు ఎత్తులు వరుసగా 20 సె.మీ., 12 సె.మీ. మరియు 10 సె.మీ. అయినచో ఆ పెట్టె యొక్క ప్రక్కతల వైశాల్యం మరియు సంపూర్ణతల వైశాల్యంను కనుగొనండి.
2. ఒక దీర్ఘఘనాకారపు పెట్టె సంపూర్ణతల వైశాల్యం 500 చ. యూనిట్లు దాని వెడల్పు మరియు ఎత్తులు వరుసగా 6 మరియు 5 యూనిట్లు, అయితే ఆ పెట్టె పొడవు ఎంత ఉంటుంది?
3. 4.5 సె.మీ. భుజంగల ఘనం కలదు, ఈ ఘనం యొక్క పక్కతల వైశాల్యం మరియు సంపూర్ణతల వైశాల్యములను కనుగొనండి.
4. 5400 చ.సె.మీ. సంపూర్ణతల వైశాల్యం గల ఘనం యొక్క పక్కతల వైశాల్యమును కనుగొనండి.
5. ఒక దీర్ఘఘన ఘనపరిమాణం 34.50 ఘ.మీ. అయితే దాని వెడల్పు మరియు ఎత్తులు వరుసగా 1.5 మీ. మరియు 1.15 మీ అయినచో ఆ దీర్ఘఘనం యొక్క పొడవును కనుగొనండి.
6. 7.5 సె.మీ.ల అంచు గల ఘనం ఘనపరిమాణం ఎంత?
7. ఒక క్రమస్థూపంలోని భూతల వ్యాసార్ధం 20 సె.మీ. మరియు ఎత్తు 13 సె.మీ. అయిన ఆ క్రమస్థూపం వక్రతల వైశాల్యం మరియు సంపూర్ణతల వైశాల్యంలను కనుగొనండి. ($\pi = 3.14$)
8. క్రమస్థూపం యొక్క వక్రతల వైశాల్యం 1980 సె.మీ.^{2}, భూతల వ్యాసార్ధం 15 సె.మీ. గానున్నచో క్రమస్థూపం యొక్క ఎత్తును కనుగొనండి.) ($\pi = \frac{22}{7}$)

తెలుసుకొందాం.

శంకువు సంబంధిత సంజ్ఞలు మరియు వాటి మధ్య పరస్పర సంబంధం (Terms related with a cone and their relation)



పటం 9.4

పక్కనున్న 9.4 లోని పటం ఒక శంకువు. శంకువు భూతలంలోని కేంద్ర బిందువు O మరియు శీర్షబిందువు A. రే.ఖం. OA వ్యాసార్ధం OB కి లంబంగా ఉంటుంది. అనగా AO శంకువు ఎత్తు (h). AB శంకువుయొక్క ఏటవాలు ఎత్తు (l) అవుతాయి.

Δ AOB లంబకోణ త్రిభుజము.

$\therefore$ పైథాగరస్ సిద్ధాంతం నుండి

$$AB^2 = AO^2 + OB^2$$

$$\therefore l^2 = h^2 + r^2$$

అనగా, **(వాలు ఎత్తు)^2 = (ఎత్తు)^2 + (భూవ్యాసార్ధం)^2**

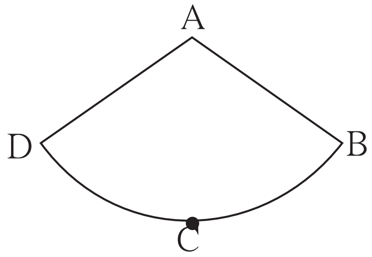
శంకువు ఉపరితల వైశాల్యం (Surface area of a cone)

శంకువుకు రెండు తలాలు ఉంటాయి. (i) వృత్తాకార తలము (ii) వక్రతలము.

వీటిలో వృత్త వైశాల్య సూత్రమును ఉపయోగించి శంకువు భూతల వైశాల్యమును కనుగొనవచ్చును.

శంకువు వక్రతల వైశాల్యమును కనుగొను సూత్రంను ఎలా కనుగొనవచ్చును?

అందుకై శంకువు వక్రతలం ఆకారంను చూద్దాం.



పటం 9.5

పటం 9.4 లో శంకువును వాలు ఎత్తు AB గుండా కత్తిరించి తెరవండి. దాని ఆకారము ప్రక్క పటము 9.5 వలె లభించును. దీనిని సెక్టరు (వృత్తఖండం) అని అంటారు.

పటం 9.4 మరియు పటం 9.5 లను పోల్చండి. వాటిని బట్టి క్రింది విషయాలను మీరు గమనించారా?

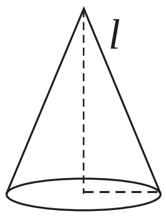
(i) సెక్టరు యొక్క వ్యాసార్థం AB అనేది శంకువు యొక్క ఏటవాలు ఎత్తుకు సమానము.

(ii) సెక్టరు యొక్క చాపము BCD అనేది శంకువు భూపరిధి యొక్క రూపాంతరమే.

(iii) శంకువు యొక్క వక్రతల వైశాల్యము = A–BCD సెక్టర్‌యొక్క వైశాల్యము.

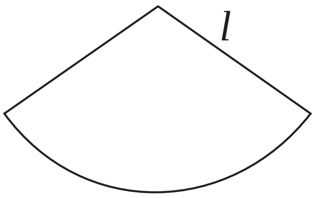
దీని నుండి శంకువు యొక్క వక్రతల వైశాల్యము కనుగొనటానికి దాని రూపాంతరము అనగా సెక్టరు యొక్క వైశాల్యమును కనుగొన వలెను. ఈ వైశాల్యమును ఎలా కనుగొనవచ్చునో, కింది కృత్యము ద్వారా అర్థము చేసుకోండి.

కృత్యము శంకువు యొక్క ఆకారంను గురించి ఆలోచిద్దాం.



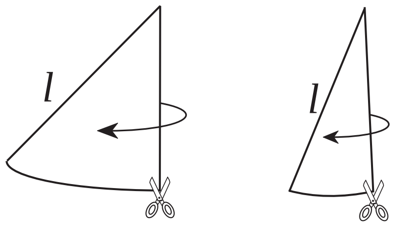
శంకువు

పటం 9.6



వక్రతలము యొక్క ఆకారం

పటం 9.7



ముక్కల ఆకారం

పటం 9.8

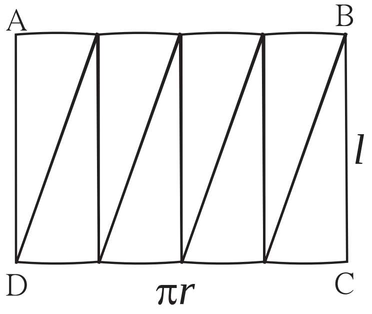
భూతలపరిధి = $2\pi r$

ఒక వక్రతలమును పటం 9.8 లో చూపిన విధంగా వీలైనన్ని చిన్న ముక్కలుగా చేయండి. వాటిని పటంలో చూపిన విధంగా ఒకదానికొకటి జోడించండి.

శంకువు వక్రతలం యొక్క ముక్కలను ఈ విధంగా జోడించడం వలన దాదాపుగా □ABCD అనే దీర్ఘచతురస్రములా తయారైంది.

AB మరియు CD ల మొత్తం పొడవు $2\pi r$ అవుతుంది.

$\therefore$ ABCD అనే దీర్ఘచతురస్రం యొక్క AB భుజం యొక్క పొడవు πr మరియు CD భుజం యొక్క పొడవు πr అవుతుంది.



పటం 9.9

దీర్ఘచతురస్రం యొక్క భుజం BC పొడవు = శంకువు యొక్క ఏటవాలు ఎత్తు = l అవుతుంది.

$\therefore$ శంకువు యొక్క వక్రతల వైశాల్యము అనగా ఈ దీర్ఘచతురస్రము యొక్క వైశాల్యము అవుతుంది.

$\therefore$ శంకువు వక్రతల వైశాల్యము = దీర్ఘచతురస్ర వైశాల్యము = $AB \times BC = \pi r \times l = \pi rl$

ఇప్పుడు శంకువు యొక్క సంపూర్ణతల వైశాల్యం సూత్రాన్ని కనుగొనవచ్చు.

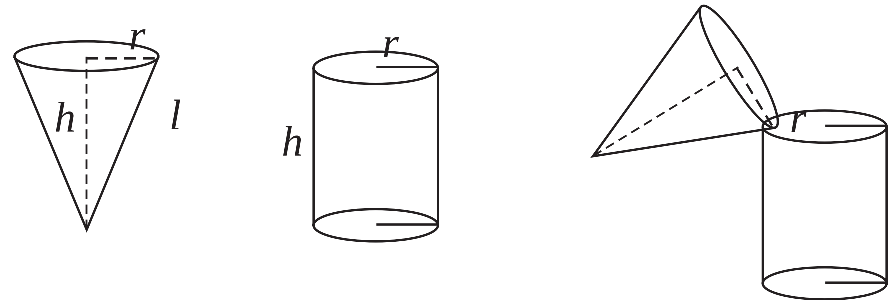
శంకువు సంపూర్ణతల వైశాల్యం = వక్రతల వైశాల్యం + భూతల వైశాల్యము

$$= \pi rl + \pi r^2$$
$$= \pi r(l + r)$$

ఇచట ఒక ముఖ్యమైన విషయంను గమనించారా? బిడాయించిన శంకువు కానట్లయితే (అనగా విదూషకుని Joker) యొక్క/పుట్టినరోజు టోపి (Birthday cap) వలె ఉన్న) దాని వక్రతలమే దాని ఏకైక తలముగా ఉంటుంది. అనగా దాని తలవైశాల్యము πrl అనే సూత్రము ద్వారా లభిస్తుంది.

కృత్యము : ఒక కార్డుబోర్డు తీసుకోండి. దానినుండి ఒక మూసివున్న స్థూపమును తయారుచేయండి. అనగా భూతల వ్యాసార్థము మరియు ఎత్తు, సమానంగా ఉండేట్లు ఒక శంకువు మరియు ఒక వైపు మూయబడిన స్థూపముగా తయారు చేయండి అనగా, శంకువు యొక్క ఎత్తు మరియు స్థూపం యొక్క ఎత్తు సమానంగా ఉండేట్లు శంకువు మరియు స్థూపములను తీసుకొండి.

శంకువును సన్నని ఇసుకతో నింపండి మరియు ఈ ఇసుకను ఆ స్థూపములో పోయండి. స్థూపము మొత్తం నిండెంత వరకు ఈ కృత్యమును చేయండి. స్థూపం ఇసుకతో పూర్తిగా నిండడానికి ఎన్ని శంకువుల ఇసుక పట్టింది? లెక్కించండి.



పటం 9.10

స్థూపము పూర్తిగా నిండడానికి మూడు శంకువుల ఇసుక పట్టింది.

తెలుసుకొందాం.

శంకువు యొక్క ఘనపరిమాణం (Volume of a cone)

3 × శంకువు ఘనపరిమాణం = స్థూపము ఘనపరిమాణం

∴ 3 × శంకువు ఘనపరిమాణం = $\pi r^2 h$

∴ శంకువు ఘనపరిమాణం = $\frac{1}{3} \times \pi r^2 h$

ఇది గుర్తుంచుకొందాం.

(i) శంకువు భూతల వైశాల్యం = πr^2

(ii) శంకువు వక్రతల వైశాల్యం = πrl

(iii) శంకువు సంపూర్ణతల వైశాల్యం = $\pi r(l + r)$

(iv) శంకువు ఘనపరిమాణము = $\frac{1}{3} \times \pi r^2 h$

సాధించిన ఉదాహరణలు

ఉదా (1) శంకువు యొక్క ఇవ్వబడిన భూవ్యాసార్థం (r) మరియు ఎత్తు (h) లను తీసుకొని ఏటవాలు ఎత్తు (l) ను కనుగొనండి.

(i) $r = 6$ సె.మీ., $h = 8$ సె.మీ.

$l^2 = r^2 + h^2$

$\therefore l^2 = (6)^2 + (8)^2$

$\therefore l^2 = 36 + 64$

$\therefore l^2 = 100$

$\therefore l = 10$ సె.మీ.

(ii) $r = 9$ సె.మీ., $h = 12$ సె.మీ.

$l^2 = r^2 + h^2$

$\therefore l^2 = (9)^2 + (12)^2$

$\therefore l^2 = 81 + 144$

$\therefore l^2 = 225$

$\therefore l = 15$ సె.మీ.

ఉదా (2) ఒక శంకువు భూ వ్యాసార్థం 12 సె.మీ. మరియు ఎత్తు 16 సె.మీ. అయినచో శంకువు ఏటవాలు ఎత్తు, వక్రతల వైశాల్యము మరియు సంపూర్ణతల వైశాల్యములను కనుగొనండి. ($\pi = 3.14$)

(i) $r = 12$ సె.మీ., $h = 16$ సె.మీ.

$l^2 = r^2 + h^2$

$\therefore l^2 = (12)^2 + (16)^2$

$\therefore l^2 = 144 + 256$

$\therefore l^2 = 400$

$\therefore l = 20$ సె.మీ.

(ii) శంకువు వక్రతల వైశాల్యము $= \pi rl$

$= 3.14 \times 12 \times 20$

$= 753.6$ చ.సె.మీ.

(iii) శంకువు సంపూర్ణతల వైశాల్యము $= \pi r(l + r)$

$= 3.14 \times 12(20+12)$

$= 3.14 \times 12 \times 32$

$= 1205.76$ చ.సె.మీ.

ఉదా (3) ఒక శంకువు సంపూర్ణతల వైశాల్యం 704 చ.సెం.మీ. మరియు భూ వ్యాసార్థం 7 సెం.మీ. అయినచో శంకువు ఏటవాలు ఎత్తును కనుగొనండి. ($\pi = \frac{22}{7}$ గా తీసుకోండి.)

శంకువు సంపూర్ణతల వైశాల్యం $= \pi r(l + r)$

$$\therefore \quad 704 = \frac{22}{7} \times 7\,(l + 7)$$

$$\therefore \quad \frac{704}{22} = l + 7$$

$$\therefore \quad 32 = l + 7$$

$$\therefore \quad 32 - 7 = l$$

$$\therefore \quad l = 25 \text{ సె.మీ.}$$

ఉదా (4) ఒక శంకువు భూవైశాల్యం 1386 చ.సెం.మీ. మరియు శంకువు ఎత్తు 28 సెం.మీ. అయిన శంకువు వక్రతల వైశాల్యమును కనుగొనండి. ($\pi = \frac{22}{7}$ గా తీసుకోండి.)

శంకువు భూవైశాల్యం $= \pi r^2$

$\therefore \quad 1386 = \frac{22}{7} \times r^2$

$\therefore \quad \frac{1386 \times 7}{22} = r^2$

$\therefore \quad 63 \times 7 = r^2$

$\therefore \quad 441 = r^2$

$\therefore \quad r = 21$ సె.మీ.

$l^2 = r^2 + h^2$

$\therefore l^2 = (21)^2 + (28)^2$

$\therefore l^2 = 441 + 784$

$\therefore l^2 = 1225$

$\therefore l = 35$ సె.మీ.

శంకువు వక్రతలవైశాల్యం $= \pi rl$

$= \frac{22}{7} \times 21 \times 35$

$= 22 \times 21 \times 5$

$= 2310$ చ.సె.మీ.

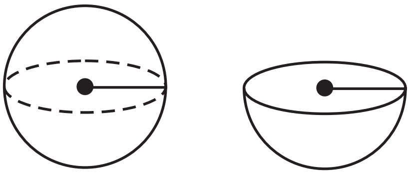
అభ్యాసం 9.2

1. శంకువు ఎత్తు 12 సెం.మీ. మరియు ఏటవాలు ఎత్తు 13 సెం.మీ. అయిన శంకువు భూవ్యాసార్థమెంత?
2. ఒక శంకువు సంపూర్ణతల వైశాల్యం 7128 సె.మీ.^{2} మరియు శంకువు భూవ్యాసార్థం 28 సెం.మీ. అయిన శంకువు ఘనపరిమాణమును కనుగొనండి. ($\pi = \frac{22}{7}$ గా తీసుకోండి.)
3. ఒక శంకువు వక్రతల వైశాల్యం 251.2 సె.మీ.^{2} మరియు భూవ్యాసార్థం 8 సె.మీ. గా ఉన్నట్లయితే శంకువు ఏటవాలు ఎత్తు మరియు ఎత్తులను కనుగొనండి. ($\pi = 3.14$ గా తీసుకోండి.)
4. 6 మీ వ్యాసార్థము మరియు 8 మీ ఏటవాలు ఎత్తు గల బిడాయించిన శంకాకార ఘనాకృతిని రేకుతో తయారుచేయడానికి ప్రతి చ.మీ.కు 10 రూ.ల చొప్పున దాని ధర ఉన్నట్లయితే ఆ ఘనాకృతి తయారు చేయుటకు అయ్యే ఖర్చును కనుగొనండి. ($\pi = \frac{22}{7}$ గా తీసుకోండి.)
5. శంకువు ఘనపరిమాణం 6280 ఘ.సె.మీ. భూవ్యాసార్థము 20 సె.మీ. అయిన దాని ఎత్తును కనుగొనండి. ($\pi = 3.14$ గా తీసుకోండి.)
6. శంకువు వక్రతల వైశాల్యము 188.4 చ.సె.మీ. మరియు ఏటవాలు ఎత్తు 10 సెం.మీ. ఐన శంకువు యొక్క ఎత్తును కనుగొనండి. ($\pi = 3.14$ గా తీసుకోండి.)
7. ఒక శంకువు ఘనపరిమాణం 1232 సె.మీ.^{3} మరియు ఎత్తు 24 సె.మీ. అయిన శంకువు వక్రతల వైశాల్యమును కనుగొనండి. ($\pi = \frac{22}{7}$ గా తీసుకోండి.)
8. ఒక శంకువు వక్రతల వైశాల్యం 2200 చ.సె.మీ. మరియు ఏటవాలు ఎత్తు 50 సె.మీ. అయిన ఆ శంకువు యొక్క సంపూర్ణతల వైశాల్యము మరియు ఘనపరిమాణములను కనుగొనండి. ($\pi = \frac{22}{7}$ గా తీసుకోండి.)
9. ఒక శంకాకారపు గుడారంలో 25 మంది ఉన్నారు. ప్రతి ఒక్కరికి నేలపై 4 చ.మీ. స్థలము అవసరం. ఐతే గుడారం యొక్క ఎత్తు 18 మీ. అయినట్లయితే గుడారం యొక్క ఘనపరిమాణము ఎంత?

10. ఒక వ్యవసాయ క్షేత్రములో పశుగ్రాసమును శంకువు ఆకారంలో ఒక గాదెగా తయారు చేసారు. దానిఎత్తు 2.1 మీ భూతల వ్యాసము 7.2 మీ. అయిన పశుగ్రాసము యొక్క ఘనపరిమాణమును కనుగొనుము. వర్షంవచ్చేసూచనలు కనబడినప్పుడు ఈ శంకువు ఆకార పశుగ్రాసం పై కప్పుటకు ఎన్ని చ.మీ.ల ప్లాస్టిక్ కాగితము అవసరము ఉంటుంది? ($\pi = \frac{22}{7}$ మరియు $\sqrt{17.37} = 4.17$)

తెలుసుకొందాం.

గోళము యొక్క ఘనపరిమాణము (Surface area of sphere)



పటం 9.11

బోలు గోళము ఉపరితల వైశాల్యము = $4\pi r^2$

$\therefore$ అర్ధగోళము వక్రతల వైశాల్యము = $2\pi r^2$

ఘన అర్ధగోళం సంపూర్ణతల వైశాల్యము = వక్రతల వైశాల్యం + వృత్త వైశాల్యం

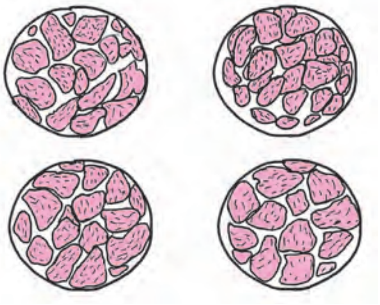
$= 2\pi r^2 + \pi r^2$

$= 3\pi r^2$

కృత్యము :

ఒక బత్తాయి తీసుకోండి. దానిని రెండు భాగాలుగా చేయండి.

ఒక భాగాన్ని కాగితముపై బోర్లించి దాని చుట్టు పెన్సిల్ తిప్పి వృత్తాన్ని గీయండి. ఒకగీత గీయండి. ఇలానాలుగు వృత్తాలు గీయండి. బత్తాయిని బలిచి నాలుగు సమాన ముక్కలుగా చేయండి.



ప్రతి తొక్కనుచిన్న-చిన్న ముక్కలు చేయండి. ఒక వృత్తాన్ని ఆ ముక్కలతో ఇంచుమించుగా నింపవచ్చునని తెలుసుకొండి. ముక్కలు నాలుగు వృత్తాలలో నిండుతాయి. దీనిని బట్టి

గోళము వక్రతల వైశాల్యము $= 4 \times$ వృత్తవైశాల్యం

$= 4\,\pi r^2$

సాధించిన ఉదాహరణలు

(1) 7 సె.మీ. వ్యాసార్థం గల గోళము యొక్క వక్రతల వైశాల్యమును కనుగొనండి. ($\pi = \frac{22}{7}$ గా తీసుకోండి.)

గోళము యొక్క వక్రతల వైశాల్యము $= 4\pi r^2$

$= 4 \times \frac{22}{7} \times (7)^2$

$= 4 \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7$

$= 88 \times 7$

$= 616$

గోళము యొక్క వక్రతల వైశాల్యము = 616 చ.సె.మీ.

(2) వక్రతల వైశాల్యం 1256 చ.సె.మీ.గల గోళము యొక్క వ్యాసార్థమును కనుగొనండి.
($\pi = 3.14$ గా తీసుకోండి.)

గోళము యొక్క వక్రతల వైశాల్యం $= 4\pi r^2$

$\therefore 1256 = 4 \times 3.14 \times r^2$

$\therefore \frac{1256}{4 \times 3.14} = r^2$

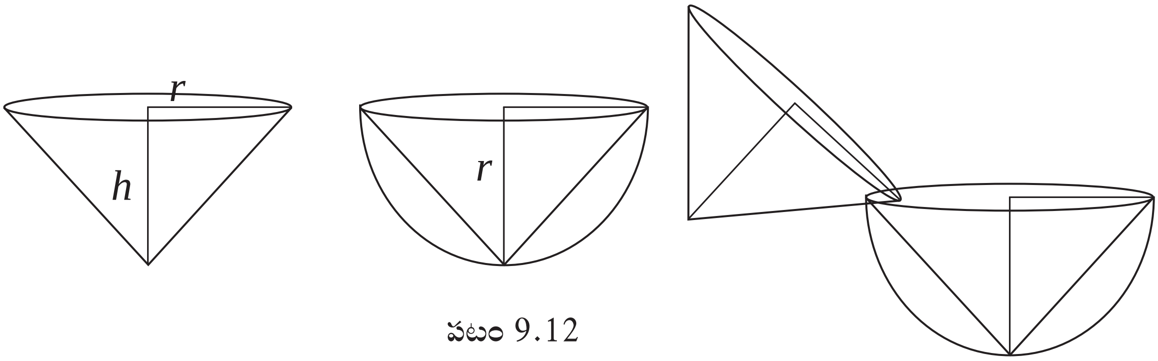
$\therefore \frac{31400}{314} = r^2$

$\therefore 100 = r^2$

$\therefore 10 = r$

$\therefore$ r = 10 సె.మీ.

కృత్యము : అర్థగోళము యొక్క వ్యాసార్థం మరియు శంకువు యొక్క ఎత్తు సమానముగా వుండేట్లు ఒక శంకువును మరియు ఒక అర్థగోళమును తీసుకోండి. అదే విధముగా శంకువు యొక్క భూతల వ్యాసార్థం మరియు అర్థగోళము యొక్క వ్యాసార్థములు సమానముగా ఉండవలెను.
శంకువును ఇసుకతో పూర్తిగా నింపండి. పూర్తిగా నిండిన శంకువును అర్థగోళములోకి వంచండి. అర్థగోళము పూర్తిగా నిండడానికి ఎన్ని శంకువులు కావలెనో చూడండి.



పటం 9.12

ఒక అర్థగోళమును నింపడానికి రెండుశంకువుల ఇసుక పట్టింది.

$\therefore$ 2 × శంకువు ఘనపరిమాణం = అర్థగోళము యొక్క ఘనపరిమాణం

$\therefore$ అర్థగోళము యొక్క ఘనపరిమాణం

= 2 × శంకువు యొక్క ఘనపరిమాణం

$= 2 \times \frac{1}{3} \times \pi r^2 h$

$= 2 \times \frac{1}{3} \times \pi r^2 \times r$

$= \frac{2}{3} \pi r^3$

$\therefore$ గోళము యొక్క ఘనపరిమాణం

= 2 × అర్థగోళం యొక్క ఘనపరిమాణం

$= \frac{4}{3} \pi r^3$

$\therefore$ గోళము యొక్క ఘన పరిమాణం

$= \frac{4}{3} \pi r^3$

ఇది గుర్తుంచుకొందాం.

- అర్ధగోళము యొక్క ఘనపరిమాణము = $\frac{2}{3}\pi r^3$
- ఘన అర్ధగోళము యొక్క సంపూర్ణతల వైశాల్యం = $2\pi r^2 + \pi r^2 = 3\pi r^2$

సాధించిన ఉదాహరణము:

ఉదా (1) ఒక గోళము యొక్క వ్యాసార్ధం 21 సె.మీ. అయిన దాని ఘనపరిమాణమును కనుగొనండి. ($\pi = \frac{22}{7}$ గా తీసుకోండి.)

సాధన : గోళము యొక్క ఘనపరిమాణం = $\frac{4}{3}\pi r^3$

$$= \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times (21)^3$$

$$= \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times 21 \times 21 \times 21$$

$$= 88 \times 441$$

$\therefore$ గోళము యొక్క ఘనపరిమాణం = 38808 చ.సె.మీ.

ఉదా (2) 113040 ఘ.సె.మీ. ఘనపరిమాణము గల గోళము వ్యాసార్ధమును కనుగొనండి. (π = 3.14 గా తీసుకోండి.)

సాధన : గోళము యొక్క ఘనపరిమాణం = $\frac{4}{3}\pi r^3$

$$113040 = \frac{4}{3} \times 3.14 \times r^3$$

$$\frac{113040 \times 3}{4 \times 3.14} = r^3$$

$$\frac{28260 \times 3}{3.14} = r^3$$

$$\therefore 9000 \times 3 = r^3$$

$$\therefore r^3 = 27000$$

$\therefore$ r = 30 సె.మీ.

గోళము యొక్క వ్యాసార్ధం 30 సె.మీ.

ఉదా (3) వక్రతల వైశాల్యం 314 చ.సె.మీ. గల గోళము యొక్క ఘనపరిమాణము ఎంత? (π = 3.14 గా తీసుకోండి.)

గోళము యొక్క వక్రతలవైశాల్యం = $4\pi r^2$

$$314 = 4 \times 3.14 \times r^2$$

$$\frac{314}{4 \times 3.14} = r^2$$

$$\frac{31400}{4 \times 314} = r^2$$

$$\therefore \frac{100}{4} = r^2$$

$$\therefore 25 = r^2$$

$\therefore$ r = 5 సె.మీ.

గోళము యొక్క ఘనపరిమాణము = $\frac{4}{3}\pi r^3$

$$= \frac{4}{3} \times 3.14 \times 5^3$$

$$= \frac{4}{3} \times 3.14 \times 125$$

= 523.33 ఘ.సె.మీ.

అభ్యాసం 9.3

అభ్యాసం 9.3

1. కింద ఇవ్వబడిన సంఖ్యలు గోళాల యొక్క వ్యాసార్థాలను సూచిస్తాయి.
   (i) 4 సె.మీ. (ii) 9 సె.మీ. (iii) 3.5 సె.మీ.
   అయిన ఆ గోళాల యొక్క వక్రతల వైశాల్యము మరియు ఘనపరిమాణములను తెల్పండి. ($\pi = 3.14$ గా తీసుకోండి.)
2. 5 సె.మీ. వ్యాసార్థముగల ఘన అర్ధగోళము యొక్క వక్రతల వైశాల్యము మరియు సంపూర్ణతల వైశాల్యములను కనుగొనండి. ($\pi = 3.14$ గా తీసుకోండి.)
3. 2826 సె.మీ.^{2} వక్రతల వైశాల్యముగల గోళము ఘనపరిమాణము కనుగొనండి. ($\pi = 3.14$ గా తీసుకోండి.)
4. 38808 ఘ.సె.మీ. ఘనపరిమాణము గల గోళము వక్రతల వైశాల్యమును కనుగొనండి. ($\pi = \frac{22}{7}$ గా తీసుకోండి.)
5. ఒక అర్ధగోళము ఘనపరిమాణము 18000 π ఘ.సె.మీ. అయితే ఆ గోళము వ్యాసమును కనుగొనండి.

సంకీర్ణ ప్రశ్నసంగ్రహం 9

1. 0.9 మీ వ్యాసము మరియు 1.4 మీ పొడవుగల రోడ్డురోలర్ 500 చుట్లలో చదును చేసిన నేల వైశాల్యమెంత? ($\pi = \frac{22}{7}$)
2. ఇండ్లలో వాడే ఒక దీర్ఘఘనాకారపు అక్వేరియంను తయారు చేయుటకు 2 మి.మీ.ల మందంగల గాజును ఉపయోగించారు. అక్వేరియం యొక్క (గోడల) బాహ్యకొలతలు పొడవు, వెడల్పు మరియు ఎత్తులు వరుసగా సెం.మీ.లలో $60.4 \times 40.4 \times 40.2$ అయిన దానిలో ఎక్కువలో ఎక్కువ ఎంత నీరు పడుతుంది?
3. ఒక శంకువు యొక్క భూతల వ్యాసార్థం మరియు ఎత్తుల నిష్పత్తి 5:12 శంకువు యొక్క ఘనపరిమాణం 314 ఘ.మీ.గా ఉన్నట్లయితే దాని ఎత్తు మరియు ఏటవాలు ఎత్తులను కనుగొనండి. ($\pi = 3.14$ గా తీసుకోండి.)
4. ఒక గోళము యొక్క ఘనపరిమాణము 904.32 ఘ.సెం.మీ. అయిన ఆ గోళము యొక్క వ్యాసార్థమును కనుగొనండి. ($\pi = 3.14$ గా తీసుకోండి.)
5. ఒక ఘనము యొక్క సంపూర్ణతల వైశాల్యము 864 చ.సె.మీ. అయిన దాని ఘనపరిమాణమును కనుగొనండి.
6. ఏ గోళము యొక్క వక్రతల వైశాల్యము 154 చ.సె.మీ. గలదో ఆ గోళము ఘనపరిమాణమును కనుగొనండి.
7. ఒక శంకువు యొక్క సంపూర్ణతల వైశాల్యము 616 చ.సె.మీ. దాని ఏటవాలు ఎత్తు భూతల వ్యాసార్థమునకు మూడు రెట్లు ఉన్నట్లయితే దాని ఏటవాలు ఎత్తును కనుగొనండి.
8. వృత్తాకారపు బావియొక్క అంతర వ్యాసము 4.20 మీ. బావియొక్కలోతు 10 మీ. అయినదాని అంతర వక్రతల వైశాల్యము ఎంత? బావి యొక్క అంతర వక్రతల వైశాల్యమును ప్లాస్టరింగ్ చేయుటకు ప్రతి చ.మీ. 52 రూ. చొప్పున ఎంత ఖర్చు అవుతుంది?
9. ఒక రోడ్డురోలర్ పొడవు 2.1 మీ. అయిన దాని వ్యాసము 1.4 మీ. ఒక మైదానమును చదునుచేయుటకు రోలర్ 500 చుట్లు తిరిగిన రోలర్ ఎన్ని చ.మీ.ల మైదానమును చదునుచేయును? చదునుచేయుటకు ప్రతి చ.మీ.కు 7 రూ. ల చొప్పున ఎంత ఖర్చు అవుతుంది?

జవాబులు

1. రేఖాగణిత ప్రాథమిక భావనలు

అభ్యాసం 1.1

1. (i) 3 (ii) 3 (iii) 7 (iv) 1
   (v) 3 (vi) 5 (vii) 2 (viii) 7
2. (i) 6 (ii) 8 (iii) 10 (iv) 1 (v) 3 (vi) 12
3. (i) P-R-Q (ii) సరేఖీయాలు కావు (iii) A-C-B (iv) సరేఖీయాలు కావు
   (v) X-Y-Z (vi) సరేఖీయాలు కావు
4. 18 మరియు 2 **5.** 25 మరియు 9 **6.** (i) 4.5 (ii) 6.2 (iii) $2\sqrt{7}$ **7.** త్రిభుజం.

అభ్యాసం 1.2

1. (i) కావు (ii) కావు (iii) అవుతాయి **2.** 4 **3.** 5 **4.** BP < AP < AB
5. (i) కిరణం RS లేదా కిరణం RT (ii) కిరణం PQ (iii) రే.ఖం. QR (iv) కిరణం QR, కిరణం RQ మొ.
   (v) కిరణం RQ , కిరణం RT మొ. (vi) కిరణం SR , కిరణం ST మొ. (vii) బిందువు S
6. (i) బిందువు A మరియు బిందువు C, బిందువు D మరియు బిందువు P (ii) బిందువు L బిందువు U, బిందువు P బిందువు R (iii) d(U,V) = 10 ,d(P,C) =6 , d(V,B) = 3 , d(U,L)=2

అభ్యాసం 1.3

1. (i) ఒక చతుర్భుజం సమాంతర చతుర్భుజము అయినట్లయితే ఆ చతుర్భుజం యొక్క ఎదుటి కోణాలు సమానంగా ఉంటాయి.
   (ii) ఒక చతుర్భుజము దీర్ఘచతురస్రం అయినట్లయితే ఆ చతుర్భుజం యొక్క కర్ణములు సర్వసమానములు.
   (iii) ఒక త్రిభుజం సమద్విబాహు త్రిభుజం అయినట్లయితే ఆ త్రిభుజం యొక్క శీర్షబిందువు మరియు భూమి యొక్క మధ్య బిందువులను కలిపే రేఖాఖండం భూమికి లంబంగా ఉంటుంది.
2. (i) రెండు రేఖలు మరియు వాటి తిర్యగ్రేఖ ఇచ్చిన లభించే ఏకాంతరకోణాలు సర్వసమానమైన ఆ రెండు రేఖలు సమాంతరము అవుతాయి.
   (ii) రెండు సమాంతర రేఖలను ఒక తిర్యగ్రేఖ ఖండించినచో లభించే అంతర కోణాల జత సంపూరకముల అవుతాయి.
   (iii) ఒక చతుర్భుజం యొక్క కర్ణములు సర్వసమానములైన ఆ చతుర్భుజము దీర్ఘచతురస్రము అవుతుంది.

సంకీర్ణ ప్రశ్నసంగ్రహం 1

1. (i) A (ii) C (iii) C (iv) C (v) B
2. (i) అసత్యము (ii) అసత్యము (iii) సత్యము (iv) అసత్యము
3. (i) 3 (ii) 8 (iii) 9 (iv) 2 (v) 6 (vi) 22 (vii) 165
4. -15 మరియు 1 (5) (i) 10.5 (ii) 9.1 (6) -6 మరియు 8

2. సమాంతర రేఖలు

అభ్యాసం 2.1

1. (i) 95° (ii) 95° (iii) 85° (iv) 85°
2. $\angle a = 70^\circ$, $\angle b = 70^\circ$, $\angle c = 115^\circ$, $\angle d = 65^\circ$
3. $\angle a = 135^\circ$, $\angle b = 135^\circ$, $\angle c = 135^\circ$
5. (i) 75° (ii) 75° (iii) 105° (iv) 75°

అభ్యాసం 2.2

1. కావు.   4. $\angle ABC = 130^\circ$

సంకీర్ణ ప్రశ్నసంగ్రహం 2

1. (i) C (ii) C (iii) A (iv) B (v) C   4. $x = 130^\circ$ $y = 50^\circ$
5. $x = 126^{0\circ}$ 6. $f = 100^\circ$ $g = 80^\circ$

3. త్రిభుజములు

అభ్యాసం 3.1

1. 110° 2. 45° 3. $80^\circ, 60^\circ, 40^\circ$ 4. $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$
5. $60^\circ, 80^\circ, 40^\circ$ 6. $\angle DRE = 70^\circ$, $\angle ARE = 110^\circ$
7. $\angle AOB = 125^\circ$ 9. $30^\circ, 70^\circ, 80^\circ$

అభ్యాసం 3.2

1. (i) భు.భు.భు. (ii) భు.కో.భు. (iii) కో.భు.కో. (iv) కర్ణము భుజము
2. (i) కో.భు.కో., $\angle BAC \cong \angle QPR$, రే.ఖం. AB ≅ రే.ఖం. PQ, రే.ఖం. AC ≅ రే.ఖం. PR
   (ii) భు.కో.భు., $\angle TPQ \cong \angle TSR$, $\angle TQP \cong \angle TRS$, రే.ఖం. PQ ≅ రే.ఖం. SR
3. కర్ణము భుజము, $\angle ACB \cong \angle QRP$, $\angle ABC \cong \angle QPR$, రే.ఖం. AC ≅ రే.ఖం. QR
4. భు.భు.భు. $\angle MLN \cong \angle MPN$, $\angle LMN \cong \angle MNP$, $\angle LNM \cong \angle PMN$

అభ్యాసం 3.3

1. $x = 50^\circ$, $y = 60^\circ$, $m\angle ABD = 110^\circ$, $m\angle ACD = 110^\circ$.
2. 7.5 యూనిట్లు   3. 6.5 యూనిట్లు   4. l(PG) = 5 సె.మీ. , l(PT) = 7.5 సె.మీ.

అభ్యాసం 3.4

1. 2 సె.మీ.   2. 28° 3. $\angle QPR$, $\angle PQR$ 4. భుజం NA, భుజం FN

అభ్యాసం 3.5

1. $\frac{XY}{LM} = \frac{YZ}{MN} = \frac{XZ}{LN}$, $\angle X \cong \angle L$, $\angle Y \cong \angle M$, $\angle Z \cong \angle N$
2. l(QR) = 12 సె.మీ., l(PR) = 10 సె.మీ.

సంకీర్ణ ప్రశ్నసంగ్రహం 3

1. (i) D (ii) B (iii) B

5. చతుర్భుజములు

అభ్యాసం 5.1

1. m∠XWZ = 135°, m∠YZW = 45° , l (WY) = 10 సె.మీ.
2. x = 40° , ∠C = 132° , ∠D = 48°
3. 25 సె.మీ., 50 సె.మీ., 25 సె.మీ., 50 సె.మీ.
4. 60°, 120°, 60°, 120°
6. ∠A = 70° , ∠B = 110° , ∠C = 70° , ∠R = 110°

అభ్యాసం 5.3

1. BO = 4 సె.మీ., ∠ACB = 35°
2. QR = 7.5 సె.మీ., ∠PQR = 105°, ∠SRQ = 75°
3. ∠IMJ = 90°, ∠JIK = 45°, ∠LJK = 45°
4. భుజం = 14.5 సె.మీ., చుట్టుకొలత = 58 సె.మీ.
5. (i) అసత్యము (ii) అసత్యము (iii) సత్యము (iv) సత్యము (v) సత్యము (vi) అసత్యము

అభ్యాసం 5.4

1. ∠J = 127°, ∠L = 72° **2.** ∠B = 108°, ∠D = 72°

అభ్యాసం 5.5

1. XY = 4.5 సె.మీ., YZ = 2.5 సె.మీ., XZ = 5.5 సె.మీ.

సంకీర్ణ ప్రశ్నసంగ్రహం 5

1. (i) D (ii) C (iii) D **2.** 25 సె.మీ., **3.** $6.5\sqrt{2}$ సె.మీ.

4. 24 సె.మీ., 32 సె.మీ., 24 సె.మీ., 32 సె.మీ. **5.** PQ = 26 సె.మీ. **6.** ∠MPS = 65°

6. వృత్తము

అభ్యాసం 6.1

1. 20 సె.మీ. **2.** 5 సె.మీ. **3.** 32 యూనిట్లు **4.** 9 యూనిట్లు

అభ్యాసం 6.2

1. 12 సె.మీ. **2.** 24 సె.మీ.

సంకీర్ణ ప్రశ్నసంగ్రహం 6

1. (i) A (ii) C (iii) A (iv) B (v) D (vi) C (vii) D లేదా B **2.** 2:1 **4.** 24 యూనిట్లు

7. నిరూపక రేఖాగణితము

అభ్యాసం 7.1

1. బిందువు A:II వ పాదము, బిందువు B:III వ పాదము, బిందువు K:I వ పాదము, బిందువు D:I వ పాదము బిందువు E:I వ పాదము, బిందువు F: IV వ పాదము, బిందువు G : IV వ పాదము, బిందువు H : Y−అక్షము బిందువు M : X−అక్షము, బిందువు N : Y−అక్షము, బిందువు P : Y−అక్షము, బిందువు Q : III వ పాదము
2. (i) I వ పాదము (ii) III వ పాదము (iii) IV వ పాదము (iv) IIవ పాదము

అభ్యాసం 7.2

1. చతురస్రము 2. $x = -7$ 3. $y = -5$ 4. $x = -3$ 5. 4 యూనిట్లు
6. (i) Y−అక్షము (ii) X−అక్షము (iii) Y−అక్షము (iv) X−అక్షము
7. X అక్షమును (5,0) , Y అక్షమును (0,5)
8. (−4,1), (−1.5, 1), (−1.5,5), (−4,5)

సంకీర్ణ ప్రశ్నసంగ్రహం 7

1. (i) C (ii) A (iii) B (iv) C (v) C (vi) B **2.** (i) Q (−2,2), R(4,−1) (ii) T(0,−1), M(3,0) (iii) బిందువు S (iv) బిందువు O **3.** (i) IVవ పాదము (ii) III వ పాదము (iii) II వ పాదము (iv) II వ పాదము (v) Y అక్షము (vi) X అక్షము **5.** (i) 3 (ii) P(3,2), Q(3,−1), R (3,0) (iii) 0 **6.** రెండురేఖలు. $y = 5, y = -5$ **7.** $|a|$

8. త్రికోణమితి

అభ్యాసం 8.1

1. (i) $\frac{QR}{PQ}$ (ii) $\frac{QR}{PQ}$ (iii) $\frac{QR}{PR}$ (iv) $\frac{PR}{QR}$
2. (i) $\frac{a}{c}$ (ii) $\frac{b}{a}$ (iii) $\frac{b}{c}$ (iv) $\frac{a}{b}$
3. (i) $\frac{MN}{LN}$ (ii) $\frac{LM}{LN}$ (iii) $\frac{LM}{MN}$ (iv) $\frac{MN}{LN}$
4. (i) $\frac{PQ}{PR}, \frac{RQ}{PR}, \frac{PQ}{RQ}$ (ii) $\frac{QS}{PS}, \frac{PQ}{PS}, \frac{QS}{PQ}$

అభ్యాసం 8.2

1. $\sin\theta : \frac{12}{37}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \frac{21}{29}, \frac{8}{17}, \frac{1}{3}$; $\cos\theta : \frac{60}{61}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{20}{29}, \frac{15}{17}, \frac{4}{5}, \frac{2\sqrt{2}}{3}$

   $\tan\theta : \frac{12}{35}, \frac{11}{60}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{2}, \frac{3}{4}$

2. (i) $\frac{11}{2}$ (ii) $\frac{93}{20}$ (iii) 5 (iv) $\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}$ (v) $\frac{3}{4}$ (vi) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 3. $\frac{3}{5}$ 4. $\frac{8}{17}$

సంకీర్ణ ప్రశ్నసంగ్రహం 8

1. (i) A (ii) D (iii) C (iv) D
2. $\sin T = \frac{12}{13}, \cos T = \frac{5}{13}, \tan T = \frac{12}{5}, \sin U = \frac{5}{13}, \cos U = \frac{12}{13}, \tan U = \frac{5}{12}$
3. $\sin Y = \frac{8}{17}, \cos Y = \frac{15}{17}, \tan Y = \frac{8}{15}, \sin Z = \frac{15}{17}, \cos Z = \frac{8}{17}, \tan Z = \frac{15}{8}$
4. $\sin\theta = \frac{7}{25}, \tan\theta = \frac{7}{24}, \sin^2\theta = \frac{49}{625}, \cos^2\theta = \frac{576}{625}$
5. (i) 70 (ii) 60 (iii) 50

9. ఉపరితలవైశాల్యం మరియు ఘనపరిమాణం

అభ్యాసం 9.1

1. 640 చ.సె.మీ., 1120 చ.సె.మీ. 2. 20 యూనిట్లు 3. 81 చ.సె.మీ., 121.50 చ.సె.మీ.
4. 3600 చ.సె.మీ. 5. 20 మీ. 6. 421.88ఘ.సె.మీ.
7. 1632.80 చ.సె.మీ., 4144.80 చ.సె.మీ. 8. 21 సె.మీ.

అభ్యాసం 9.2

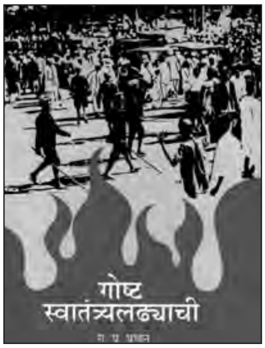
1. 5 సె.మీ. 2. 36960 ఘ.సె.మీ. 3. 10 సె.మీ., 6 సె.మీ. 4. ₹ 2640
5. 15 సె.మీ. 6. 8 సె.మీ. 7. 550 చ.సె.మీ. 8. 2816 చ.సె.మీ., 9856 ఘ.సె.మీ.
9. 600 ఘ.మీ. 10. 28.51 ఘ.మీ., 47.18 చ.మీ.

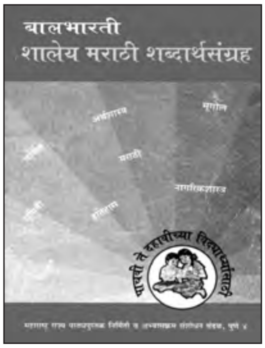
అభ్యాసం 9.3

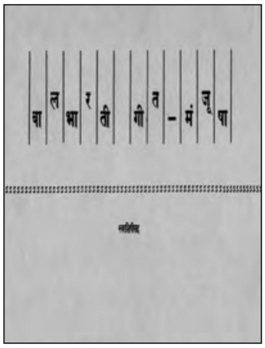
1. (i) 200.96 చ.సె.మీ., 267.95 ఘ.సె.మీ. (ii) 1017.36 చ.సె.మీ., 3052.08 ఘ.సె.మీ.
   (iii) 153.86 చ.సె.మీ., 179.50 ఘ.సె.మీ.
2. 157 చ.సె.మీ., 235.5 చ.సె.మీ. 3. 14130 ఘ.సె.మీ. 4. 5544 చ.సె.మీ. 5. 60 సె.మీ.

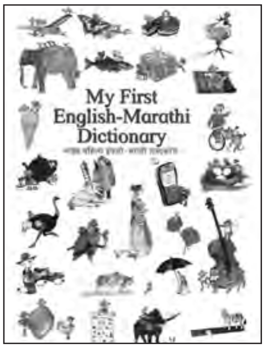
సంకీర్ణ ప్రశ్నసంగ్రహం 9

1. 1980 చ.మీ. 2. 96801.6 ఘ.సె.మీ. 3. 12 మీ., 13 మీ.
4. 6 సె.మీ. 5. 1728 ఘ.సె.మీ. 6. 179.67 ఘ.సె.మీ.
7. 21 సె.మీ. 8. 132 చమీ., ₹ 6864 9. 4620 చమీ., ₹ 32340









- पाठ्यपुस्तक मंडळाची वैशिष्ट्यपूर्ण पाठ्येत्तर प्रकाशने.
- नामवंत लेखक, कवी, विचारवंत यांच्या साहित्याचा समावेश.
- शालेय स्तरावर पूरक वाचनासाठी उपयुक्त.

पुस्तक मागणीसाठी www.ebalbharati.in, www.balbharati.in संकेत स्थळावर भेट द्या.

साहित्य पाठ्यपुस्तक मंडळाच्या विभागीय भांडारांमध्ये विक्रीसाठी उपलब्ध आहे.

ebalbharati

विभागीय भांडारे संपर्क क्रमांक : पुणे - ☎ २५६५९४६५, कोल्हापूर- ☎ २४६८५७६, मुंबई (गोरेगाव) - ☎ २८७७१८४२, पनवेल - ☎ २७४६२६४६५, नाशिक - ☎ २३९१५११, औरंगाबाद - ☎ २३३२१७१, नागपूर - ☎ २५४७७१६/२५२३०७८, लातूर - ☎ २२०९३०, अमरावती - ☎ २५३०९६५

మహారాష్ట్ర రాష్ట్ర పాఠ్యపుస్తక నిర్మితి మరియు పాఠ్యప్రణాళిక పరిశోధన సంస్థ, పుణె–411 004.

तेलुगु गणित इ.९वी भाग-२

₹ 61.00