గణితశాస్త్రం I వ భాగం

తొమ్మిదవ తరగతి

భారత సంవిధానము

పార్ట్ – IV A

ప్రాథమిక బాధ్యతలు

51 ఎ) ప్రాథమిక బాధ్యతలు

ప్రతి పౌరుడు ఈ క్రింది బాధ్యతలను మనసారా స్వీకరించి బాధ్యతాయుతంగా ప్రవర్తించవలెను.

ఎ) రాజ్యాంగ శాసనబద్ధుడై యుండుట. శాసనమందలి ఆశయములనూ, శాసనం స్థాపించే సంస్థలనూ, జాతీయ పతకాన్ని, జాతీయ గీతాన్ని అంకితభావంతో గౌరవించుట.

బి) స్వాతంత్ర్యోద్యమ స్ఫూర్తితో అన్ని రంగాలలో వ్యవహరించుట.

సి) దేశ సార్వభౌమత్వాన్ని, సమన్వయతనూ, సమగ్రతను రక్షించుట.

డి) దేశరక్షణలో అనుక్షణం సంసిద్ధుడై ఉండుట.

ఇ) ప్రజాజీవనంలో అన్యోన్యతనూ, భ్రాతృభావాన్ని పోషించుట, మత, భాష, ప్రాంతీయతత్త్వాలకు వర్గవైరుధ్యములకు అతీతముగా ఉండుట. స్త్రీలను అగౌరవపరచే ఆచారములను విడనాడుట.

ఎఫ్) అమూల్యమైన భారతీయ చారిత్రక సంపదనూ, సుసంపన్న సంస్కృతినీ పరిరక్షించుట.

జి) పర్యావరణాన్ని అడవులను, కొలనులనూ, నదులనూ రక్షించుట, అభివృద్ధి పరచుట, మృగరక్షణ జలజంతు జీవరాసులపై కరుణార్తత.

హెచ్) శాస్త్రీయ మరియు మానవతా దృక్పథాలను అలవరచుకొనుట, జిజ్ఞాసను పెంపొందించు కొనుట, సంస్కరణ తత్వమును పెంపొందించుట.

ఐ) హింసను విడనాడుట, ప్రజల ఆస్తుల విధ్వంసం చర్యలను నిరోధించుట.

జె) వ్యక్తిత్వ శక్తి సామర్థ్యాల ఔన్నత్యాన్ని పెంపొందించుకొనుట ద్వారా మరియూ సమిష్టి కృషి ద్వారా అన్ని రంగాలలో గణనీయమైన స్థాయిని చేరుటకొరకు, శిఖరాగ్ర సాధనకొరకు నిరంతరం కృషి సల్పుట.

కె) రక్షకులు లేదా సంరక్షకులుగా ఉన్నవారందరూ ఆరు నుంచి 14 సంవత్సరముల లోపల పసివారికి విద్యాభ్యాసము చేయు అవకాశమును కల్పించవలెను.

ప్రభుత్వ తీర్మానం క్రమ సంఖ్య : అభ్యాస్-2116/(ప్ర.క్ర.43/16) ఎస్‌డి-4 తేదీ 25.4.2016ను సారం స్థాపించబడిన సమన్వయ సమితి యొక్క తేదీ 3.3.2017 రోజున జరిగిన సభలో ఈ పాఠ్య పుస్తకమును నిర్దేశించుటకుగాను అనుమతి ఇవ్వబడినది.

గణితశాస్త్రం

Iవ భాగం

తొమ్మిదవ తరగతి

మహారాష్ట్ర రాష్ట్ర పాఠ్యపుస్తక నిర్మితి మరియు పాఠ్యప్రణాళిక పరిశోధన సంస్థ, పుణె-411 004.

R5Y7N7

మీ స్మార్ట్‌ఫోన్‌తో DIKSHA App నుపయోగించి పాఠ్యపుస్తకం మొదటి పుటలోని QR CODE ను స్కాన్ చేసిన డిజిటల్ పాఠ్యపుస్తకం మరియు ప్రతి పాఠంలోని QR CODE ను స్కాన్ చేసిన ఆ పాఠానికి సంబంధించిన అధ్యయన-అధ్యాపనలకు ఉపయుక్తమగు దృశ్య-శ్రవణ సాహిత్యం లభిస్తుంది.

ప్రథమ ప్రచురణ :2017
పునర్ముద్రణ : 2022

© మహారాష్ట్ర రాష్ట్ర పాఠ్యపుస్తక నిర్మితి మరియు పాఠ్య ప్రణాళిక పరిశోధన సంస్థ, పుణె-411004.

ఈ పుస్తకమునకు సంబంధించిన సర్వహక్కులు మహారాష్ట్ర రాష్ట్ర పాఠ్యపుస్తక నిర్మితి మరియు పాఠ్య ప్రణాళిక పరిశోధన సంస్థవి. ఈ పుస్తకము నందలి ఏ భాగమును సంచాలకులు, మహారాష్ట్ర రాష్ట్ర పాఠ్యప్రణాళిక పరిశోధన సంస్థ వారి లిఖిత అనుమతి లేకుండా ఉటంకించటం చేయరాదు.

గణిత విషయనిపుణుల సమితి

డా॥ మంగళ నార్లీకర్ (అధ్యక్షులు)
డా॥ జయశ్రీ అత్రే (సభ్యులు)
శ్రీ రమాకాంత్ సరోదే (సభ్యులు)
శ్రీ దాదాసో సర్దే (సభ్యులు)
శ్రీ సందీప్ పంచ్‌భాయ్ (సభ్యులు)
శ్రీమతి లత టిళేకర్ (సభ్యులు)
శ్రీమతి ఉజ్వల గోడ్‌బోలె (సభ్యకార్యదర్శి)

ప్రధాన సంయోజకులు : శ్రీమతి ఉజ్వల శ్రీకాంత్ గోడ్‌బోలే
ఇ. విశేషాధికారిణి, గణితం
పాఠ్యపుస్తక సంస్థ, పుణె.
ముఖచిత్రం అలంకరణ : ధనశ్రీ మోకాశీ, పుణె
కంప్యూటర్ స్కెచ్ : శ్రీ సందీప్ కోళీ, ముంబయి
చిత్రకారులు : శ్రీ ధనశ్రీ మోకాశీ

గణిత విషయం - రాష్ట్ర అధ్యయనవర్గ సభ్యులు

శ్రీమతి పూజా జాధవ్
శ్రీ ప్రమోద్ ఠోంబ్రే
శ్రీ రాజేంద్ర చౌధరీ
శ్రీ అన్నప్ప పరీట్
శ్రీ శ్రీపాద్ దేశ్‌పాండే
శ్రీ బన్సీ హావళే
శ్రీ ఉమేష్ రేళే
శ్రీ చందన్ కులకర్ణి
శ్రీమతి అనిత జావే
శ్రీమతి బాగేశ్రీ చవాన్
శ్రీ కళ్యాణ్ కడేకర్
శ్రీ సందేశ్ సోనావణే
శ్రీ సుజిత్ శిందే
డా॥ హన్మంత్ జగ్‌తాప్
శ్రీ ప్రతాప్ కాశిద్
శ్రీ కాశీరాం బావిసానే
శ్రీ పప్పు గాడే
శ్రీమతి రోహిణి శిర్కే
శ్రీ రామా వన్యాళ్‌కర్
శ్రీ అన్సార్ శేఖ్
శ్రీమతి సువర్ణ దేశ్‌పాండే
శ్రీ గణేష్ కోల్తే
శ్రీ సురేష్ దాతే
శ్రీ ప్రకాశ్ జేండె
శ్రీ శ్రీకాంత్ రత్నపారఖీ
శ్రీ సూర్యకాంత్ శహాణే
శ్రీ ప్రకాశ్ కాప్సే
శ్రీ సలీం హాష్మీ
శ్రీమతి ఆర్యా భిడే
శ్రీ మిలింద్ భాకరే
శ్రీ జ్ఞానేశ్వర్ మాశాళ్‌కర్
శ్రీ లక్ష్మణ్ దావణ్‌కర్
శ్రీ సుధీర్ పాటీల్
శ్రీ రాజారాం బండగర్
శ్రీ ప్రదీప్ గోడ్సే
శ్రీ రవీంద్ర ఖందారే
శ్రీ సాగర్ సకుడే

శ్రీమతి ప్రాజక్తి గోఖలే (ఆహ్వానిత సభ్యులు)
శ్రీ వి.డి. గోడ్బోలే (ఆహ్వానిత సభ్యులు)
శ్రీమతి తరుబెన్ పోపట్ (ఆహ్వానిత సభ్యులు)

అనువాదం, సమీక్ష : శ్రీ బేతి మల్లేశం
శ్రీమతి ఈరబత్తి ప్రతిభ అనిల్
పునః సమీక్ష : శ్రీ మురళి రాజేశం కుందారం
అనువాద సంయోజకులు : డా॥ శ్రీమతి తులసీ భారత్,
విశేషాధికారిణి-తెలుగు,
పాఠ్యపుస్తక సంస్థ, పుణె

నిర్మితి : శ్రీ సచ్చితానంద్ ఆఫళే
ముఖ్యనిర్మితి అధికారి
శ్రీ సంజయ్ కాంబ్లే
నిర్మితి అధికారి
శ్రీ ప్రశాంత్ హరణె
నిర్మితి సహాయకులు

అక్షర కూర్పు : PC Graphic, Mumbai
కాగితం : 70 జి.యస్.యమ్. క్రీమ్‌వోవ్
ముద్రణాదేశం :
ముద్రకులు :

ప్రకాశకులు

శ్రీ వివేక్ ఉత్తమ్ గోసావి, నియంత్రకులు,
పాఠ్యపుస్తక నిర్మితి సంస్థ,
ప్రభాదేవి, ముంబయి-25.

భారత సంవిధానము

ప్రస్తావన

భారతదేశ ప్రజలమగు మేము, భారతదేశమును **సార్వభౌమ్య సామ్యవాద లౌకిక ప్రజాస్వామ్య గణరాజ్యముగ** నెలకొల్పుటకు మరియు అందలి పౌరులెల్లరకు సామాజిక, ఆర్థిక, రాజకీయ **న్యాయమును**, భావము, భావప్రకటన, విశ్వాసము, ధర్మము, ఆరాధన -- వీటి **స్వాతంత్ర్యమును**, అంతస్తులోను, అవకాశములోను **సమానత్వమును** చేకూర్చుటకు; మరియు వారందరిలో వ్యక్తి గౌరవమును, జాత్యైక్యతను, అఖండతను తప్పక ఒనగూర్చు **సౌభ్రాత్రమును**, పెంపొందించుటకు; సత్యనిష్ఠా పూర్వకముగ తీర్మానించుకొని, ఈ 1949వ సంవత్సరము నవంబరు ఇరువది యారవ దినమున **మా సంవిధాన సభయందు ఇందుమూలముగ, ఈ సంవిధానమును అంగీకరించి, అధిశాసనము చేసి మాకు మేము ఇచ్చుకొన్నవారమైతిమి.**

జాతీయ గీతము

జనగణమన – అధినాయక జయ హే
భారత – భాగ్యవిధాతా
పంజాబ, సింధు, గుజరాత, మరాఠా,
ద్రావిడ, ఉత్కల, బంగ,
వింధ్య, హిమాచల, యమునా, గంగా,
ఉచ్ఛల జలధితరంగ,
తవ శుభ నామే జాగే, తవ శుభ ఆశిస మాగే,
గాహే తవ జయగాథా,
జనగణ మంగలదాయక జయ హే,
భారత – భాగ్యవిధాతా
జయ హే, జయ హే, జయ హే,
జయ జయ జయ, జయ హే

ప్రతిజ్ఞ

భారతదేశం నా మాతృభూమి. భారతీయులందరు నా సహోదరులు.

నేను నా దేశాన్ని ప్రేమిస్తున్నాను. సుసంపన్నమైన, బహువిధమైన నా దేశ వారసత్వ సంపద నాకు గర్వకారణం. దీనికి అర్హత పొందడానికి సర్వదా నేను కృషిచేస్తాను.

నా తల్లిదండ్రుల్ని, ఉపాధ్యాయుల్ని, పెద్దలందర్ని గౌరవిస్తాను. ప్రతివారితోను మర్యాదగా నడుచుకొంటాను.

నా దేశంపట్ల, నా ప్రజలపట్ల సేవానిరతితో ఉంటానని ప్రతిజ్ఞ చేస్తున్నాను. వారి శ్రేయోభివృద్ధులే నా ఆనందానికి మూలం.

ప్రస్తావన

విద్యార్థి మిత్రులారా!

తొమ్మిదవ తరగతిలోకి మీ అందరికి స్వాగతం!

ప్రాథమిక విద్యాభ్యాసాన్ని పూర్తి చేసుకొని, మీరు మాధ్యమిక స్థాయిలోని విద్యాభ్యాసాన్ని ప్రారంభించబోతున్నారు. ఎనిమిదవ తరగతి వరకు గణితాభ్యాసానికై ఒకే పాఠ్యపుస్తకముండేది. ఇప్పుడు గణితం I వ భాగం మరియు II వ భాగం ఇలా రెండు పాఠ్యపుస్తకాలను అభ్యసించవలసి ఉంది.

గణితం Iవ భాగం పాఠ్యపుస్తకంలో సంఖ్యాజ్ఞానం, బీజగణితం ఇవియేగాకుండా వ్యవహారిక గణితం, ఆర్థిక ప్రణాళిక మరియు సమాచార వ్యవస్థాపన మొదలగు క్షేత్రాలలోని అంశాలు పరిచితమగును. ఈ భాగం విద్యార్థులందరికి అనేక రంగాలలో ఉపయోగపడుతుంది. బీజగణితం మరియు సాంఖ్యక శాస్త్రంలోని భావనలు ఉన్నత విద్యాభ్యాసానికి మౌలికాధారంగా ఉంటాయి.

ఈ పాఠ్యపుస్తకంలోని భావనలు అవగాహనచేసుకొనుటకు వివిధ కృత్యాలు ఇవ్వబడినవి. పునర్విమర్శకు అలాగే అభ్యాస సంచికలలో కూడా కృత్యాలు ఇవ్వబడినవి. ఈ కృత్యాలన్నియు మీరు చేయాల్సి ఉంది. ఇంటర్‌నెట్ సహాయంతో పుస్తకంలోని భావనలకు సంబంధించి ఇంకను కొన్ని వివరాలు మరియు ఉదాహరణలు లభిస్తాయోయని కూడా చూడాల్సి ఉంది. కృత్యాలు చేయునప్పుడు, ఉదాహరణలు సాధించునప్పుడు, నిష్కర్ష తీయునప్పుడు మీ మిత్రులతో చర్చించాల్సి ఉంది. పాఠ్యపుస్తకాన్ని కూలంకషంగా పఠించడం, కృతియుక్త అధ్యయనం మరియు అభ్యాసం అను ఈ త్రిసూత్ర పద్ధతిలో ఈ గణిత యాత్రను మీరు ఆనందంగా పూర్తి చేయుదురనుటలో ఏ మాత్రం సందేహం లేదు.

పదండి మరి! ఉపాధ్యాయులు, పాలకులు, స్నేహితులు-స్నేహితురాళ్ళు, ఇంటర్‌నెట్ వీరందరనీ వెంటతీసుకొని ఇప్పుడు గణితాభ్యాసం చేద్దాం. ఈ అభ్యాసగమనానికై మీకందరకు అనేక శుభాకాంక్షలు!

(డా. సునీల్ మగర్)
సంచాలకులు
మహారాష్ట్ర రాష్ట్ర పాఠ్యపుస్తక నిర్మితి మరియు
పాఠ్యప్రణాళిక పరిశోధన సంస్థ, పుణె - 411004.

పుణె:
తేది: 28 ఏప్రిల్ 2017, అక్షయ తృతీయ
భారతీయ సౌర తేది: 8 వైశాఖం 1939

9వ తరగతి గణితం Iవ భాగం పాఠ్యక్రమం ద్వారా దిగువనీయబడిన సామర్థ్యాలు విద్యార్థులలో అభివృద్ధి చెందుతాయి.

క్షేత్రం	పాఠ్యాంశం	సామర్థ్యాల వివరణ
1. సంఖ్యాజ్ఞానం	1.1 సమితులు 1.2 వాస్తవ సంఖ్యలు మరియు వర్గీకరణ	• సంఖ్యాప్రణాళికలోని సమితులు మరియు ఉపసమితులు నిర్ణయించగల్గుట • సమితి మరియు అనంత సమితిని గుర్తించగల్గుట • సమితిని చూపుటకు వెన్ చిత్రాలు ఉపయోగించగల్గుట • సమితులపై ఆధారపడిన ఉదాహరణలు తయారు చేయగల్గుట • సంఖ్యారేఖపై గల ప్రతి బిందువుతో సంబంధం కల్గిన ఒక వాస్తవ సంఖ్య ఉందని తెలుసుకొనగల్గుట • వర్గీకరణ సంఖ్యలను గుర్తించి వాటిపై పరిక్రియలు చేయగల్గుట
2. బీజగణితం	2.1 బహుపదులు 2.2 ద్విచరరాశులలోని రేఖీయ సమీకరణం	• బహుపదుల పరిచయం మరియు వాటిపైగల పరిక్రియలు చేయగల్గుట • రెండు చరరాశులనుపయోగించి రాత లెక్కలు సాధించగల్గుట
3.వ్యవహారిక గణితం	3.1 ఆర్థిక ప్రణాళిక 3.2 నిష్పత్తి మరియు అనుపాతం	• వివిధ రకాల పన్ను విధింపులను తెలుసుకొనుట మరియు పన్ను విధింపులను తయారుచేయగల్గుట • వేతనదారుల పన్నుల లెక్కింపును చేయగల్గుట • సమాన నిష్పత్తుల సిద్ధాంతాన్ని ఉపయోగించగల్గుట
4. సమాచార నిర్వహణ (సాంఖ్యక శాస్త్రం)	4.1 పౌనఃపున్యం పట్టిక 4.2 కేంద్రీయ స్థానీయ ప్రవృత్తి కొలతలు	• అనులోమానుపాతం మరియు విలోమానుపాతంపై ఆధారిత రాత లెక్కలు సాధించుగల్గుట • వర్గీకృత మరియు అవర్గీకృత పౌనఃపున్యాల పట్టికలు తయారుచేయగల్గుట • సంచిత పౌనఃపున్య పట్టిక తయారు చేయగల్గుట • ఇచ్చిన సమాచారాన్ని కేంద్రస్థానీయ ప్రవృత్తిని గుర్తించి వాటి కొలతలను ఉపయోగించగల్గుట

ఉపాధ్యాయులకు సూచనలు

తొమ్మిదవ తరగతి గణితం Iవ భాగం పుస్తకంలో వచ్చిన మౌలిక భావనలు, మూర్తం నుంచి అమూర్తం వైపు (concrete to abstract) ఈ పద్ధతిలో అభివృద్ధి పరిచిన సంబోధనలు, అర్థశాస్త్రంలో గణితంతో సంబంధం కలిగిన భావనలు, సాంఖ్యకశాస్త్రం యొక్క క్షేత్రవిస్తారం, ఇలా అన్ని విషయాలను ఉపాధ్యాయులు సూక్ష్మంగా అభ్యసించాలి. తరగతిలో బోధిస్తున్నప్పుడు ప్రాత్యక్షికలు, కృత్యాలు, చర్చలు, ప్రశ్నోత్తరాలు, సామూహిక ఉపక్రమాలు వంటి వివిధ పద్ధతులను ఉపయోగించుట అశించడమైనది. అందుకోసం ఉపాధ్యాయులు పాఠ్యపుస్తకాన్ని కూలంకషంగా చదివి పాఠ్యపుస్తకంలోని వివిధ కృత్యాలు విద్యార్థుల ద్వారా చేయించాలి. దానితో బాటు అలాంటి అనేక నూతన కృత్యాలు తయారుచేయుటకు ప్రయత్నించండి.

గణితంలో లెక్కల సాధన కంటే మూల భావనలను తెలుసుకొనుట ముఖ్యమైనది. విద్యార్థుల తార్కిక బుద్ధికి ప్రేరణ కలిగించేటువంటి వివిధ ఉదాహరణలు పాఠ్యపుస్తకంలో చేర్చబడినవి. ఇలా అనేక ఉదాహరణలు ఉపాధ్యాయులు మరియు విద్యార్థులు కలిసి తయారు చేయండి. పాఠ్య పుస్తకంలో సవాళ్ళ వంటి ఉదాహరణలకు నక్షత్ర గుర్తులు ఇవ్వబడినవి విద్యార్థులు మరోరకంగా ఆలోచించి ఏదేని ఉదాహరణ తార్కిక పద్ధతితో సాధించినట్లయితే వారిని ఉపాధ్యాయులు ప్రోత్సహించాలి.

మూల్యాంకనం చేయునప్పుడు ముక్త ప్రశ్నలు, కృతి పత్రాల గురించి కూడా ఉపాధ్యాయులు ఆలోచించాల్సి ఉంటుంది. ఇటువంటి మూల్యాంకన పద్ధతిని అభివృద్ధి పరుచుటకు ఉపాధ్యాయులు ప్రయత్నించాలి.

పాఠ్యపుస్తకంలో నమూనా ప్రాత్యక్షికాల జాబితా ఇవ్వబడింది. అవియే గాకుండా మీరు స్వయంగా వేర్వేరు ప్రాత్యక్షికాలను తయారు చేయవచ్చును. పాఠ్యపుస్తకంలోని వివిధ కృత్యాలు ప్రాత్యక్షికాలలో అంతర్భాగంగా చేయబడినవి. వాటిని కూడా విద్యార్థుల ద్వారా సాధింపజేయండి. వాటి అధారంగా మూల్యాంకన పద్ధతి యొక్క ఉపయోగం, రాబోవు తరగతుల సామర్థ్యాలను అభివృద్ధి పరుచుట కొరకు నిస్సందేహంగా ఉపయోగపడుతాయని మా భావన.

ప్రాత్యక్షికముల నమూనాల జాబితా

(1) మీ తరగతిలోని విద్యార్థుల సమితిని విశ్వసమితిగా భావించి ఖోఖో, కబడ్డీ వంటి ఏవేని రెండు ఆటలాడే విద్యార్థుల సమితి వేన్ (ఆకృతిని) చిత్రంలో చూపించుట.

(2) సంఖ్యారేఖపై $2 + \sqrt{3}$, $5 - \sqrt{3}$ వంటి సంఖ్యలను చూపించుట.

(3) మూడు లేక నాలుగు పరిమాణాలు గల బహుపదులను రేఖీయ బహుపదులతో వివిధ పద్ధతులను ఉపయోగించి భాగించడం. జవాబు ఒకటే వస్తుందాయని చూడటం.

(4) ఆదాయపన్ను చెల్లించే వ్యక్తి వివరణ పత్రం (సంవత్సరాదాయం, పెట్టుబడులు మొ. అంశాలు) ఇచ్చినట్లయితే అతడు చెల్లించే ఆదాయ పన్నును పట్టిక ఆధారంగా కనుగొనుట.

(5) ఇచ్చిన సంఖ్యాత్మక వివరాల ద్వారా వర్గీకృత పౌనఃపున్యం విభజన పట్టిక తయారుచేయుట.

(6) సులభంగా లభించే ఔషధాల ప్యాకెట్టుబట్టి అందులోని వివిధ అంశాల శాతం కనుగొనుట.

(7) ఏదేని సవాలుగా నిలిచే రాత లెక్కను రెండు చరరాశులను ఉపయోగించి సాధించుట.

విషయసూచిక

	అధ్యాయాలు	పేజీలు
1.	సమితులు	1 నుండి 18
2.	వాస్తవ సంఖ్యలు	19 నుండి 35
3.	బహుపదులు	36 నుండి 56
4.	నిష్పత్తి మరియు అనుపాతము	57 నుండి 79
5.	రెండు చరరాశులుగల రేఖీయ సమీకరణములు	80 నుండి 92
6.	ఆర్థిక ప్రణాళిక	93 నుండి 107
7.	సాంఖ్యక శాస్త్రము	108 నుండి 128
●	జవాబులు	129 నుండి136

1 సమితులు

పదండి నేర్చుకుందాం

- సమితి: పరిచయం
- సమితుల రకాలు
- వెన్ చిత్రాలు
- సమ సమితులు, ఉప సమితి
- విశ్వ సమితి, పూరక సమితి
- ఛేదన సమితి, సమ్మేళన సమితి
- సమితిలోని మూలకాల సంఖ్య

కొంచెం గుర్తు తెచ్చుకుందాం.

కింద కొన్ని చిత్రములను ఇవ్వడం జరిగింది. వాటిలో మీకు తెలిసిన వస్తు సమూహాలు ఉన్నాయి.

				1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, ...
పువ్వు గుచ్ఛము	తాళంచెవిల గుత్తి	పక్షుల గుంపు	పుస్తకాల కట్ట	సంఖ్యల సమూహం

పై ప్రతి సమూహంనకు మనం ప్రత్యేక పదాలను వాడతాము. ఈ అన్ని ఉదాహరణలలోని మూలకాలను మనం సరిగ్గా మరియు కచ్చితంగా చెప్పవచ్చును. ఇలాంటి వస్తువుల సమూహమును 'సమితి' అని అంటారు.

ఇప్పుడు ఈ సమూహాలను చూద్దాం. 'ఊళ్ళోని ఉల్లాసవంతులైన పిల్లలు', 'తరగతిలోని (తెలివైన) చురుకైన పిల్లలు'. ఈ రెండు ఉదాహరణల సమూహాలలో ''ఉల్లాసవంతులైన'', మరియు 'చురుకైన' ఈ రెండు పదాల అర్థములు సాపేక్షమైనవి అనగా 'ఉల్లాసవంతులైన', 'చురుకైన' అనే రెండు పదాల అర్థమును కచ్చితంగా చెప్పలేము కాబట్టి, ఈ సమూహాలను సమితులు అని అనలేము.

ఇప్పుడు కింద కొన్ని ఉదాహరణలు ఇచ్చారు. వాటిలో వేటిని సమితులు అంటారో చెప్పండి.

(1) వారంలోని ఏడు రోజులు

(2) ఒక సంవత్సరంలోని నెలలు

(3) తరగతిలోని ధైర్యవంతులైన పిల్లల

(4) మొదటి 10 గణన సంఖ్యలు

(5) మహారాష్ట్రలోని దుర్భేద్యమైన కోటలు

(6) మన సౌరకుటుంబంలోని గ్రహాలు

తెలుసుకుందాం.

సమితులు (Sets)

ఏ సమూహములోని వస్తువులను సరిగ్గా మరియు కచ్చితముగా చెప్పగలమో. ఆ సమూహాలను సమితులు అంటారు. సమితులను సూచించడానికి సాధారణంగా ఆంగ్ల భాషలోని A, B, C,.....,Z లాంటి పెద్ద అక్షరాలను ఉపయోగిస్తారు.

సమితిలోని మూలకాలను సూచించడానికి *a*, b, c,... అనే చిన్న ఆంగ్ల అక్షరాలను ఉపయోగిస్తారు.

a అనేది సమితి A యొక్క మూలకము దీనిని '$a \in A$' అని రాస్తారు. *a* అనేది సమితి A యొక్క మూలకము కాదు అని చూపడానికి '$a \notin A$' గా రాస్తారు.

ఇప్పుడు మనం సంఖ్యల సమితులను చూద్దాం

N = { 1, 2, 3, . . .} ఇది సహజ సంఖ్యల సమితి (Set of natural numbers).

W = {0, 1, 2, 3, . . .} ఇది పూర్ణాంకాల సమితి (Set of whole numbers).

I = {..., −3, −2, −1, 0, 1, 2, ...} ఇది పూర్ణసంఖ్యల సమితి (Set of integers).

Q అనేది అన్ని అకరణీయ సంఖ్యల సమితి (Set of rational numbers).

R అనేది వాస్తవ సంఖ్యల సమితి (Set of real numbers).

సమితులను రాసే పద్ధతులు

సమితులను రెండు పద్ధతులలో రాస్తారు.

(1) జాబితా పద్ధతి లేదా రోస్టరు రూపం (Listing method or roster method)

ఈ పద్ధతిలో సమితిలోని అన్ని మూలకములను బ్రేస్ బ్రాకెట్లలో రాస్తారు. మరియు రెండు మూలకాలను వేరుగా చూపడం కొరకు రెండు వరుస మూలకాల మధ్య స్వల్ప విరామచిహ్నాన్ని రాస్తారు. దీనిలో మూలకాల క్రమానికి ప్రాముఖ్యత లేదు, కాని అన్ని మూలకాలను చూపించడం (రాయడం) తప్పనిసరి.

ఉదా: 1 నుండి 10 వరకు గల బేసి సంఖ్యల సమితిని జాబితా పద్ధతిలో కింది విధంగా రాస్తారు.

A = {3, 5, 7, 9} లేదా A = {7, 3, 5, 9}

ఉదా: remember అను పదంలోని అక్షరాల సమితిని {r,e,m,b} ఇలా రాస్తాం. remember ఈ పదంలో r,m,e ఈ అక్షరాలు ఒకసారి కంటె ఎక్కువసార్లు వచ్చినను సమితిలో వాటిని ఒక్కసారే రాస్తారు.

(2) లాక్షణిక పద్ధతి లేదా సమితి నిర్మాణ రూపం (Rule method or set builder form)

ఈ పద్ధతిలో మూలకాల జాబితా చేయకుండా సమితి యొక్క సర్వసాధారణ మూలకాలను ఒక చరరాశిచే చూపించి దాని ముందు ఒక నిలువు గీత (/) 'గా నున్న' ను గీస్తాము. ఈ నిలువు గీత తర్వాత చరరాశి యొక్క ధర్మంను రాస్తాము. ఉదా. $A = \{x \mid x \in N, 1 < x < 10\}$ దానిని సమితి A యొక్క మూలకము '*x* గా నున్న' (such that) *x* అనేది 1 నుండి 10ల మధ్యగల సహజ సంఖ్య అని చదువుతాం.

ఉదా: B = { x | x అనేది 1 నుండి 10 మధ్యగల ప్రధానసంఖ్య} దీనిలో 1 నుండి 10 మధ్యగల అన్ని ప్రధాన సంఖ్యలుంటాయి, కాబట్టి B అనే సమితి {2, 3, 5, 7} గా జాబితా పద్ధతిలో రాయవచ్చు.

అకరణీయ సంఖ్యా సమితి Q ను లాక్షణిక పద్ధతిలో ఈ విధంగా రాయవచ్చు.

$$Q = \left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \in I, q \neq 0 \right\}$$

దీనిని $\frac{p}{q}$ రూపంలో నున్న ఒక సంఖ్య, p అనేది ఏదేని ఒక పూర్ణ సంఖ్య మరియు q అనేది శూన్యేతర పూర్ణసంఖ్య అని చదువుతాము.

మాదిరి ఉదాహరణ: కింది ఉదాహరణలలో ప్రతి సమితిని రెండు పద్ధతులలో రాయడం జరిగింది.

లాక్షణిక పద్ధతి	జాబితా పద్ధతి
A = { x| x అనేది DIVISION అనే పదంలోని అక్షరము}	A = {D, I, V, S, O, N}
B = { y | y అనేది $y^2 = 9$ గా గల సంఖ్య}	B = { −3, 3}
C = {z | z అనేది 30 కంటే చిన్నవైన 5 యొక్క గుణిజములు}	C = { 5, 10, 15, 20, 25}

ఉదా: కింది పట్టికలోని ఖాళీలను పూర్తి చేసి పట్టికను పూర్తి చేయుము.

జాబితా పద్ధతి	లాక్షణిక పద్ధతి
A = { 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14}	A = {x|x అనేది 15 కంటే చిన్నదైన సరి సహజ సంఖ్య}
....	B = { x|x అనేది 1 నుండి 20 మధ్యగల సంపూర్ణవర్గ సంఖ్య}
C = { a, e, i, o, u}	....
....	D = { y| y అనేది ఇంద్రధనుస్సులోని రంగు}
....	P = {x |x అనేది $-3 < x < 3$ గా గల పూర్ణ సంఖ్య}
M = {1, 8, 27, 64, 125.......}	M ={x |x అనేది ధనపూర్ణ సంఖ్య యొక్క ఘనం}

అభ్యాస మాలిక 1.1

(1) కింది సమితులను జాబితా పద్ధతిలో రాయండి.

(i) సరి సహజ సంఖ్యల సమితి

(ii) 1 నుండి 50 మధ్యగల సరి ప్రధాన సంఖ్యల సమితి

(iii) అన్ని ఋణ పూర్ణసంఖ్యల సమితి

(iv) సంగీతంలోని ఏడు మూల స్వరాల సమితి

(2) కింది చిహ్నాల రూపంలోని వాక్యాలను అక్షరాలలో రాయండి.

(i) $\frac{4}{3} \in Q$ (ii) $-2 \notin N$ (iii) P = {p | p అనేది బేసి సంఖ్య}

(3) ఏవైన రెండు సమితులను జాబితా పద్ధతిలో మరియు లాక్షణిక పద్ధతిలో రాయండి.

(4) కింది సమితులను జాబితా పద్ధతిలో రాయండి.

(i) భారతీయ సౌర సంవత్సరంలోని అన్ని నెలల సమితి.

(ii) 'COMPLEMENT' అనే పదంలోని అక్షరాల సమితి.

(iii) మానవుని అన్ని జ్ఞానేంద్రియాల సమితి.

(iv) 1 నుండి 20 మధ్యగల ప్రధాన సంఖ్యల సమితి.

(v) భూగోళంపైనున్న ఖండముల సమితి.

(5) కింది సమితులను లాక్షణిక పద్ధతిలో రాయండి

(i) A = { 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100}

(ii) B = { 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48}

(iii) C = {S, M, I, L, E}

(iv) D = {ఆదివారము, సోమవారము, మంగళవారము, బుధవారము, గురువారము శుక్రవారము, శనివారము}

(v) X = {a, e, t}

తెలుసుకుందాం.

సమితుల రకాలు (Types of sets)

సమితి పేరు	నిర్వచనము	ఉదాహరణ
ఏకమూలక సమితి (Singleton Set)	ఏ సమితిలో ఒకే ఒక మూలకము ఉంటుందో ఆ సమితిని ఏకమూలక సమితి అంటారు.	A = {2} A ఒక సరి ప్రధానసంఖ్యల సమితి.
శూన్య సమితి (Null Set) (Empty Set)	ఏ సమితిలో ఇచ్చిన ధర్మానుసారం ఒక్క మూలకం కూడా లేనట్లయితే దానిని "శూన్య సమితి" అంటారు. ఈ సమితిని { } తో లేదా ϕ (ఫై) అనే గుర్తుతో సూచిస్తారు	B = {x|x అనేది 2 మరియు 3 మధ్యగల సహజ సంఖ్య} $\therefore$ B = { } లేదా ϕ
పరిమిత సమితి (Finite Set)	ఏ సమితి శూన్య సమితి అవుతుందో లేదా సమితిలోని మూలకాల సంఖ్య పరిమితంగా ఉండి లెక్కించ వచ్చునో దానిని 'పరిమిత సమితి' అంటారు.	C = {p| p అనేది 1 నుండి 22 మధ్యగల 4చే భాగించబడే సంఖ్య} C = {4, 8, 12, 16, 20}
అపరిమిత సమితి (Infinite Set)	ఏ సమితిలోని మూలకాల సంఖ్య అపరిమితంగా ఉండి లెక్కించ లేని మూలకాలుగల దానిని 'అపరిమిత సమితి' అంటారు.	N = {1, 2, 3, . . . }

ఉదా: కింది సమితులను జాబితా పద్ధతిలో రాసి వాటిని పరిమిత మరియు అపరిమిత సమితులుగా వర్గీకరించండి.

(i) $A = \{x \mid x \in N$ మరియు x అనేది బేసి సంఖ్య$\}$ (ii) $B = \{x \mid x \in N$ మరియు $3x - 1 = 0\}$

(iii) $C = \{x \mid x \in N$ మరియు x అనేది 7 చే భాగించబడే సంఖ్య$\}$

(iv) $D = \{(a, b) \mid a, b \in W, a + b = 9\}$ (v) $E = \{x \mid x \in I, x^2 = 100\}$

(vi) $F = \{(a, b) \mid a, b \in Q, a + b = 11\}$

సాధన: (i) $A = \{x \mid x \in N$ మరియు x అనేది బేసి సంఖ్య.$\}$

$A = \{1, 3, 5, 7, ...\}$ అనేది అపరిమిత సమితి.

(ii) $B = \{x \mid x \in N$ మరియు $3x - 1 = 0\}$

$3x - 1 = 0 \quad \therefore 3x = 1 \quad x = \frac{1}{3}$

కాని $\frac{1}{3} \notin N \quad \therefore B = \{\ \ \} \quad \therefore B$ అనేది పరిమిత సమితి.

(iii) $C = \{x \mid x \in N$ మరియు x అనేది 7 చే భాగించబడే సంఖ్య$\}$

$C = \{7, 14, 21, . . . \}$ అనేది అపరిమిత సమితి.

(iv) $D = \{(a , b) \mid a, b \in W, a + b = 9\}$

a, b లు పూర్ణాంకాలయి a + b = 9 అయ్యేట్లు a, b ల జతలను మీరు వెదకవచ్చు.

ముందుగా a విలువ తర్వాత b విలువ ఉన్న క్రమంను పాటిస్తూ D అనే సమితిని జాబితా పద్ధతిలో కింది విధంగా రాయవచ్చు.

$D = \{(0, 9),(1, 8), (2, 7), (3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3), (7, 2), (8, 1),(9, 0)\}$,

ఈ సమితిలోని మూలకాలు అనగా సంఖ్యల జతలను లెక్కించవచ్చును మరియు నిర్ణీతమైనవి.

$\therefore$ D అనేది పరిమిత సమితి అవుతుంది.

(v) $E = \{x \mid x \in I, x^2 = 100\}$

$E = \{-10, 10\}$. $\quad \therefore$ E అనేది పరిమిత సమితి.

(vi) $F = \{(a, b) \mid a, b \in Q, a + b = 11\}$

$F = \{(6, 5), (3, 8), (3.5,7.5), (-15, 26),. . .\}$ ఇలా అనంతమైన జతలను రాయవచ్చు.

$\therefore$ F అనేది అపరిమిత సమితి

గుర్తుంచుకోండి!

N, W, I, Q, R ఈ సంఖ్యా సమితులు అన్ని అపరిమిత సమితులు అవుతాయి.

తెలుసుకుందాం.

సమ సమితులు (Equal sets)

సమితి A లోని ప్రతి మూలకము సమితి Bలో మరియు సమితి Bలోని ప్రతి మూలకము సమితి Aలో ఉన్నట్లయితే ఆ సమితులను 'సమసమితులు' అంటారు.

'A మరియు Bలు సమసమితులు' దీనిని A = B గా రాస్తారు.

ఉదా: (1) A = { x | x అనేది 'listen' అనే పదంలోని అక్షరములు} $\therefore$ A = { l, i, s, t, e, n}

B = { y | y అనేది 'silent'అనే పదంలోని అక్షరములు} $\therefore$ B = { s, i, l, e, n, t}

A మరియు Bలోని మూలకాల క్రమం వేర్వేరుగా ఉంది కాని మూలకాలు అనే ఉన్నాయి

కాబట్టి A = B అవుతుంది.

ఉదా: (2) A = $\{x \mid x = 2n, n \in N, 0 < x \leq 10\}$, A = {2, 4, 6, 8, 10}

B = { y | y ఇది సరిసంఖ్య $1 \leq y \leq 10$}, B = {2, 4, 6, 8, 10}

$\therefore$ A, Bలు సమసమితులు అవుతాయి.

ఇప్పుడు కింది సమితుల గురించి ఆలోచిద్దాం.

C = {1, 3, 5, 7} D = { 2, 3, 5, 7}

C మరియు Dలను సమసమితులు అనవచ్చా? అనలేము

ఎందుకనగా $1 \in C$, $1 \notin D$, $2 \in D$, $2 \notin C$

కావున C మరియు D సమసమితులు కావు అనగా $C \neq D$

ఉదా: (3) A = {1, 2, 3} మరియు B = { 1, 2, 3, 4} అయినట్లయితే $A \neq B$ సరిచూడండి

ఉదా: (4) A = { x | x అనేది ప్రధాన సంఖ్య మరియు $10 < x < 20$} మరియు B = {11, 13, 17, 19}

ఇచ్చట A = B అవుతుంది. సరిచూడండి.

అభ్యాస మూలిక 1.2

(1) కింది సమితులలో ఏవి సమసమితులు మరియు ఏవి కావో సకారణంగా తెలపండి.

A = $\{ x \mid 3x - 1 = 2\}$

B = { x | x సహజ సంఖ్య కాని, x అనేది ప్రధాన సంఖ్య కాదు మరియు సంయుక్త సంఖ్యయు కాదు.}

C = $\{x \mid x \in N, x < 2\}$

(2) A మరియు B సమసమితులు అవుతాయి? సకారణంగా తెలపండి

A = సరిసంఖ్యయైన ప్రధానసంఖ్య B = $\{x \mid 7x - 1 = 13\}$

(3) కింది వాటిలో ఏది శూన్యసమితియో సకారణంగా తెల్పండి.

(i) A = { a | a అనేది సున్నకంటే చిన్నదైన సహజ సంఖ్య.}

(ii) B = $\{x \mid x^2 = 0\}$ (iii) C = $\{ x \mid 5x - 2 = 0, x \in N\}$

(4) కింది వాటిలో ఏ సమితులు పరిమిత, అపరిమిత సమితులో సకారణంగా తెలపండి.

(i) $A = \{ x \mid x < 10, x$ అనేది సహజ సంఖ్య$\}$

(ii) $B = \{y \mid y < -1, y$ అనేది పూర్ణసంఖ్య$\}$

(iii) C = మీ పాఠశాలలోని 9వ తరగతిలోని విద్యార్థుల సమితి

(iv) మీ గ్రామంలోని గ్రామస్థుల సమితి

(v) ప్రయోగశాలలోని పరికరాల సమితి

(vi) పూర్ణాంకాల సమితి

(vii) అకరణీయ సంఖ్యా సమితి

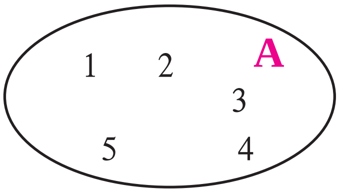
తెలుసుకుందాం.

వెన్ చిత్రములు (Venn diagrams)

సమితిని రాయడానికి సంవృత (పటాలు) చిత్రాలను ఉపయోగించవచ్చునని బ్రిటీషు తర్కశాస్త్రజ్ఞుడు జాన్ వెన్ ప్రప్రథమంగా చెప్పాడు. కావున ఇలాంటి చిత్రములను 'వెన్ చిత్రములు' అంటారు. వేర్వేరు సమితుల సంబంధాలను తెలుసుకొనుటకు మరియు సమితులపై ఆధార పడిన ఉదాహరణలను సాధించుటకు ఈ చిత్రములు చాలా బాగా ఉపయోగపడతాయి. వెన్ చిత్రములను ఏ విధంగా చూపిస్తారో కింది ఉదాహరణ ద్వారా అర్థం చేసుకొండి.

ఉదా: $A = \{ 1, 2, 3, 4, 5\}$

వెన్ చిత్రం ద్వారా A అనే సమితిని కింద చూపడం జరిగింది.

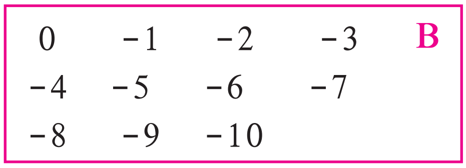


1834-1923

తర్కశాస్త్రము మరియు సంభావ్యత ఈ విషయాలకు ముందుగా గణిత రూపంను ఇచ్చిన వారు జాన్ వెన్. **'లాజిక్ ఆఫ్ ఛాన్స్'** అనేది అతని ప్రసిద్ధమైన పుస్తకం.

$B = \{x \mid -10 \leq x \leq 0, x$ అనేది పూర్ణ సంఖ్య $\}$

పక్క వెన్ చిత్రం B సమితిని సూచిస్తుంది.



ఉపసమితి (Subset)

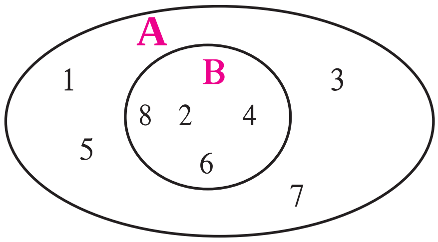
A మరియు Bలు రెండు సమితులయిన, సమితి Bలోని ప్రతి మూలకము, సమితి Aలో కూడా ఉన్నట్లయితే సమితి Bని సమితి A యొక్క ఉప సమితి అంటారు. మరియు $B \subseteq A$గా రాస్తారు. దీనిని 'B ఉపసమితి A' అని లేదా 'సమితి B సమితి A యొక్క ఉపసమితి' అని చదువుతారు.

ఉదా: (1) $A = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

$B = \{2, 4, 6, 8\}$

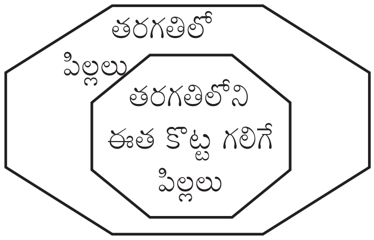
B లోని ప్రతి మూలకము A లోని మూలకం కూడా అవుతుంది

అనగా $B \subseteq A$.



ఈ సమాచారాన్ని వెన్ చిత్రం ద్వారా ఎలా చూపబడిందో గమనించండి.

కృత్యము: తరగతిలోని పిల్లల సమితి మరియు తరగతిలో ఈత కొట్టగలిగే పిల్లల సమితులను వేన్ చిత్రములో చూపబడింది అదే విధంగా కింది ఉపసమితుల వెన్ చిత్రములను గీయండి.



(1) (i) తరగతిలోని పిల్లల సమితి

(ii) తరగతిలో సైకిల్ తొక్కగలిగే (నడపగలిగే) పిల్లల సమితి

(2) కింద కొన్ని పండ్ల సమితి ఇవ్వబడింది.

{జామ, కమల, మామిడి, పనస, సపోట, అల్లనేరెడు, సీతాఫలం, బొప్పాయి, రేగు}

ఈ కింది ఉపసమితులను చూపండి (i) ఏక బీజం గల పండ్లు (ii) ఒకటికంటే ఎక్కువ బీజాలుగల పండ్లు

ఇపుడు మరికొన్ని ఉప సమితులను చూద్దాం.

ఉదా: (2) N = సహజ సంఖ్యల సమితి   I = పూర్ణసంఖ్యల సమితి.

ఇక్కడ $N \subseteq I$. ఎందుకనగా అన్ని సహజ సంఖ్యలు, పూర్ణసంఖ్యలలో ఉంటాయని మనకు తెలుసు.

ఉదా: (3) P = { x | x అనేది 25 యొక్క వర్గమూలము} $S = \{ y \mid y \in I, -5 \leq y \leq 5\}$

జాబితా పద్ధతిలో సమితి Pని రాద్దాం $P = \{-5, 5\}$

జాబితా పద్ధతిలో సమితి Sని రాద్దాం $S = \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

ఇక్కడ P లోని ప్రతి మూలకము S లోని మూలకము కూడా అవుతుంది.

$\therefore P \subseteq S$

ఇది గుర్తుంచుకోండి.

(i) ప్రతి సమితి దానికదే ఉపసమితి అవుతుంది. అనగా $A \subseteq A$

(ii) శూన్య సమితి ప్రతి సమితికి ఉపసమితి అవుతుంది అనగా $\phi \subseteq A$

(iii) ఒకవేళ $A = B$ అయిన $A \subseteq B$ మరియు $B \subseteq A$ అవుతుంది

(iv) ఒకవేళ $A \subseteq B$ మరియు $B \subseteq A$ అయిన $A = B$ అవుతుంది

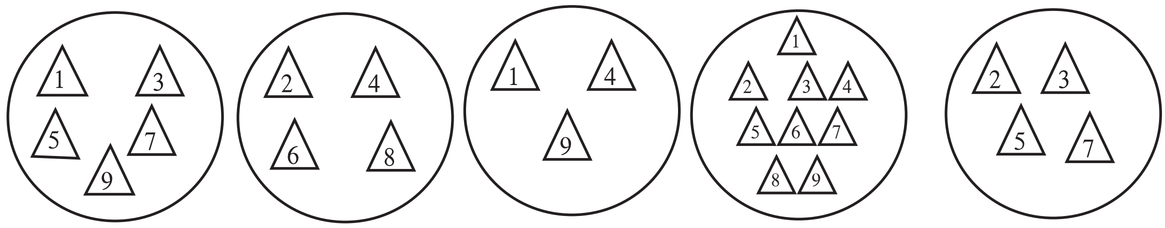
ఉదా: $A = \{1, 3, 4, 7, 8\}$ సమితి యొక్క అన్ని ఉపసమితులు రాయండి

$P = \{1, 3\}$, $T = \{4, 7, 8\}$, $V = \{1, 4, 8\}$, $S = \{1, 4, 7, 8\}$

ఇలా మరిన్ని ఉపసమితులను రాయవచ్చు వాటిలో నుంచి ఏవైనా ఐదు ఉపసమితులను రాయండి.

కృత్యము: ప్రతి విద్యార్థి ఒకే రకమైన ఆకారంగల తొమ్మిది సాధారణ కాగితపు త్రిభుజాలను మరియు ఒక పళ్ళెంను తీసుకొండి. త్రిభుజాలపై 1 నుండి 9 సంఖ్యలు రాయండి. ప్రతి ఒక్కరు తమ-తమ పళ్ళాలలో సంఖ్యలు రాసిన కొన్ని కాగితపు త్రిభుజాలను ఉంచండి. ఇప్పుడు ప్రతి ఒక్కరి వద్ద 1 నుండి 9 సంఖ్యలు గల సమితుల ఉపసమితులు తయారు అవుతాయి.

సుజాత   హమీద్   ముక్తా   నందిని   జోసెఫ్



సుజాత, హమీద్, ముక్తా, నందిని మరియు జోసెఫ్ వీరి పళ్ళాలలో ఏ ఏ సంఖ్యలు కనబడుతున్నాయో చూడండి. ప్రతి ఒక్కరు ఏమాలోచించి సంఖ్యలను ఎన్నుకున్నారో గుర్తించండి. దానిని బట్టి ప్రతి సమితిని లాక్షణిక పద్ధతిలో రాయండి.

పదండి, చర్చిద్దాం.

ఉదా: కింద కొన్ని సమితులు ఇవ్వబడ్డాయి.

A = { ..., −4, −2, 0, 2, 4, 6, ...}   B = {1, 2, 3, ...}

C = {..., −12, −6, 0, 6, 12, 18.....}   D = {..., −8, −4, 0, 4, 8, ...}

I = { ....., −3, −2, −1, 0, 1, 2, 3, 4, ...}

కింది వాటిలో ఏ వాక్యాలు సత్యమవుతాయో వాటిపై దీనిని బట్టి చర్చించండి

(i) A అనేది B, C, D ప్రతి సమితికి ఉపసమితి అవుతుంది (ii) B అనేది పై అన్ని సమితులకు ఉపసమితి అవుతుంది.

తెలుసుకుందాం.

విశ్వ సమితులు (Universal set)

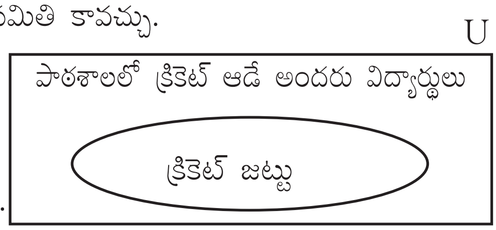
మనం ఏయే సమితుల గురించి ఆలోచిస్తామో ఆ సమితులన్నింటిని కల్గి ఉన్న ఒక పెద్ద సమితిని 'విశ్వసమితి'గా తీసుకోవచ్చు. దాని బాహ్య మూలకాల గురించి మనం ఆలోచించము. దృష్టిలోకి తీసుకున్న ప్రతి సమితి విశ్వసమితికి ఉపసమితి అవుతుంది.

ఉదా:(1) మనం పాఠశాలలోని 9వ తరగతిలో పదే పదే గైర్హాజరయ్యే విద్యార్థుల గైరుహాజరును అధ్యయనం చేయాలి. దాని కొరకు 9వ తరగతిలోని విద్యార్థుల సమితిని అభ్యసించాలి. ఇచ్చట ఆ తరగతిలోని విద్యార్థులందరి సమితి లేదా పాఠశాలలోని విద్యార్థులందరి సమితిని విశ్వసమితిగా తీసుకోవచ్చు.

ఇప్పుడు వేరొక ఉదాహరణను చూద్దాం.

ఉదా: (2) మన పాఠశాలలో క్రికెట్ ఆడే పిల్లలలో నుండి 15 మంది పిల్లలతో ఒక జట్టును ఎన్నుకోవాలి. అయితే పాఠశాలలో క్రికెట్ ఆడే అందరు ఆటగాళ్ళ సమితి విశ్వ సమితి కావచ్చు.

దానిలో అర్హతగల (యోగ్యులైన) 15 మంది ఆటగాళ్ళ జట్టు విశ్వసమితికి ఉపసమితి అవుతుంది.



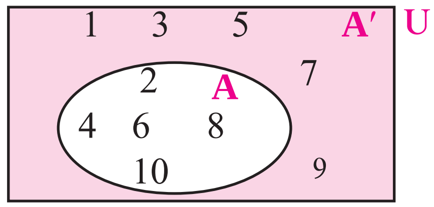
సాధారణంగా విశ్వసమితిని 'U'అనే అక్షరంతో సూచిస్తారు.

వెన్ చిత్రంలో విశ్వసమితిని సాధారణంగా దీర్ఘచతురస్రంతో సూచిస్తారు.

పూరక సమితి (Complement of a set)

U అనేది ఒక విశ్వసమితి అనుకోండి. $B \subseteq U$, అయిన సమితి Bలో లేనివి, కానీ విశ్వసమితి Uలో గల మూలకాల సమితిని సమితి B యొక్క పూరక సమితి అంటారు. సమితి B యొక్క పూరక సమితిని B' లేదా B^C గా రాస్తారు.

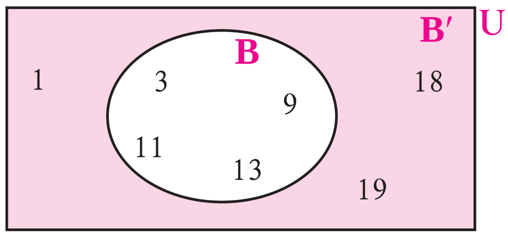
$\therefore B' = \{x \mid x \in U,$ మరియు $x \notin B\}$ ఈ విధంగా B'ని వివరించవచ్చు.



ఉదా: (1) U = { 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}

A = {2, 4, 6, 8, 10}

$\therefore A' = \{1, 3, 5, 7, 9\}$



ఉదా: (2) U = { 1, 3, 9, 11, 13, 18, 19}
B = {3, 9, 11, 13} అనుకోండి

$\therefore B' = \{1, 18, 19\}$

ఇప్పుడు $(B')'$ ని కనుగొనండి. దాని నుండి ఏమి పరిశీలించవచ్చు?

$(B')'$ అనే సమితి B' లో లేని, కాని Uలో గల (ఉన్నటువంటి) మూలకాల సమితి.

$(B')' = B$ అవుతుందా?

పై సమాచారమును వెన్ చిత్రం ద్వారా అర్థం చేసుకొండి

పూరక సమితి యొక్క పూరక సమితి అనగా ఇచ్చిన సమితి అవుతుంది.

ఇది గుర్తుంచుకొండి.

పూరక సమితుల ధర్మములు

(i) A మరియు A' ల మధ్య ఉన్న ఉమ్మడి మూలకాలు ఉండవు.

(ii) $A \subseteq U$ మరియు $A' \subseteq U$

(iii) విశ్వసమితి యొక్క పూరక సమితి శూన్య సమితి అవుతుంది $U' = \phi$

(iv) శూన్య సమితి యొక్క పూరక సమితి విశ్వసమితి అవుతుంది $\phi' = U$

అభ్యాస మాలిక 1.3

(1) A = {a, b, c, d, e}, B = { c, d, e, f }, C = {b, d}, D = {a, e}
అయిన కింది ఏ వాక్యాలు సత్యములో, ఏవి అసత్యములో రాయండి.
(i) $C \subseteq B$ (ii) $A \subseteq D$ (iii) $D \subseteq B$ (iv) $D \subseteq A$ (v) $B \subseteq A$ (vi) $C \subseteq A$

(2) కింది సమితులను వెన్ చిత్రములో చూపండి.
1 నుండి 20 మధ్యగల సహజ సంఖ్యలను విశ్వసమితిగా తీసుకొని X మరియు Yలను వెన్ చిత్రాలుగా చూపండి.
(i) X = { x | $x \in$ N, మరియు $7 < x < 15$}
(ii) Y = { y | $y \in$ N, y అనేది 1 నుండి 20 మధ్యగల ప్రధాన సంఖ్య}

(3) U = {1, 2, 3, 7, 8, 9, 10, 11, 12}
P = {1, 3, 7, 10}
అయిన (i) U, P మరియు P'లను వేన్ చిత్రాలలో చూపండి (ii) $(P')' = P$ని సరిచూడండి

(4) A = {1, 3, 2, 7} అయిన సమితి A యొక్క ఏవైనా మూడు ఉపసమితులను రాయండి.

(5) (i) కింది సమితులలో ఏ సమితి వేరొక ఏ సమితికి ఉపసమితియో రాయండి.
P అనేది పుణేలో నివసించే ప్రజల సమితి. M అనేది మధ్యప్రదేశ్‌లో నివసించే ప్రజల సమితి.
I అనేది ఇందోర్ లో నివసించే ప్రజల సమితి. B అనేది భారతదేశంలో నివసించే ప్రజల సమితి.
H అనేది మహారాష్ట్రలో నివసించే ప్రజల సమితి.
(ii) పై సమితులలో ఏ సమితిని ఈ ఉదాహరణలో విశ్వసమితిగా తీసుకోవచ్చు?

(6*) కింద కొన్ని సమితులు ఇవ్వబడినవి, వాటిని అధ్యయనం చేసేటప్పుడు ఏ సమితిని ఆ సమితుల విశ్వసమితిగా తీసుకొవచ్చును?
(i) A = 5 యొక్క గుణిజాలలోని సంఖ్యల సమితి. B = 7 యొక్క గుణిజముల సమితి.
C = 12 యొక్క గుణిజాలలోని సంఖ్యల సమితి.
(ii) P = 4 యొక్క గుణిజములలోని పూర్ణ సంఖ్యల సమితి. T = అన్ని సరివర్గ సంఖ్యల సమితి.

(7) తరగతిలోని విద్యార్థులందరి సమితిని ఒక విశ్వసమితి అనుకొందాం. గణితములో 50% లేదా అంతకంటే ఎక్కువ మార్కులు లభించిన విద్యార్థుల సమితి A అనుకొనిన A యొక్క పూరకసమితిని రాయండి.

తెలుసుకుందాం.

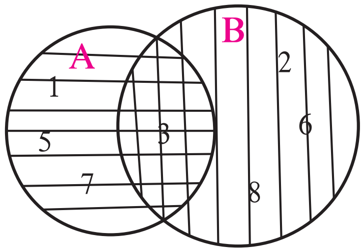
సమితులపై ప్రక్రియలు

రెండు సమితుల ఛేదనము (Intersection of two sets).

A మరియు B అనేవి రెండు సమితులు గలవని అనుకొనుము. A మరియు B సమితుల ఉమ్మడి మూలకాలను కల్గిన సమితినే A మరియు B ఈ సమితుల ఛేదన సమితి అంటారు. దానిని $A \cap B$ అని రాస్తారు. దీనిని A ఛేదనము B అని చదువుతారు.

$\therefore \quad A \cap B = \{x \mid x \in A$ మరియు $x \in B\}$

ఉదా: (1) A = { 1, 3, 5, 7}   B = { 2, 3, 6, 8}

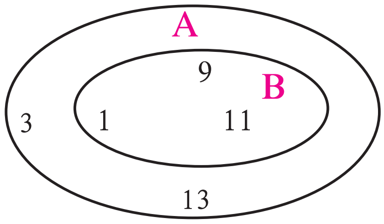


ఇప్పుడు వెన్ చిత్రమును గీద్దాం.

A మరియు B ఈ రెండు సమితులలో 3 అనేది ఉమ్మడి మూలకము

$\therefore A \cap B = \{3\}$

ఉదా: (2) A = {1, 3, 9, 11, 13}   B = {1, 9, 11}



సమితి A మరియు సమితి B లోని ఉమ్మడి మూలకాలు 1, 9, 11

$\therefore A \cap B = \{1, 9, 11\}$ కాని B = {1, 9, 11}

$\therefore A \cap B = B$

ఇచ్చట B అనేది సమితి A యొక్క ఉపసమితి అని గుర్తుంచుకోండి

$\therefore$ ఒకవేళ $B \subseteq A$ అయిన $A \cap B = B$. అదే విధంగా $B \cap A = B$, అయిన $B \subseteq A$ అవుతుంది.

ఇది గుర్తుంచుకోండి

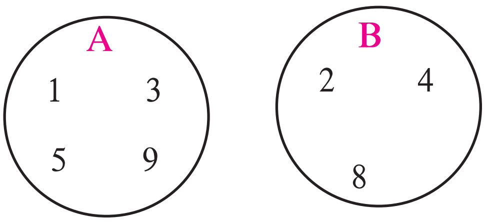
ఛేదన సమితుల ధర్మములు

(1) $A \cap B = B \cap A$
(2) ఒకవేళ $A \subseteq B$ అయిన $A \cap B = A$
(3) $A \cap B = B$ అయిన $B \subseteq A$
(4) $A \cap B \subseteq A$ మరియు $A \cap B \subseteq B$
(5) $A \cap A' = \phi$
(6) $A \cap A = A$
(7) $A \cap \phi = \phi$

కృత్యము: వివిధ ఉదాహరణలను తీసుకొని పై ధర్మాలను సరిచూడండి.

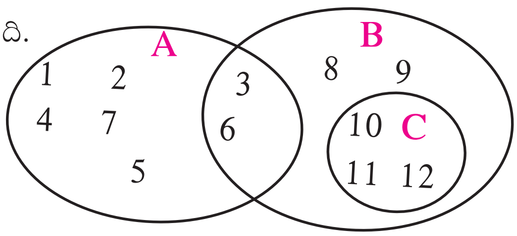
తెలుసుకుందాం.

వియుక్త సమితులు (Disjoint sets)

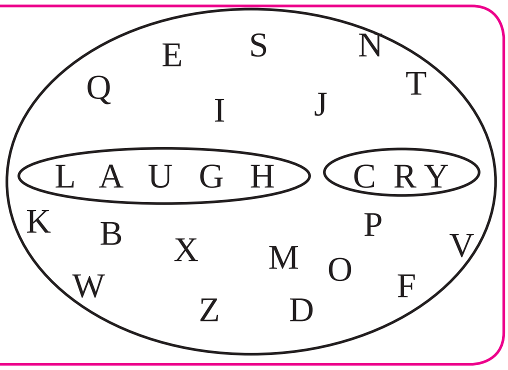


A = { 1, 3, 5, 9} మరియు B = {2, 4, 8} అనే రెండు సమితులు ఇవ్వబడ్డాయి అనుకోండి. సమితి A మరియు B లలో ఒక్క ఉమ్మడి మూలకం కూడా లేదు. అనగా ఆ రెండు సమితులు భిన్నమైనవి లేదా వియుక్తమైనవి. కావున వాటిని 'భిన్నమైన' లేదా 'వియుక్త' సమితులు అని అంటారు. ఈ సమితుల వెన్ చిత్రమును చూడండి.

కృత్యము I : ఇచ్చట A, B, C సమితుల వెన్ చిత్రము చూపబడింది. వాటిలో ఏ రెండు సమితులు 'వియుక్త' సమితులో రాయండి.



కృత్యము II : ఆంగ్ల అక్షరముల సమితిని విశ్వసమితిగా అనుకుందాము. ఇచ్చట సమితి యొక్క మూలకాలు ఆంగ్ల అక్షరాలు. LAUGH అనే పదంలోని అక్షరాల యొక్క ఒక సమితి అనుకుందాం మరియు CRY అను పదంలోని అక్షరాల యొక్క సమితిని రెండవ సమితిగా అనుకుందాం. ఈ రెండింటిని వియుక్త సమితులుగా అనవచ్చు. ఈ రెండు సమితుల ఛేదనం శూన్య సమితి అని తెలుస్తుంది.



రెండు సమితుల సమ్మేళనం (Union of two sets)

A మరియు B రెండు సమితులు అనుకోండి. ఈ రెండు సమితులలోని మూలకాలన్నింటిని కలపడం వలన ఏర్పడే సమితిని A మరియు B యొక్క సమ్మేళన సమితి అంటారు. దానిని $A \cup B$గా రాస్తారు. దీనిని A సమ్మేళనం B అని చదువుతాం.

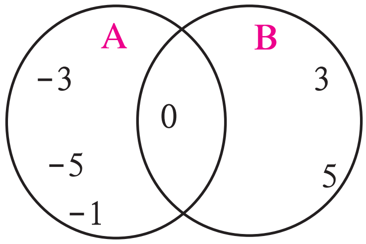
$A \cup B = \{x \mid x \in A$ లేదా $x \in B\}$

ఉదా: (1) $A = \{-1, -3, -5, 0\}$

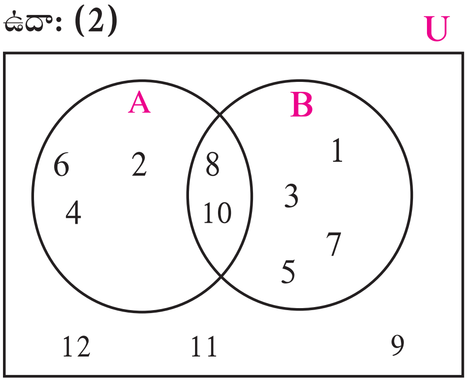
$B = \{0, 3, 5\}$

$A \cup B = \{-3, -5, 0, -1, 3, 5\}$

$A \cup B = B \cup A$ అని గమనించండి.



ఉదా: (2)



పక్కనున్న వెన్ చిత్రంలో చూపబడిన సమితుల నుండి కింది సమితులను జాబితా రూపంలో రాయండి.

(i) U (ii) A (iii) B (iv) $A \cup B$ (v) $A \cap B$

(vi) A' (vii) B' (viii) $(A \cup B)'$ (ix) $(A \cap B)'$

సాధన: $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$

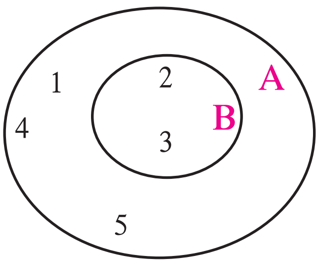
$A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, $B = \{1, 3, 5, 7, 8, 10\}$

$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10\}$ $A \cap B = \{8, 10\}$

$A' = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 12\}$ $B' = \{2, 4, 6, 9, 11, 12\}$

$(A \cup B)' = \{9, 11, 12\}$ $(A \cap B)' = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 11, 12\}$

ఉదా: (3)



$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ $B = \{2, 3\}$

ఈ ఉదాహరణ యొక్క వెన్ చిత్రంను చూద్దాం

$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

సమితి A లోని మూలకాలు సమితి $A \cup B$ లోను అవే ఉన్నవి. దీనిని బట్టి

$B \subseteq A$ అయిన $A \cup B = A$

ఇది గుర్తుంచుకోండి.

సమ్మేళన సమితుల ధర్మాలు

(1) $A \cup B = B \cup A$

(2) ఒకవేళ $A \subseteq B$ అయినచో $A \cup B = B$

(3) $A \subseteq A \cup B, \; B \subseteq A \cup B$

(4) $A \cup A' = U$

(5) $A \cup A = A$

(6) $A \cup \phi = A$

తెలుసుకుందాం.

సమితిలోని మూలకాల సంఖ్య (Number of elements in a set)

$A = \{3, 6, 9, 12, 15\}$ అనేది ఇవ్వబడిన ఒక సమితి అనుకోండి. ఈ సమితిలో 5 మూలకాలు ఉన్నాయి.

సమితి A లోని మూలకాల సంఖ్యను $n(A)$ గా సూచిస్తారు. $\therefore \; n(A) = 5$

$B = \{6, 12, 18, 24, 30, 36\}$ అనుకొనిన $\therefore \; n(B) = 6$

సమ్మేళన సమితి మరియు ఛేదన సమితిలోని మూలకాల సంఖ్య

పై సమితులు A, Bలను దృష్టిలోకి తీసుకొనినచో,

$n(A) + n(B) = 5 + 6 = 11$ ----(1)

$A \cup B = \{3, 6, 9, 12, 15, 18, 24, 30, 36\}$ $\therefore \; n(A \cup B) = 9$--------(2)

$A \cap B$ని కనుగొందాం. అనగా సమితులు A,B లలోని ఉమ్మడి మూలకాలను చూద్దాం

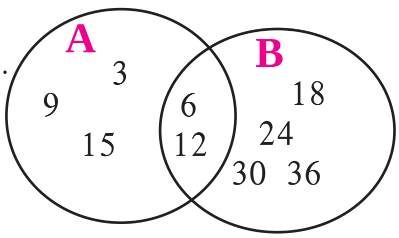
$A \cap B = \{6, 12\}$ $\therefore \; n(A \cap B) = 2$--------(3)

$n(A)$, $n(B)$ లను లెక్కిస్తున్నప్పుడు $A \cap B$ యొక్క మూలకాలను రెండుసార్లు లెక్కించడం జరిగిందని గుర్తుంచుకోండి.

$n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 5 + 6 - 2 = 9$ అలాగే $n(A \cup B) = 9$

(1), (2) మరియు (3) ఈ సమీకరణాలను బట్టి

$\therefore \; n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ అని తెలుస్తుంది.



పై నియమము నిరూపణ పక్కనున్న వెన్ చిత్రం ద్వారా (చేద్దాం) చేయండి

$n(A) = \square$, $n(B) = \square$

$n(A \cup B) = \square$, $n(A \cap B) = \square$

$\therefore \; n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

ఇది గుర్తుంచుకోండి.

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

అనగా $n(A) + n(B) = n(A \cup B) + n(A \cap B)$

ఇప్పుడు $A = \{1, 2, 3, 5, 7, 9, 11, 13\}$ $B = \{1, 2, 4, 6, 8, 12, 13\}$

ఈ సమితులతో పై నియమాలను సరిచూడండి.

తెలుసుకుందాం.

సమితుల ఆధారిత రాత ఉదాహరణలు

ఉదా: ఒక తరగతిలో 70 మంది విద్యార్థులు కలరు. వారిలో 45 మంది విద్యార్థులకు క్రికెట్ అంటే ఇష్టం. 52 మంది విద్యార్థులకు ఖో-ఖో అంటే ఇష్టం. ఈ రెండు ఆటలలో ఏదేని ఒక ఆటను కూడా ఇష్ట పడని విద్యార్థులు ఒకరు కూడా లేరు. అయిన క్రికెట్ మరియు ఖో-ఖో ఈ రెండు ఆటలను ఇష్టపడే విద్యార్థుల సంఖ్యను కనుగొనండి. కేవలం క్రికెట్ ఇష్టపడే పిల్లలెంతమంది?

సాధన: ఈ ఉదాహరణను మనం రెండు పద్దతులలో సాధించుదాం.

పద్ధతి I : తరగతిలో మొత్తం విద్యార్థులు = 70

క్రికెట్‌ను ఇష్టపడే విద్యార్థుల సమితిని A అని, ఖో-ఖోను ఇష్టపడే విద్యార్థుల సమితిని B అని అనుకొందాం.

ప్రతి విద్యార్థికి క్రికెట్ మరియు ఖో-ఖోలలో ఏదో ఒక ఆట అంటె ఇష్టం.

క్రికెట్ లేదా ఖో-ఖో ఇష్టపడే విద్యార్థుల సంఖ్య అనగా $n(A \cup B)$

$\therefore n(A \cup B) = 70$

క్రికెట్ మరియు ఖో-ఖో ఈ రెండు ఆటలను ఇష్టపడే విద్యార్థుల సంఖ్య = $n(A \cap B)$

$n(A) = 45, \quad n(B) = 52$

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ అని మనకు తెలుసు

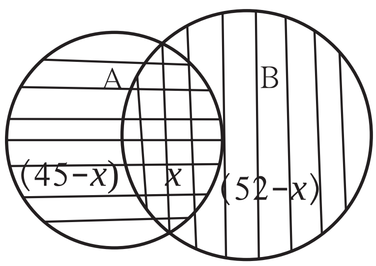
$$\therefore \quad n(A \cap B) = n(A) + n(B) - n(A \cup B)$$
$$= 45 + 52 - 70 = 27$$

$\therefore$ రెండు ఆటలు ఇష్టపడే పిల్లలు 27, క్రికెట్ ఇష్టపడే పిల్లలు 45 గలరు. $\therefore$ కేవలం క్రికెట్ ఇష్టపడే పిల్లలు

$= 45 - 27 = 18$

$A \cap B$ అనేది రెండు ఆటలను ఇష్టపడే విద్యార్థుల సమితి $\therefore n(A \cap B) = 27$

పద్ధతి II : ఇచ్చిన సమాచారంను వెన్ చిత్రంలో చూపి రెండు ఆటలను ఇష్టపడే విద్యార్థుల సంఖ్యను కింది విధంగా కనుగొనవచ్చు.



$n(A \cap B) = x$ అనుకుందాం. $n(A) = 45$, $n(B) = 52$,

$n(A \cup B) = 70$ ఇది మనకు తెలుసు.

$\therefore n(A \cap B) = x = n(A) + n(B) - n(A \cup B)$

$= 45 + 52 - 70 = 27$

వెన్ చిత్రాన్ని బట్టి కేవలం క్రికెట్ ఇష్టపడే పిల్లలు $= 45 - 27$

$= 18$

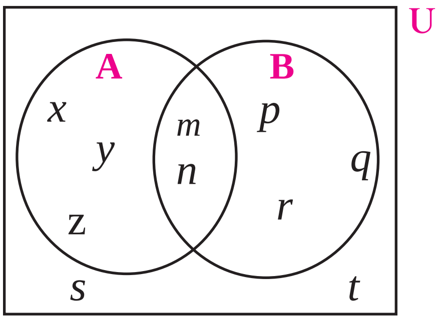
అభ్యాస మూలిక 1.4

(1) $n(A) = 15$, $n(A \cup B) = 29$, $n(A \cap B) = 7$ అయిన $n(B) =$ ఎంత?

(2) ఒక వసతి గృహంలో 125 మంది విద్యార్థులు గలరు. వారిలో 80 మంది విద్యార్థులు టీ, 60 మంది విద్యార్థులు కాఫీ, మరియు 20 మంది విద్యార్థులు టీ మరియు కాఫీ రెండింటిని త్రాగెదరు. రెండింటిలో ఏ పానీయాన్ని తాగని విద్యార్థుల సంఖ్యను కనుగొనండి.

(3) ఒక పరీక్షలో 50 మంది విద్యార్థులు ఆంగ్లంలో ఉత్తీర్ణులైనారు. 60 మంది విద్యార్థులు గణితంలో ఉత్తీర్ణులైనారు. 40 మంది విద్యార్థులు రెండింటిలోను ఉత్తీర్ణులైనారు. ఒక్క విద్యార్థి కూడా రెండు విషయాలలో అనుత్తీర్ణులు కాలేదు అయిన మొత్తం విద్యార్థులెంత మంది?

(4*) ఒక పాఠశాలలోని 9వ తరగతిలోని 220 మంది విద్యార్థుల యొక్క ఇష్టాలను గురించి సర్వే చేశారు. వారిలో 130 మంది విద్యార్థులకు పర్వతారోహణం ఇష్టం అని, 180 మంది విద్యార్థులకు అంతరిక్ష దర్శనం ఇష్టం అని చెప్పారు. 110 మంది విద్యార్థులకు పర్వతారోహణం మరియు అంతరిక్ష దర్శనం రెండూ ఇష్టం అని చెప్పారు. అయిన ఈ రెండింటిలో దేనిని ఇష్టపడని విద్యార్థులెందరు? పర్వతారోహణ మాత్రమే ఇష్టపడే విద్యార్థులెందరు? అంతరిక్ష దర్శనం మాత్రమే ఇష్టపడే విద్యార్థులెందరు?



(5) ప్రక్క పటం నుండి కింది అన్ని సమితులను రాయండి

(i) A (ii) B (iii) $A \cup B$ (iv) U

(v) A' (vi) B' (vii) $(A \cup B)'$

సంకీర్ణ ప్రశ్నసంగ్రహము-1

(1) కింది వాటిలో సరియైన పర్యాయమును ఎన్నుకోండి

(i) $M = \{1, 3, 5\}$, $N = \{2, 4, 6\}$, అయిన $M \cap N =$?

(A) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ (B) $\{1, 3, 5\}$ (C) ϕ (D) $\{2, 4, 6\}$

(ii) $P = \{x \mid x$ అనేది బేసి సహజ సంఖ్య, $1 < x \leq 5\}$ అనే సమితిని జాబితా పద్ధతిలో ఎలా రాస్తారు?

(A) $\{1, 3, 5\}$ (B) $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ (C) $\{1, 3\}$ (D) $\{3, 5\}$

(iii) $P = \{1, 2, ...10\}$, ఇది ఏ రకమైన సమితి?

(A) శూన్య సమితి (B) అపరిమిత సమితి (C) పరిమిత సమితి (D) పై వేవి కావు

(iv) $M \cup N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ మరియు $M = \{1, 2, 4\}$ అయిన కింది వాటిలో N సమితి ఏది?

(A) $\{1, 2, 3\}$ (B) $\{3, 4, 5, 6\}$ (C) $\{2, 5, 6\}$ (D) $\{4, 5, 6\}$

(v) $P \subseteq M$, అయినచో $P \cap (P \cup M)$ అనేది కిందివానిలో ఏ సమితి అవుతుంది?

(A) P (B) M (C) $P \cup M$ (D) $P' \cap M$

(vi) కింది వానిలో శూన్య సమితి ఏది ?

(A) సమాంతర రేఖల ఖండన బిందువుల సమితి (B) సరి ప్రధాన సంఖ్యల సమితి

(C) 30 కంటే తక్కువ రోజులు గల ఆంగ్ల నెలల సమితి

(D) $P = \{x \mid x \in I, -1 < x < 1\}$

(2) కింది ప్రశ్నలలో సరియైన సమాధానం ఎన్నుకోండి

(i) కింది వాటిలో ఏ సమూహము సమితి అవుతుంది?

(A) ఇంద్ర ధనుస్సులోని రంగులు (B) పాఠశాల ఆవరణలోని ఎత్తైన చెట్లు

(C) గ్రామంలోని ధనికులు (D) పుస్తకంలోని సులువైన ఉదాహరణలు

(ii) $N \cap W$ అనేది కింది వాటిలో ఏ సమితి?

(A) {1, 2, 3, ...} (B) {0, 1, 2, 3, ...} (C) {0} (D) { }

(iii) $P = \{x \mid x$ అనేది indian అనే పదంలోని అక్షరం$\}$ అయిన P సమితిని జాబితా పద్ధతిలో రాసిన కింది వాటిలో ఏ సమితి అవుతుంది?

(A) {i, n, d} (B) {i, n, d, a} (C) {i, n, a} (D) {n, d, a}

(iv) ఒకవేళ T = {1, 2, 3, 4, 5} మరియు M = {3, 4, 7, 8} అయిన $T \cup M$ = ?

(A) {1, 2, 3, 4, 5, 7} (B) {1, 2, 3, 7, 8}

(C) {1, 2, 3, 4, 5, 7, 8} (D) {3, 4}

(3) 100 మంది గల ఒక సమూహంలో 72 మంది ఆంగ్లం, 43 మంది ఫ్రెంచ్ మాట్లాడుతారు. ఈ 100 మంది ఆంగ్లం లేదా ఫ్రెంచ్‌లలో కనీసం ఒక భాషను మాట్లాడతారు. అయిన ఎంత మంది ఆంగ్లం మాత్రమే మాట్లాడతారు? ఎంత మంది ఫ్రెంచ్ మాత్రమే మాట్లాడతారు? ఎంత మంది ఆంగ్లం మరియు ఫ్రెంచ్ ఈ రెండు భాషలను మాట్లాడతారు?

(4) వృక్ష సంరక్షణ వారోత్సవాలలో పార్థు 70 చెట్లను, ప్రజ్ఞ 90 చెట్లను నాటారు. వాటిలో ఇద్దరు కలిసి 25 చెట్లను నాటినచో పార్థు లేదా ప్రజ్ఞ మొత్తం ఎన్ని చెట్లను నాటిరి?

(5) $n(A) = 20$, $n(B) = 28$, $n(A \cup B) = 36$ అయిన $n(A \cap B)$ = ?

(6) 28 విద్యార్థులు గల ఒక తరగతిలో 8 మంది విద్యార్థుల ఇండ్లలో కుక్కను, 6గురు విద్యార్థుల ఇండ్లలో పిల్లిని పెంచుతారు. 10 మంది విద్యార్థుల ఇండ్లలో కుక్క మరియు పిల్లిని రెండింటిని పెంచుతారు. అయిన ఎంత మంది విద్యార్థుల ఇండ్లలో కుక్క లేదా పిల్లి వీటిలో ఒక్క ప్రాణిని కూడా పెంచడం లేదు?

(7) క్రింది ప్రతి ఉదాహరణలో సమితుల ఛేదన సమితి వెన్ చిత్రము ద్వారా చూపండి.

(i) A ={3, 4, 5, 7} B ={1, 4, 8}

(ii) P = {a, b, c, e, f} Q ={l, m, n , e, b}

(iii) $X = \{x \mid x$ అనేది 80, 100ల మధ్యగల ప్రధాన సంఖ్య $\}$

$Y = \{y \mid y$ అనేది 90,100ల మధ్యగల బేసి సంఖ్య $\}$

(8) కింది వాటిలో ఏ సమితి, ఏ సమితికి ఉపసమితియో రాయండి.

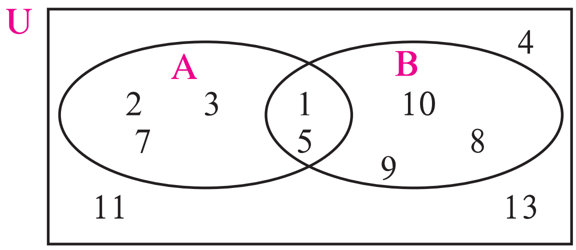
X = అన్ని చతుర్భుజముల సమితి   Y = అన్ని సమచతుర్భుజముల సమితి

S = అన్ని చతురస్రముల సమితి   T = అన్ని సమాంతరచతుర్భుజముల సమితి

V = అన్ని దీర్ఘ చతురస్రముల సమితి

(9) M అనేది ఏదేని ఒక సమితి అయిన $M \cup \phi$ మరియు $M \cap \phi$ లను రాయండి.

(10*)



పక్కనున్న పటం నుంచి U, A, B, $A \cup B$ మరియు $A \cap B$ సమితులను రాయండి.

(11) $n(A) = 7$, $n(B) = 13$, $n(A \cap B) = 4$, అయిన $n(A \cup B\} = ?$

కృత్యము I : ఖాళీ గడులలో సమితుల యొక్క మూలకాలను రాయండి.

$U = \{1, 3, 5, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 15\}$

$A = \{1, 11, 13\}$ $B = \{8, 5, 10, 11, 15\}$ $A' = \{........\}$ $B' = \{........\}$

$A \cap B = \{............\}$ $A' \cap B' = \{...............\}$

$A \cup B = \{............\}$ $A' \cup B' = \{............\}$

$(A \cap B)' = \{............\}$ $(A \cup B)' = \{............\}$

$(A \cap B)' = A' \cup B'$, $(A \cup B)' = A' \cap B'$**లను సరిచూడండి**

కృత్యము II : మీ పరిసరాలలోని 20 కుటుంబాల నుండి కింది సమాచారమును సేకరించండి.

(i) మరాఠి దినపత్రికను తీసుకునే కుటుంబాల సంఖ్య.

(ii) ఆంగ్ల దినపత్రికను తీసుకునే కుటుంబాల సంఖ్య.

(iii) మరాఠి మరియు ఆంగ్ల, రెండు భాషల దినపత్రికను తీసుకునే కుటుంబాల సంఖ్య

సేకరించిన సమాచారమును వెన్ చిత్రం ద్వారా చూపండి.

2 వాస్తవ సంఖ్యలు

పదండి, నేర్చుకుందాం.

- అకరణీయ సంఖ్యల ధర్మములు
- కరణీయ సంఖ్యల ధర్మములు
- కరణులు
- వర్గ కరణులను (పోల్చుట)
- వర్గ కరణులపై ప్రక్రియలు
- వర్గ కరణుల ఆకరణీయము

కొంచెం గుర్తు తెచ్చుకుందాం.

కింది తరగతులలో మనం సహజ సంఖ్యలు, పూర్ణసంఖ్యలు, వాస్తవ సంఖ్యల గురించి నేర్చుకున్నాము.

N = సహజ సంఖ్యల సమితి = $\{1, 2, 3, 4, \ldots\}$

W = పూర్ణాంకాల సమితి = $\{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$

I = పూర్ణ సంఖ్యల సమితి = $\{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 \ldots\}$

Q = అకరణీయ సంఖ్యల సమితి = $\{\frac{p}{q}, \mid p, q \in I, q \neq 0\}$

R = వాస్తవ సంఖ్యల సమితి

$N \subseteq W \subseteq I \subseteq Q \subseteq R$.

అకరణీయ సంఖ్యల క్రమసంబంధం: $\frac{p}{q}$ మరియు $\frac{r}{s}$ లు రెండు ఆకరణీయ సంఖ్యలు అయి $q > 0, s > 0$

(i) $p \times s = q \times r$ అయిన $\frac{p}{q} = \frac{r}{s}$ (ii) $p \times s > q \times r$ అయిన $\frac{p}{q} > \frac{r}{s}$

(iii) $p \times s < q \times r$ అయిన $\frac{p}{q} < \frac{r}{s}$

తెలుసుకుందాం.

అకరణీయ సంఖ్యల ధర్మములు (Properties of rational numbers)

a, b, cలు అకరణీయ సంఖ్యలైన

ధర్మము	సంకలనము	గుణకారము
1. సంవృత ధర్మము	$a + b = b + a$	$a \times b = b \times a$
2. సహచర ధర్మము	$(a + b) + c = a + (b + c)$	$a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$
3. తత్సమ ధర్మము	$a + 0 = 0 + a = a$	$a \times 1 = 1 \times a = a$
4. విలోమ ధర్మము	$a + (-a) = 0$	$a \times \frac{1}{a} = 1 \quad (a \neq 0)$

కొంచెం గుర్తు తెచ్చుకుందాం.

ఏదైనా ఆకరణీయ సంఖ్య యొక్క దశాంశ రూపం అంతమయ్యే లేదా అంతంకాని ఆవర్త దశాంశముగా ఉంటుంది.

అంతమయ్యే రూపము	అంతంకాని ఆవర్త రూపము
(1) $\frac{2}{5} = 0.4$	(1) $\frac{17}{36} = 0.472222\ldots = 0.47\dot{2}$
(2) $-\frac{7}{64} = -0.109375$	(2) $\frac{33}{26} = 1.2692307692307\ldots = 1.2\overline{692307}$
(3) $\frac{101}{8} = 12.625$	(3) $\frac{56}{37} = 1.513513513\ldots = 1.\overline{513}$

తెలుసుకుందాం.

అంతంకాని ఆవర్త దశాంశ రూపంలోని అకరణీయ సంఖ్యను $\frac{p}{q}$ రూపంలో అమర్చుట.

ఉదా: (1) 0.777.... అనే ఆవర్తిత దశాంశను $\frac{p}{q}$ అనే భిన్న రూపంలో రాయండి.

సాధన: $x = 0.777\ldots = 0.\dot{7}$ అనుకొనిన

$$\therefore\ 10x = 7.777\ldots = 7.\dot{7}$$

$$\therefore\ 10x - x = 7.\dot{7} - 0.\dot{7}$$

$$\therefore\ 9x = 7$$

$$\therefore\ x = \frac{7}{9}$$

$$\therefore\ 0.777\ldots = \frac{7}{9}$$

ఉదా: (2) 7.529529529... ఆవర్తిత దశాంశమును $\frac{p}{q}$ అనే భిన్న రూపంలో రాయండి.

సాధన: $x = 7.529529\ldots = 7.\overline{529}$ అని అనుకోండి

$$\therefore\ 1000\ x = 7529.529529\ldots = 7529.\overline{529}$$

$$\therefore\ 1000\ x - x = 7529.\overline{529} - 7.\overline{529}$$

$$\therefore\ 999\ x = 7522.0 \qquad \therefore\ x = \frac{7522}{999}$$

$$\therefore\ 7.\overline{529} = \frac{7522}{999}$$

ఆలోచించండి

$2.4\dot{3}$ అనే సంఖ్యను $\frac{p}{q}$ రూపంలో రాయుటకు ఏం చేస్తారు?

ఇది గుర్తుంచుకోండి.

(1) ఇచ్చిన సంఖ్యలో దశాంశ బిందువు తర్వాత వెంటనే ఎన్ని అంకెలు ఆవర్తితమయ్యాయో చూసి దానికి అనుగుణంగా ఆ సంఖ్యను 10, 100, 1000.....లలో సరియైన సంఖ్యచే గుణించండి. ఉదా: $2.\dot{3}$ అనే సంఖ్యలో 3 ఈ ఒకే ఒక అంకె ఆవర్తితమయ్యింది. కావున $2.\dot{3}$ ను $\frac{p}{q}$ రూపంలోకి మార్చడానికి దానిని 10 చే గుణించండి.

$1.\overline{24}$ లో 2, 4 అనే రెండు అంకెలు ఆవర్తితము అయ్యాయి. కావున $1.\overline{24}$ ను 100 చే గుణించండి.

$1.\overline{513}$ లో 5, 1, 3 అనే మూడు అంకెలు ఆవర్తితము అయ్యాయి. కావున $1.\overline{513}$ ను 1000 చే గుణించండి.

(2) ఆకరణీయ సంఖ్యలోని హారం యొక్క ప్రధాన కారణాంకాలను పరీక్షించండి. వాటిలో 2, 5లు కాకుండా వేరే ప్రధాన సంఖ్యలు లేనట్లయితే ఆ అకరణీయ సంఖ్య దశాంశ రూపం అంతమవుతుంది. 2, 5లు కాకుండా వేరే ప్రధాన సంఖ్యలు హారం యొక్క కారణాంకాలు ఉన్నట్లయితే ఆ అకరణీయ సంఖ్య దశాంశ రూపం అంతం కాని ఆవర్తిత దశాంశం అవుతుంది.

అభ్యాస మాలిక 2.1

1. కింది వాటిలో ఏయే అకరణీయ సంఖ్యల దశాంశ రూపం అంతమయ్యే దశాంశ రూపం మరియు అంతంకాని ఆవర్తిత దశాంశ రూపం అవుతాయో రాయండి.

   (i) $\frac{13}{5}$ (ii) $\frac{2}{11}$ (iii) $\frac{29}{16}$ (iv) $\frac{17}{125}$ (v) $\frac{11}{6}$

2. కింది అకరణీయ సంఖ్యలను దశాంశ రూపంలో రాయండి.

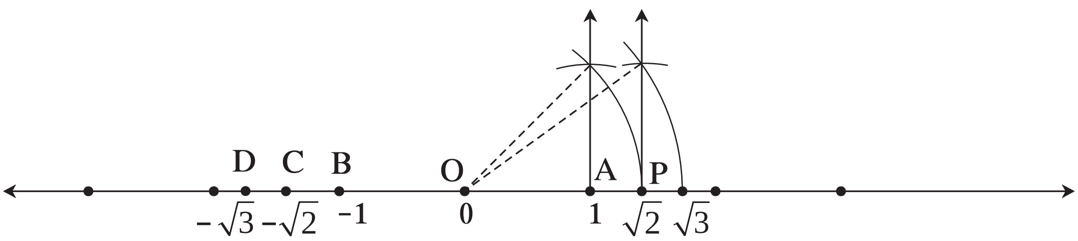
   (i) $\frac{127}{200}$ (ii) $\frac{25}{99}$ (iii) $\frac{23}{7}$ (iv) $\frac{4}{5}$ (v) $\frac{17}{8}$

3. కింది అకరణీయ సంఖ్యలను $\frac{p}{q}$ రూపంలో రాయండి.

   (i) $0.\dot{6}$ (ii) $0.\overline{37}$ (iii) $3.\overline{17}$ (iv) $15.\overline{89}$ (v) $2.\overline{514}$

కొంచెం గుర్తుతెచ్చుకుందాం.

కింది సంఖ్యా రేఖపై చూపబడిన $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ లు అకరణీయ సంఖ్యలు కావు, అనగా అది కరణీయ సంఖ్యలు.



ఈ సంఖ్య రేఖపై OA = 1 యూనిట్ దూరం. 'O'కు ఎడమవైపు B బిందువు కూడా 1 యూనిట్ దూరంలో ఉంది. B బిందువు యొక్క నిరూపకము '−1'. P బిందువు యొక్క నిరూపకము $\sqrt{2}$ అయి, దాని వ్యతిరేక సంఖ్యను C అనే బిందువుతో చూపించారు. C బిందువు యొక్క నిరూపకము $-\sqrt{2}$. అదే విధంగా $\sqrt{3}$ యొక్క వ్యతిరేక సంఖ్య $-\sqrt{3}$ ను సూచించునట్టిది D బిందువు.

తెలుసుకుందాం.

కరణీయ మరియు వాస్తవ సంఖ్యలు (Irrational and real numbers)

$\sqrt{2}$ అనేది కరణీయ సంఖ్య అని పరోక్ష పద్ధతిలో నిరూపించవచ్చు.

$\sqrt{2}$ అనేది అకరణీయ సంఖ్య అని భావించుకొని దానిని $\frac{p}{q}$ అనుకుందాం.

$\frac{p}{q}$ అనేది ఆ అకరణీయ సంఖ్య యొక్క సంక్షిప్త రూపం. అనగా p, qలకు 1 కాకుండా వేరే ఉమ్మడి భాజకములు లేవు అని అనుకొనిన

$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ $\quad\therefore\quad 2 = \frac{P^2}{q^2}$ (రెండు వైపులా వర్గం తీసుకొనిన)

$\therefore\quad 2q^2 = p^2$

$\therefore\quad p^2$ అనేది సరి సంఖ్య అవుతుంది.

$\therefore\quad p$ కూడా సరిసంఖ్య అవుతుంది. అనగా 2 అనేది p యొక్క భాజకము అవుతుంది........(I)

$\therefore\quad p = 2t \qquad \therefore\ p^2 = 4t^2 \qquad t \in I$

$\therefore\quad 2q^2 = 4t^2\ (\because p^2 = 2q^2)\quad \therefore\ q^2 = 2t^2\quad \therefore\ q^2$ అనేది సరి సంఖ్య అవుతుంది $\therefore\ q$ కూడా సరి సంఖ్య అవుతుంది

$\therefore$ 2 అనేది q కు కూడా భాజకము అవుతుంది...... (II)

(I) మరియు (II)ల వివరణల నుండి 2 అనేది p మరియు q ల ఉమ్మడి భాజకము అవుతుంది.

కాని ఇది విరుద్ధత అవుతుంది. ఎందుకనగా $\frac{p}{q}$ లో, p మరియు q లకు 1 కాకుండా వేరే ఉమ్మడి భాజకములు లేవు.

$\therefore\ \sqrt{2}$ ను ఒక అకరణీయ సంఖ్య అనుకోవడం తప్పు. $\therefore\ \sqrt{2}$ అనేది కరణీయ సంఖ్య అవుతుంది.

ఇదే పద్ధతి ప్రకారం $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ లను కరణీయ సంఖ్యలు అని చూపవచ్చు. అందుకై 3 లేదా 5, n యొక్క భాజకం అయినట్లయితేనే అది n^2 యొక్క భాజకం అవుతుందనిన నియమాన్ని ఉపయోగించండి.

$\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ లాంటి సంఖ్యలను, సంఖ్యా రేఖపై చూపవచ్చును.

ఏ సంఖ్యనైతే సంఖ్యా రేఖపైగల బిందువుగా చూపించవచ్చునో ఆ సంఖ్యను వాస్తవ సంఖ్య అని అంటారు.

క్లుప్తంగా సంఖ్యారేఖపై గల ప్రతి బిందు నిరూపకము ఒక వాస్తవ సంఖ్య అవుతుంది మరియు ప్రతి వాస్తవ సంఖ్యకు సంబంధించిన బిందువు సంఖ్యా రేఖపై ఉంటుంది.

ప్రతి అకరణీయ సంఖ్య, వాస్తవ సంఖ్య అని మనకు తెలుసు. కాని $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $-\sqrt{2}$, π, $3+\sqrt{2}$ లాంటి వాస్తవ సంఖ్యలు అకరణీయ సంఖ్యలు కావు. అనగా ప్రతి వాస్తవ సంఖ్య అకరణీయ సంఖ్య గాకపోవచ్చు అని గుర్తుంచుకోండి.

కరణీయ సంఖ్యలను దశాంశ రూపంలో అమర్చుట

మనం 2 మరియు 3ల వర్గమూలంను భాగాహార పద్ధతి ద్వారా కనుగొందాం

2 యొక్క వర్గమూలం

```
              1.41421...
      1    | 2. 00 00 00 00 ....
     +1    | -1
      24   | 100
     +4    | -96
      281  | 400
     + 1   | -281
      2824 | 11900
     +   4 | -11296
     28282 | 60400
     +   2 | - 56564
    282841 | 0383600
```

$\therefore \sqrt{2} = 1.41421...$

3 యొక్క వర్గమూలం

```
              1.732....
      1    | 3. 00 00 00 00 ....
     +1    | -1
      27   | 200
     +7    | -189
      343  | 1100
     + 3   | -1029
      3462 | 007100
     +   2 | -6924
      3464 | 0176
```

$\therefore \sqrt{3} = 1.732...$

ఇక్కడ భాగఫలంలోని దశాంశ బిందువు తర్వాత అంకెల సంఖ్య ఎప్పటికి అంతం కాదు. అనగా అనంతమైన అంకెల క్రమం వస్తుంది. ఈ క్రమము కొన్ని అంకెల సమూహం యొక్క ఆవర్తనం వలన తయారు కాదు. అనగా సంఖ్యల దశాంశ రూపం అంతంకాని అనావర్తితంగా ఉంటాయి.

$\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ లు కరణీయ సంఖ్యలు. అనగా 1.4142... మరియు 1.732... లు కూడా కరణీయ సంఖ్యలు అవుతాయి.

దీనిని బట్టి అంతంకాని అనావర్తిత దశాంశ రూపంలోని సంఖ్య కరణీయ సంఖ్య అవుతుందని గుర్తుంచుకోండి.

π సంఖ్య

కృత్యము I

మందమైన కార్డుబోర్డుపై వేరువేరు వ్యాసార్ధాలు గల వృత్తాలను గీయండి. మూడు, నాలుగు వృత్తాకార బిళ్ళలను కత్తిరించండి. ప్రతి బిళ్ళ అంచు చుట్టు దారమును తిప్పుతు ప్రతి వృత్తాకార బిళ్ళ యొక్క పరిధిని కొలవండి. కింది పట్టికను పూర్తి చేయండి.

క్ర. సం.	వ్యాసార్ధం	వ్యాసం (d)	పరిధి (c)	నిష్పత్తి = $\frac{c}{d}$
1	7 సె.మీ			
2	8 సె.మీ			
3	5.5 సె.మీ			

పక్క పట్టిక నుండి $\frac{c}{d}$ నిష్పత్తి ప్రతిసారి 3.1 కి దగ్గరగా వస్తుంది. అనగా స్థిరంగా ఉంటుందని తెలుస్తుంది. ఆ నిష్పత్తిని π అనే గుర్తుతో సూచిస్తారు.

కృత్యము II

π యొక్క రమారమి విలువను కనుగొనడానికి 11 సె.మీ., 22 సె. మీ. మరియు 33 సె.మీల పొడవులుగల తీగ ముక్కలను తీసుకొండి. ప్రతి తీగతో వృత్తమును తయారు చేయండి. ఆ వృత్తాల యొక్క వ్యాసాలను కొలిచి కింది పట్టికలో రాయండి.

వృత్త సంఖ్య	పరిధి	వ్యాసం	పరిధి మరియు వ్యాసాల నిష్పత్తి
1	11 సె.మీ		
2	22 సె.మీ		
3	33 సె.మీ		

పరిధి మరియు వ్యాసాల నిష్పత్తి $\frac{22}{7}$ కు దగ్గరగా వచ్చిందా? సరిచూడండి.

వృత్తము యొక్క పరిధి మరియు వ్యాసాల నిష్పత్తి స్థిరాంకం అవుతుంది. అది కరణీయ సంఖ్య అవుతుంది. ఆ సంఖ్యను π చిహ్నంతో సూచిస్తారు. π యొక్క విలువ సుమారుగా $\frac{22}{7}$ లేదా 3.14 గా తీసుకుంటారు.

క్రీ. పూ. 499లో ఆర్యభట్ట అనే ప్రసిద్ధ భారతీయ గణిత శాస్త్రవేత్త π యొక్క విలువను $\frac{62832}{20000} = 3.1416$గా కనుగొన్నాడు

$\sqrt{3}$ అనేది ఒక కరణీయ సంఖ్య అని మనకు తెలుసు. ఇప్పుడు $2+\sqrt{3}$ అనే సంఖ్య కరణీయ సంఖ్యయా చూద్దాం.

$2+\sqrt{3}$ అను సంఖ్య కరణీయ సంఖ్య కాదు అని అనుకొందాం, అంటే అది అకరణీయ సంఖ్య కావచ్చు.

ఒకవేళ $2+\sqrt{3}$ అకరణీయ సంఖ్య అయిన $2+\sqrt{3} = \frac{p}{q}$ అని అనుకుందాం.

$\therefore\ \sqrt{3} = \frac{p}{q} - 2$ అనే సమీకరణం లభిస్తుంది.

ఇక్కడ ఎడమవైపు కరణీయ సంఖ్య మరియు కుడివైపు అకరణీయ సంఖ్య లాంటి విరుద్ధ ఫలితం వచ్చింది.

అనగా $2+\sqrt{3}$ అనేది అకరణీయ సంఖ్య కాకుండా అది కరణీయ సంఖ్య అవుతుందని నిరూపించబడింది.

అదే విధంగా $2\sqrt{3}$ కరణీయ సంఖ్య అని చూపవచ్చు.

రెండు కరణీయ సంఖ్యల మొత్తం లేదా లబ్ధం అకరణీయ సంఖ్య కావచ్చు, దీనిని క్రింది విధంగా నిరూపణ చేసుకోవచ్చు.

ఉదా, $2+\sqrt{3}+(-\sqrt{3}) = 2$, $4\sqrt{5} \div \sqrt{5} = 4$, $(3+\sqrt{5})-(\sqrt{5}) = 3$,

$2\sqrt{3}\times\sqrt{3} = 6$, $\sqrt{2}\times\sqrt{5} = \sqrt{10}$, $2\sqrt{5}-\sqrt{5} = \sqrt{5}$

ఇది గుర్తుంచుకోండి

కరణీయ సంఖ్యల ధర్మములు

(1) అకరణీయ సంఖ్య మరియు కరణీయ సంఖ్యల మొత్తం లేదా భేదం ఒక కరణీయ సంఖ్య అవుతుంది.

(2) శూన్యేతర అకరణీయ సంఖ్య మరియు కరణీయ సంఖ్యల లబ్ధం లేదా భాగఫలం కూడా ఒక కరణీయ సంఖ్య అవుతుంది.

(3) రెండు కరణీయ సంఖ్యల మొత్తం, భేదం, లబ్ధం మరియు భాగఫలం మాత్రం అకరణీయ లేదా కరణీయ సంఖ్యలయ్యే అవకాశం ఉంది.

తెలుసుకుందాం.

వాస్తవ సంఖ్యల క్రమ సంబంధం యొక్క ధర్మములు

1. a, b అనేవి రెండు వాస్తవ సంఖ్యలు అయిన వాటి మధ్య $a = b$ లేదా $a < b$ లేదా $a > b$ లలో ఏదైనా ఒక సంబంధం మాత్రమే ఉంటుంది.
2. $a < b$ మరియు $b < c$ అయిన $a < c$ అవుతుంది
3. $a < b$ అయిన $a + c < b + c$ అవుతుంది
4. $a < b$ మరియు $c > 0$ అయిన $ac < bc$, ఒకవేళ $c < 0$ అయిన $ac > bc$ అవుతుంది.

   అకరణీయ, కరణీయ సంఖ్యలను తీసుకుని పై నియమాలను సరి చూడండి.

ఋణ సంఖ్యల వర్గమూలం

$\sqrt{a} = b$ అయిన $b^2 = a$ అని మనకు తెలుసు.

దీనిని బట్టి $\sqrt{5} = x$ అయిన $x^2 = 5$ అని మనకు అర్థమవుతుంది.

అదే విధంగా ఏ వాస్తవ సంఖ్య యొక్క వర్గము అయిన ఎల్లప్పుడు ఋణేతర సంఖ్యే వస్తుంది. అని మనకు తెలుసు. అనగా ఏ వాస్తవ సంఖ్య యొక్క వర్గమైనా ఎప్పుడు కూడా ఋణ సంఖ్య కాదు. కాని $(\sqrt{-5})^2 = -5 \therefore \sqrt{-5}$ అనేది వాస్తవ సంఖ్య కాదు.

అనగా ఋణ వాస్తవ సంఖ్య యొక్క వర్గమూలము వాస్తవ సంఖ్య కాదు.

అభ్యాస మాలిక 2.2

(1) $4\sqrt{2}$ అనే సంఖ్య కరణీయ సంఖ్య అని నిరూపించండి.

(2) $3 + \sqrt{5}$ అనే సంఖ్య కరణీయ సంఖ్య అని నిరూపించండి.

(3) $\sqrt{5}$, $\sqrt{10}$ లను సంఖ్యా రేఖపై చూపండి.

(4) కింద నివ్వబడిన సంఖ్యల మధ్యగల ఏవైనా మూడు కరణీయ సంఖ్యలను రాయండి.

(i) 0.3 మరియు -0.5 (ii) -2.3 మరియు -2.33

(iii) 5.2 మరియు 5.3 (iv) -4.5 మరియు -4.6

తెలుసుకుందాం.

ధన అకరణీయ సంఖ్యల వర్గమూలం (Root of positive rational number)

$x^2 = 2$ అయిన $x = \sqrt{2}$ లేదా $x = -\sqrt{2}$ అవుతుంది. $\sqrt{2}$ మరియు $-\sqrt{2}$ లు కరణీయ సంఖ్యలని మనకు తెలుసు. $\sqrt[3]{7}$, $\sqrt[4]{8}$ లాంటి సంఖ్యలు కూడా కరణీయ సంఖ్యలవుతాయి.

n ధన పూర్ణ సంఖ్య అయి $x^n = a$ అయినట్లయితే x అనేది a యొక్క n వ మూలం అని అంటారు. ఈ మూలము అకరణీయ లేదా కరణీయము అవుతాయి.

ఉదా: $2^5 = 32 \therefore 2$ అనేది 32 యొక్క 5 వ మూల అకరణీయము, కాని $x^5 = 2$ అయిన $x = \sqrt[5]{2}$ ఇది కరణీయ సంఖ్య అవుతుంది.

కరణులు (Surds)

5 అనేది ఒక అకరణీయ సంఖ్య అని మనకు తెలుసు. కాని $\sqrt{5}$ అనేది అకరణీయ సంఖ్య కాదు. ఏ విధంగానైతే వాస్తవ సంఖ్య యొక్క వర్గమూలం లేదా ఘన మూలం అకరణీయ లేదా కరణీయ సంఖ్య అవుతుందో అదే విధంగా nవ మూలం కూడా అకరణీయ లేదా కరణీయ సంఖ్య అయ్యే అవకాశం ఉంది.

n అనేది 1 కంటే పెద్ద పూర్ణ సంఖ్య అయి, a అను ధన వాస్తవ సంఖ్య యొక్క n వ మూలం x చే సూచించినట్లయితే $x^n = a$ లేదా $\sqrt[n]{a} = x$ అని రాస్తారు.

a అనేది ధన అకరణీయ సంఖ్య అయి a యొక్క n వ మూలం x అనేది కరణీయ సంఖ్య అయినట్లయితే x ను కరణి (కరణీయ మూలం) అని అంటారు.

$\sqrt[n]{a}$ అనేది కరణి అయినచో '$\sqrt{\ }$'ను **కరణి గుర్తు** (radical sign) అని అంటారు. nను **అకరణి యొక్క పరిమాణం** (order of the surd) అంటారు, మరియు a ను కరణి స్థాన సంఖ్య (radicand) అని అంటారు.

(1) $a = 7, n = 3,$ అనుకొనిన $\sqrt[3]{7}$ అనేది కరణి అవుతుంది. ఎందుకనగా $\sqrt[3]{7}$ అనేది ఒక కరణీయ సంఖ్య.

(2) $a = 27$ మరియు $n = 3$ అనుకొనిన $\sqrt[3]{27} = 3$ అనేది కరణీయ సంఖ్య కాదు. కాబట్టి $\sqrt[3]{27}$ అనేది కరణి కాదు.

(3) $\sqrt[3]{8}$ అనేది కరణి అవుతుందా?

$\sqrt[3]{8} = p$ అనుకోండి $\quad p^3 = 8.\quad$ ఏ సంఖ్య యొక్క ఘనం 8 అవుతుంది?

2 యొక్క ఘనం 8 అని మనకు తెలుసు.

$\sqrt[3]{8}$ లో $a = 8$ అనేది అకరణీయ సంఖ్య. ఇక్కడ $n = 3$ అనేది ధన పూర్ణ సంఖ్య. కాని $\sqrt[3]{8}$ అనేది కరణీయ సంఖ్య కాదు. ఎందుకనగా 8 యొక్క ఘన మూలం 2. $\therefore$ $\sqrt[3]{8}$ కరణి కాదు.

(4) ఇప్పుడు $\sqrt[4]{8}$ గురించి ఆలోచిద్దాం

ఇక్కడ $a = 8,$ కరణి యొక్క పరిమాణం $n = 4;$ కాని 8 అనే ఏ అకరణీయ సంఖ్యకును నాల్గవ ఘాతం కాదు. అనగా $\sqrt[4]{8}$ అనేది కరణీయ సంఖ్య అవుతుంది. $\therefore$ $\sqrt[4]{8}$ ఒక కరణి అవుతుంది.

మనం కేవలం పరిమాణం 2 గల అనగా $\sqrt{3}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{42}$ మొదలగు కరణుల గురించి ఆలోచించుదాం. పరిమాణం 2 గల కరణులను **వర్గ కరణులు** అంటారు.

కరణి సూక్ష్మ రూపము

అప్పుడప్పుడు కరణులను ఇలా సూక్ష్మీకరించవచ్చు. **ఉదా:** (i) $\sqrt{48} = \sqrt{16\times3} = \sqrt{16} \times \sqrt{3} = 4\sqrt{3}$

(ii) $\sqrt{98} = \sqrt{49\times2} = \sqrt{49} \times \sqrt{2} = 7\sqrt{2}$

$\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ ....లాంటి కొన్ని కరణులు సూక్ష్మ రూపంలో ఉన్న కరణులు వాటిని ఇంకా సూక్ష్మ రూపంలోకి మార్చలేము.

సజాతీ కరణులు (Similar or like surds)

$\sqrt{2}$, $-3\sqrt{2}$, $\frac{4}{5}\sqrt{2}$ లు కొన్ని సజాతి కరణులు p మరియు q లు రెండు అకరణీయ సంఖ్యలు అయినచో $p\sqrt{a}$, $q\sqrt{a}$ లను సజాతి కరణులు అంటారు. **రెండు కరణులు సజాతి కరణులు అవడానికి వాటి పరిమాణం అదే విధంగా వాటి కరణిస్థాన సంఖ్యలు సమానంగా ఉండవలెను.**

$\sqrt{45}$, $\sqrt{80}$ ఈ కరణుల పరిమాణం 2, అనగా వాటి పరిమాణం సమానం. కాని కరణి స్థాన సంఖ్య సమానం కాదు. కావున ఇవి సజాతి కరణులు కావు. ఈ కరణులను సూక్ష్మీకరిద్దాం.

$\sqrt{45} = \sqrt{9\times5} = \sqrt{9} \times \sqrt{5} = 3\sqrt{5}$ మరియు $\sqrt{80} = \sqrt{16\times5} = \sqrt{16} \times \sqrt{5} = 4\sqrt{5}$

$3\sqrt{5}$ మరియు $4\sqrt{5}$ లు సజాతీయ కరణులు అవుతాయి

అనగా $\sqrt{45}$ మరియు $\sqrt{80}$ ఈ కరణుల సూక్ష్మ (సరళ) రూపం సజాతి కరణులు అవుతాయి.

ఇది గుర్తుంచుకోండి

సూక్ష్మ (సరళ) రూపంలో ఉన్న కరణుల యొక్క పరిమాణం మరియు కరణిస్థాన సంఖ్యలు సమానం అయిన ఆ కరణులను సజాతి కరణులు అంటారు

తెలుసుకుందాం.

కరణులను పోల్చడం (Comparison of surds)

a, b, k లు ధన వాస్తవ సంఖ్యలు అనుకొనిన

$a < b$ దీనిని బట్టి $ak < bk$ వస్తుంది. $\therefore a^2 < ab < b^2$

అనగా $a < b$ ఐన $a^2 < b^2$

ఇలాగా కాకుండా $a^2 < b^2$ ఐనచో $a = b$, $a > b$ మరియు $a < b$ సాధ్యమవుతుందో చూద్దాం.

$a = b$ ని బట్టి $a^2 = b^2$, $a > b$ ను బట్టి $a^2 > b^2$ లభిస్తుంది కానీ ఇది అసాధ్యం.

$\therefore a < b$ లభిసుంది. అనగా $a^2 < b^2$ అయితే $a < b$

ఇక్కడ a, b లు వాస్తవ సంఖ్యలు కావడంచే అవి అకరణీయ సంఖ్యలు లేదా కరణీయ సంఖ్యలు కావచ్చును.

దీనిని ఉపయోగించి రెండు కరణుల మధ్య చిన్న-పెద్దను పరీక్షించుదాం.

(i) $6\sqrt{2}, 5\sqrt{5}$

$\sqrt{36} \times \sqrt{2}$ [?] $\sqrt{25} \times \sqrt{5}$

$\sqrt{72}$ [?] $\sqrt{125}$

కాని 72 [<] 125

$\therefore 6\sqrt{2}$ [<] $5\sqrt{5}$

లేదా

$(6\sqrt{2})^2$ [ ] $(5\sqrt{5})^2$,

$72 < 125$

$\therefore 6\sqrt{2}$ [<] $5\sqrt{5}$

(ii) $8\sqrt{3}, \sqrt{192}$

$\sqrt{64} \times \sqrt{3}$ [?] $\sqrt{192}$

$\sqrt{192}$ [?] $\sqrt{192}$

కాని 192 [=] 192

$\therefore \sqrt{192}$ [=] $\sqrt{192}$

$\therefore 8\sqrt{3}$ [=] $\sqrt{192}$

(iii) $7\sqrt{2}, 5\sqrt{3}$

$\sqrt{49} \times \sqrt{2}$ [?] $\sqrt{25} \times \sqrt{3}$

$\sqrt{98}$ [?] $\sqrt{75}$

కాని 98 [>] 75

$\therefore 7\sqrt{2}$ [>] $5\sqrt{3}$

లేదా

$(7\sqrt{2})^2$ [ ] $(5\sqrt{3})^2$,

$98 > 75$

$\therefore 7\sqrt{2}$ [>] $5\sqrt{3}$

సజాతి కరణులపై ప్రక్రియలు (Operations on like surds)

సజాతి కరణులపై సంకలనము, వ్యవకలనము, గుణకారం, భాగాహారం అను ప్రక్రియలను చేయవచ్చును.

ఉదా: (1) సూక్ష్మీకరించండి $7\sqrt{3} + 29\sqrt{3}$

సాధన: $7\sqrt{3} + 29\sqrt{3} = (7 + 29)\sqrt{3} = 36\sqrt{3}$

ఉదా: (2) సూక్ష్మీకరించండి: $7\sqrt{3} - 29\sqrt{3}$

సాధన: $7\sqrt{3} - 29\sqrt{3} = (7 - 29)\sqrt{3} = -22\sqrt{3}$

ఆలోచించండి

$\sqrt{9+16} \overset{?}{=} \sqrt{9}+\sqrt{16}$

$\sqrt{100+36} \overset{?}{=} \sqrt{100}+\sqrt{36}$

ఉదా: (3) సూక్ష్మీకరించండి: $13\sqrt{8} + \frac{1}{2}\sqrt{8} - 5\sqrt{8}$

సాధన: $13\sqrt{8} + \frac{1}{2}\sqrt{8} - 5\sqrt{8} = \left(13 + \frac{1}{2} - 5\right)\sqrt{8} = \left(\frac{26+1-10}{2}\right)\sqrt{8}$

$= \frac{17}{2}\sqrt{8} = \frac{17}{2}\sqrt{4\times 2}$

$= \frac{17}{2} \times 2\sqrt{2} = 17\sqrt{2}$

ఉదా:(4) సూక్ష్మీకరించండి: $8\sqrt{5} + \sqrt{20} - \sqrt{125}$

సాధన: $8\sqrt{5} + \sqrt{20} - \sqrt{125} = 8\sqrt{5} + \sqrt{4\times 5} - \sqrt{25\times 5}$

$= 8\sqrt{5} + 2\sqrt{5} - 5\sqrt{5}$

$= (8 + 2 - 5)\sqrt{5}$

$= 5\sqrt{5}$

ఉదా:(5) కరణులను గుణించండి: $\sqrt{7} \times \sqrt{42}$

సాధన: $\sqrt{7} \times \sqrt{42} = \sqrt{7\times 42} = \sqrt{7\times 7\times 6} = 7\sqrt{6}$ ($7\sqrt{6}$ అనేది కరణీయ సంఖ్య)

ఉదా: (6) కరణులను భాగించండి $\sqrt{125} \div \sqrt{5}$

సాధన: $\frac{\sqrt{125}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{125}{5}} = \sqrt{25} = 5$ (5 అనేది అకరణీయ సంఖ్య)

ఉదా: (7) $\sqrt{50} \times \sqrt{18} = \sqrt{25\times 2} \times \sqrt{9\times 2} = 5\sqrt{2} \times 3\sqrt{2} = 15 \times 2 = 30$

రెండు కరణుల లబ్ధం లేదా భాగఫలం అకరణీయ సంఖ్య అవ్వొచ్చునని పై ఉదాహరణల నుండి తెలుసుకోండి.

కరణుల అకరణీయము (Rationalization of surd)

రెండు కరణుల లబ్ధం అకరణీయ సంఖ్య అయినచో వాటిలో ఏదేని ఒక కరణిని రెండవ కరణి యొక్క ఆ రెండు కరణులు **అకరణీయ కారణాంకం** (Rationalizing Factor) అంటారు.

ఉదా: (1) కరణి $\sqrt{2}$ ను $\sqrt{2}$ చే గుణించిన $\sqrt{2\times 2} = \sqrt{4}$ లభిస్తుంది. $\sqrt{4} = 2$ అనేది అకరణీయ సంఖ్య అవుతుంది.

$\therefore$ $\sqrt{2}$ యొక్క అకరణీయ గుణకం $\sqrt{2}$ అవుతుంది.

ఉదా: (2) $\sqrt{2} \times \sqrt{8}$ లను గుణించండి.

$\sqrt{2} \times \sqrt{8} = \sqrt{16} = 4$ అనేది ఒక అకరణీయ సంఖ్య అవుతుంది

$\therefore$ $\sqrt{2}$ యొక్క అకరణీయ గుణకం $\sqrt{8}$ అవుతుంది.

అదే విధంగా $8\sqrt{2}$ అనే కరణి కూడా $\sqrt{2}$ యొక్క అకరణీయ గుణకం అవుతుంది.

ఎందుకనగా $\sqrt{2} \times 8\sqrt{2} = 8\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 8 \times 2 = 16.$

$\sqrt{6}$, $\sqrt{16}$ $\sqrt{50}$ ఇవి $\sqrt{2}$ యొక్క అకరణీయ గుణకాలు అవుతాయా? సరిచూడండి?

ఇది గుర్తుంచుకోండి

ఇచ్చిన కరణికి ఒకే అకరణీయ గుణకం ఉండదు. ఏదేని ఒక కరణి ఇచ్చిన కరణికి అకరణీయ గుణకం అయిన దానిని శూన్యేతర అకరణీయ సంఖ్యచే గుణించగా లభించే కరణి కూడా ఇచ్చిన కరణికి అకరణీయ గుణకం అవుతుంది.

ఉదా: (3) $\sqrt{27}$ యొక్క అకరణీయ గుణకం రాయండి.

సాధన: $\sqrt{27} = \sqrt{9\times 3} = 3\sqrt{3}$ $\quad\quad$ $\therefore\ 3\sqrt{3} \times \sqrt{3} = 3 \times 3 = 9$ ఇది అకరణీయ సంఖ్య

$\therefore$ $\sqrt{3}$ అనేది కరణి $\sqrt{27}$ యొక్క అకరణీయ గుణకం అవుతుంది.

$\sqrt{27} = 3\sqrt{3}$ అనగా $3\sqrt{3} \times 3\sqrt{3} = 9 \times 3 = 27$ అని గుర్తుంచుకోండి.

అనగా $\sqrt{27}$ ఈ ఇచ్చిన కరణికి $3\sqrt{3}$ అనేది కూడా అకరణీయ గుణకం అవుతుంది. ఇవే కాకుండా $4\sqrt{3}$, $7\sqrt{3}$ లాంటి అనేక గుణకాలు లభిస్తాయి. వీటిలో $\sqrt{3}$ అనేది సూక్ష్మ రూపంలో ఉన్నటువంటి అకరణీయ గుణకం అవుతుంది.

ఉదా: (4) $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ యొక్క హారమును అకరణీయము చేయండి.

సాధన: $\dfrac{1}{\sqrt{5}} = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \times \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$ $\quad\quad$ .....లవ, హారాలను $\sqrt{5}$ చే గుణించగా

ఉదా: (5) $\dfrac{3}{2\sqrt{7}}$ యొక్క హారంను అకరణీయము చేయండి.

సాధన: $\dfrac{3}{2\sqrt{7}} = \dfrac{3}{2\sqrt{7}} \times \dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}} = \dfrac{3\sqrt{7}}{2\times 7} = \dfrac{3\sqrt{7}}{14}$ $\quad\quad$ (ఇక్కడ $2\sqrt{7}$ ను $\sqrt{7}$ చే గుణిస్తే చాలు)

ఇది గుర్తుంచుకోండి

హారంను అకరణీయం చేయుటకు అకరణీయ గుణకం ఉపయోగ పడుతుంది.

ఏదేని సంఖ్య యొక్క హారం అకరణీయ సంఖ్య అవడం అనుకూలంగా ఉంటుంది. కాబట్టి హారమును అకరణీయము చేస్తారు.

అభ్యాస మాలిక 2.3

(1) కింది కరణుల పరిమాణంను చెప్పండి.

(i) $\sqrt[3]{7}$ (ii) $5\sqrt{12}$ (iii) $\sqrt[4]{10}$ (iv) $\sqrt{39}$ (v) $\sqrt[3]{18}$

(2) కింది వాటిలో ఏ సంఖ్యలు కరణులు అవుతాయో చెప్పండి.

(i) $\sqrt[3]{51}$ (ii) $\sqrt[4]{16}$ (iii) $\sqrt[5]{81}$ (iv) $\sqrt{256}$ (v) $\sqrt[3]{64}$ (vi) $\sqrt{\frac{22}{7}}$

(3) కింది కరణుల జతలలో ఏ జతలు సజాతి, విజాతి కరణులు అవుతాయో గుర్తించండి.

(i) $\sqrt{52}$, $5\sqrt{13}$ (ii) $\sqrt{68}$, $5\sqrt{3}$ (iii) $4\sqrt{18}$, $7\sqrt{2}$

(iv) $19\sqrt{12}$, $6\sqrt{3}$ (v) $5\sqrt{22}$, $7\sqrt{33}$ (vi) $5\sqrt{5}$, $\sqrt{75}$

(4) కింది కరణులను సూక్ష్మీకరించండి.

(i) $\sqrt{27}$ (ii) $\sqrt{50}$ (iii) $\sqrt{250}$ (iv) $\sqrt{112}$ (v) $\sqrt{168}$

(5) కింది కరణుల జతలను పోల్చండి

(i) $7\sqrt{2}$, $5\sqrt{3}$ (ii) $\sqrt{247}$, $\sqrt{274}$ (iii) $2\sqrt{7}$, $\sqrt{28}$

(iv) $5\sqrt{5}$, $7\sqrt{2}$ (v) $4\sqrt{42}$, $9\sqrt{2}$ (vi) $5\sqrt{3}$, 9 (vii) 7, $2\sqrt{5}$

(6) సూక్ష్మీకరించండి.

(i) $5\sqrt{3} + 8\sqrt{3}$ (ii) $9\sqrt{5} - 4\sqrt{5} + \sqrt{125}$

(iii) $7\sqrt{48} - \sqrt{27} - \sqrt{3}$ (iv) $\sqrt{7} - \frac{3}{5}\sqrt{7} + 2\sqrt{7}$

(7) గుణించి సూక్ష్మరూపంలో రాయండి

(i) $3\sqrt{12} \times \sqrt{18}$ (ii) $3\sqrt{12} \times 7\sqrt{15}$

(iii) $3\sqrt{8} \times \sqrt{5}$ (iv) $5\sqrt{8} \times 2\sqrt{8}$

(8) భాగించి, సూక్ష్మీకరించండి.

(i) $\sqrt{98} \div \sqrt{2}$ (ii) $\sqrt{125} \div \sqrt{50}$ (iii) $\sqrt{54} \div \sqrt{27}$ (iv) $\sqrt{310} \div \sqrt{5}$

(9) హారంను అకరణీయము చేయండి.

(i) $\frac{3}{\sqrt{5}}$ (ii) $\frac{1}{\sqrt{14}}$ (iii) $\frac{5}{\sqrt{7}}$ (iv) $\frac{6}{9\sqrt{3}}$ (v) $\frac{11}{\sqrt{3}}$

కొంచెం గుర్తుకు తెచ్చుకుందాం

ఒకవేళ $a > 0$, $b > 0$ అయిన $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$

$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$; $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$; $\sqrt{a^2} = a$ అని మనకు తెలుసు

గుణించండి

ఉదా (1) $\sqrt{2}(\sqrt{8} + \sqrt{18})$

$$= \sqrt{2\times 8} + \sqrt{2\times 18}$$

$$\sqrt{16} + \sqrt{36}$$

$$= 4 + 6$$

$$= 10$$

ఉదా (2) $(\sqrt{3} - \sqrt{2})(2\sqrt{3} - 3\sqrt{2})$

$$= \sqrt{3}\left(2\sqrt{3} - 3\sqrt{2}\right) - \sqrt{2}\left(2\sqrt{3} - 3\sqrt{2}\right)$$

$$= \sqrt{3}\times 2\sqrt{3} - \sqrt{3}\times 3\sqrt{2} - \sqrt{2}\times 2\sqrt{3} + \sqrt{2}\times 3\sqrt{2}$$

$$= 2\times 3 - 3\sqrt{6} - 2\sqrt{6} + 3\times 2$$

$$= 6 - 5\sqrt{6} + 6$$

$$= 12 - 5\sqrt{6}$$

తెలుసుకుందాం.

వర్గ కరణుల ద్విపది రూపం (Binomial quadratic surd)

- $\sqrt{5} + \sqrt{3}$; $\frac{3}{4} + \sqrt{5}$ లు కరణుల ద్విపది రూపం. అదే విధంగా $\sqrt{5} - \sqrt{3}$; $\frac{3}{4} - \sqrt{5}$ లు కూడా కరణుల ద్విపద రూపం.

  కింది గుణకారం నేర్చుకోండి.

- $(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = (\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b})^2 = a - b$
- $(\sqrt{5} + \sqrt{3})(\sqrt{5} - \sqrt{3}) = (\sqrt{5})^2 - (\sqrt{3})^2 = 5 - 3 = 2$
- $(\sqrt{3} + \sqrt{7})(\sqrt{3} - \sqrt{7}) = (\sqrt{3})^2 - (\sqrt{7})^2 = 3 - 7 = -4$
- $(\frac{3}{2} + \sqrt{5})(\frac{3}{2} - \sqrt{5}) = (\frac{3}{2})^2 - (\sqrt{5})^2 = \frac{9}{4} - 5 = \frac{9-20}{4} = -\frac{11}{4}$
- $(\sqrt{5} + \sqrt{3})$ మరియు $(\sqrt{5} - \sqrt{3})$ ఈ ద్విపద కరణుల జతల లబ్ధం అకరణీయ సంఖ్య అవుతుంది.

ఇలాంటి ద్విపద కరణుల జతలను **సంయుగ్మ జతలు** అంటారు.

ద్విపద కరణి మరియు దాని సంయుగ్మ జతలు పరస్పరం అకరణీయ గుణకాలు అవుతాయి.

$\sqrt{5} - \sqrt{3}$ లేదా $\sqrt{3} - \sqrt{5}$ లలో ప్రతి ద్విపద కరణి $\sqrt{5} + \sqrt{3}$ అను ద్విపద కరణికి సంయుగ్మ జత అవుతుంది.

అదే విధంగా $7 + \sqrt{3}$ యొక్క సంయుగ్మ జత $7 - \sqrt{3}$ అవుతుంది.

ఇది గుర్తుంచుకోండి

ద్విపద కరణుల సంయుగ్మ జతలోని పదాల లబ్ధం ఎల్లప్పుడూ అకరణీయ సంఖ్యయే అవుతుంది.

తెలుసుకుందాం.

హారము యొక్క అకరణీయము (Rationalization of the denominator)

ద్విపద కరణి మరియు సంయుగ్మ జతల కరణుల లబ్ధం అకరణీయ సంఖ్య అవుతుంది. ఈ ధర్మమును ఉపయోగించి హారంలో ద్విపద కరణి కల్గిన సంఖ్యల హారమును అకరణీయం చేయవచ్చు.

ఉదా (1) $\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$ నందలి హారమును అకరణీయం చేయండి.

సాధన: $\sqrt{5}-\sqrt{3}$ ఈ ద్విపద కరణి యొక్క సంయుగ్మ జత $\sqrt{5}+\sqrt{3}$.

$$\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{3})^2} = \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{5-3} = \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2}$$

ఉదా (2) $\frac{8}{3\sqrt{2}+\sqrt{5}}$ నందలి హారమును అకరణీయము చేయుము.

సాధన: $3\sqrt{2}+\sqrt{5}$ ఈ ద్విపద కరణి యొక్క సంయుగ్మ జత $3\sqrt{2}-\sqrt{5}$.

$$\frac{8}{3\sqrt{2}+\sqrt{5}} = \frac{8}{3\sqrt{2}+\sqrt{5}} \times \frac{3\sqrt{2}-\sqrt{5}}{3\sqrt{2}-\sqrt{5}}$$

$$= \frac{8\left(3\sqrt{2}-\sqrt{5}\right)}{\left(3\sqrt{2}\right)^2-\left(\sqrt{5}\right)^2}$$

$$= \frac{8\times 3\sqrt{2} - 8\sqrt{5}}{9\times 2 - 5} = \frac{24\sqrt{2} - 8\sqrt{5}}{18 - 5} = \frac{24\sqrt{2} - 8\sqrt{5}}{13}$$

అభ్యాస మాలిక 2.4

(1) గుణించండి

(i) $\sqrt{3}(\sqrt{7}-\sqrt{3})$ (ii) $(\sqrt{5}-\sqrt{7})\sqrt{2}$ (iii) $(3\sqrt{2}-\sqrt{3})(4\sqrt{3}-\sqrt{2})$

(2) కింది వాటి హారములను అకరణీయము చేయండి.

(i) $\frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{2}}$ (ii) $\frac{3}{2\sqrt{5}-3\sqrt{2}}$ (iii) $\frac{4}{7+4\sqrt{3}}$ (iv) $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$

తెలుసుకుందాం.

పరమ మూల్యము (Absolute value)

x అనేది వాస్తవ సంఖ్య అయిన x యొక్క పరమ మూల్యము (Absolute Value) లేదా సంఖ్యా రేఖపై సున్నా నుండి దాని దూరంను $|x|$ అని రాస్తారు. $|x|$ ను x యొక్క పరమ మూల్యము అని చదువుతాము.

కింది విధంగా పరమ మూల్యమును నిర్వచించవచ్చు.

$x > 0$ అయిన $|x| = x$ ఒకవేళ x ధన సంఖ్య అయిన x యొక్క పరమ మూల్యం x అవుతుంది.

$x = 0$ అయిన $|x| = 0$ ఒకవేళ x సున్న అయిన x యొక్క పరమ మూల్యం సున్న అవుతుంది.

$x < 0$ అయిన $|x| = -x$ ఒకవేళ x ఋణ సంఖ్య అయిన x యొక్క పరమ మూల్యం దానికి వ్యతిరేక సంఖ్య అవుతుంది.

ఉదా: (1) $|3| = 3$ $\quad |-3| = -(-3) = 3$ $\quad |0| = 0$

ఏ వాస్తవ సంఖ్య యొక్క పరమ మూల్యం ఋణ సంఖ్య కాదు.

ఉదా: (2) కింది విలువలను కనుగొనండి.

(i) $|9-5| = |4| = 4$ $\qquad$ (ii) $|8-13| = |-5| = 5$

(iii) $|8|-|-3| = 5$ $\qquad$ (iv) $|8|\times|4| = 8 \times 4 = 32$

ఉదా: (3) $|x-5| = 2$ను సాధించండి.

సాధన: $|x-5| = 2$

$\therefore x - 5 = +2$ లేదా $x - 5 = -2$

$\therefore x = 2 + 5$ లేదా $x = -2+5$

$\therefore x = 7$ లేదా $x = 3$

అభ్యాస మాలిక 2.5

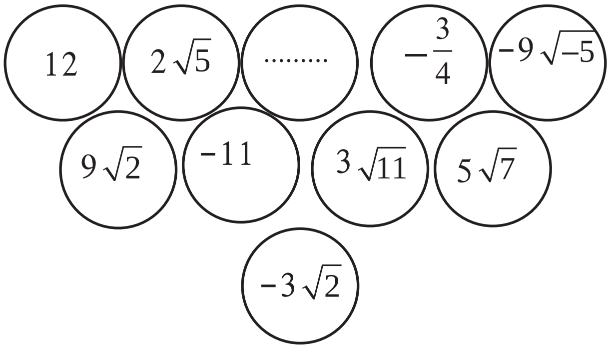
(1) విలువలను కనుగొనండి.

i) $|15 - 2|$ $\qquad$ (ii) $|4 - 9|$ $\qquad$ (iii) $|7|\times|-4|$

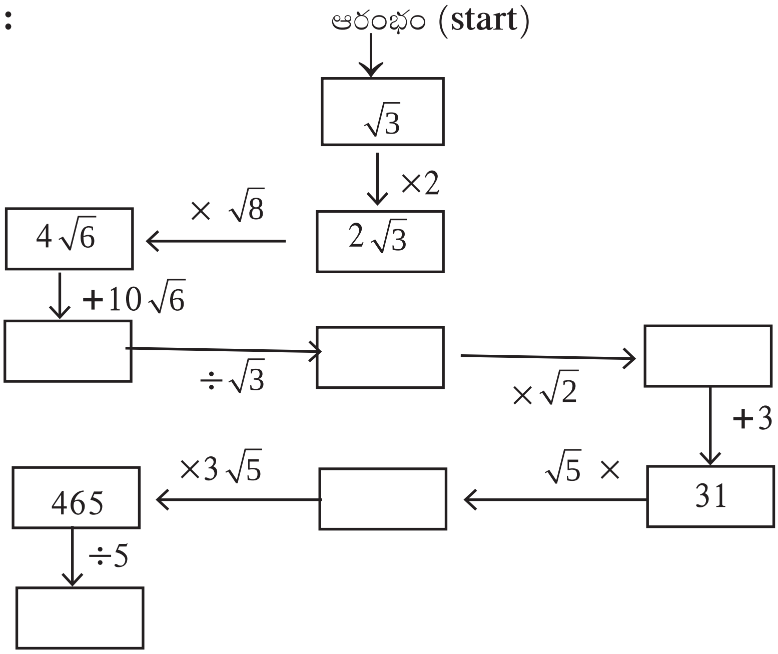
(2) సాధించండి.

(i) $|3x-5| = 1$ $\qquad$ (ii) $|7-2x| = 5$ $\qquad$ (iii) $\left|\frac{8-x}{2}\right| = 5$ $\qquad$ (iv) $\left|5+\frac{x}{4}\right| = 5$

కృత్యము (I) : పక్కనున్న కార్డులపై కొన్ని వాస్తవ సంఖ్యలు రాయబడ్డాయి. వాటిని ఉపయోగించి, కూడిక, తీసివేత, గుణకారం, భాగాహారంల రెండ్రెండు ఉదాహరణలు తయారు చేసి సాధించండి.



కృత్యము (II) :



సంకీర్ణ ప్రశ్న సంగ్రహము 2

(1) కింది ప్రశ్నలకు బహు పర్యాయలలోని యోగ్యమైన పర్యాయమును ఎన్నుకోండి.

(i) కింది వానిలో కరణీయ సంఖ్య ఏది ?

(A) $\sqrt{\frac{16}{25}}$ (B) $\sqrt{5}$ (C) $\frac{3}{9}$ (D) $\sqrt{196}$

(ii) కింది వానిలో కరణీయ సంఖ్య ఏది ?

(A) 0.17 (B) $1.\overline{513}$ (C) $0.27\overline{46}$ (D) 0.101001000.....

(iii) కింది వానిలో ఏ సంఖ్య యొక్క దశాంశ రూపం అంతంకాని అవర్తిత రూపం అవుతుంది?

(A) $\frac{2}{5}$ (B) $\frac{3}{16}$ (C) $\frac{3}{11}$ (D) $\frac{137}{25}$

(iv) సంఖ్యా రేఖలపైగల ప్రతి బిందువు దేనిని సూచిస్తుంది?

(A) సహజ సంఖ్య (B) కరణీయ సంఖ్య (C) అకరణీయ సంఖ్య (D) వాస్తవ సంఖ్య

(v) $0.\dot{4}$ యొక్క అకరణీయ రూపం ఏది?

(A) $\frac{4}{9}$ (B) $\frac{40}{9}$ (C) $\frac{3.6}{9}$ (D) $\frac{36}{9}$

(vi) n సంపూర్ణ వర్గము కాని సంఖ్య అయితే $\sqrt{n}$ అనే సంఖ్య కింది వాటిలో ఏ సంఖ్య అవుతుంది ?

(A) సహజ సంఖ్య (B) అకరణీయ సంఖ్య

(C) కరణీయ సంఖ్య (D) A, B, C ఈ మూడు పర్యాయాలు కావచ్చు.

(vii) కింది వానిలో ఏ సంఖ్య కరణి కాదు?

(A) $\sqrt{7}$ (B) $\sqrt[3]{17}$ (C) $\sqrt[3]{64}$ (D) $\sqrt{193}$

(viii) $\sqrt[3]{\sqrt{5}}$ కరణి పరిమాణం ఎంత?

(A) 3 (B) 2 (C) 6 (D) 5

(ix) $2\sqrt{5}+\sqrt{3}$ ఈ ద్విపద కరణి యొక్క సంయుగ్మ జత ఏది?

(A) $-2\sqrt{5}+\sqrt{3}$ (B) $-2\sqrt{5}-\sqrt{3}$ (C) $2\sqrt{3}-\sqrt{5}$ (D) $\sqrt{3}+2\sqrt{5}$

(x) $|12-(13+7)\times 4|$ యొక్క విలువ ఎంత?

(A) −68 (B) 68 (C) −32 (D) 32.

(2) కింది వాటిని $\frac{p}{q}$ రూపంలో రాయండి.

(i) 0.555 (ii) $29.\overline{568}$ (iii) 9.315 315 ..... (iv) 357.417417..... (v) $30.\overline{219}$

(3) కింది సంఖ్యలను దశాంశ రూపంలో రాయండి.

(i) $\frac{-5}{7}$ (ii) $\frac{9}{11}$ (iii) $\sqrt{5}$ (iv) $\frac{121}{13}$ (v) $\frac{29}{8}$

(4) $5+\sqrt{7}$ అనే సంఖ్య కరణీయ సంఖ్య అని చూపండి.

(5) కింది కరణులను సూక్ష్మీకరించండి.

(i) $\frac{3}{4}\sqrt{8}$ (ii) $-\frac{5}{9}\sqrt{45}$

(6) కింది కరణుల యొక్క సూక్ష్మ (సరళ) అకరణీయ గుణకంను రాయండి.

(i) $\sqrt{32}$ (ii) $\sqrt{50}$ (iii) $\sqrt{27}$ (iv) $\frac{3}{5}\sqrt{10}$ (v) $3\sqrt{72}$ (vi) $4\sqrt{11}$

(7) సూక్ష్మీకరించండి.

(i) $\frac{4}{7}\sqrt{147}+\frac{3}{8}\sqrt{192}-\frac{1}{5}\sqrt{75}$ (ii) $5\sqrt{3}+2\sqrt{27}+\frac{1}{\sqrt{3}}$ (iii) $\sqrt{216}-5\sqrt{6}+\sqrt{294}-\frac{3}{\sqrt{6}}$

(iv) $4\sqrt{12}-\sqrt{75}-7\sqrt{48}$ (v*) $2\sqrt{48}-\sqrt{75}-\frac{1}{\sqrt{3}}$

(8) హారమును అకరణీయము చేయండి.

(i) $\frac{1}{\sqrt{5}}$ (ii) $\frac{2}{3\sqrt{7}}$ (iii) $\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ (iv) $\frac{1}{3\sqrt{5}+2\sqrt{2}}$ (v) $\frac{12}{4\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

3 బహుపదులు

చదవండి, నేర్చుకుందాం.

- బహుపదుల పరిచయం
- బహుపదులపై ప్రక్రియలు
- బహుపదుల పరిమాణం
- సంశ్లేష భాగహారము
- బహుపది యొక్క విలువ
- శేష సిద్ధాంతము

చదవండి, చర్చిద్దాం.

$p^3 - \frac{1}{2}p^2 + p$; $m^2 + 2n^3 - \sqrt{3}\,m^5$; 6 ఇవన్నీ బీజీయ సమాసములు.

టీచర్ : విద్యార్థి మిత్రులారా $p^3 - \frac{1}{2}p^2 + p$, $m^2 + 2n^3 - \sqrt{3}\,m^5$, 6 ప్రతి సమాసములలో ఒక్కొక్క పదము తీసుకోండి. ఆ పదములలోని చరరాశుల ఘాతాంకములను చెప్పండి.

మాధురి : $p^3 - \frac{1}{2}p^2 + p$, ఈ సమాసములోని పదముల చరరాశుల యొక్క ఘాంతంకాలు క్రమముగా 3,2,1.

వివేక్ : సర్, $m^2 + 2n^3 - \sqrt{3}\,m^5$ సమాసములోని పదముల చరరాశుల యొక్క ఘాంతాంకాలు క్రమముగా 2, 3, 5.

రోహిత్ : సర్, 6 ఈ సమాసములో చరరాశులు లేవు. ఇక్కడ $6=6\times1= 6\times x^0$ ఈ విధముగా రాయవచ్చును. కావున 6 ఈ సమీకరణములోని చరరాశి ఘాతాంకం 0 అవుతుంది.

టీచర్ : అనగా పై అన్ని సమాసములలోని చరరాశుల ఘాతాంకాలు ధనపూర్ణ సంఖ్యలు లేదా సున్న అనగా పూర్ణాంకాలు. ఏ బీజీయ సమాసములోని చరరాశుల ఘాతాంకాలు పూర్ణాంకాలు అగునో, ఆ సమాసమును **బహుపది** (polynomial) అని అంటారు. 6 ఇది కూడా బహుపది అవుతుంది. $6, -7, \frac{1}{2}, 0, \sqrt{3}$ మొదలగు స్థిర సంఖ్యలను **స్థిర బహుపది** (Constant polynomial) అంటారు. $\sqrt{y} + 5$ మరియు $\frac{1}{y} - 3$ ఇవి బహుపదులు అవుతాయా?

సారా : సర్, $\sqrt{y} + 5$ అనేది బహుపది కాదు. ఎందుకనగా $\sqrt{y} + 5 = y^{\frac{1}{2}} + 5$, దీనిలో y ఘాతాంకం $\frac{1}{2}$ ఇది పూర్ణాంకము కాదు.

జాన్ : సర్, $\frac{1}{y} - 3$ ఇది కూడా బహుపది కాదు. ఎందుకనగా $\frac{1}{y} - 3 = y^{-1} - 3$, ఇచ్చట y ఘాతాంకం -1 ఇది పూర్ణాంకము కాదు.

టీచర్ : బహుపదులు కాని ఏవేని ఐదు బీజీయ సమాసములను రాసి అవి ఎందుకు బహుపదులు కావో కారణములను తెలపండి.

క్రింది ప్రశ్నల సమాధానములను వేర్వేరు ఉదాహరణములు తీసుకొని, మరియు వాటిపై చర్చించి వెదకండి.

- ప్రతి బీజీయ సమాసము ఒక బహుపది అవుతుందా?
- ప్రతి బహుపది ఒక బీజీయ సమాసము అవుతుందా?

బహుపదుల రకాలు (పదముల సంఖ్యను బట్టి)

$2x$, 5	$x^4 + x$, $m^2 - 3m$	$\frac{1}{2}y^2 - 2y + 5$, $x^3 - \sqrt{3}\,x^2 + 5x$
ప్రతి బహుపదిలో ఒకే పదము	ప్రతి బహుపదిలో రెండు పదములు	ప్రతి బహుపదిలో మూడు పదములు
ఏకపది	ద్విపది	త్రిపది

ఒక చరరాశిలోని బహుపది దానిలోని చరరాశులను బట్టి $p(x)$, $q(m)$, $r(y)$లుగా సూచిస్తాము

ఉదాహరణకు $p(x) = x^3 + 2x^2 + 5x - 3$ $\quad q(m) = m^2 + \frac{1}{2}m - 7$ $\quad r(y) = y^2 + 5$

తెలుసుకుందాం.

ఏక చరరాశిగల బహుపది యొక్క పరిమాణం (Degree of a polynomial in one variable)

టీచర్ : $2x^7 - 5x + 9$ ఈ బహుపదిలోని చరరాశి యొక్క అతి పెద్ద ఘాతాంకం ఏది?

జీజా : సర్ అన్నింటికన్న పెద్ద ఘాంతాంకం 7.

టీచర్ : ఏక చరరాశిగల బహుపదిలో చరరాశి యొక్క గరిష్ఠ ఘాతాంకను ఆ **బహుపది యొక్క పరిమాణం** అంటారు. అయితే ఇప్పుడు చెప్పండి, పై బహుపది యొక్క పరిమాణం ఎంత?

అశోక్ : సర్, $2x^7 - 5x + 9$ ఈ బహుపది యొక్క పరిమాణం 7.

టీచర్ : 10 ఈ బహుపది యొక్క పరిమాణం ఎంత?

రాధా : $10 = 10 \times 1 = 10 \times x^0$ కావున 10 ఈ బహుపది పరిమాణం 0.

టీచర్ : 10 మాదిరిగానే **ఏదేని శూన్యేతర స్థిర బహుపది యొక్క పరిమాణం 0 అవుతుంది. శూన్య బహుపది యొక్క పరిమాణాన్ని నిర్వచించలేము.**

ఒకటి కంటే ఎక్కువ చరరాశులుగల బహుపది యొక్క పరిమాణం

బహుపదిలోని ప్రతి పదములోగల చరరాశుల ఘాతాంకాల ఏ మొత్తం అన్నింటికంటె ఎక్కువ ఉంటుందో, ఆ మొత్తంను **బహుపది యొక్క పరిమాణం** అంటారు

ఉదా. $3m^3n^6 + 7m^2n^3 - mn$ ఇవి రెండు చరరాశులు గల బహుపది. ఈ బహుపది యొక్క పరిమాణం 9.

(ఇక్కడ ఘాతాంకాల మొత్తం $3 + 6 = 9$, $2 + 3 = 5$, $1 + 1 = 2$)

కృత్యము I: చరరాశి x మరియు 5 పరిమాణం గల ఏకపది, ద్విపది మరియు త్రిపదుల ప్రతిదానికి ఒక ఉదాహరణ రాయండి

ఏకపది ______ ద్విపది ______ త్రిపది ______

కృత్యము II : పరిమాణం 5 గల రెండు చరరాశుల ఒక ద్విపది ఉదాహరణ తయారుచేయండి ______

బహుపదుల రకాలు (పరిమాణమును బట్టి)

ఏక చరరాశి బహుపది

$3x - 1,\ 7y$	$2y^2 + y + 1,\ -3x^2$	$x^3 + x^2 + 2x + \sqrt{3}\ ,\ m - m^3$
పరిమాణం1	పరిమాణం 2	పరిమాణం 3
రేఖీయ బహుపది	వర్గ బహుపది	ఘన బహుపది
సాధారణ రూపము $ax + b$ ఇక్కడ a మరియు bలు సహగుణకములు మరియు $a \neq 0$	సాధారణరూపం $ax^2 + bx + c$ ఇక్కడ a,b,cలు సహగుణకములు మరియు $a \neq 0$	సాధారణరూపం $ax^3 + bx^2 + cx + d$ ఇక్కడ $a,\ b,\ c,\ d$లు సహగుణకములు మరియు $a \neq 0$

బహుపది: చరరాశి xలో n పరిమాణంగల బహుపది సమాసం $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ అవుతుంది. ఇందులో $a_n,\ a_{n-1},\ \dots,\ a_2,\ a_1,\ a_0$ లు సహగుణములు మరియు $a_n \neq 0$

బహుపది యొక్క ప్రమాణ రూపం, సహగుణక రూపము మరియు ఘాతాంక రూపము
(Standard form, co-efficient form and index form of a polynomial)

$p(x) = x - 3x^2 + 5 + x^4$ ఈ బహుపదిని x యొక్క ఘాంతాంకాల అవరోహణ క్రమంలో $x^4 - 3x^2 + x + 5$ గా రాయవచ్చు. ఇది ప్రమాణ రూపం. ఈ బహుపదిలో x యొక్క మూడవ ఘాంతాంక పదము లేదు. అనగా అది $0x^3$ గా అనుకోవచ్చును. ఈ పదమును తీసుకొని బహుపది $p(x)$ను $x^4 + 0x^3 - 3x^2 + x + 5$గా రాయవచ్చును. ఈ విధంగా ఘాతాంకాల అవరోహణ క్రమంలో వ్రాసిన బహుపదిని, మరియు ఘాతాంకాల అన్ని పదాలు బహుపది యొక్క ఘాతాంక రూపం అంటారు.

కొన్ని సార్లు ఘాతాంక రూపములోని బహుపదిలో మధ్య చరరాశిని వదిలి కేవలం వాటి సహగుణకములను క్రమవ యుగా రాస్తారు. ఉదాహరణకు $x^3 - 3x^2 + 0x - 8$, ఈ బహుపదిని $(1, -3, 0, -8)$గా రాస్తారు. దీనిని బహుపది యొక్క సహగుణక రూపము అంటారు.

$(4,0,-5,0,1)$ ఈ బహుపదిని y చరరాశిని ఉపయోగించి ఘాతాంక రూపంలో $4y^4 + 0y^3 - 5y^2 + 0y + 1$గా అనగా $4y^4 - 5y^2 + 1$ ఇలా రాయవచ్చును.

ఉదా: $p(m) = 3m^5 - 7m + 5m^3 + 2$

అవరోహణ క్రమంలో బహుపదిని రాయండి	$3m^5 + 5m^3 - 7m + 2$
బహుపదిలో లోపించిన పదములను శూన్య సహగుణకమును తీసుకుని చేర్చి దానిని ప్రమాణ రూపంలో రాయండి	$3m^5 + 0m^4 + 5m^3 + 0m^2 - 7m + 2$
ఇచ్చిన బహుపది సహగుణక రూపంను రాయండి	$(3, 0, 5, 0, -7, 2)$
బహుపది పరిమాణం రాయండి	5

ఉదా: (1) $x^3 + 3x - 5$ ఈ బహుపదిని సహగుణక రూపంలో రాయండి.

సాధన: $x^3 + 3x - 5 = x^3 + 0x^2 + 3x - 5$

$\therefore$ ఇచ్చిన బహుపది యొక్క సహగుణక రూపము $(1, 0, 3, -5)$

ఉదా: (2) $(2, -1, 0, 5, 6)$ ఈ సహగుణక రూపంలోని బహుపదిని ఘాతాంక రూపంలో రాయండి.

సాధన: ఘాతాంక రూపములోని బహుపది యొక్క సహగుణక రూపము $(2, -1, 0, 5, 6)$

$\therefore$ బహుపది ఘాతాంక రూపము $= 2x^4 - x^3 + 0x^2 + 5x + 6$

అనగా $2x^4 - x^3 + 5x + 6$

అభ్యాస మాలిక 3.1

1. క్రింది సమాసములు బహుపదులగునో రాసి వివరణ నివ్వండి.

   (i) $y + \frac{1}{y}$ (ii) $2 - 5\sqrt{x}$ (iii) $x^2 + 7x + 9$

   (iv) $2m^{-2} + 7m - 5$ (v) 10

2. క్రింది ప్రతి బహుపదిలో m^3 యొక్క సహగుణకమును రాయండి.

   (i) m^3 (ii) $\frac{-3}{2} + m - \sqrt{3}m^3$ (iii) $\frac{-2}{3}m^3 - 5m^2 + 7m - 1$

3. క్రింది సూచనల ఆధారంగా చరరాశి xను ఉపయోగించి ప్రతి దానికి ఒక బహుపదిని రాయండి.

   (i) పరిమాణం 7గల ఏకపది (ii) పరిమాణం 35గల ద్విపది (iii) పరిమాణం 8గల త్రిపది

4. క్రింది ప్రతి బహుపది యొక్క పరిమాణము రాయండి.

(i) $\sqrt{5}$ (ii) x° (iii) x^2 (iv) $\sqrt{2}m^{10} - 7$ (v) $2p - \sqrt{7}$

(vi) $7y - y^3 + y^5$ (vii) $xyz + xy - z$ (viii) $m^3n^7 - 3m^5n + mn$

5. క్రింది బహుపదులను రేఖీయ, వర్గ మరియు ఘన బహుపదులుగా వర్గీకరించండి.

(i) $2x^2 + 3x + 1$ (ii) $5p$ (iii) $\sqrt{2}\ y - \frac{1}{2}$

(iv) $m^3 + 7m^2 + \frac{5}{2}m - \sqrt{7}$ (v) a^2 (vi) $3r^3$

6. క్రింది బహుపదులను ప్రమాణ రూపంలో రాయండి.

(i) $m^3 + 3 + 5m$ (ii) $-7y + y^5 + 3y^3 - \frac{1}{2} + 2y^4 - y^2$

7. క్రింది బహుపదులను సహగుణక రూపంలో రాయండి.

(i) $x^3 - 2$ (ii) $5y$ (iii) $2m^4 - 3m^2 + 7$ (iv) $-\frac{2}{3}$

8. క్రింది సహగుణక రూపంలోని బహుపదిని చరరాశి xను ఉపయోగించి ప్రమాణ రూపములో రాయండి.

(i) (1, 2, 3) (ii) (5, 0, 0, 0, − 1) (iii) (− 2, 2, − 2, 2)

9. క్రింద కొన్ని బహుపదులు ఇవ్వబడినవి. ఆ బహుపదిని సరియైన ఖాళీ స్థలములో రాయండి.

$x + 7$, x^2, $x^3 + x^2 + x + 5$, $2x^2 + 5x + 10$, $x^3 + 9$, $3x^2 + 5x$

వర్గ బహుపది	ద్విపది
....	....
ఘన బహుపది	త్రిపది
....	....
రేఖీయ బహుపది	ఏకపది
....	....

కొంచెం గుర్తుకు తెచ్చుకుందాం.

(1) రెండు సజాతి బీజీయ సమాసముల కూడిక లేదా తీసివేత చేస్తున్నప్పుడు వాటి సహగుణకములను కూడటం లేదా తీసివేయడం చేస్తారు. ఉదాహరణకు, $5m^3 - 7m^3 = (5 - 7)m^3 = -2m^3$

(2) రెండు బీజీయ సమాసముల గుణకారము లేదా భాగాహారము చేస్తున్నప్పుడు వాటి సహగుణకములు గుణించ లేదా భాగించబడుతాయి. అలాగే ఘాతాంకాల నియమములు కూడా ఉపయోగపడతాయి.

ఉదాహరణకు $-4y^3 \times 2y^2z = -8y^5z$; $12a^2b \div 3ab^2 = \frac{4a}{b}$

తెలుసుకుందాం.

బహుపదులపై ప్రక్రియలు

బహుపదుల కూడిక, తీసివేత, గుణకారము మరియు భాగాహారముల ప్రక్రియలను బీజీయ సమాసములపై గణిత ప్రక్రియలవలెనే చేస్తారు.

ఉదా: (1) $7a^2 + 5a + 6$ నుండి $5a^2 - 2a$ ను తీసివేయండి.

సాధన:

$$(7a^2 + 5a + 6) - (5a^2 - 2a)$$
$$= \underline{7a^2 + 5a} + 6 \underline{- 5a^2 + 2a}$$
$$= 7a^2 - 5a^2 + 5a + 2a + 6$$
$$= 2a^2 + 7a + 6$$

ఉదా: (2) $-2a \times 5a^2 = -10a^3$

ఉదా: (3) $(m^2 - 5) \times (m^3 + 2m - 2) = ?$

సాధన: $(m^2 - 5) \times (m^3 + 2m - 2)$

$= m^2 (m^3 + 2m - 2) - 5 (m^3 + 2m - 2)$ } (మొదటి బహుపదిలోని ప్రతి పదముతో రెండవ బహుపదిని గుణించిన)

$= m^5 + 2m^3 - 2m^2 - 5m^3 - 10m + 10$

$= m^5 + 2m^3 - 5m^3 - 2m^2 - 10m + 10$ (సజాతి పదాలను ఒకే చోట అమర్చుట)

$= m^5 - 3m^3 - 2m^2 - 10m + 10$

లబ్ధము యొక్క పరిమాణం 5 అని గుర్తుంచుకొండి

ఉదా: (4) $3m^2n + 5mn^2 - 7mn$ మరియు $2m^2n - mn^2 + mn$ లను కూడుము.

సాధన: $(3m^2n + 5mn^2 - 7mn) + (2m^2n - mn^2 + mn)$

$= 3m^2n + 5mn^2 - 7mn + 2m^2n - mn^2 + mn$

$= \underline{3m^2n + 2m^2n} + \underline{5mn^2 - mn^2} - \underline{7mn + mn}$ (సజాతి పదాలను ఒక చోట రాసాం)

$= 5m^2n + 4mn^2 - 6mn$ (సజాతి పదముల కూడిక)

ఆలోచిద్దాం

ఒక బహుపది పరిమాణం 3 మరియు రెండవ బహుపది పరిమాణం 5 అయినచో బహుపదుల లబ్ధము యొక్క పరిమాణం ఎంత ఉంటుంది ?

గుణ్యం మరియు గుణక బహుపదుల యొక్క పరిమాణము మరియు వాటి లబ్ధముల పరిమాణముల మధ్య ఏ సంబంధం ఉంటుంది?

ఉదా: (5) $(2+2x^2) \div (x+2)$ భాగహారము చేసి విభాజ్యము=విభాజకము × భాగఫలము + శేషం రూపంలో సమాధానము రాయండి.

సాధన: ముందుగా $p(x) = 2 + 2x^2$ ఈ విభాజ్యమును బహుపది ప్రమాణ రూపంలో రాద్దాం

$$\therefore \; 2 + 2x^2 = 2x^2 + 0x + 2$$

విధానము I :

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2x - 4 \\
x + 2 & 2x^2 + 0x + 2 \\
 & 2x^2 + 4x \\
 & \;\; - \quad - \\
\hline
 & -4x + 2 \\
 & -4x - 8 \\
 & \;\; + \quad + \\
\hline
 & 10
\end{array}
$$

విభాజ్యము = విభాజకం × భాగాఫలం + శేషం

$2 + 2x^2 = (x + 2) \times (2x - 4) + 10$

$q(x)$, విభాజకం = $(x + 2)$

$s(x)$, భాగఫలం = $2x - 4$ మరియు $r(x)$, శేషం = 10 $\therefore$ $p(x) = q(x) \times s(x) + r(x)$.

విధానము II : రేఖీయ భాగాహార పద్ధతి

$(2x^2 + 2) \div (x + 2)$ ను భాగించండి.

$2x^2$ ఈ పదము లభించుట కొరకు $(x + 2)$ ను $2x$ చే గుణించి $4x$ను తీసివేద్దాం

$2x(x+2) - 4x = 2x^2$

$\therefore$ విభాజ్యము $= 2x^2 + 2 = 2x(x+2) - 4x + 2$ ...(I)

ఇప్పుడు $-4x$ ఈ పదము లభించుట కొరకు $(x+2)$ ను -4చే గుణించి 8ని కలుపుదాం.

$-4(x+2) + 8 = -4x$

$\therefore$ $(2x^2 + 2) = 2x(x+2) - 4(x+2) + 8 + 2$ ...(I) నుండి

$\therefore$ $(2x^2 + 2) = (x + 2)(2x - 4) + 10$

విభాజ్యం = విభాజకం × భాగఫలం + శేషం.

ఇది గుర్తుంచుకోండి.

యూక్లిడ్ యొక్క భాగాహార సిద్ధాంతం

ఒకవేళ $s(x)$ మరియు $p(x)$ ఈ రెండు బహుపదులైన $s(x)$ పరిమాణం $p(x)$ యొక్క పరిమాణమంత లేదా దాని కంటే ఎక్కువ ఉన్నచో $s(x)$ ను $p(x)$ చే భాగించిగా వచ్చు భాగఫలం $q(x)$ అయినచో $s(x) = p(x)\ q(x) + r(x)$. ఇక్కడ $r(x)=0$ లేదా $r(x)$ యొక్క పరిమాణం $p(x)$ యొక్క పరిమాణం కంటే తక్కువ ఉంటుంది.

అభ్యాస మాలిక 3.2

(1) ఇచ్చిన అక్షరములనుపయోగించి సమాధానములు రాయండి.

(i) నందాపూర్ గ్రామములో a చెట్లుగలవు. ప్రతి సంవత్సరము b చెట్ల సంఖ్య పెరిగినచో x సంవత్సరముల తరువాత ఆ గ్రామములో ఎన్ని చెట్లు ఉండవచ్చును?

(ii) కవాయతు కోసం ఒక వరుసలో y పిల్లలతో x వరుసలు చేశారు. అయినచో కవాయతు కోసం మొత్తం ఎంతమంది పిల్లలు హాజరైయ్యారు?

(iii) ఒక రెండు అంకెల సంఖ్య యొక్క ఒకట్లు మరియు పదుల స్థానములోని అంకెలు వరుసగా m మరియు n అయినచో ఆ రెండు అంకెల సంఖ్యను సూచించే బహుపది ఏది?

(2) కింది బహుపదులను కూడండి.

(i) $x^3 - 2x^2 - 9$; $5x^3 + 2x + 9$

(ii) $-7m^4 + 5m^3 + \sqrt{2}$; $5m^4 - 3m^3 + 2m^2 + 3m - 6$

(iii) $2y^2 + 7y + 5$; $3y + 9$; $3y^2 - 4y - 3$

(3) మొదటి బహుపది నుండి రెండవ బహుపదిని తీసివేయండి.

(i) $x^2 - 9x + \sqrt{3}$; $-19x + \sqrt{3} + 7x^2$

(ii) $2ab^2 + 3a^2b - 4ab$; $3ab - 8ab^2 + 2a^2b$

(4) కింది బహుపదులను గుణించండి.

(i) $2x$; $x^2 - 2x - 1$ (ii) $x^5 - 1$; $x^3 + 2x^2 + 2$ (iii) $2y + 1$; $y^2 - 2y^3 + 3y$

(5) మొదటి బహుపదిని రెండవ బహుపదిచే భాగించి సమాధానమును విభాజ్యం = విభాజకం × భాగఫలం + శేషం రూపంలో రాయండి.

(i) $x^3 - 64$; $x - 4$ (ii) $5x^5 + 4x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 2$; $x^2 - x$

(6*) కింది సమాచారమును సమాస రూపంలో రాసి. సమాసమును సూక్ష్మీకరించండి.

ఒక దీర్ఘచతురస్రాకార పొలం యొక్క పొడవు $(2a^2 + 3b^2)$మీ. మరియు వెడల్పు $(a^2 + b^2)$మీ. గలదు. రైతు ఆ పొలంలో $(a^2 - b^2)$ మీ. భుజముగల చతురస్రాకార స్థలంలో ఇల్లు కట్టుకొనెను, అయినచో మిగిలిన పొలం యొక్క వైశాల్యం ఎంత ?

కృత్యము : క్రింది పరిచ్ఛేదమును చదివి ఖాళీ స్థలంలో యోగ్యమైన చరరాశిని రాసి చర్చించండి.

శిరళస్ అనే గ్రామంలో గోవింద్‌కు 5 ఎకరాల మెట్ట గలదు. అతని ఇంట్లో భార్య, ఇద్దరు పిల్లలు మరియు అతని ముసలి తల్లి ఉన్నారు. అతడు వ్యవసాయం కొరకు బ్యాంకు నుండి లక్ష పాతిక వేల రూపాయల అప్పును సం. నకు 10 శాతం వడ్డీ రేటు చొప్పున తీసుకొనెను. అతను పొలంలో x ఎకరాల స్థలంలో సోయాబీన్ మరియు y ఎకరములో పత్తి మరియు కంది పంటలను వేసెను. వ్యవసాయం కొరకు క్రింది విధంగా ఖర్చు అయ్యెను.

విత్తనాల కొరకు మొత్తం రూ. 10,000 ఇచ్చెను. సోయాబీన్ పంటకై 2000 x రూపాయలు ఎరువులు, కీటకనాశినిల కోసం మరియు కూలీలు మరియు సాగుబడి కోసం 4000 x^2 రూపాయలు ఖర్చు అయ్యింది. పత్తి మరియు కంది పంటలకై 8000 y రూపాయలు ఎరువులు, కీటకనాశినిల కోసం మరియు కూలీలు, సాగుబడి కోసం 9000 y^2 రూపాయలు ఖర్చు అయ్యింది.

వ్యవసాయం కోసం మొత్తం ఎంతఖర్చు అయ్యిందో అది x మరియు y లను ఉపయోగించి రాద్దాము.

[   ] + [2000 x] + [4000 x^2] + [8000 y] + [   ] రూపాయలు.

అతని పొలంలో సోయాబీన్ దిగుబడి 5 x^2 క్వింటాళ్లు వచ్చింది. అవి ప్రతి క్వింటాల్‌కు రూ. 2800 చొప్పున, అమ్మబడినవి. పత్తి దిగుబడి $\frac{5}{3}y^2$ క్వింటాళ్లు వచ్చింది, అవి క్వింటాల్‌కు 5000రూ.ల చొప్పున అమ్మబడెను. కంది పప్పు దిగుబడి $4y$ క్వింటాళ్లు వచ్చింది, వాటిని ప్రతి క్వింటాలుకు 4000 రూ. ల చొప్పున అమ్మెను. మొత్తం ధాన్యాన్ని అమ్మిన తరువాత దాని ద్వారా ఎన్ని రూపాయల మొత్తం ఆదాయం లభించెనో వాటిని

x మరియు y ల సమాస రూపంలో రాద్దాం

[   ] + [   ] + [   ] రూపాయలు

తెలుసుకుందాం.

సంశ్లేష భాగహారము (Synthetic Division)

ఒక బహుపదిని మరొక బహుపదిచే ఎలా భాగించవలెనో మనకు తెలుసు. ఇప్పుడు మనము విభాజక బహుపది $x + a$ లేదా $x - a$ బహుపది అయినచో భాగహార సులభ పద్ధతిని అర్థం చేసుకొందాం.

ఉదా: (1) $(3x^3 + 2x^2 - 1)$ బహుపదిని $(x + 2)$ చే భాగించుము.

సాధన: ముందుగా విభాజ్య బహుపదిని ప్రమాణ రూపంలో రాసి తరువాత దానిని సహగుణక రూపంలో రాద్దాం.

విభాజ్య ప్రమాణ రూపం: $3x^3 + 2x^2 - 1 = 3x^3 + 2x^2 + 0x - 1$

$\therefore$ విభాజ్య బహుపది సహగుణక రూపము $= (3, 2, 0, -1)$

విభాజక బహుపది $= x + 2$

కింది సోపానాల ద్వారా సంశ్లేష పద్ధతిలో భాగాహారమును చేద్దాం

	....	మొదటి వరుస
	....	రెండవ వరుస
	....	మూడవ వరుస

(1) పక్కన చూపిన విధంగా ఒక నిలువు మరియు ఒక అడ్డు రేఖలను గీయండి

(2) విభాజకము $x+2$ కాబట్టి 2 వ్యతిరేక సంఖ్య -2. అవుతుంది

∴ మొదటి వరుసలో నిలువురేఖకు ఎడమ వైపున -2 రాయుము. అడ్డుగీతపై మొదటి వరుసలో విభాజ్య బహుపది సహగుణక రూపం రాయండి.

- 2	3	2	0	- 1	మొదటి వరుస
	↓				
	3				మూడవ వరుస

(3) అడ్డుగీత క్రింద అనగా మూడవ వరుసలో విభాజ్యం యొక్క మొదటి సహగుణకంను అదే విధముగా రాద్దాం.

(4) మూడవ వరుసలోని 3 మరియు విభాజకములోని -2 ల లబ్ధం -6ను రెండవ వరుసలోని సహగుణకము 2 కింద రాద్దాం. తరువాత 2 మరియు -6ల మొత్తం-4 దీనిని మూడవ వరుసలో కింద రాద్దాం.

- 2	3	2	0	- 1	
	↓	-6	8	-16	
	3	- 4	8	- 17	శేషం

ఈ విధముగా గుణకారము మరియు కూడిక చేసి, చివరి కూడిక చేయగా వచ్చిన సంఖ్య భాగాహారములో శేషం, అవుతుంది. ఇక్కడ శేషము -17 వచ్చింది.

$(3, -4, 8)$ ఇది భాగాహార సహగుణక రూపము.

∴ భాగఫలము $= 3x^2 - 4x + 8$ మరియు శేషము $= -17$

$$\therefore\ 3x^3 + 2x^2 - 1 = (x+2)(3x^2 - 4x + 8) - 17$$

ఈ పద్ధతిని **సంశ్లేష భాగాహార పద్ధతి** అంటారు.

ఈ భాగహారమును రేఖీయ పద్ధతిలో కింది విధంగా చేయవచ్చు.

$$\begin{aligned}
3x^3 + 2x^2 - 1 &= 3x^2(x+2) - 6x^2 + 2x^2 - 1 \\
&= 3x^2(x+2) - 4x^2 - 1 \\
&= 3x^2(x+2) - 4x^2 - 8x + 8x - 1 \\
&= 3x^2(x+2) - 4x(x+2) + 8x - 1 \\
&= 3x^2(x+2) - 4x(x+2) + 8x + 16 - 16 - 1 \\
&= 3x^2(x+2) - 4x(x+2) + 8(x+2) - 17
\end{aligned}$$

$$\therefore\quad 3x^3 + 2x^2 - 1 = (x+2)(3x^2 - 4x + 8) - 17$$

ఉదా: **(2)** $(2y^4 - 3y^3 + 5y - 4) \div (y - 1)$ భాగాహారము చేయండి

సాధన: **సంశ్లేష భాగహార పద్ధతి:** విభాజ్యం $= 2y^4 - 3y^3 + 5y - 4 = 2y^4 - 3y^3 + 0y^2 + 5y - 4$

విభాజకం $= y - 1$ $\;-1$ యొక్క వ్యతిరేక సంఖ్య 1.

1	2	- 3	0	5	- 4
		2	- 1	- 1	4
	2	- 1	- 1	4	0 శేషము

భాగహారం యొక్క సహగుణక రూపము $(2, -1, -1, 4)$.

$\therefore$ భాగఫలం $= 2y^3 - y^2 - y + 4$ మరియు శేషం $= 0$

రేఖీయ పద్ధతి : $2y^4 - 3y^3 + 5y - 4 = 2y^3(y - 1) + 2y^3 - 3y^3 + 5y - 4$

$$= 2y^3(y - 1) - y^2(y - 1) - y^2 + 5y - 4$$

$$= 2y^3(y - 1) - y^2(y - 1) - y(y - 1) + 4y - 4$$

$$= (2y^3 - y^2 - y + 4)(y - 1)$$

ఇది గుర్తుంచుకోండి

సంశ్లేష పద్ధతిలో భాగహారము చేసేటప్పుడు కేవలం $x + a$ లేదా $x - a$ ఈ రూపంలోని ఏ బహుపది పరిమాణం 1 గలదో, అలాంటి విభాజకమునే తీసుకొన్నాం.

అభ్యాస మాలిక 3.3

1. క్రింది భాగహారములను సంశ్లేష మరియు రేఖీయ పద్ధతిలో చేసి, భాగఫలం మరియు శేషములను రాయండి.

(i) $(2m^2 - 3m + 10) \div (m - 5)$ (ii) $(x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 4x + 5) \div (x + 2)$

(iii) $(y^3 - 216) \div (y - 6)$ (iv) $(2x^4 + 3x^3 + 4x - 2x^2) \div (x + 3)$

(v) $(x^4 - 3x^2 - 8) \div (x + 4)$ (vi) $(y^3 - 3y^2 + 5y - 1) \div (y - 1)$

తెలుసుకుందాం.

బహుపది యొక్క విలువ (Value of polynomial)

బహుపదిలోని చరరాశికి ఏదేని విలువ ఇచ్చినచో ఆ బహుపదికి కూడా ఒక విలువ లభిస్తుంది. ఉదాహరణకు, $x + 7$ బహుపదిలో xకు 2గా విలువ ఇచ్చినచో ఆ బహుపది యొక్క విలువ 9 వస్తుంది.

$p(x)$ బహుపదిలో xకు a విలువ ఇచ్చినచో వచ్చు బహుపది విలువను $p(a)$ తో సూచిస్తారు.

ఉదా: **(1)** $p(x) = 2x^2 - 3x + 5$ ఈ బహుపది యొక్క విలువ $x = 2$ అయినప్పుడు కనుగొనండి.

బహుపది $p(x) = 2x^2 - 3x + 5$

ఈ బహుపదిలో $x = 2$ను ప్రతిక్షేపించగా

$$\therefore p(2) = 2 \times 2^2 - 3 \times 2 + 5$$
$$= 2 \times 4 - 6 + 5$$
$$= 8 - 6 + 5$$
$$\therefore p(2) = 7$$

ఉదా: **(2)** $y = -2$ అయినప్పుడు బహుపది $p(y) = 2y^3 - 2y + \sqrt{7}$ యొక్క విలువను కనుగొనండి.

సాధన: $p(y) = 2y^3 - 2y + \sqrt{7}$

$$\therefore p(-2) = 2 \times (-2)^3 - 2 \times (-2) + \sqrt{7}$$
$$= 2 \times (-8) - 2 \times (-2) + \sqrt{7}$$
$$= -16 + 4 + \sqrt{7}$$
$$= -12 + \sqrt{7}$$

$\therefore$ $y = -2$ అయినప్పుడు బహుపది యొక్క విలువ $-12 + \sqrt{7}$ అవుతుంది.

ఉదా: **(3)** $p(x) = 2x^2 - x^3 + x + 2$ బహుపదికై $p(0)$ విలువ కనుగొనండి.

సాధన: $p(x) = 2x^2 - x^3 + x + 2$

$$\therefore p(0) = 2 \times 0^2 - 0^3 + 0 + 2$$
$$= 2 \times 0 - 0 + 0 + 2$$
$$= 2$$

ఉదా: **(4)** ఒకవేళ $m^2 - am + 7$ ఈ బహుపది యొక్క విలువ, $m = -1$ అయినప్పుడు 10 అయినచో, a విలువను కనుగొనండి.

సాధన: $p(m) = m^2 - am + 7$

$$\therefore p(-1) = (-1)^2 - a \times (-1) + 7$$
$$= 1 + a + 7$$
$$= 8 + a$$

కాని $p(-1) = 10$ (ఇవ్వబడెను)

$$\therefore 8 + a = 10$$
$$\therefore a = 10 - 8$$
$$\therefore a = 2$$

అభ్యాస మాలిక 3.4

(1) $x = 0$ అయినప్పుడు బహుపది $x^2 - 5x + 5$ విలువను కనుగొనండి.

(2) ఒకవేళ $p(y) = y^2 - 3\sqrt{2}y + 1$ అయినచో $p(3\sqrt{2})$ను కనుగొనండి.

(3) ఒకవేళ $p(m) = m^3 + 2m^2 - m + 10$ అయినచో $p(a) + p(-a) = ?$

(4) ఒకవేళ $p(y) = 2y^3 - 6y^2 - 5y + 7$ అయినచో $p(2)$ను కనుగొనండి.

ఇది గుర్తుంచుకోండి

చరరాశి యొక్క ఏదేని విలువకై బహుపది యొక్క విలువ కనుగొంటునప్పుడు ప్రతి **పదములలోని** x స్థానములో ఇచ్చిన విలువను ప్రతిక్షేపించి ఆ సమాసం విలువను కనుగొనవలసి ఉంటుంది.

తెలుసుకుందాం.

శేష సిద్ధాంతము (Remainder Theorem)

$p(x)$ బహుపదిని $(x + a)$ చే భాగించగా వచ్చు శేషము మరియు ఈ బహుపదిలోని x స్థానములో $-a$ను ప్రతిక్షేపించగా లభించే ఆ బహుపది యొక్క విలువల మధ్య పరస్పర సంబంధం ఉంటుంది. ఈ సంబంధంను తెలుసుకొనుటకు కింది ఉదాహరణను నేర్చుకొండి.

ఉదా: $p(x) = (4x^2 - x + 2)$ను $(x + 1)$చే భాగించండి.

[ఇక్కడ $(x + a)$ అనగా $(x + 1)$ అని గుర్తుంచుకోండి.]

సాధన: విభాజ్య బహుపది $= 4x^2 - x + 2$

విభాజక బహుపది $= x + 1$

భాగఫలం $4x - 5$

విభాజకం $x + 1$) $4x^2 - x + 2$ విభాజ్యం

$\quad - (4x^2 + 4x)$

$\quad\quad -5x + 2$

$\quad - (-5x - 5)$

$\quad\quad\quad 7$ శేషం

భాగఫలం $= 4x - 5$ మరియు శేషం $= 7$ .... (I)

ఇదే ఉదాహరణను సంశ్లేష భాగాహార పద్ధతిలో చేద్దాం.

$p(x)$ యొక్క సహగుణక రూపం $= (4, -1, 2)$

విభాజక బహుపది $= x + 1$

1 యొక్క వ్యతిరేక సంఖ్య -1

-1	4	-1	2	
		-4	5	
	4	-5	**7**	శేషం

భాగఫలం $= 4x - 5$ శేషం $= 7$

ఇప్పుడు మనం శేషం మరియు విభాజ్య బహుపదుల విలువల మధ్య సంబంధమును చూద్దాం.

విభాజ్య బహుపది అనగా $4x^2 - x + 2$ ఈ బహుపది విలువ $x = -1$ అయినప్పుడు కనుగొందాం.

$$p(x) = 4x^2 - x + 2$$

$$\therefore\ p(-1) = 4 \times (-1)^2 - (-1) + 2$$

$$= 4 \times 1 + 1 + 2$$

$$= 4 + 1 + 2$$

$$= 7$$

$\therefore\ x = -1$ అయినప్పుడు $p(x)$ బహుపది యొక్క విలువ 7 అగును ...... (II)

కావున (I) మరియు (II)ల వివరణలను బట్టి, $p(x) = 4x^2 - x + 2$ ఈ బహుపదిని $(x + a)$చే అనగా ఇక్కడ $x + 1$చే భాగించగా లభించే శేషము మరియు $x = -1$అయినప్పుడు $p(x)$ బహుపది యొక్క విలువ అనగా $p(-1)$ కు సమానంగా ఉంటుంది.

దీని ద్వారా కింది ధర్మము మనకు గుర్తుకు వస్తుంది.

$p(x)$ ఈ బహుపదిని $(x + a)$చే భాగించినచో మిగిలే **శేషం** $p(-a)$ అవుతుంది.

అనగా $p(x)$లో $x = -a$ ప్రతిక్షేపించగా లభించు **బహుపది యొక్క విలువకు సమానంగా** ఉంటుంది.

('శేషము' అనగా 'మిగిలినది' అనే అర్థం.)

ఈ ధర్మమును **శేష సిద్ధాంతం** అంటారు.

యూక్లిడ్ భాగాహార నియమం ఉపయోగించి ఈ ధర్మమును నిరూపించుదాం.

$p(x)$ ను $(x + a)$చే భాగించగా

$p(x) = q(x) \times (x + a) + r(x)$ [$q(x)$ = భాగఫలం, $r(x)$ = శేషం]

ఒకవేళ, $r(x) \neq 0$, అయినచో నియమం ప్రకారం $r(x)$ యొక్క పరిమాణం 1 కంటే తక్కువ అనగా 0 అవుతుంది. కావున $r(x)$ వాస్తవ సంఖ్య.

$\therefore\ r(-a)$ కూడా వాస్తవ సంఖ్య అవుతుంది.

ఇప్పుడు, $p(x) = q(x) \times (x + a) + r(x)$ ....(1)

దీనిలో $x = -a$ విలువను ప్రతిక్షేపించగా

$$p(-a) = q(-a) \times (a - a) + r(-a)$$

$$= q(-a) \times 0 + r(-a) \text{.........(2)}$$

$\therefore\ p(-a) = r(-a)$ ....(1) మరియు (2) లను బట్టి

కృత్యం : క్రింది ఉదాహరణలను సరి చూడండి.

(1) $p(x) = 3x^2 + x + 7$ ఈ బహుపదిని $x + 2$ బహుపదిచే భాగించి శేషమును కనుగొనండి.

(2) $x = -2$ అయినప్పుడు $p(x) = 3x^2 + x + 7$ బహుపది యొక్క విలువను కనుగొనండి.

(3) ఇప్పుడు భాగహారములో వచ్చిన శేషము $p(-2)$ యొక్క విలువ అవుతుందా?

మరొక ఉదాహరణను తీసుకొని పై విధముగా సరిచూడండి.

ఉదా : (1) $x^4 - 5x^2 - 4x$ ఈ బహుపదిని $x + 3$చే భాగించగా వచ్చు శేషమును కనుగొనండి.

సాధన : **శేష సిద్ధాంతముతో**

విభాజ్య బహుపది $p(x) = x^4 - 5x^2 - 4x$

విభాజకం $= x + 3$

$\therefore \quad x = -3$ తీసుకొనిన

$\therefore \quad p(x) = x^4 - 5x^2 - 4x$

$p(-3) = (-3)^4 - 5(-3)^2 - 4(-3)$

$= 81 - 45 + 12$

$p(-3) = 48$

సంశ్లేష భాగహార పద్ధతితో

ప్రమాణ రూపం $x^4 + 0x^3 - 5x^2 - 4x + 0$

సహగుణక రూపం $= (1, 0, -5, -4, 0)$

-3	1	0	-5	-4	0	
		-3	9	-12	48	
	1	-3	4	-16	**48**	శేషం

శేషం $= 48$

ఉదా : (2) శేష సిద్ధాంతమును ఉపయోగించి $x^3 - 2x^2 - 4x - 1$ ఈ బహుపదిని $x - 1$చే భాగించినచో వచ్చు శేషమును కనుగొనండి.

సాధన : $p(x) = x^3 - 2x^2 - 4x - 1$

విభాజకం $= x - 1 \quad \therefore \quad x = 1$ తీసుకొనిన

$\therefore$ శేష సిద్ధాంతం ప్రకారం, శేషం $= p(1) = 1^3 - 2 \times 1^2 - 4 \times 1 - 1$

$= 1 - 2 \times 1 - 4 - 1$

$p(1) = 1 - 2 - 4 - 1 = -6$

$\therefore$ శేష సిద్ధాంతం ప్రకారం, శేషం $= -6$

ఉదా : (3) ఒకవేళ $t^3 - 3t^2 + kt + 50$ ఈ బహుపదిని $(t-3)$ చే భాగించినచో శేషం 62 మిగిలినచో k విలువను కనుగొనండి.

సాధన: ఇచ్చిన బహుపదిని $(t-3)$చే భాగించినచో శేషము 62 మిగులుతుందని ఇవ్వబడింది. కావున ఇచ్చిన విభాజ్య బహుపది విలువ $t = 3$ అయినప్పుడు కనుగొందాం.

$p(t) = t^3 - 3t^2 + kt + 50$

∴ శేష సిద్ధాంతం ప్రకారం

శేషం $= p(3) = 3^3 - 3 \times 3^2 + k \times 3 + 50$

$= 27 - 3 \times 9 + 3k + 50$

$= 27 - 27 + 3k + 50$

$= 3k + 50$

కాని శేషం 62 అని ఇవ్వబడింది

$\therefore\ 3k + 50 = 62$

$\therefore\ 3k = 62 - 50$

$\therefore\ 3k = 12$

$\therefore\ k = \frac{12}{3}$

$\therefore\ k = 4$

ఇది గుర్తుంచుకోండి

శేష సిద్ధాంతం: ఏదేని బహుపది $p(x)$లో 'a' ఒక వాస్తవ సంఖ్యయైనచో ఒకవేళ $p(x)$ను $(x + a)$చే భాగించగా వచ్చు శేషం $p(-a)$ యంత ఉంటుంది.

$p(x) = s(x)\,(x - a) + r(x)$ $\qquad$ $r(x)$ యొక్క పరిమాణం < 1 లేదా $r(x) = 0$

ఈ సమీకరణములో $x = a$ను ప్రతిక్షేపించిన $p(a) = 0 + r\,(a) = r\,(a)$ లభించును

∴ $r(a)$ యొక్క పరిమాణం $= 0$ లేదా $r(a) = 0$ అనగా $(x - a)$ అనేది $p(x)$ యొక్క కారణాంకం అవుతుందని దృష్టికొస్తుంది.

తెలుసుకుందాం.

కారణాంక సిద్ధాంతము (Factor Theorem)

ఒకవేళ 21 ని 7చే భాగించిన శేషం 0 వస్తుంది. కావున మనం 7ను 21 యొక్క కారణాంకము అని అంటాము.

అదే విధముగా ఇచ్చిన బహుపదిని విభాజక బహుపదిచే భాగించినచో శేషం 0 లభించినట్లయితే ఆ బహుపదిని ఇచ్చిన బహుపది యొక్క కారణాంకం అని అంటారు.

ఉదా: (1) $p(x) = (x^3 + 4x - 5)$ ఈ బహుపదిని $(x-1)$చే భాగించినచో వచ్చు శేషంను కనుగొనండి. $(x-1)$ అనేది $p(x)$ యొక్క కారణాంకం అవుతుందా, అని నిర్ణయించండి.

సాధన: $p(x) = x^3 + 4x - 5$

$p(1) = (1)^3 + 4(1) - 5$

$= 1 + 4 - 5$

$= 0$

ఇక్కడ, శేష సిద్ధాంతము ప్రకారం శేషము $= 0$

∴ $(x - 1)$ అనేది $p(x)$ బహుపది యొక్క కారణాంకము అవుతుంది.

ఉదా: (2) $p(x) = x^3 + 4x - 5$ ఈ బహుపదిని $x+2$చే భాగించినచో వచ్చు శేషంను కనుగొనండి. $(x + 2)$ అనేది $p(x)$ యొక్క కారణాంకం అవుతుందా, అని నిర్ణయించండి.

సాధన: $p(x) = x^3 + 4x - 5$

$p(-2) = (-2)^3 + 4(-2) - 5$

$p(-2) = -8 - 8 - 5$

$= -21$

శేష సిద్ధాంతము ప్రకారం శేషం -21 వచ్చింది.

ఇక్కడ శేషం $\neq 0$

∴ $(x + 2)$ అనేది $p(x)$ బహుపది యొక్క కారణాంకం కాదు.

కృత్యం: $(x - 1)$ అనేది $x^3 + 4x - 5$ ఈ బహుపది యొక్క కారణాకం అవుతుందా? సరిచూడుము.

ఇది గుర్తుంచుకోండి.

బహుపది $p(x)$లో 'a' ఒక వాస్తవ సంఖ్యయిన, $p(a) = 0$ అయినచో $(x - a)$ బహుపది $p(x)$కు కారణాంకము అవుతుంది.

దీనికి విపర్యయముగా $(x-a)$ అనేది బహుపది $p(x)$కు కారణాంకము అయినచో $p(a) = 0$ అవుతుంది.

ఉదా: (1) కారణాంక సిద్ధాంతమును ఉపయోగించి, బహుపది $x^3 - x^2 - 4$నకు $x - 2$ కారణాంకము అవుతుందో నిర్ణయించండి.

సాధన: $p(x) = x^3 - x^2 - 4$ విభాజకం $= x - 2$

$\therefore\ p(2) = 2^3 - 2^2 - 4 = 8 - 4 - 4 = 0$

$\therefore$ కారణాంక సిద్ధాంతం ప్రకారం, $(x - 2)$ అనేది $(x^3 - x^2 - 4)$ బహుపది యొక్క కారణాంకం అవుతుంది.

ఉదా: (2) ఒకవేళ $(x - 1)$ అనేది $(x^3 - 2x^2 + mx - 4)$ యొక్క కారణాంకం అయినచో m విలువను కనుగొనండి

సాధన: $(x - 1)$ అనేది $p(x)$ యొక్క కారణాంకం $\therefore\ p(1) = 0$

$p(x) = x^3 - 2x^2 + mx - 4$

$p(1) = 1^3 - 2 \times 1^2 + m \times 1 - 4 = 0$

$\therefore\ 1 - 2 \times 1 + m - 4 = 0$

$\therefore\ 1 - 2 + m - 4 = 0 \qquad \therefore\ m - 5 = 0 \qquad \therefore\ m = 5$

కృత్యం: మనం మెట్టసాగుబడి (ఆరుతడి వ్యవసాయం) చేసే గోవిందు అనే రైతు యొక్క వ్యవసాయ సందర్భంలో బహుపది రూపంలో వ్యవసాయం యొక్క ఖర్చు మరియు ఉత్పత్తి ఈ అంశాల గురించి చూసాము. అతడు బ్యాంకు నుండి లక్షపాతిక వేల రూపాయలు ఋణం తీసుకొని, దానిని 10% వడ్డీరేటు చొప్పున తిరిగి చెల్లించెను. విత్తనాలకొరకు 10,000 రూ. సోయాబీన్ పంటకై ఎరువులు– కీటకనాశుల కొరకు $2000x$ రూ. మరియు దాని సాగుబడి కొరకు $4000x^2$ రూ. ఖర్చు అయ్యింది. పత్తి మరియు కంది పంటలకై ఎరువులు – కీటకనాశనుల కొరకు $8000y$ రూ. మరియు సాగుబడి కొరకు $9000y^2$ రూ. ఖర్చు అయ్యింది.

మొత్తం ఆదాయం $14000x^2 + \frac{25000}{3}y^2 + 16000y$ వచ్చింది.

$x = 2,\ y = 3$ ఈ విలువలను తీసుకొని గోవిందు యొక్క వ్యవసాయపు జమాఖర్చులను రాయండి.

సాధన:

జమ		ఖర్చు	
1,25,000 రూ.	బ్యాంకు ఋణం	1,37,000	బ్యాంకు వడ్డీతో తిరిగి చెల్లించుట.
₹	సోయాబీన్ ఆదాయం	₹	విత్తనాల కొరకు
₹	పత్తి ఆదాయం	₹	సోయాబీన్: ఎరువులు మరియు కీటకనాశనుల కొరకు
₹	కంది ఆదాయం	₹	సోయాబీన్: సాగుబడి మరియు కూలీలు
₹	మొత్తం జమ	₹	పత్తి మరియు కంది : ఎరువులు మరియు కీటకనాశనుల కొరకు
		₹	పత్తి మరియు కంది : సాగుబడి కొరకు
		₹	మొత్తం ఖర్చు

అభ్యాసమాలిక 3.5

(1) xకు ఇచ్చిన విలువలను తీసుకొని $2x - 2x^3 + 7$ ఈ బహుపది విలువను కనుగొనండి.

(i) $x = 3$ (ii) $x = -1$ (iii) $x = 0$

(2) కింది ప్రతి బహుపదికై $p(1)$, $p(0)$ మరియు $p(-2)$ లను కనుగొనండి

(i) $p(x) = x^3$ (ii) $p(y) = y^2 - 2y + 5$ (iii) $p(x) = x^4 - 2x^2 - x$

(3) ఒకవేళ $m = 2$ అయినప్పుడు $m^3 + 2m + a$ ఈ బహుపది విలువ 12 అయినచో a యొక్క విలువను కనుగొనండి.

(4) ఒకవేళ బహుపది $mx^2 - 2x + 3$కై $p(-1) = 7$ అయిన m విలువను కనుగొనండి,

(5) కింది వాటిలో మొదటి బహుపదిని రెండవ బహుపదిచే భాగించినచో వచ్చు శేషాన్ని, శేష సిద్ధాంతమును ఉపయోగించి కనుగొనండి.

(i) $(x^2 - 7x + 9)$; $(x + 1)$

(ii) $(2x^3 - 2x^2 + ax - a)$; $(x - a)$

(iii) $(54m^3 + 18m^2 - 27m + 5)$; $(m - 3)$

(6) $y^3 - 5y^2 + 7y + m$ ఈ బహుపదిని $y + 2$చే భాగించినచో శేషము 50 మిగిలినచో m విలువను కనుగొనండి.

(7) కారణాంక సిద్ధాంతమును ఉపయోగించి, $x + 3$ అనేది $x^2 + 2x - 3$ యొక్క కారణాంకం అవుతుందా నిర్ణయించండి.

(8) ఒకవేళ $x-2$ అనేది $x^3 - mx^2 + 10x - 20$ బహుపది యొక్క కారణాంకం అయిన m విలువను కనుగొనండి.

(9) కింది ఉదాహరణములలో $q(x)$ అనేది $p(x)$ యొక్క కారణాంకం అగునో కాదో కారణాంక సిద్ధాంతము ద్వారా నిర్ధారించుము.

(i) $p(x) = x^3 - x^2 - x - 1$, $q(x) = x - 1$

(ii) $p(x) = 2x^3 - x^2 - 45$, $q(x) = x - 3$

(10) $(x^{31} + 31)$ని $(x + 1)$చే భాగించగా లభించే శేషమును కనుగొనండి.

(11) $m^{21} - 1$ మరియు $m^{22} - 1$ ఈ బహుపదుల కారణాంకం $m - 1$అవుతుందని చూపండి.

(12*) ఒకవేళ $nx^2 - 5x + m$ అనే బహుపదికి $x - 2$, $x - \frac{1}{2}$ ఇవి రెండు కారణాంకాలు అయినట్లయితే $m = n = 2$ అని చూపండి.

(13) (i) ఒకవేళ $p(x) = 2 + 5x$ అయిన $p(2) + p(-2) - p(1)$ ను కనుగొనండి.

(ii) ఒకవేళ $p(x) = 2x^2 - 5\sqrt{3}x + 5$ అయిన $p(5\sqrt{3}) = ?$

కొంచెం గుర్తుకు తెచ్చుకుందాం.

కింది తరగతిలో మీరు బహుపదుల యొక్క కారణాంకాలను ఏ విధంగా కనుగొనవలెనో నేర్చుకున్నారు. కొన్ని ఉదాహరణలను చూద్దాం.

కారణాంకము కనుగొనండి.

ఉదా (1) $4x^2 - 25$

$= (2x)^2 - (5)^2$

$= (2x + 5)(2x - 5)$

ఉదా (2) $3x^2 + 7x + 2$

$= \underline{3x^2 + 6x} + \underline{x + 2}$

$= 3x(x + 2) + 1(x + 2)$

$= (x + 2)(3x + 1)$

ఉదా: (3) $63x^2 + 5x - 2$

$= 63x^2 + 14x - 9x - 2$

$= 7x(9x + 2) - 1(9x + 2)$

$= (9x + 2)(7x - 1)$

ఉదా: (4) $6x^2 - 5x - 6$

$= 6x^2 - 9x + 4x - 6$

$= 3x(2x - 3) + 2(2x - 3)$

$= (2x - 3)(3x + 2)$

తెలుసుకుందాం.

బహుపదుల కారణాంకములు (Factors of polynomials)

కొన్ని సార్లు ఇచ్చిన బహుపది యొక్క రూపాంతరము $ax^2 + bx + c$ వలె చేయవచ్చు. అందువలన దాని కారణాంకాలను తెలుసుకొనుట సులువవుతుంది.

ఉదా: (1) $(y^2-3y)^2 - 5(y^2-3y) - 50$ యొక్క కారణాంకములను కనుగొనండి.

సాధన: ఇచ్చిన బహుపదిలో $(y^2-3y) = x$ అనుకుందాం.

$\therefore (y^2-3y)^2 - 5(y^2-3y) - 50 = x^2 - 5x - 50$

$= x^2 - 10x + 5x - 50$

$= x(x - 10) + 5(x - 10)$

$= (x - 10)(x + 5)$

$= (y^2-3y - 10)(y^2-3y + 5)$

$= [y^2-5y + 2y - 10](y^2-3y + 5)$

$= [y(y - 5) + 2(y - 5)](y^2-3y + 5)$

$= (y - 5)(y + 2)(y^2-3y + 5)$

ఉదా: (2) కారణాంకాలను కనుగొనండి:

$(x + 2)(x - 3)(x - 7)(x - 2) + 64$

సాధన: $(x + 2)(x - 3)(x - 7)(x - 2) + 64$

$= (x + 2)(x - 7)(x - 3)(x - 2) + 64$

$= (x^2 - 5x - 14)(x^2 - 5x + 6) + 64$

$= (m - 14)(m + 6) + 64$ . . . . ($x^2 - 5x$ ను m అనుకొనిన)

$= m^2 - 14m + 6m - 84 + 64$

$= m^2 - 8m - 20$

$= (m - 10)(m + 2)$

$= (x^2 - 5x - 10)(x^2 - 5x + 2)$ .... m స్థానములో $x^2 - 5x$ ను ప్రతిక్షేపించిన

అభ్యాస మూలిక 3.6

(1) కింది బహుపదుల యొక్క కారణాంకాలను కనుగొనండి.

(i) $2x^2 + x - 1$ (ii) $2m^2 + 5m - 3$ (iii) $12x^2 + 61x + 77$

(iv) $3y^2 - 2y - 1$ (v) $\sqrt{3}x^2 + 4x + \sqrt{3}$ (vi) $\frac{1}{2}x^2 - 3x + 4$

(2) కింది బహుపదుల యొక్క కారణాంకాలను కనుగొనండి.

(i) $(x^2 - x)^2 - 8(x^2 - x) + 12$ (ii) $(x - 5)^2 - (5x - 25) - 24$

(iii) $(x^2 - 6x)^2 - 8(x^2 - 6x + 8) - 64$ (iv) $(x^2 - 2x + 3)(x^2 - 2x + 5) - 35$

(v) $(y + 2)(y - 3)(y + 8)(y + 3) + 56$

(vi) $(y^2 + 5y)(y^2 + 5y - 2) - 24$

(vii) $(x - 3)(x - 4)^2(x - 5) - 6$

సంకీర్ణ ప్రశ్నసంగ్రహము 3

(1) కింది ప్రతి ప్రశ్నకు ఇచ్చిన పర్యాయములలో నుంచి సరియైన పర్యాయమును ఎన్నుకోండి.

(i) కింది వాటిలో ఏది బహుపది?

(A) $\frac{x}{y}$ (B) $x^{\sqrt{2}} - 3x$ (C) $x^{-2} + 7$ (D) $\sqrt{2}x^2 + \frac{1}{2}$

(ii) $\sqrt{7}$ ఈ బహుపది యొక్క పరిమాణం ఎంత?

(A) $\frac{1}{2}$ (B) 5 (C) 2 (D) 0

(iii) 0 అనే బహుపది యొక్క పరిమాణం ఎంత ఉంటుంది?

(A) 0 (B) 1 (C) నిర్ణయించలేము (D) ఏదైన వాస్తవ సంఖ్య

(iv) $2x^2 + 5x^3 + 7$ ఈ బహుపది యొక్క పరిమాణం ఎంత?

(A) 3 (B) 2 (C) 5 (D) 7

(v) $x^3 - 1$ ఈ బహుపది యొక్క సహగుణక రూపము ఏది?

(A) (1, − 1) (B) (3, − 1) (C) (1, 0, 0, − 1) (D) (1, 3, − 1)

(vi) $p(x) = x^2 - 7\sqrt{7}x + 3$ అయిన $p(7\sqrt{7}) = ?$

(A) 3 (B) $7\sqrt{7}$ (C) $42\sqrt{7} + 3$ (D) $49\sqrt{7}$

(vii) $x = -1$ అయినప్పుడు బహుపది $2x^3 + 2x$ విలువ ఎంత?

(A) 4 (B) 2 (C) − 2 (D) − 4

(viii) $3x^2 + mx$ ఈ బహుపదికి $x - 1$ అనేది కారణాంకం అయినచో m విలువ ఎంత?

(A) 2 (B) − 2 (C) − 3 (D) 3

(ix) $(x^2 - 3)(2x - 7x^3 + 4)$ బహుపదులను గుణించగా లభించే బహుపది పరిమాణం ఎంత?

(A) 5 (B) 3 (C) 2 (D) 0

(x) కింది వాటిలో రేఖీయ బహుపది ఏది?

(A) $x + 5$ (B) $x^2 + 5$ (C) $x^3 + 5$ (D) $x^4 + 5$

(2) కింది ప్రతి బహుపది యొక్క పరిమాణంను రాయండి.

(i) $5 + 3x^4$ (ii) 7 (iii) $ax^7 + bx^9$ {a, b లు స్థిర సంఖ్యలు}

(3) కింది బహుపదులను ప్రమాణ రూపములో రాయండి.

(i) $4x^2+7x^4-x^3-x+9$ (ii) $p+2p^3+10p^2+5p^4-8$

(4) కింది బహుపదులను సహగుణక రూపంలో రాయండి.

(i) x^4+16 (ii) $\mathrm{m}^5+2\mathrm{m}^2+3\mathrm{m}+15$

(5) కింది సహగుణక రూపంలోని బహుపదులను x చరరాశిని ఉపయోగించి ఘాతాంక రూపంలో రాయండి.

(i) (3, −2, 0, 7, 18) (ii) (6, 1, 0, 7) (iii) (4, 5, −3, 0)

(6) కూడండి

(i) $7x^4-2x^3+x+10$; $3x^4+15x^3+9x^2-8x+2$ (ii) $3p^3q+2p^2q+7$; $2p^2q+4pq-2p^3q$

(7) తీసివేయండి.

(i) $5x^2-2y+9$; $3x^2+5y-7$ (ii) $2x^2+3x+5$; x^2-2x+3

(8) కింది వాటిని గుణించండి.

(i) $(m^3-2m+3)(m^4-2m^2+3m+2)$ (ii) $(5m^3-2)(m^2-m+3)$

(9) $3x^3-8x^2+x+7$ ఈ బహుపదిని $x-3$ బహుపదిచే సంశ్లేష భాగహార పద్ధతిలో భాగించి శేషమును కనుగొనండి.

(10) m యొక్క ఏ విలువకు $x+3$ అనేది బహుపది $x^3-2mx+21$నకు కారణాంకము అవుతుంది.

(11) 2016 సంవత్సరం చివరిలో కోవాడ్, వరూడ్ మరియు చిఖలి అనే గ్రామాల్లోని జనాభా వరుసగా $5x^2-3y^2$, $7y^2+2xy$ మరియు $9x^2+4xy$ ఉండెను. 2017 సంవత్సరం ఆరంభంలో మూడు గ్రామాల్లో విద్య మరియు ఉపాధి కొరకు వరుసగా x^2+xy-y^2, $5xy$ మరియు $3x^2+xy$ ప్రజలు వేరే గ్రామానికి వెళ్ళినచో 2017 సంవత్సరం ఆరంభంలో ఆ గ్రామాల్లోని మొత్తం జనాభా ఎంత ఉండెను?

(12) $bx^2 + x + 5$ మరియు bx^3-2x+5 ఈ బహుపదులను $x-3$ చే భాగించినచో లభించు శేషములు (క్రమంగా) వరుసగా m మరియు n అయితే $m - n = 0$ అయినచో b యొక్క విలువను కనుగొనండి.

(13) సూక్ష్మ రూపంలో వ్రాయండి. $(8m^2 + 3m - 6) - (9m - 7) + (3m^2 - 2m + 4)$

(14) $x^2 + 13x + 7$ నుండి ఏ బహుపదిని తీసివేసినచో $3x^2 + 5x - 4$ బహుపది లభిస్తుంది?

(15) $4m + 2n + 3$ ఈ సమాసమునకు ఏ సమాసమును కలిపినచో $6m + 3n + 10$ బహుపది లభించును?

4 నిష్పత్తి మరియు అనుపాతము

RTZQUS

పదండి, నేర్చుకుందాం.

- నిష్పత్తి
- నిష్పత్తి ధర్మములు
- సమాన నిష్పత్తులపై ప్రక్రియలు
- సమాన నిష్పత్తుల సిద్ధాంతము
- పరంపరానుపాతము
- నిష్పత్తిలోని k- పద్ధతి

కొంచెం గుర్తుకు తెచ్చుకుందాం.

మీరు కింది తరగతిలో నిష్పత్తి మరియు అనుపాతముల గురించి నేర్చుకొన్నారు. దానిపై ఆధారపడిన కొన్ని ఉదాహరణాలు కూడా మీరు సాధించారు.

ఉదా: విమల తయారు చేసిన రవ్వలడ్డూలు రుచిగా ఉంటాయి. ఆమె ఒక గిన్నెడు నెయ్యి, 3 గిన్నెల రవ్వ మరియు 2 గిన్నెల పంచదార తీసుకొని లడ్డూలు తయారుచేస్తుంది.

ఇక్కడ రవ్వ మరియు పంచదారలు 3:2 లేదా $\frac{3}{2}$ ప్రమాణములో ఉన్నాయి.

ఒకవేళ లడ్డూల కోసం 12 గిన్నెల రవ్వ తీసుకొనినచో ఎంత పంచదార అవసరమవుతుంది?

x గిన్నెల పంచదార అవసరం అని అనుకుందాం దీని నుండి $\frac{3}{2} = \frac{12}{x}$ $\therefore 3x = 24 \therefore x = 8$

అనగా 12 గిన్నెల రవ్వ తీసుకొనిన, లడ్డూలు చేయడానికి 8 గిన్నెల పంచదార అవసరము ఉంటుంది.

ఇదే ఉదాహరణను కింది విధముగా కూడా చేయవచ్చును.

రవ్వ $3k$ గిన్నెలయినచో పంచదార $2k$ గిన్నెలు పడుతుంది. ఎందుకనగా $\frac{3k}{2k} = \frac{3}{2}$

$3k = 12$ అయినచో $k = 4$ $\therefore 2k = 8$ గిన్నెల పంచదార అవసరముంటుంది.

తెలుసుకుందాం.

నిష్పత్తి మరియు అనుపాతము (Ratio and proportion)

రెండు సంఖ్యల నిష్పత్తి భావనను మూడు లేదా అంతకంటే ఎక్కువ సంఖ్యలకు విస్తరించవచ్చును. లడ్డూల ఉదాహరణను చూడండి. నెయ్యి, రవ్వ మరియు పంచదారలు 1 : 3 : 2 ప్రమాణములో ఉన్నాయి.

ఇక్కడ నెయ్యి మరియు రవ్వల నిష్పత్తి 1:3 మరియు రవ్వ మరియు పంచదారల నిష్పత్తి 3:2 ఈ సమాచారము ఒకే ప్రమాణములో ఇవ్వబడింది.

నెయ్యి 1k = k గిన్నెలు, రవ్వ 3k గిన్నెలు మరియు పంచదార 2k గిన్నెలు అని అనుకోవచ్చును.

ఇప్పుడు 12 గిన్నెల రవ్వ ఉన్నచో లడ్డూల కోసం ఎన్ని గిన్నెల నెయ్యి మరియు పంచదార అవసరమో కనుగొనవచ్చును

ఎందుకనగా, $3k=12$ $\therefore$ $k=4$ మరియు $2k = 8$ అనగా 4 గిన్నెల నెయ్యి మరియు 8 గిన్నెల పంచదార అవసరమవుతుంది.

ఇదే భావనను నాలుగు మరియు అంతకంటే ఎక్కువ అంశాల కొరకు ఉపయోగించవచ్చు.

ఒకవేళ a, b, c, d అను నాలుగు సంఖ్యలు 2 : 3 : 7 : 4 ఈ ప్రమాణములో ఉన్నట్లయితే ఆ సంఖ్యలను $2m$, $3m$, $7m$, $4m$ అని అనుకుందాం. ఇచ్చిన సమాచారమును ఉపయోగించి m విలువ కనుగొనవచ్చును. ఉదాహరణకు ఈ నాలుగు సంఖ్యల మొత్తం 48 అయిన ఆ నాలుగు సంఖ్యలను కనుగొందాం.

$2m + 3m + 7m + 4m = 16m = 48$

$\therefore \quad m = 3$

$\therefore \quad 2m = 6, \; 3m = 9, \; 7m = 21, \; 4m = 12$ ఇలాంటి సంఖ్యలు లభించును.

$\therefore$ కావల్సిన సంఖ్యలు = 6, 9, 21, 12

ఉదా: (1) ఎరువులు 18: 18:10 రకంలో నైట్రోజన్ మిశ్రమం 18%, ఫాస్పరస్ మిశ్రమం18% మరియు పొటాషియం మిశ్రమం 10% ఉన్నాయి. మిగిలిన భాగం ఇతర పదార్థాలు ఉండును. అయితే ఆ రకమైన 20 కిలోగ్రాముల ఎరువులలో ప్రతి మిశ్రమం యొక్క భారం ఎంత ఉంటుంది?

సాధన: 20 కి.గ్రా.ల ఎరువులో నైట్రోజన్ మిశ్రమ భారంను x కి. గ్రా. అనుకుందాం.

$$\therefore \quad \frac{18}{100} = \frac{x}{20} \qquad \therefore \quad x = \frac{18 \times 20}{100} = 3.6$$

$\therefore$ నైట్రోజన్ మిశ్రమ భారం 3.6 కి. గ్రా. ఉంటుంది.

ఫాస్పరస్ మిశ్రమ శాతం 18. $\therefore$ ఫాస్పరస్ మిశ్రమ భారం కూడా 3.6 కి.గ్రా. అవుతుంది.

20 కి.గ్రా. ఎరువులో పొటాషియం మిశ్రమ భారం y కి.గ్రా. అనుకొనిన

$\frac{10}{100} = \frac{y}{20} \qquad \therefore y = 2 \qquad$ $\therefore$ పొటాషియం మిశ్రమ భారం 2 కి.గ్రా. అవుతుంది.

అనులోమానుపాతము

ఒక మోటారు వాహనం1 లీటరు పెట్రోల్‌తో 10 కి.మీ.ల దూరము ప్రయాణిస్తుంది.

కాబట్టి 20 లీటర్ల పెట్రోల్‌తో ఆ వాహనం 20 × 10 = 200 కి. మీ.ల దూరం ప్రయాణించును.

అయితే 40 లీటర్ల పెట్రోల్‌తో అదే వాహనం 40 × 10 = 400 కి.మీ.లు దూరం వెళుతుంది.

పై వివరాలను పట్టిక రూపంలో రాద్దాం.

పెట్రోల్: x లీటరు	1	20	40	
దూరము: yకి.మీ.	10	200	400	
$\frac{x}{y}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{20}{200} = \frac{1}{10}$	$\frac{40}{400} = \frac{1}{10}$	$\frac{x}{y} = k$

వాహనం ఉపయోగించిన పెట్రోల్ (లీటర్లలో) మరియు ఆ పెట్రోల్‌తో ప్రయాణించిన దూరము (కిలోమీటర్లలో) ఈ రాశుల నిష్పత్తి స్థిరంగా ఉన్నది. ఇలాంటప్పుడు ఆ రెండు రాశులు అనుపాతములో గలవు, అనగా ఈ రెండు రాశులు అనులోమ చరత్వంలో మార్పు చెందుతాయి అని అంటారు.

విలోమానుపాతము

ఒక వాహనము 50 కి.మీ. వేగంతో 100 కి.మీ. ప్రయాణించుటకు రెండు గంటలు పడుతుంది. ఒక ఎడ్లబండి యొక్క వేగం గంటకు 5 కి. మీ., అయినచో అంతే దూరము ప్రయాణించుటకు ఎడ్లబండికి 20 గంటలు కాలము పడుతుంది.

∴ వేగం × కాలము = దూరము అని గుర్తుంచుకొని పై వివరాలను పట్టిక రూపంలో రాద్దాము.

వాహనము	వేగం/గంట x	కాలము y	$x \times y$	$x \times y = k$
	50	2	100	
ఎడ్లబండి	5	20	100	

అనగా వాహనము యొక్క వేగము మరియు ప్రయాణించుటకు పట్టు సమయముల సంఖ్యల లబ్ధం స్థిరముగా ఉన్నట్లు కనిపిస్తుంది. ఇలాంటప్పుడు ఆ రాశులు విలోమానుపాతంలో ఉన్నాయి లేదా ఆ రాశులు విలోమ చరత్వంలో మారుతుందని అంటారు.

పై ఉదాహరణలో వాహనం యొక్క వేగం మరియు నిర్ణీత దూరం పోవుటకు పట్టు సమయాలు విలోమానుపాతంలో ఉన్నాయి.

కొంచెం గుర్తుకు తెచ్చుకుందాం.

నిష్పత్తి ధర్మములు

(1) a మరియు b ఈ రెండు సంఖ్యల నిష్పత్తిని $a : b$ లేదా $\frac{a}{b}$ రూపంలో రాయవచ్చును. ఇక్కడ a ను పూర్వపదము (మొదటి పదము) మరియు b ను ఉత్తర పదము (రెండవ పదము) అంటారు.

(2) రెండు సంఖ్యల నిష్పత్తిలో ఉత్తర పదము 100 అయినప్పుడు ఆ నిష్పత్తిని శాతము అని అంటారు.

(3) అనుపాతములోని అన్ని సంఖ్యలను ఒకే శూన్యేతర సంఖ్యచే గుణించిన లేదా భాగించిన అనుపాతంలో ఎలాంటి మార్పు ఉండదు.

ఉదా. 3:4 = 6:8 = 9:12 అదే విధంగా 2:3:5 = 8:12:20 లేదా k అనేది శూన్యేతర సంఖ్య అయిన

$a : b = ak : bk$ $\qquad$ $a : b : c = ak : bk : ck$

(4) ఏ సంఖ్యల నిష్పత్తిని కనుగొనవలెనో అవి ఒకే రకమైన కొలతలను కలిగి ఉన్నచో, ప్రతిదాని యొక్క కొలతల యూనిట్లు కూడా సమానంగా ఉండవలెను.

(5) నిష్పత్తికి యూనిట్లు ఉండవు.

ఉదా.2 కి. గ్రా. మరియు 300 గ్రా.ల నిష్పత్తి 2:300 గా ఉండదు. కాని 2 కి. గ్రా. = 2000 గ్రా. కావున ఆ నిష్పత్తి 2000 : 300 అనగా 20:3 అవుతుంది.

ఉదా: (1) సీమా మరియు రాజశ్రీల యొక్క వయస్సుల నిష్పత్తి 3 : 1. రాజశ్రీ మరియు అతుల్‌ల యొక్క వయస్సుల నిష్పత్తి 2 : 3 అయినచో సీమ, రాజశ్రీ మరియు అతుల్‌ల వయస్సుల నిష్పత్తిని కొనుగొనండి.

సాధన: సీమా వయస్సు : రాజశ్రీ వయస్సు = 3 : 1 $\qquad$ రాజశ్రీ వయస్సు: అతుల్ వయస్సు = 2 : 3

మొదటి నిష్పత్తిలోని ఉత్తర పదము రెండవ నిష్పత్తిలోని పూర్వ పదము అయి ఉండవలెను.

దీని కొరకు అనగా వరుస నిష్పత్తులు లభించుటకు మొదటి నిష్పత్తిలోని పదములను 2చే గుణించాలి అనగా 3:1 = 6:2 లభించును.

$$\frac{\text{సీమ వయస్సు}}{\text{రాజశ్రీ వయస్సు}} = \frac{6}{2}, \quad \frac{\text{రాజశ్రీ వయస్సు}}{\text{అతుల్ వయస్సు}} = \frac{2}{3}$$

∴ సీమా వయస్సు : రాజశ్రీ వయస్సు : అతుల్ వయస్సు ఈ నిష్పత్తి 6 : 2 : 3 అవుతుంది.

ఉదా: (2) ఒక దీర్ఘ చతురస్రాకార పొలం పొడవు 1.2 కి. మీ. దాని వెడల్పు 400 మీ. అయినచో పొడవుతో వెడల్పునకుగల నిష్పత్తిని కనుగొనండి.

సాధన : ఇక్కడ పొడవు కి.మీలలో మరియు వెడల్పు మీ.లలో ఉన్నాయి. నిష్పత్తి కొరకు రెండింటి యూనిట్లు సమానంగా ఉండాలి. కావున కి.మీ.లను మీ.లోకి మార్చుదాం.

1.2 కి.మీ = 1.2 ×1000 = 1200 మీ. ∴ 1200 మీ. లకు 400 మీ.లతో గల నిష్పత్తిని తీసుకొందాం.

కావల్సిన నిష్పత్తి = $\frac{1200}{400} = \frac{3}{1}$, అనగా 3:1 అవుతుంది.

ఉదా: (3) మహేష్ యొక్క నెలసరి ఖర్చులతో, అతని ఆదాయమునకు గల నిష్పత్తి 3:5 అయినచో అతని ఖర్చులు అతని ఆదాయములో ఎంత శాతము ?

సాధన: ఖర్చులతో ఆదాయమునకుగల నిష్పత్తి 3:5. దీనిని శాతములోకి మార్చుట కొరకు రెండవ పదమును 100గా మార్చవలెను.

$\frac{3}{5} = \frac{3\times 20}{5\times 20} = \frac{60}{100}$ అనగా $\frac{\text{ఖర్చు}}{\text{ఆదాయం}} = \frac{60}{100} = 60\%$ ∴ మహేష్ యొక్క ఖర్చులు ఆదాయములో 60% గలవు.

ఉదా: (4) ఒక తోటలో మామిడి మరియు సపోటా చెట్ల సంఖ్యల నిష్పత్తి 2:3. ఒకవేళ ఆ తోటలో ప్రతి రకానికి చెందినవి 5 చెట్లను ఎక్కువగా నాటినచో ఆ సంఖ్యల నిష్పత్తి 5 : 7 అవుతుంది. అయితే ఆ తోటలో మామిడి మరియు సపోటా చెట్లు ఎన్ని ఉన్నాయి?

సాధన: మొదటి నిష్పత్తి 2 : 3.

తోటలోని మామిడి చెట్లు = $2x$ మరియు సపోటా చెట్లు = $3x$ అనుకుందాం.

ఇచ్చిన షరతు ప్రకారం $\frac{2x+5}{3x+5} = \frac{5}{7}$

$$14x + 35 = 15x + 25$$

$$\therefore x = 10$$

∴ తోటలోని మామిడి చెట్లు = $2x = 2 \times 10 = 20$

∴ తోటలోని సపోటా చెట్లు = $3x = 3 \times 10 = 30$

ఉదా: (5) రెండు సంఖ్యల నిష్పత్తి 5 :7. ఒకవేళ ప్రతి సంఖ్యకు 40 కలిపినచో వచ్చు మొత్తముల నిష్పత్తి 25:31 అయినచో ఆ సంఖ్యను కనుగొనండి.

సాధన: మొదటి సంఖ్య = $5x$ మరియు రెండవ సంఖ్య = $7x$ అనుకుందాం.

ఇచ్చిన షరతు ప్రకారం

$$\frac{5x+40}{7x+40}=\frac{25}{31}$$

$$31(5x+40)=25(7x+40)$$

$$155x+1240=175x+1000$$

$$1240-1000 = 175x-155x$$

$$240=20x$$

$$x=12$$

$\therefore$ మొదటి సంఖ్య = 5 × 12 = 60

రెండవ సంఖ్య = 7 × 12 = 84

$\therefore$ ఇచ్చిన సంఖ్యలు 60 మరియు 84 అవుతాయి.

అభ్యాస మాలిక 4.1

(1) కింద ఇచ్చిన సంఖ్యల జతలలో మొదటి సంఖ్యతో రెండవ సంఖ్యకు గల నిష్పత్తిని సంక్షిప్త రూపంలో రాయండి.

(i) 72, 60 (ii) 38,57 (iii) 52,78

(2) కింది రాశులలో మొదటి రాశితో రెండవ రాశికిగల నిష్పత్తిని సంక్షిప్త రూపంలో రాయండి.

(i) 700 రూ.లు, 308 రూ.లు (ii) 14 రూ.లు, 12 రూ.ల 40 పై.

(iii) 5 లీ., 2500 మి.లీ. (iv) 3 సం. 4 నెలలు, 5 సం. 8 నెలలు

(v) 3.8 కి.గ్రా., 1900 గ్రా. (vi) 7 ని. 20 సె., 5 ని. 6 సె..

(3) కింది శాతములను సంక్షిప్త నిష్పత్తి రూపంలో రాయండి.

(i) 75 : 100 (ii) 44 : 100 (iii) 6.25% (iv) 52 : 100 (v) 0.64%

(4) ఒక చిన్న ఇంటిని ముగ్గురు మనుషులు 8 రోజుల్లో నిర్మించగలరు, అయితే అదే ఇంటిని 6 రోజుల్లో నిర్మించుటకు ఎంతమంది కావలెను?

(5) కింది నిష్పత్తులను శాతముల రూపములోకి మార్చండి.

(i) 15 : 25 (ii) 47 : 50 (iii) $\frac{7}{10}$ (iv) $\frac{546}{600}$ (v) $\frac{7}{16}$

(6) అరుణ మరియు ఆమె తల్లి వయస్సుల నిష్పత్తి 2:5. అరుణ జన్మించినప్పుడు ఆమె తల్లి వయస్సు 27 సంవత్సరాలు. అయితే అరుణ మరియు ఆమె తల్లి ప్రస్తుత వయస్సులను కనుగొనండి.

(7) వత్సలా మరియు హంసల ప్రస్తుత వయస్సులు వరుసగా 14 సం. మరియు 10 సం. ఎన్ని సంవత్సరాలకు వారి వయస్సుల నిష్పత్తి 5:4 అగును?

(8) శ్రేయ మరియు ఆమె తల్లి ప్రస్తుత వయస్సుల నిష్పత్తి 2 : 7. 2 సం. ల తరువాత వారి వయస్సుల నిష్పత్తి 1 : 3 అగును. అయిన శ్రేయ ప్రస్తుత వయస్సు ఎంత?

తెలుసుకుందాం.

నిష్పత్తులను పోల్చడం

$b > 0, d > 0$ అయిన $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ ఈ నిష్పత్తుల పోలికను చూద్దాం. ఈ పోలికను కింది నియమాల ప్రకారం చేయవచ్చు.

(i) $ad > bc$ అయినచో $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$ (ii) ఒకవేళ $ad < bc$ అయిన $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ (iii) ఒకవేళ $ad = bc$ అయినచో $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

కింద ఇవ్వబడిన నిష్పత్తుల ప్రతి జత మధ్యగల క్రమ సంబంధంను నిర్ణయించుము.

ఉదా: (1) $\frac{4}{9}, \frac{7}{8}$

సాధన: 4×8 ? 7×9

$32 < 63$

$\therefore \frac{4}{9} < \frac{7}{8}$

ఉదా: (2) $\frac{\sqrt{13}}{\sqrt{8}}, \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{5}}$

$\sqrt{13} \times \sqrt{5}$, ? $\sqrt{8} \times \sqrt{7}$

$\sqrt{65}$? $\sqrt{56}$

$\sqrt{65} > \sqrt{56}$

$\therefore \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{8}} > \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{5}}$

ఉదా: (3) ఒకవేళ a మరియు b పూర్ణ సంఖ్యలయినచో $a < b, b > 1$ అయిన $\frac{a-1}{b-1}, \frac{a+1}{b+1}$ నిష్పత్తుల మధ్య క్రమ సంబంధంను నిర్ణయించండి.

సాధన: $a < b$

$\therefore a - 1 < b - 1$ ఇప్పుడు $\frac{a-1}{b-1} - \frac{a+1}{b+1}$ ఈ తీసివేత గురించి ఆలోచిద్దాం.

$$\frac{a-1}{b-1} - \frac{a+1}{b+1} = \frac{(a-1)(b+1)-(a+1)(b-1)}{(b-1)(b+1)}$$

$$= \frac{(ab-b+a-1)-(ab+b-a-1)}{b^2-1}$$

$$= \frac{ab-b+a-1-ab-b+a+1}{b^2-1}$$

$$= \frac{2a-2b}{b^2-1} \quad \text{..........} \quad (1)$$

$$= \frac{2(a-b)}{b^2-1}$$

ఇప్పుడు $a < b \therefore a - b < 0$

ఇదే విధంగా $b^2-1 > 0$ ఎందుకనగా $b > 1$

$$\frac{2(a-b)}{b^2-1} < 0$$

$$\frac{a-1}{b-1} - \frac{a+1}{b+1} < 0$$

$$\frac{a-1}{b-1} < \frac{a+1}{b+1}$$

ఉదా: **(4)** ఒకవేళ $a : b = 2 : 1$ మరియు $b : c = 4 : 1$ అయిన $\left(\frac{a^4}{32b^2c^2}\right)^3$ ఈ రాశి విలువను కనుగొనండి.

సాధన: $\frac{a}{b} = \frac{2}{1}$ $\quad \therefore a = 2b$ $\quad \frac{b}{c} = \frac{4}{1}$ $\quad \therefore b = 4c$

$a = 2b = 2 \times 4c = 8c \quad \therefore a = 8c$

ఇప్పుడు $a = 8c, b = 4c$ ఈ విలువలను ప్రతిక్షేపించగా

$$\left(\frac{a^4}{32b^2c^2}\right)^3 = \left(\frac{(8c)^4}{32 \times 4^2 \times c^2 \times c^2}\right)^3$$

$$= \left[\frac{8 \times 8 \times 8 \times 8 \times c^4}{32 \times 16 \times c^2 \times c^2}\right]^3$$

$$= (8)^3$$

$$\therefore \left(\frac{a^4}{32b^2c^2}\right)^3 = 512$$

అభ్యాస మాలిక 4.2

(1) $\frac{a}{b} = \frac{ak}{bk}$ ఈ ధర్మమును ఉపయోగించి కింది ఖాళీలలో సరియైన సంఖ్యను రాయండి.

(i) $\frac{5}{7} = \frac{....}{28} = \frac{35}{....} = \frac{....}{3.5}$ (ii) $\frac{9}{14} = \frac{4.5}{....} = \frac{....}{42} = \frac{....}{3.5}$

(2) కింది నిష్పత్తులను కనుగొనండి.

(i) వృత్తము యొక్క వ్యాసార్థంతో దాని పరిధికి గల నిష్పత్తి.

(ii) r వ్యాసార్థంగల వృత్త పరిధికి, దాని వైశాల్యముతో గల నిష్పత్తి.

(iii) భుజం 7 సెం.మీ. గల చతురస్ర కర్ణానికి దాని భుజముతో గల నిష్పత్తి.

(iv) 5 సెం.మీ.ల పొడవు మరియు 3.5 సెం.మీ. వెడల్పుగల దీర్ఘ చతురస్రం చుట్టుకొలతతో, వైశాల్యమునకు గల నిష్పత్తి.

(3) కింది నిష్పత్తుల జతలలో చిన్నది-పెద్దది నిర్ణయించండి.

(i) $\frac{\sqrt{5}}{3}, \frac{3}{\sqrt{7}}$ (ii) $\frac{3\sqrt{5}}{5\sqrt{7}}, \frac{\sqrt{63}}{\sqrt{125}}$ (iii) $\frac{5}{18}, \frac{17}{121}$

(iv) $\frac{\sqrt{80}}{\sqrt{48}}, \frac{\sqrt{45}}{\sqrt{27}}$ (v) $\frac{9.2}{5.1}, \frac{3.4}{7.1}$

(4) (i) □ABCD సమాంతర చతుర్భుజం. దానిలో $\angle A$ మరియు $\angle B$ ల కొలతల నిష్పత్తి 5:4 అయినచో $\angle B$ కొలతను కనుగొనండి.

(ii) అల్బర్ట్ మరియు సలీమ్‌ల ప్రస్తుత వయస్సుల నిష్పత్తి 5:9. ఐదు సం.ల తరువాత వారి వయస్సుల నిష్పత్తి 3:5 అయినట్లయితే వారి ప్రస్తుత వయస్సులను కనుగొనండి.

(iii) ఒక దీర్ఘచతురస్రము యొక్క పొడవు వెడల్పుల నిష్పత్తి 3:1. దీర్ఘ చతురస్ర చుట్టుకొలత 36 సెం.మీ. అయిన దీర్ఘ చతురస్ర పొడవు మరియు వెడల్పులను కనుగొనండి.

(iv) రెండు సంఖ్యల నిష్పత్తి 31:23 వాటి మొత్తం 216, అయినచో ఆ సంఖ్యలను కనుగొనండి.

(v) రెండు సంఖ్యల లబ్దము 360 మరియు వాటి నిష్పత్తి 10:9 అయినచో ఆ సంఖ్యలను కనుగొనండి.

(5*) ఒకవేళ $a : b = 3 : 1$ మరియు $b : c = 5 : 1$ అయినచో (i) $\left(\frac{a^3}{15b^2c}\right)^3$ (ii) $\frac{a^2}{7bc}$ ఈ రాశుల విలువలను కనుగొనండి.

(6*) $\sqrt{0.04\times0.4\times a} = 0.4\times0.04\times\sqrt{b}$ అయినచో $\frac{a}{b}$ ఈ నిష్పత్తిని కనుగొనండి.

(7) $(x + 3) : (x + 11) = (x - 2) : (x + 1)$ అయినచో x విలువను కనుగొనండి.

తెలుసుకుందాం.

సమాన నిష్పత్తులపై ప్రక్రియలు

సమానత్వ ధర్మములను ఉపయోగించి రెండు సమాన నిష్పత్తులపై కొన్ని ప్రక్రియలను చేయవచ్చు. వాటిని గురించి నేర్చుకుందాం.

a, b, c, d లు ధన సంఖ్యలయినప్పుడు వాటికి సంబంధించిన కింది ధర్మములను అర్థం చేసుకొందాం.

(I) విలోమ నియమం (Invertendo) ఒకవేళ $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ అయినచో $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$ అవుతుంది

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

$$\therefore \quad a\times d = b\times c$$

$$\therefore \quad b\times c = a\times d$$

$$\therefore \quad \frac{b\times c}{a\times c} = \frac{a\times d}{a\times c} \qquad \text{(ఇరువైపుల } a\times c \text{ చే భాగించగా)}$$

$$\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$$

$\therefore$ ఒకవేళ $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ అయిన $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$ అవుతుంది. **ఈ ధర్మమును 'విలోమ నియమం' అంటారు.**

(II) ఏకాంతర నియమం (Alternando) ఒకవేళ $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ అయినచో $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ అవుతుంది.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

$$\therefore \quad a\times d = b\times c$$

$$\frac{a\times d}{c\times d} = \frac{b\times c}{c\times d} \qquad \text{(ఇరువైపుల } c\times d \text{ చే భాగించగా)}$$

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$$

ఒకవేళ $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ అయినచో $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ అవుతుంది. **ఈ ధర్మమును 'ఏకాంతర నియమం' అంటారు.**

(III) సంయోగ నియమం (Componendo) ఒకవేళ $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ అయినచో $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$ అవుతుంది.

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

$$\frac{a}{b}+1=\frac{c}{d}+1 \quad \text{(ఇరువైపుల 1ని కలుపగా)}$$

$$\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$$

ఒకవేళ $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ అయిన $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$ అవుతుంది. ఈ **ధర్మమును 'సంయోగ నియమం' అంటారు.**

(IV) వియోగ నియమం (Dividendo) ఒకవేళ $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ అయిన $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$ అవుతుంది.

$$\therefore \quad \frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

$$\therefore \quad \frac{a}{b}-1=\frac{c}{d}-1 \quad \text{(ఇరువైపుల 1ని తీసివేయగా)}$$

$$\therefore \quad \frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$$

ఒకవేళ $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ అయిన $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$ అవుతుంది. ఈ **ధర్మమును 'వియోగ నియమం' అంటారు.**

(V) సంయోగ-వియోగ నియమం (Componendo-dividendo) ఒకవేళ $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ అయిన $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$, $a \neq b,\ c \neq d$ అవుతుంది.

ఒకవేళ $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ అయిన

$$\therefore \quad \frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d} \quad \text{(సంయోగ నియమం ప్రకారం)} \quad ....(1)$$

$$\therefore \quad \frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d} \quad \text{(వియోగ నియమం ప్రకారం)} \quad ....(2)$$

$$\therefore \quad \frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d} \quad \text{(1) మరియు (2) లను బట్టి}$$

ఒకవేళ $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ అయిన $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$ అవుతుంది. ఈ **ధర్మమును 'సంయోగ-వియోగ నియమం' అంటారు.**

సంయోగ నియమం మరియు వియోగ నియమాల సాధారణ రూపం

ఒకవేళ $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ అయినచో $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$ (ఒకసారి సంయోగ నియమం ప్రకారం)

$$\frac{a+2b}{b}=\frac{c+2d}{d} \quad \text{(రెండుసార్లు సంయోగ నియమం ప్రకారం)}$$

సాధారణంగా $\frac{a+mb}{b}=\frac{c+md}{d}$ (m సార్లు సంయోగ నియమం ప్రకారం) ...(1)

అదే విధంగా ఒకవేళ $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ అయనచో $\frac{a-mb}{b}=\frac{c-md}{d}$ (m సార్లు వియోగ నియమం ప్రకారం) ...(2)

మరియు ఒకవేళ $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ అయనచో $\frac{a+mb}{a-mb}=\frac{c+md}{c-md}$ ...((1) మరియు (2) లను బట్టి భాగించగా)

ఇది గుర్తుంచుకోండి

ఒకవేళ $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ అయినచో $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$ (విలోమ నియమం) ఒకవేళ $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ అయినచో $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$ (సంయోగ నియమం)

ఒకవేళ $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ అయినచో $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$ (ఏకాంతర నియమం) ఒకవేళ $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ అయినచో $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$ (వియోగ నియమం)

ఒకవేళ $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ అయినచో $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$ (సంయోగ-వియోగ నియమం)

సాధించిన ఉదాహరణలు

ఉదా: (1) ఒకవేళ $\frac{a}{b}=\frac{5}{3}$ అయినచో $\frac{a+7b}{7b}$ = ఈ నిష్పత్తిని కనుగొనండి.

పద్ధతి I

సాధన: ఒకవేళ $\frac{a}{b}=\frac{5}{3}$ అయినచో $\frac{a}{5}=\frac{b}{3}=k$, ఏకాంతర నియమం ప్రకారం

$\therefore\ a = 5k,\ b = 3k$

$$\therefore \frac{a+7b}{7b}=\frac{5k+7\times 3k}{7\times 3k}$$

$$=\frac{5k+21k}{21k}$$

$$=\frac{26k}{21k} \quad =\frac{26}{21}$$

పద్ధతి II

$$\frac{a}{b}=\frac{5}{3}$$

$$\therefore \quad \frac{a}{7b} = \frac{5}{21}$$

$$\therefore \quad \frac{a+7b}{7b} = \frac{5+21}{21}$$ (సంయోగ నియమం ప్రకారం)

$$\therefore \quad \frac{a+7b}{7b} = \frac{26}{21}$$

ఉదా: (2) ఒకవేళ $\frac{a}{b}=\frac{7}{4}$ అయినచో $\frac{5a-b}{b}$ కనుగొనండి.

పద్ధతి I

సాధన: $\frac{a}{b}=\frac{7}{4}$ ఏకాంతర నియమం ప్రకారం

$$\therefore \frac{a}{7}=\frac{b}{4}$$

$\therefore \frac{a}{7}=\frac{b}{4}=m$ అనుకుందాం

$\therefore\ a = 7m,\quad b = 4m$

$$\therefore \frac{5a-b}{b} = \frac{5(7m)-4m}{4m}$$

$$= \frac{35m-4m}{4m}$$

$$= \frac{31}{4}$$

పద్ధతి II

$$\frac{a}{b}=\frac{7}{4}$$

$$\frac{5a}{b}=\frac{5\times 7}{4}$$

$$=\frac{35}{4}$$ (వియోగ నియమం ప్రకారం)

$$\frac{5a-b}{b}=\frac{35-4}{4}$$

$$\frac{5a-b}{b}=\frac{31}{4}$$

ఉదా: (3) ఒకవేళ $\frac{a}{b}=\frac{7}{3}$ అయినచో $\frac{a+2b}{a-2b}$ విలువను కనుగొనండి.

సాధన: పద్ధతి I: $a = 7m$, $b = 3m$ అనుకొనుము

$$\therefore \frac{a+2b}{a-2b} = \frac{7m+2\times 3m}{7m-2\times 3m}$$

$$= \frac{7m+6m}{7m-6m}$$

$$= \frac{13m}{m} = \frac{13}{1}$$

పద్ధతి II : $\therefore \frac{a}{b}=\frac{7}{3}$

$\therefore \frac{a}{2b}=\frac{7}{6}$ ...... రెండువైపులా $\frac{1}{2}$ చే గుణించగా

$\therefore \frac{a+2b}{a-2b}=\frac{7+6}{7-6}$ (సంయోగ- వియోగ నియమం ప్రకారం)

$$\therefore \frac{a+2b}{a-2b} = \frac{13}{1}$$

ఉదా: (4) ఒకవేళ $\frac{a}{3}=\frac{b}{2}$ అయినచో $\frac{5a+3b}{7a-2b}$ విలువను కనుగొనండి.

సాధన: పద్ధతి I

$$\frac{a}{3}=\frac{b}{2}$$

$\therefore \frac{a}{b}=\frac{3}{2}$ .... ఏకాంతర నియమం

ఇప్పుడు $\frac{5a+3b}{7a-2b}$ ప్రతి పదమును b చే భాగించగా

$$\frac{\frac{5a}{b}+\frac{3b}{b}}{\frac{7a}{b}-\frac{2b}{b}} = \frac{5\left(\frac{a}{b}\right)+3}{7\left(\frac{a}{b}\right)-2}$$

$$= \frac{5\left(\frac{3}{2}\right)+3}{7\left(\frac{3}{2}\right)-2}$$

$$= \frac{\frac{15}{2}+3}{\frac{21}{2}-2}$$

$$= \frac{15+6}{21-4}$$

$$= \frac{21}{17}$$

పద్ధతి II

$$\frac{a}{3}=\frac{b}{2}$$

$\therefore \frac{a}{3}=\frac{b}{2}$ = t అనుకుందాం

$\therefore$ a = 3t, b = 2t ఈ విలువ ప్రతిక్షేపించగా

$$\frac{5a+3b}{7a-2b} = \frac{5(3t)+3(2t)}{7(3t)-2(2t)} \quad (t \neq 0)$$

$$= \frac{15t+6t}{21t-4t}$$

$$= \frac{21t}{17t}$$

$$= \frac{21}{17}$$

ఉదా: (5) ఒకవేళ $\frac{x}{y}=\frac{4}{5}$ అయినచో $\frac{4x-y}{4x+y}$ విలువను కనుగొనండి.

సాధన:

$$\frac{x}{y} = \frac{4}{5}$$

$$\therefore \quad \frac{4x}{y} = \frac{16}{5} \qquad \text{...(ఇరువైపుల 4చే గుణించగా)}$$

$$\therefore \quad \frac{4x+y}{4x-y} = \frac{16+5}{16-5} \qquad \text{...(సంయోగ-వియోగ నియమం ప్రకారం)}$$

$$\therefore \quad \frac{4x+y}{4x-y} = \frac{21}{11}$$

$$\therefore \quad \frac{4x-y}{4x+y} = \frac{11}{21}$$

ఉదా: (6) ఒకవేళ $5x = 4y$ అయినచో $\frac{3x^2+y^2}{3x^2-y^2}$ విలువను కనుగొనండి.

సాధన:

$$\frac{x}{y} = \frac{4}{5}$$

$$\therefore \quad \frac{x^2}{y^2} = \frac{16}{25}$$

$$\therefore \quad \frac{3x^2}{y^2} = \frac{48}{25} \qquad \text{...(ఇరువైపుల 3చే గుణించగా)}$$

$$\therefore \quad \frac{3x^2+y^2}{3x^2-y^2} = \frac{48+25}{48-25} \qquad \text{...(సంయోగ-వియోగ నియమం ప్రకారం)}$$

$$\therefore \quad \frac{3x^2+y^2}{3x^2-y^2} = \frac{73}{23}$$

తెలుసుకుందాం.

సమాన నిష్పత్తుల ధర్మముల యొక్క ఉపయోగం (Use of equal ratios)

కొన్ని సమీకరణములను సాధించుటకు ఇతర పద్ధతులకంటే సమాన నిష్పత్తులపై ప్రక్రియల ఉపయోగం సులభంగా ఉంటుంది.

ఉదా: (1) సమీకరణమును సాధించుము. $\frac{3x^2+5x+7}{10x+14}=\frac{3x^2+4x+3}{8x+6}$

సాధన: $\frac{3x^2+5x+7}{10x+14}=\frac{3x^2+4x+3}{8x+6}$

$$\frac{(6x^2+10x+14)}{10x+14}=\frac{(6x^2+8x+6)}{8x+6} \qquad \text{(ఇరువైపుల 2చే గుణించగా)}$$

$$\frac{(6x^2+10x+14)-(10x+14)}{10x+14}=\frac{(6x^2+8x+6)-(8x+6)}{8x+6}$$ (వియోగ నియమం ప్రకారం)

$$\therefore \quad \frac{6x^2}{10x+14}=\frac{6x^2}{8x+6}$$

$x=0$ విలువకు ఈ సమీకరణము సత్యము అవుతుంది. $\therefore$ $x=0$ ఒక సాధన అవుతుంది.

ఒకవేళ $x \neq 0$ అయినచో $x^2 \neq 0$, $\therefore$ $6x^2$ చే భాగించగా, $\dfrac{1}{10x+14}=\dfrac{1}{8x+6}$

$$\therefore \quad 8x+6=10x+14$$

$$\therefore \quad 6-14=10x-8x$$

$$\therefore \quad -8=2x$$

$$\therefore \quad x=-4$$

$\therefore$ $x=-4$ లేదా $x=0$ ఇవి ఇచ్చిన సమీకరణము యొక్క సాధనలు అవుతాయి.

ఉదా: (2) సాధించుము $\dfrac{\sqrt{x+7}+\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+7}-\sqrt{x-2}}=\dfrac{5}{1}$

$$\frac{(\sqrt{x+7}+\sqrt{x-2})+(\sqrt{x+7}-\sqrt{x-2})}{(\sqrt{x+7}+\sqrt{x-2})-(\sqrt{x+7}-\sqrt{x-2})}=\frac{5+1}{5-1}$$ (సంయోగ-వియోగ నియమం ప్రకారం)

$$\therefore \quad \frac{2\sqrt{x+7}}{2\sqrt{x-2}}=\frac{6}{4}$$

$$\therefore \quad \frac{\sqrt{x+7}}{\sqrt{x-2}}=\frac{3}{2}$$ ...(ఇరువైపుల వర్గం చేయగా)

$$\therefore \quad \frac{x+7}{x-2}=\frac{9}{4}$$

$$\therefore \quad 4x+28=9x-18$$

$$\therefore \quad 28+18=9x-4x$$

$$\therefore \quad 46=5x$$

$$\therefore \quad \frac{46}{5}=x$$

$\therefore$ $x=\dfrac{46}{5}$ సమీకరణం యొక్క సాధన అవుతుంది.

కృత్యం:

ఐదు మందవు కాగితములను తీసుకొనుము. ప్రతి కాగితముపై కింది వాటిలోని ఒక్కొక్క నియమమును రాయండి.

(i) $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$ (ii) $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ (iii) $\frac{a}{b} = \frac{ac}{bd}$ (iv) $\frac{c}{d} = \frac{c-a}{d-b}$ (v) $\frac{a}{b} = \frac{rc}{rd}$

a, b, c, d లు ధనసంఖ్యలు మరియు $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ అని ఇవ్వబడెను. పై నియమాలు సత్యమో లేక అసత్యమో కార్డుల వెనుక వైపు రాయండి. నియమం ఒకవేళ అసత్యము అయినచో కారణమును రాయండి.

అభ్యాసమాలిక 4.3

(1) ఒకవేళ $\frac{a}{b} = \frac{7}{3}$ అయినచో కింది రాశుల విలువలను కనుగొనండి.

(i) $\frac{5a+3b}{5a-3b}$ (ii) $\frac{2a^2+3b^2}{2a^2-3b^2}$ (iii) $\frac{a^3-b^3}{b^3}$ (iv) $\frac{7a+9b}{7a-9b}$

(2) ఒకవేళ $\frac{15a^2+4b^2}{15a^2-4b^2} = \frac{47}{7}$ అయినచో కింది రాశుల విలువలను కనుగొనండి.

(i) $\frac{a}{b}$ (ii) $\frac{7a-3b}{7a+3b}$ (iii) $\frac{b^2-2a^2}{b^2+2a^2}$ (iv) $\frac{b^3-2a^3}{b^3+2a^3}$

(3) ఒకవేళ $\frac{3a+7b}{3a-7b} = \frac{4}{3}$ అయిన $\frac{3a^2-7b^2}{3a^2+7b^2}$ రాశి విలువను కొనుగొనండి.

(4) కింది సమీకరణములను సాధించండి

(i) $\frac{x^2+12x-20}{3x-5} = \frac{x^2+8x+12}{2x+3}$

(ii) $\frac{10x^2+15x+63}{5x^2-25x+12} = \frac{2x+3}{x-5}$

(iii) $\frac{(2x+1)^2+(2x-1)^2}{(2x+1)^2-(2x-1)^2} = \frac{17}{8}$

(iv*) $\frac{\sqrt{4x+1}+\sqrt{x+3}}{\sqrt{4x+1}-\sqrt{x+3}} = \frac{4}{1}$

(v) $\frac{(4x+1)^2+(2x+3)^2}{4x^2+12x+9} = \frac{61}{36}$

(vi) $\frac{(3x-4)^3-(x+1)^3}{(3x-4)^3+(x+1)^3} = \frac{61}{189}$

కృత్యం: కింద చూపిన విధముగా మధ్యలో ఇవ్వబడిన a, bల విలువలు మారుస్తూ అనగా $a : b$ యొక్క నిష్పత్తిని మార్చుతూ వేర్వేరు ఉదాహరణాలు తయారుచేయవచ్చును. ఇలా విలువల్ని మారుస్తూ ఉపాధ్యాయులు చాలా అభ్యాసాలను ఇవ్వండి.

$\frac{5a^2+2b^2}{5a^2-2b^2} = -----$

$\frac{3a}{4b} = -----$

$\frac{2a-b}{2a+b} = -----$

$\frac{a^2+b^2}{b^2} = ---$

$\frac{a}{b} = \frac{3}{4}$

$\frac{a}{2b} = -----$

తెలుసుకుందాం.

సమాన నిష్పత్తులపై సిద్ధాంతము (Theorem on equal ratios)

ఒకవేళ $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ అయినచో $\frac{a}{b} = \frac{a+c}{b+d} = \frac{c}{d}$ ఈ ధర్మమును సమాన నిష్పత్తుల సిద్ధాంతము అంటారు.

నిరూపణ : $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$ అనుకొనుము. $\therefore$ $a = bk$ మరియు $c = dk$

$$\therefore \quad \frac{a+c}{b+d} = \frac{bk+dk}{b+d} = \frac{k(b+d)}{b+d} = k$$

$$\therefore \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$$

$\frac{a}{b} = \frac{al}{bl}$ అని మనకు తెలుసు

$\therefore$ ఒకవేళ $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$, అయినచో $\frac{al}{bl} = \frac{cm}{dm} = \frac{al+cm}{bl+dm} = k$

ఇదే విధముగా, ఒకవేళ $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \ldots\ldots$ (పరిమిత పదములు) మరియు l, m, n శూన్యేతర సంఖ్యలయినచో ప్రతి నిష్పత్తి = $\frac{al+cm+en+\ldots}{bl+dm+fn+\ldots}$ (పరిమిత పదములు) సమాన నిష్పత్తుల సిద్ధాంతం యొక్క సాధారణ రూపం లభిస్తుంది.

అలోచిద్దాం

ఒక వ్యాయామశాలలో శిశువయోవర్గంలో 35 మంది అమ్మాయిలు 42 మంది అబ్బాయిలు, బాలల వయోవర్గం లో 30 మంది అమ్మాయిలు, 36 మంది అబ్బాయిలు, కౌమారవయోవర్గంలో 20 మంది అమ్మాయిలు 24 మంది అబ్బాయిలు గలరు. అయిన ప్రతి వర్గంలోని అమ్మాయిల సంఖ్య మరియు అబ్బాయిల సంఖ్యల యొక్క నిష్పత్తి ఎంత?

సామూహిక కవాతు (**Drill**) చేయడానికి పై మూడు వర్గాలను మైదానంలో ఒకటిగా చేర్చినారు. ఇప్పుడు మూడు వర్గంలను కలుపగా ఏర్పడిన సమూహంలోని అమ్మాయిల సంఖ్య, అబ్బాయిల సంఖ్యకు గల నిష్పత్తి ఎంత?

పై ప్రశ్నల యొక్క సమాధానములతో మీకు సమాన నిష్పత్తులపై సిద్ధాంతం యొక్క నిరూపణ వచ్చిందా?

ఉదా: (1) కింది ఖాళీలను పూరింపుము.

(i) $\frac{a}{3} = \frac{b}{7} = \frac{4a+9b}{\ldots\ldots\ldots\ldots}$ (ii) $\frac{x}{3} = \frac{y}{5} = \frac{z}{4} = \frac{5x-3y+4z}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}$

సాధన: (i) $\frac{a}{3} = \frac{b}{7} = \frac{4a+9b}{4\times3+9\times7} = \frac{4a+9b}{12+63} = \frac{4a+9b}{75}$

(ii) $\frac{x}{3} = \frac{y}{5} = \frac{z}{4} = \frac{5\times x}{5\times3} = \frac{-3\times y}{-3\times5} = \frac{4\times z}{4\times4}$

$$\therefore \quad = \frac{5x}{15} = \frac{-3y}{-15} = \frac{4z}{16}$$

$$= \frac{5x-3y+4z}{15-15+16}$$ ---- (సమాన నిష్పత్తుల సిద్ధాంతం ప్రకారం)

$$= \frac{5x-3y+4z}{16}$$

ఉదా: (2) ఒకవేళ $\dfrac{a}{(x-2y+3z)}=\dfrac{b}{(y-2z+3x)}=\dfrac{c}{(z-2x+3y)}$ మరియు $x+y+z\neq 0$ అయినచో

ప్రతి నిష్పత్తి $=\dfrac{a+b+c}{2(x+y+z)}$ అని చూపండి

సాధన: $\dfrac{a}{(x-2y+3z)}=\dfrac{b}{(y-2z+3x)}=\dfrac{c}{(z-2x+3y)}=k$ అనుకుందాం.

$\therefore$ సమాన నిష్పత్తుల సిద్ధాంతం ప్రకారం

$$k=\frac{a+b+c}{(x-2y+3z)+(y-2z+3x)+(z-2x+3y)}$$
$$=\frac{a+b+c}{2x+2y+2z}$$
$$=\frac{a+b+c}{2(x+y+z)}$$
$$\therefore\ \frac{a}{x-2y+3z}=\frac{b}{y-2z+3x}=\frac{c}{z-2x+3y}=\frac{a+b+c}{2(x+y+z)}$$

ఉదా: (3) ఒకవేళ $\dfrac{y}{b+c-a}=\dfrac{z}{c+a-b}=\dfrac{x}{a+b-c}$ అయితే $\dfrac{a}{z+x}=\dfrac{b}{x+y}=\dfrac{c}{y+z}$ అని నిరూపించండి.

సాధన: ముందుగా ఇచ్చిన సమాన నిష్పత్తులలో విలోమ నియమం ప్రకారం

$$\frac{b+c-a}{y}=\frac{c+a-b}{z}=\frac{a+b-c}{x}$$

ఇప్పుడు $\dfrac{b+c-a}{y}=\dfrac{c+a-b}{z}=\dfrac{a+b-c}{x}=k$ అనుకుందాం.

$\therefore$ సమాన నిష్పత్తుల సిద్ధాంతం ప్రకారం

$$k=\frac{(c+a-b)+(a+b-c)}{z+x}=\frac{2a}{z+x}\quad .....(I)$$

$$k=\frac{(a+b-c)+(b+c-a)}{x+y}=\frac{2b}{x+y}\quad ....(II)$$

$$k=\frac{(b+c-a)+(c+a-b)}{y+z}=\frac{2c}{y+z}\quad .....(III)$$

$$\therefore\ \frac{2a}{z+x}=\frac{2b}{x+y}=\frac{2c}{y+z}$$
$$\therefore\ \frac{a}{z+x}=\frac{b}{x+y}=\frac{c}{y+z}$$

ఉదా: (4) సాధించండి: $\dfrac{14x^2-6x+8}{10x^2+4x+7}=\dfrac{7x-3}{5x+2}$

సాధన: ఉదాహరణను పరిశీలించినట్లయితే కుడివైపున గల నిష్పత్తిలో పూర్వపదం మరియు ఉత్తర పదమును $2x$చే గుణించినచో మొదటి నిష్పత్తిలోని ప్రతి దానికి రెండు పదాలు లభించును. కావున రెండవ నిష్పత్తిలోని రెండు పదాలను $2x$ చే గుణిద్దాం. కాని దాని కంటే ముందు x శూన్యేతరముగా వుండవలెనని ధృవపరచుకొనవలెను.

ఒకవేళ $x = 0$ అయినచో $\frac{14x^2-6x+8}{10x^2+4x+7} = \frac{8}{7}$ మరియు $\frac{7x-3}{5x+2} = \frac{-3}{2}$

$\therefore \frac{8}{7} = \frac{-3}{2}$ విరుద్ధ వాక్యము లభిస్తుంది.

$\therefore x \neq 0$

$\therefore$ రెండవ నిష్పత్తిలోని రెండు పదాలను $2x$ చే గుణించగా.

$$\frac{14x^2-6x+8}{10x^2+4x+7} = \frac{2x(7x-3)}{2x(5x+2)} = k$$

$$\therefore \frac{14x^2-6x+8}{10x^2+4x+7} = \frac{14x^2-6x}{10x^2+4x} = k$$

$$\therefore \frac{14x^2-6x+8-14x^2+6x}{10x^2+4x+7-10x^2-4x} = \frac{8}{7} = k$$

$$\therefore k = \frac{8}{7}$$

$$\therefore \frac{7x-3}{5x+2} = \frac{8}{7}$$

$$\therefore 49x - 21 = 40x + 16$$

$$\therefore 49x - 40x = 16 + 21$$

$$\therefore 9x = 37$$

$$\therefore x = \frac{37}{9}$$

అభ్యాస మాలిక 4.4

(1) కింది వాటిలోని ఖాళీలను పూరించండి.

(i) $\frac{x}{7} = \frac{y}{3} = \frac{3x+5y}{.......} = \frac{7x-9y}{......}$ (ii) $\frac{a}{3} = \frac{b}{4} = \frac{c}{7} = \frac{a-2b+3c}{......} = \frac{......}{6-8+14}$

(2) $5m - n = 3m + 4n$ అయినచో కింది రాశుల విలువలను కనుగొనండి.

(i) $\frac{m^2+n^2}{m^2-n^2}$ (ii) $\frac{3m+4n}{3m-4n}$

(3) (i) ఒకవేళ $a(y+z)=b(z+x) = c(x+y)$ మరియు a, b, c లలోని ఏ రెండు సంఖ్యలు సమానంగా లేనిచో $\frac{y-z}{a(b-c)} = \frac{z-x}{b(c-a)} = \frac{x-y}{c(a-b)}$ అని చూపండి.

(ii) ఒకవేళ $\frac{x}{3x-y-z} = \frac{y}{3y-z-x} = \frac{z}{3z-x-y}$ మరియు $x+y+z \neq 0$ అయినచో ప్రతి నిష్పత్తి యొక్క విలువ 1 అవుతుంది అని చూపండి.

(iii) ఒకవేళ $\frac{ax+by}{x+y} = \frac{bx+az}{x+z} = \frac{ay+bz}{y+z}$ మరియు $x+y+z \neq 0$ అయినచో ప్రతి నిష్పత్తి $\frac{a+b}{2}$ అని చూపండి.

(iv) ఒకవేళ $\frac{y+z}{a} = \frac{z+x}{b} = \frac{x+y}{c}$ అయినచో $\frac{x}{b+c-a} = \frac{y}{c+a-b} = \frac{z}{a+b-c}$ అని చూపండి.

(v) ఒకవేళ $\frac{3x-5y}{5z+3y} = \frac{x+5z}{y-5x} = \frac{y-z}{x-z}$ అయినచో ప్రతి నిష్పత్తి $\frac{x}{y}$ నకు సమానం అని చూపండి.

(4) సాధించండి (i) $\frac{16x^2-20x+9}{8x^2+12x+21} = \frac{4x-5}{2x+3}$ (ii) $\frac{5y^2+40y-12}{5y+10y^2-4} = \frac{y+8}{1+2y}$

తెలుసుకుందాం.

పరంపరానుపాతం (Continued Proportion)

ఇచ్చుట ఇచ్చిన నిష్పత్తుల గురించి ఆలోచించండి. 4:12 మరియు 12:36 నిష్పత్తులు సమానం. ఇవి రెండు అనుపాతములోని మొదటి దాని ఉత్తరపదం మరియు రెండవదాని పూర్వపదం సమానంగా ఉన్నాయి. కాబట్టి 4, 12, 36 ఈ సంఖ్యలు పరంపరానుపాతంలో ఉన్నాయి అని అంటారు.

ఎప్పుడైతే $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$ అగునో అప్పుడు a, b, c సంఖ్యలు పరంపరానుపాతంలో ఉన్నాయి అని అంటారు.

ఒకవేళ $ac = b^2$, అయినచో రెండు వైపులా bc చే భాగించిన $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$ సమీకరణం లభిస్తుంది.

$\therefore$ $ac = b^2$ అయినచో a, b, c లు పరంపరానుపాతంలో ఉంటాయి.

ఎప్పుడైతే a, b, c లు పరంపరానుపపాతంలో ఉంటాయో అప్పుడు bని a మరియు cల **'అనుపాత మధ్యమము'** (Geometric mean) లేదా **'గుణ మధ్యమము'** (Mean proportional). అంటారు.

దీని నుండి క్రింది వాక్యాలన్ని ఒకే అర్థాన్ని కల్గి ఉన్నాయని తెలుసుకోండి.

$\therefore$ (1) $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$ (2) $b^2 = ac$ (3) a, b, cలు పరంపరానుపాతంలో గలవు.

(4) b అనేది a మరియు c యొక్క అనుపాత మధ్యమం అవుతుంది. (5) b అనేది a మరియు cల యొక్క గుణ మధ్యమము అవుతుంది.

పరంపరానుపాతం యొక్క భావనను కూడా మనం విస్తరించవచ్చు.

ఒకవేళ $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = \frac{d}{e} = \frac{e}{f}$ అయినచో a, b, c, d, e మరియు f ఈ సంఖ్యలు పరంపరానుపాతంలో ఉన్నవి అని అంటారు.

ఉదా: (1) x అనే సంఖ్య 25 మరియు 4ల అనుపాత మధ్యమము అయినచో x విలువను కనుగొనండి.

సాధన: x అనేది 25 మరియు 4ల అనుపాత మధ్యమము.

$$\therefore \quad x^2 = 25 \times 4$$
$$\therefore \quad x^2 = 100$$
$$\therefore \quad x = 10$$

ఉదా: (2) ఒకవేళ 4 a^2b, 8 ab^2, pలు పరంపరానుపాతంలో ఉన్నట్లయితే p యొక్క విలువని కనుగొనండి

సాధన: ఇచ్చిన వివరాల ప్రకారం 4 a^2b, 8 ab^2, pలు పరంపరానుపాతంలో గలవు.

$$\therefore \quad \frac{4a^2b}{8ab^2} = \frac{8ab^2}{p}$$

$$p = \frac{8ab^2 \times 8ab^2}{4a^2b} = 16b^3$$

ఉదా: (3) 7, 12 మరియు 18లలో ప్రతి సంఖ్య నుండి ఏ సంఖ్యను తీసివేసినచో లభించే సంఖ్యలు పరంపరానుపాతంలో ఉంటాయి?

సాధన: 7, 12 మరియు 18 ఈ సంఖ్యల నుండి x అను సంఖ్యను తీసివేసినట్లయితే లభించు సంఖ్యలు పరంపరానుపాతములో ఉంటాయని అని అనుకుందాం.

$(7-x)$, $(12-x)$, $(18-x)$ పరంపరానుపాతంలో ఉన్నాయి.

$$\therefore \quad (12-x)^2 = (7-x)(18-x)$$

$$\therefore \quad 144 - 24x + x^2 = 126 - 25x + x^2$$

$$\therefore \quad -24x + 25x = 126 - 144$$

$$\therefore \quad x = -18$$

సరిచూడడం

$(7-x) = 7-(-18) = 25$

$(12-x) = 12-(-18) = 30$

$(18-x) = 18-(-18) = 36$

$30^2 = 900$ మరియు $25 \times 36 = 900$

25, 30, 36 ఈ సంఖ్యలు పరంపరానుపాతంలో ఉన్నాయి.

$\therefore$ 7, 12, 18లలో నుండి -18ని తీసివేసినచో లభించే సంఖ్యలు పరంపరానుపాతంలో ఉంటాయి

k – పద్ధతి (k –method)

నిష్పత్తులలో k – పద్ధతి సమాన నిష్పత్తులపై అనగా అనుపాతానికి సంబంధించిన ప్రశ్నలను సాధించడానికి ఇది ఒక సులభమైన పద్ధతి. ఈ పద్ధతిలో ఇచ్చిన సమాన నిష్పత్తులలోని ప్రతి దాని విలువను k గా భావిస్తారు.

ఉదా: (1) ఒకవేళ $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ అయినచో $\frac{5a-3c}{5b-3d} = \frac{7a-2c}{7b-2d}$ అని చూపండి.

సాధన: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$ అనుకొనుము $\therefore a = bk, c = dk$

a మరియు c ల విలువను ఇరు వైపుల ప్రతిక్షేపించగా.

ఎడమ వైపు $= \frac{5a-3c}{5b-3d} = \frac{5(bk)-3(dk)}{5b-3d} = \frac{k(5b-3d)}{(5b-3d)} = k$

కుడివైపు $= \frac{7a-2c}{7b-2d} = \frac{7(bk)-2(dk)}{7b-2d} = \frac{k(7b-2d)}{7b-2d} = k$

$\therefore$ ఎడమ వైపు = కుడివైపు

$$\therefore \quad \frac{5a-3c}{5b-3d} = \frac{7a-2c}{7b-2d}$$

ఉదా: (2) ఒకవేళ a, b, cలు పరంపరానుపాతంలో ఉన్నట్లయితే $\frac{(a+b)^2}{ab}=\frac{(b+c)^2}{bc}$ అని నిరూపించండి.

సాధన: a, b, c పరంపరానుపాతంలో ఉన్నాయి $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=k$ అనుకొనుము.

$\therefore b=ck, a=bk=ck\times k=ck^2$

a మరియు b ల విలువను ప్రతిక్షేపించగా

ఎడమ వైపు $=\frac{(a+b)^2}{ab}=\frac{(ck^2+ck)^2}{(ck^2)(ck)}=\frac{c^2k^2(k+1)^2}{c^2k^3}=\frac{(k+1)^2}{k}$

కుడి వైపు $=\frac{(b+c)^2}{bc}=\frac{(ck+c)^2}{(ck)c}=\frac{c^2(k+1)^2}{c^2k}=\frac{(k+1)^2}{k}$

$\therefore$ ఎడమ వైపు = కుడి వైపు $\quad \therefore \frac{(a+b)^2}{ab}=\frac{(b+c)^2}{bc}$

ఉదా: (3) ఒకవేళ a, b, cలు పరంపరానుపాతంలో ఉన్నట్లయితే

$\frac{a}{c}=\frac{a^2+ab+b^2}{b^2+bc+c^2}$ అని నిరూపించండి.

సాధన: a, b, c పరంపరాను పాతంలో ఉన్నవి.

$\therefore \frac{a}{b}=\frac{b}{c}$

$\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=$ k అనుకొనుము $\therefore b=ck$ మరియు $a=ck^2$

ఎడమ వైపు $=\frac{a}{c}=\frac{ck^2}{c}=k^2$

కుడి వైపు $=\frac{a^2+ab+b^2}{b^2+bc+c^2}$

$=\frac{(k^2c)^2+k^2c(ck)+(ck)^2}{(ck)^2+(ck)(c)+c^2}$

$=\frac{k^4c^2+k^3c^2+c^2k^2}{c^2k^2+c^2k+c^2}$

$=\frac{c^2k^2(k^2+k+1)}{c^2(k^2+k+1)}$

$=k^2$

$\therefore$ ఎడమ వైపు = కుడి వైపు

$\therefore \frac{a}{c}=\frac{a^2+ab+b^2}{b^2+bc+c^2}$

ఉదా: (4) ఐదు సంఖ్యలు పరంపరానుపాతంలో కలవు. వాటిలో మొదటి పదం 5 మరియు చివరిపదం 80 అయినచో ఆ సంఖ్యలను కనుగొనండి.

సాధన: పరంపరానుపాతములోగల ఐదు సంఖ్యలను

a, ak, ak^2, ak^3, ak^4 అని అనుకొనుము.

ఇక్కడ $a=5$ మరియు $ak^4=80$

$\therefore 5\times k^4=80$

$\therefore k^4=16$

$\therefore k=2 \quad \because 2^4=16$

$ak=5\times 2=10 \qquad ak^2=5\times 4=20$

$ak^3=5\times 8=40 \qquad ak^4=5\times 16=80$

$\therefore$ 5, 10, 20, 40, 80 అనేవి కావల్సిన సంఖ్యలు.

అభ్యాస మాలిక 4.5

(1) 12, 16 మరియు 21 లలో ప్రతి సంఖ్యకు ఏ సంఖ్యను కలుపగా లభించే సంఖ్యలు వరంపరానుపాతంలో ఉంటాయి?

(2) $(23-x)$ $(19-x)$ల గుణమధ్యమం $(28-x)$ అయిన x యొక్క విలువను కనుగొనండి.

(3) మూడు సంఖ్యలు వరంపరానుపాతంలో కలవు. వాటి గుణమధ్యమము 12 మిగిలిన రెండు సంఖ్యల మొత్తం 26 అయినచో ఆ సంఖ్యలను కనుగొనండి.

(4) ఒకవేళ $(a + b + c)(a - b + c) = a^2 + b^2 + c^2$ అయినచో a, b, c లు వరంపరానుపాతంలో ఉన్నాయని చూపండి.

(5) ఒకవేళ $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$ మరియు $a, b, c > 0$ అయినచో

(i) $(a + b + c)(b - c) = ab - c^2$

(ii) $(a^2 + b^2)(b^2 + c^2) = (ab + bc)^2$

(iii) $\frac{a^2+b^2}{ab} = \frac{a+c}{b}$ అని నిరూపించండి.

(6) $\frac{x+y}{x-y}$, $\frac{x^2-y^2}{x^2y^2}$ వీటి గుణ మధ్యమమును కనుగొనండి.

కృత్యం: భూగోళశాస్త్ర పుస్తకంలోని భారతదేశ రాజకీయ మాన చిత్ర పటము (map)ను చూడండి. అందులో ఇవ్వబడిన దూరాల ప్రమాణమును గమనించండి. దాని నుండి వేర్వేరు పట్టణాల మధ్య సరళ రేఖలో దూరాలను కొనుగొనండి.

ఉదాహరణకు (i) కొత్త ఢిల్లీ నుండి బంగళూరు (ii) ముంబయి నుండి కొల్‌కత్తా (iii) జయ్‌పూర్ నుండి భువనేశ్వర్

ప్రశ్న సంగ్రహము – 4

(1) కింది ప్రశ్నలకిచ్చిన బహుపర్యాయాలలో సరియైన పర్యాయమును ఎన్నుకొనుము.

(i) ఒకవేళ 6 : 5 = y : 20 అయినచో y యొక్క విలువ కింది వాటిలో ఏది?

(A) 15 (B) 24 (C) 18 (D) 22.5

(ii) 1 మి.మీ 1 సె.మీ. లకు గల నిష్పత్తి కింది వాటిలో ఏది?

(A) 1 : 100 (B) 10 : 1 (C) 1 : 10 (D) 100 : 1

(iii*) జతిన్, నితిన్, మరియు మహేష్‌ల వయస్సులు వరుసగా 16, 24 మరియు 36 సంవత్సరాలు అయిన నితిన్ వయస్సుకు మహేష్ వయస్సుకు గల నిష్పత్తి ఏది?

(A) 3 : 2 (B) 2 : 3 (C) 4 : 3 (D) 3 : 4

(iv) శుభమ్ మరియు అనిల్‌లకు 3:5 నిష్పత్తిలో 24 అరటి పండ్లను పంచిరి, అయితే శుభమ్‌కు ఎన్ని అరటి పండ్లు లభించెను?

(A) 8 (B) 15 (C) 12 (D) 9

(v) 4 మరియు 25ల గుణ మధ్యమము కింది వాటిలో ఏది?

(A) 6 (B) 8 (C) 10 (D) 12

(2) కింద ఇచ్చిన సంఖ్యల జతలలో మొదటి సంఖ్యకు రెండవ సంఖ్యతో గల నిష్పత్తిని సంక్షిప్త రూపంలో రాయండి.

(i) 21, 48 (ii) 36, 90 (iii) 65, 117 (iv) 138, 161 (v) 114, 133

(3) కింది నిష్పత్తులను సంక్షిప్త రూపంలో రాయండి.

(i) వృత్త వ్యాసార్ధం మరియు వ్యాసముల నిష్పత్తి.

(ii) దీర్ఘ చతురస్ర పొడవు 4 సెం.మీ మరియు వెడల్పు 3 సెం. మీ. ఉన్నచో దీర్ఘచతురస్ర కర్ణంనకు మరియు పొడవులతో గల నిష్పత్తి.

(iii) చతురస్ర భుజం 4 సెం.మీ. ఉన్నచో చతురస్రం చుట్టు కొలతకు వైశాల్యముతో గల నిష్పత్తి.

(4) కింది సంఖ్యలు పరంపరానుపాతంలో ఉన్నాయా, వాటిని నిర్ణయించుము.

(i) 2, 4, 8 (ii) 1, 2, 3 (iii) 9, 12, 16 (iv) 3, 5, 8

(5) a, b, c ఈ మూడు సంఖ్యలు పరంపరానుపాతంలో ఉన్నాయి. ఒకవేళ $a = 3$ మరియు $c = 27$ అయినచో b = ఎంత?

(6) కింది నిష్పత్తులను శాతరూపంలో రాయండి.

(i) 37 : 500 (ii) $\frac{5}{8}$ (iii) $\frac{22}{30}$ (iv) $\frac{5}{16}$ (v) $\frac{144}{1200}$

(7) మొదటి రాశికి రెండవ రాశికి మధ్యగల నిష్పత్తిని సంక్షిప్త రూపంలో రాయండి.

(i) 1024 MB, 1.2 GB [(1024 MB = 1 GB)]

(ii) 17 రూ.లు 25 రూ.ల 60 పై

(iii) 5 డజన్లు 120 పండ్లు

(iv) 4 చ. మీ, 800 చ. సెం. మీ.

(v) 1.5 కి.గ్రా. 2500 గ్రా.

(8) ఒకవేళ $\frac{a}{b} = \frac{2}{3}$ అయినచో కింది రాశుల విలువలను, కనుగొనండి.

(i) $\frac{4a+3b}{3b}$ (ii) $\frac{5a^2+2b^2}{5a^2-2b^2}$

(iii) $\frac{a^3+b^3}{b^3}$ (iv) $\frac{7b-4a}{7b+4a}$

(9) a, b, c, d అనుపాతంలో వున్నచో, కింది వాటిని నిరూపించుము.

(i) $\frac{11a^2+9ac}{11b^2+9bd} = \frac{a^2+3ac}{b^2+3bd}$

(ii*) $\sqrt{\frac{a^2+5c^2}{b^2+5d^2}} = \frac{a}{b}$

(iii) $\dfrac{a^2+ab+b^2}{a^2-ab+b^2}=\dfrac{c^2+cd+d^2}{c^2-cd+d^2}$

(10) a, b, c పరంపరానుపాతంలో ఉన్నచో, కింది వాటిని సాధించండి.

(i) $\dfrac{a}{a+2b}=\dfrac{a-2b}{a-4c}$ (ii) $\dfrac{b}{b+c}=\dfrac{a-b}{a-c}$

(11) సాధించండి: $\dfrac{12x^2+18x+42}{18x^2+12x+58}=\dfrac{2x+3}{3x+2}$

(12) ఒకవేళ $\dfrac{2x-3y}{3z+y}=\dfrac{z-y}{z-x}=\dfrac{x+3z}{2y-3x}$ అయినచో ప్రతి నిష్పత్తి $\dfrac{x}{y}$ అవుతుంది అని నిరూపించండి.

(13*) ఒకవేళ $\dfrac{by+cz}{b^2+c^2}=\dfrac{cz+ax}{c^2+a^2}=\dfrac{ax+by}{a^2+b^2}$ అయినచో $\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c}$ అని నిరూపించండి.

5 రెండు చరరాశులుగల రేఖీయ సమీకరణములు

చదవండి, నేర్చుకుందాం.

- రెండు చరరాశులు గల రేఖీయ సమీకరణములు
- సమకాల చలన సమీకరణములను సాధించుట
- సమకాల చలన సమీకరణములు
- సమకాల చలన సమీకరణములపై రాత లెక్కలు

కొంచెం గుర్తుకు తెచ్చుకుందాం

ఉదా. కింది సమీకరణములను సాధించండి.

(1) $m+3=5$ $m = \square$

(2) $3y+8=22$ $y = \square$

(3) $\frac{x}{3}=2$ $x = \square$

(4) $2p = p+\frac{4}{9}$ $p = \square$

(5) ఏ సంఖ్యకు 5 ను కలిపినచో 14 లభించును?

$\square + 5 = 14$

$x + 5 = 14$

$x = \square$

(6) 8 నుండి ఎంత తీసివేసిన 2 మిగులుతుంది?

$8 - \square = 2$

$8 - y = 2$

$y = \square$

పై ప్రతి సమీకరణములో చరరాశుల ఘాతాంకాలు 1. ఈ సమీకరణములను ఏక చరరాశిగల రేఖీయ సమీకరణములు అంటారు.

తెలుసుకుందాం.

RU9LHF

రెండు చరరాశులుగల రేఖీయ సమీకరణములు (Linear equations in two variables)

ఏ రెండు సంఖ్యల మొత్తం 14 అవుతుందో అలాంటి సంఖ్యలను వెదకండి.

సంఖ్యలకై x మరియు y లను చరరాశులుగా ఉపయోగించి ఈ ఉదాహరణ సమీకరణ రూపంలో $x + y = 14$ ఇలా అవుతుంది.

ఇది రెండు చరరాశులు గల సమీకరణం. ఇక్కడ x మరియు y చరరాశులకు ఎన్నో విలువలను వెదకవచ్చును.

ఉదా, $9 + 5 = 14$ $7 + 7 = 14$ $8 + 6 = 14$ $4 + 10 = 14$

$(-1) + 15 = 14$ $15 + (-1) = 14$ $2.6 + 11.4 = 14$ $0 + 14 = 14$

$100 + (-86) = 14$ $(-100) + (114) = 14$ $\square + \square = 14$ $\square + \square = 14$

అనగా పై సమీకరణములకు $(x = 9, y = 5)$ $(x = 7, y = 7)$ $(x = 8, y = 6)$ మొదలైన అనేక సాధనలు లభిస్తాయి.

$x = 9, y = 5$ సాధనను $(9, 5)$ ఈ క్రమంలో బ్రాకెట్లలో రాయాలని సూచకం. ఈ క్రమ యుగ్మములోని మొదటి సంఖ్యను x విలువ మరియు రెండవ సంఖ్య y విలువలు అవుతాయి. $x + y = 14$ ఈ సమీకరణమును సత్యమని నిర్ణయించే $(9,5)$, $(7,7)$, $(8,6)$, $(4,10)$, $(10,4)$, $(-1,15)$, $(2.6, 11.4)$,...లాంటి అనంత క్రమయుగ్మములు అనగా అనంత సాధనలు ఉంటాయి.

ఇప్పుడు రెండవ ఉదాహరణను చూద్దాం.

రెండు సంఖ్యల భేదము 2 అయ్యేటటువంటి సంఖ్యలను వెదకండి.

పెద్ద సంఖ్యను x మరియు చిన్న సంఖ్యను y అనుకొనిన $x-y = 2$ ఈ సమీకరణం లభిస్తుంది.

x మరియు y విలువల కొరకు కింది విధంగా అనేక సమీకరణములు లభించును.

$10 - 8 = 2$ $9 - 7 = 2$ $8 - 6 = 2$ $(-3) - (-5) = 2$ $5.3-3.3=2$

$15 - 13 = 2$ $100 - 98 = 2$ $\square - \square = 2$ $\square - \square = 2$

ఇక్కడ $x = 10$ మరియు $y = 8$ ఈ విలువను తీసుకొనినచో $(10,8)$ ఈ క్రమ యుగ్మము ఈ సమీకరణమును తృప్తి పరుచును అనగా ఈ జత సమీకరణం యొక్క సాధన అవుతుంది. $(10, 8)$ జతను $(8, 10)$ ఈ విధంగా రాయలేము. ఎందుకనగా $(8, 10)$ అర్థము $x = 8, y = 10$ అని అవుతుంది. ఈ విలువలు $x-y = 2$ సమీకరణమును తృప్తి పరచదు. దీని కారణంగా క్రమ యుగ్మములోని సంఖ్యల యొక్క క్రమం ముఖ్యమైనది అని గుర్తుంచుకోండి.

ఇప్పుడు $x-y = 2$ సమీకరణము యొక్క సాధనలను క్రమ యుగ్మ రూపములో రాద్దాం.

$(7, 5)$, $(-2, -4)$, $(0, -2)$, $(5.2, 3.2)$, $(8, 6)$ మొదలగు అనంత సాధనలుగలవు.

$4m - 3n = 2$ ఈ సమీకరణము యొక్క సాధనను కనుగొనండి. మీరు ఈ విధంగా మూడు వేర్వేరు సమీకరణములను తయారు చేసి వాటి సాధనలను కనుగొనండి.

ఇప్పుడు మొదటి రెండు సమీకరణములను చూడండి.

$x + y = 14$ I

$x - y = 2$ II

సమీకరణము I యొక్క సాధనలు $(9, 5)$, $(7, 7)$, $(8, 6)$...

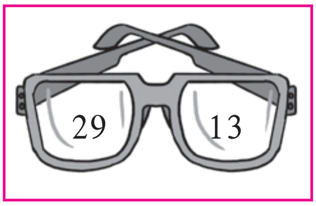
సమీకరణము II యొక్క సాధనలు $(7, 5)$, $(-2, -4)$, $(0, -2)$, $(5.2, 3.2)$, $(8, 6)$...

$(8, 6)$ అనే క్రమ యుగ్మము రెండు సమూహాలలో ఉమ్మడిగా ఉంది. ఈ క్రమ యుగ్మము రెండు సమీకరణములను తృప్తి పరుస్తుంది. కావున ఇది రెండు సమీకరణములకు ఉమ్మడి సాధన అవుతుంది.

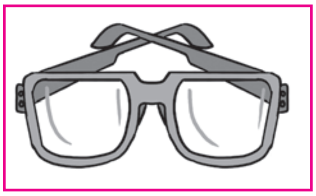
ఇది గుర్తుంచుకొందాం.

ఎప్పుడైతే రెండు చరరాశుల, రెండు రేఖీయ సమీకరణములకు ఒకే సమయంలో ఆలోచించి ఆ సమీకరణాలను **సమకాల చలన సమీకరణములు** (Simultaneous equations) అంటారు.

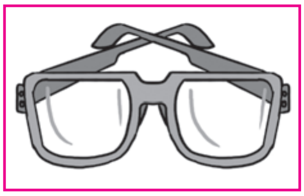
కృత్యం: కింద ఇచ్చిన కళ్ళజోళ్ళ అద్దాలపై ఇలాంటి సంఖ్యలను రాయండి.



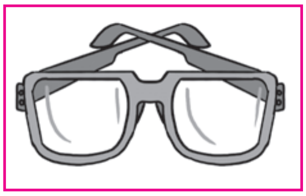
(i) వాటి మొత్తం 42 మరియు భేదము 16.



(ii) వాటి మొత్తం 37 మరియు భేదము 11.



(iii) వాటి మొత్తం 54 మరియు భేదము 20.



(iv) వాటి మొత్తం..... మరియు భేదము.

ఆలోచిద్దాం.

$x+y = 5$ మరియు $2x + 2y = 10$ ఇవి రెండు చరరాశులుగల రెండు సమీకరణములు.

$x+y = 5$ ఈ సమీకరణము యొక్క వేర్వేరు ఐదు సాధనలను వెతకండి. ఆ సాధన $2x + 2y = 10$ సమీకరణమును తృప్తి పరుస్తుందేమో పరీక్షించండి.

ఈ రెండు సమీకరణములను పరిశీలించండి.

రెండు చరరాశులుగల రెండు సమీకరణముల యొక్క సాధనలు సమానంగా ఉండుట కొరకు షరతును లభిస్తుందేమో శోధించండి.

తెలుసుకుందాం.

చరరాశులను తొలగించి సమకాల చలన సమీకరణములను సాధించే పద్ధతి (Elimination method)

$x + y = 14$ మరియు $x - y = 2$ ఈ సమకాల చలన సమీకరణ చరరాశులకు విలువలను ప్రతిక్షేపించి సాధించాము. కాని ప్రతిసారీ ఈ విధంగా చేయడం వీలుకాదు. ఉదాహరణకు $2x + 3y = -4$ మరియు $x - 5y = 11$ సమీకరణాలకు x మరియు y లకు వేర్వేరు విలువలను తీసుకొని సాధించడానికి ప్రయత్నించండి.

కావున సమకాలచలన సమీకరణములను సాధించుట కొరకు వేరొక పద్ధతిని ఉపయోగిస్తారు. ఈ పద్ధతిలో రెండు చరరాశులలో ఒక చరరాశిని తొలగించిన ఒక చరరాశి గల రేఖీయ సమీకరణము లభిస్తుంది. దానిని బట్టి ఆ చరరాశి యొక్క విలువను కనుగొంటారు. ఈ విలువను ఇచ్చిన సమీకరణములలోని ఏదైనా సమీకరణములో ప్రతిక్షేపించిన రెండవ చరరాశి విలువ లభిస్తుంది.

ఈ పద్ధతిని అర్థం చేసుకోవడానికి కింది ఉదాహరణములను నేర్చుకొండి.

ఉదా: (1) సాధించండి: $x + y = 14$ మరియు $x - y = 2$.

సాధన : రెండు సమీకరణములను కూడిన, ఒక చరరాశిగల సమీకరణమును పొందెదము.

$$\begin{array}{rrcll} & x + y & = & 14 & \ldots\ldots\ldots \text{I} \\ + & x - y & = & 2 & \ldots\ldots\ldots \text{II} \\ \hline & 2x + 0 & = & 16 & \\ & 2x & = & 16 & \\ & x & = & 8 & \end{array}$$

సమీకరణ (I) లో $x = 8$ ప్రతిక్షేపించగా,

$$x + y = 14$$

$$\therefore\ 8 + y = 14$$

$$\therefore\ y = 6$$

ఇక్కడ (8, 6) అనేది మొదటి సమీకరణము యొక్క సాధన అవుతుంది. ఇదే రెండవ సమీకరణమునకు కూడా సాధన అవుతుందా సరిచూద్దాం.

$x - y = 8 - 6 = 2$ ఇది సత్యము.

(8,6), అనేది రెండు సమీకరణముల ఉమ్మడి సాధన అవుతుంది.

అనగా $x + y = 14$ మరియు $x - y = 2$ సమకాలచలన సమీకరణములకు (8, 6) సాధన అవుతుంది.

ఉదా: (2) తల్లి మరియు కొడుకుల వయస్సుల మొత్తం 45. తల్లి యొక్క రెట్టింపు వయస్సు నుండి కొడుకు వయస్సును తీసివేసినచో 54 వచ్చినట్లయితే వారి ఇద్దరి వయస్సులను కనుగొనండి.

ఇచ్చిన వివరాలను చరరాశులను ఉపయోగించి రాసిన, ఉదాహరణను సులభంగా సాధించవచ్చు.

సాధన: తల్లి యొక్క ప్రస్తుత వయస్సును x సంవత్సరాలు మరియు కొడుకు యొక్క వయస్సు y సంవత్సరాలు అనుకొందాం.

మొదటి నియమం ప్రకారం, $x + y = 45$ I

రెండవ నియమం ప్రకారం, $2x - y = 54$ II

సమీకరణము (I) మరియు (II) లను కలుపగా

$$\begin{aligned} 3x + 0 &= 99 \\ 3x &= 99 \\ x &= 33 \end{aligned}$$

$x = 33$ ఈ విలువను మొదటి సమీకరణములో ప్రతిక్షేపించగా,

$$\begin{aligned} 33 + y &= 45 \\ y &= 45 - 33 \\ y &= 12 \end{aligned}$$

$x = 33$ మరియు $y = 12$ ఈ సాధన, రెండవ సమీకరణమును తృప్తి పరుస్తుంది. దీనిని సరిచూడండి.

తల్లి ప్రస్తుత వయస్సు 33 సం. మరియు కొడుకు వయస్సు 12 సంవత్సరాలు.

రెండు చరరాశులుగల రేఖీయ సమీకరణ యొక్క సాధరణ రూపం

$ax + by + c = 0$ ఈ సమీకరణలో a, b, c లు వాస్తవ సంఖ్యలైనా. a మరియు b ఒకేసారి 0 కానట్లయితే ఈ సమీకరణము రెండు చరరాశులుగల రేఖీయ సమీకరణ యొక్క సాధారణ రూపం అవుతుంది.

ఈ సమీకరణములో రెండు చరరాశుల ఘాతాంకం 1 ఇది రేఖీయ సమీకరణము అవుతుంది.

ఉదా: (1) కింది సమకాల చలన సమీకరణములను సాధించండి.

$$3x + y = 5 \text{.......... (I)}$$

$$2x + 3y = 1 \text{........(II)}$$

ఇక్కడ ఒక చరరాశిని తొలగించుటకు రెండు సమీకరణములలో ఏ చరరాశి యొక్క సహగుణకం సమాన లేదా వ్యతిరేక సంఖ్యగాదు. వాటిని సమానముగా చేద్దాం

సమీకరణం I ని ఇరువైపుల 3 చే గుణించగా,

$$\therefore \quad 3x \times 3 + 3 \times y = 5 \times 3$$

$$\therefore \quad 9x + 3y = 15 \quad \text{.......(III)}$$

$$2x + 3y = 1 \quad \text{.......(II)}$$

ఇప్పుడు సమీకరణ IIను నుండి III తీసివేయగా

$$\begin{array}{rcl} 9x + 3y & = & 15 \\ +\ 2x + 3y & = & 1 \\ - \quad - & & - \\ \hline 7x & = & 14 \\ x & = & 2 \end{array}$$

$x = 2$ ఈ విలువను ఏదేని సమీకరణములో ప్రతిక్షేపిద్దాం

$$\begin{array}{rrcl} & 2x + 3y & = & 1 \\ \therefore & 2 \times 2 + 3y & = & 1 \\ \therefore & 4 + 3y & = & 1 \\ \therefore & 3y & = & -3 \\ \therefore & y & = & -1 \end{array}$$

ఇక్కడ $(2, -1)$ ఈ సాధన రెండవ సమీకరణమునకు కూడా సత్యము అవుతుంది. దీనిని సరి చూడండి.

ఉదా: (2) కింది సమకాల చలన సమీకరణములను సాధించండి.

$$3x - 4y - 15 = 0 \quad \text{.......... (I)}$$

$$y + x + 2 = 0 \text{ ....(II)}$$

రెండు సమీకరణముల స్థిరాంకములను కుడివైపుకు తీసుకొని రాద్దాం

$$3x - 4y = 15 \text{........(I)}$$

$$x + y = -2 \text{ .... (II)}$$

y చరరాశిని తొలగించుట కొరకు సమీకరణం IIను 4చే గుణించి సమీకరణము I తో కలుపుదాం.

$$\begin{array}{rrcl} & 3x - 4y & = & 15 \\ + & 4x + 4y & = & -8 \\ & 7x & = & 7 \\ & x & = & 1 \\ \hline \end{array}$$

$x = 1$ ఈ విలువను సమీకరణం IIలో ప్రతిక్షేపిద్దాం

$$\begin{array}{rcl} x + y & = & -2 \\ \therefore 1 + y & = & -2 \\ \therefore y & = & -2 - 1 \\ \therefore y & = & -3 \end{array}$$

$(1, -3)$ సాధన అగును. ఈ సాధన సమీకరణం (I)కి కూడా సత్యము అవుతుంది. దీనిని సరిచూడండి.

ఆలోచిద్దాం.

$3x - 4y - 15 = 0$ మరియు $y + x + 2 = 0$ ఈ సమీకరణములనే x చరరాశిని తొలగించి సాధించవచ్చునా? వాటి సాధన ఇవే అవుతాయా?

తెలుసుకుందాం.

ఒక చరరాశి విలువను, రెండవ చరరాశి రూపంలో ప్రతిక్షేపించి చరరాశిని తొలగించుట (ప్రతిక్షేపణ పద్ధతి) (Substitution method)

చరరాశిని తొలగించుటకు మరొక పద్ధతి కూడా గలదు. సమీకరణములోని ఒక చరరాశి విలువను రెండవ చరరాశి రూపంలోకి మార్చి దానిని రెండవ సమీకరణలో ప్రతిక్షేపించి మొదటి చరరాశిని తొలగించవచ్చును. ఈ పద్ధతిని కింది ఉదహరణముల ద్వారా అర్థం చేసుకుందాం.

ఉదా: (1) సాధించండి: $8x+3y = 11$; $3x - y = 2$

సాధన: $8x + 3y = 11$.................. (I)

$3x - y = 2$.......................(II)

సమీకరణం (II)లో y విలువను x చరరాశి రూపంలో రాయడం సులభం అవుతుంది.

$3x - y = 2$

$3x - 2 = y$

ఇప్పుడు $y = 3x-2$ విలువను సమీకరణం (I)లో ప్రతిక్షేపిద్దాం.

$8x + 3y = 11$

$\therefore\ 8x + 3(3x-2) = 11$

$\therefore\ 8x + 9x - 6 = 11$

$\therefore\ 17x - 6 = 11$

$\therefore\ 17x = 11 + 6 = 17$

$\therefore\ x = 1$

x యొక్క విలువను $y = 3x - 2$లో ప్రతిక్షేపిద్దాం.

$\therefore\ y = 3 \times 1 - 2$

$\therefore\ y = 1$

$\therefore$ (1, 1) అనేది ఈ సమీకరణముల యొక్క సాధన అవుతుంది.

ఉదా:(1) సాధించండి: $3x - 4y = 16$; $2x - 3y = 10$

సాధన: $3x-4y=16$..........(I)

$2x - 3y = 10$.............(II)

సమీకరణం I నుండి x యొక్క విలువను y రూపంలో రాద్దాం.

$3x - 4y = 16$

$3x = 16 + 4y$

$$x = \frac{16+4y}{3}$$

x యొక్క విలువను సమీకరణము (II)లో ప్రతిక్షేపించగా

$2x - 3y = 10$

$$2\left(\frac{16+4y}{3}\right) - 3y = 10$$

$$\frac{32+8y}{3} - 3y = 10$$

$$\frac{32+8y-9y}{3} = 10$$

$32 + 8y - 9y = 30$

$32 - y = 30 \qquad \therefore\ y = 2$

ఇప్పుడు $y = 2$ ను సమీకరణ (I) లో ప్రతిక్షేపించగా

$3x - 4y = 16$

$\therefore\ 3x - 4\times2 = 16$

$\therefore\ 3x - 8 = 16$

$\therefore\ 3x = 16 + 8$

$\therefore\ 3x = 24$

$\therefore\ x = 8$

$\therefore\ x = 8$ మరియు $y = 2$

$\therefore$ (8, 2) అనేది సమీకరణముల యొక్క సాధన అవుతుంది.

అభ్యాసమాలిక 5.1

(1) x మరియు y చరరాశులను ఉపయోగించి రెండు చరరాశులు గల 5 రేఖీయ సమీకరణములు రాయండి.

(2) $x + y = 7$ సమీకరణము యొక్క 5 సాధనలను రాయండి.

(3) కింది సమకాల చలన సమీకరణములను సాధించండి.

(i) $x + y = 4$; $2x - 5y = 1$ (ii) $2x + y = 5$; $3x - y = 5$

(iii) $3x - 5y = 16$; $x - 3y = 8$ (iv) $2y - x = 0$; $10x + 15y = 105$

(v) $2x + 3y + 4 = 0$; $x - 5y = 11$ (vi) $2x - 7y = 7$; $3x + y = 22$

తెలుసుకుందాం.

సమకాలచలన సమీకరణములపై పద సమస్యలు:

పద సమస్యలు సాధించుచున్నప్పుడు ఇచ్చిన వివరాల ఆధారంగా సమీకరణములను తయారు చేయుట అనేది అత్యంత ముఖ్య ఘట్టము. సమీకరణముల సాధనలు కనుగొనే ప్రణాళికను కింది సోపానములలో చూపబడింది.

సోపానములు	ఉదాహరణ
పద సమస్యలను జాగ్రత్తగా చదివి అర్థం చేసుకోండి	రెండు సంఖ్యల మొత్తం 36. ఒక సంఖ్య ఎనిమిది రెట్ల నుండి 9ని తీసివేయగా రెండవ సంఖ్య లభిస్తుంది.
↓	↓
ఉదాహరణములోని వివరాల ఆధారంగా చరరాశులను ఉపయోగించండి.	మొదటి సంఖ్య $= x$ చి రెండవ సంఖ్య $= y$ అనుకొనుము
↓	↓
చరరాశులను ఉపయోగించి వాక్యములను గణిత భాషలో రాయండి.	సంఖ్యల మొత్తం 36 $\therefore x + y = 36$ చిన్న సంఖ్యకు 8 రెట్లు $= 8x$ చిన్న సంఖ్యకు 8 రెట్లు $- 9 = 8x - 9$ $\therefore$ పెద్ద సంఖ్య $= y = 8x - 9$
↓	↓
సరియైన పద్ధతిని ఉపయోగించి సమీకరణములను సాధించండి.	$x + y = 36$ $\therefore 8x - y = 9$ $\therefore 9x = 45$ $\therefore x = 5$ $\therefore 5 + y = 36$ $\therefore y = 36 - 5$ $\therefore y = 31$
↓	↓
సాధనలు పొందండి.	$x = 5, \ y = 31$
↓	↓
వచ్చిన సమాధానంను సమీకరణములో ప్రతిక్షేపించి సరిచూడండి.	$31 + 5 = 36$ ....(I) $31 = 8 \times 5 - 9$ ....(II)
↓	↓
సమాధానంను రాయండి.	$\therefore$ ఆ సంఖ్యలు 5 మరియు 31.

పదసమస్యలు

ఇప్పుడు మనం వివిధ రకాల పదసమస్యల గురించి ఆలోచిద్దాం.

(1) వయస్సు సంబంధ సమస్యలు

(2) సంఖ్యల సంబంధ సమస్యలు

(3) భిన్నములపై ఆధారపడిన సమస్యలు

(4) ఆర్థిక వ్యవహారాలపై ఆధారపడిన సమస్యలు

(5) జ్యామితీయ ఆకృతుల యొక్క ధర్మములపై ఆధారపడిన సమస్యలు

(6) వేగం, దూరం, కాలముపై ఆధారపడిన సమస్యలు

ఉదా: (1) రెండు సంఖ్యల మొత్తం 103. అయితే పెద్ద సంఖ్యను చిన్న సంఖ్యచే భాగించినచో, భాగఫలము 2 వచ్చును శేషం 19 వచ్చిన ఆ సంఖ్యలను కనుగొనండి.

సాధన: సోపానం 1: పదసమస్యలను అర్థం చేసుకోవడం.

సోపానం 2: కావల్సిన సంఖ్య కొరకు ఆంగ్ల అక్షరములను అనుకొనుట.

అదే విధంగా విభాజ్యము = విభాజికము × భాగఫలము + శేషము ఈ నియమంను గుర్తుంచుకొనుట.

పెద్ద సంఖ్య x మరియు చిన్న సంఖ్యను y అనుకుందాం.

సోపానం 3: ఇచ్చిన వివరాలు : సంఖ్యల మొత్తం = 103

కాబట్టి $x + y = 103$ ఈ సమీకరణం లభించింది.

పెద్ద సంఖ్యను చిన్న సంఖ్యచే భాగించిన భాగఫలం 2, శేషం 19 వచ్చును కావున

$x = 2 \times y + 19$ ...(విభాజ్యము = విభాజకం × భాగఫలం + శేషం)

అనగా $x - 2y = 19$. రెండవ సమీకరణము లభిస్తుంది.

సోపానం 4: ఇప్పుడు లభించిన సమీకరణములను సాధించుదాం

$$x + y = 103 \quad \text{................(I)}$$

$$x - 2y = 19 \quad \text{................(II)}$$

సమీకరణ (I) నుండి సమీకరణం (II)ను తీసివేయగా,

$$\begin{array}{rcl} x + y & = & 103 \\ x - 2y & = & 19 \\ - \quad + & & - \\ \hline 0 + 3y & = & 84 \\ \therefore \quad y & = & 28 \end{array}$$

సోపానం 5: $x + y = 103$ ఈ సమీకరణంలో y విలువను ప్రతిక్షేపించగా,

$$\therefore \quad x + 28 = 103$$

$$\therefore \quad x = 103 - 28$$

$$\therefore \quad x = 75$$

సోపానం 6: ఇచ్చిన సంఖ్యలు 75 మరియు 28.

ఉదా: (2) సలీల్ వయస్సు సంగ్రామ్ వయస్సులో సగం కంటే 23 సం.లు ఎక్కువ. ఐదు సంవత్సరాల క్రితం వారి వయస్సుల మొత్తం 55 సం. అయితే వారి ప్రస్తుత వయస్సును కనుగొనండి.

సాధన: సలీల్ ప్రస్తుత వయస్సు x మరియు సంగ్రామ్ ప్రస్తుత వయస్సు y అనుకొందాం

సలీల్ వయస్సు సంగ్రామ్ వయస్సులో సగం కంటే 23 సం. ఎక్కువ గలదు, అనగా $x = \frac{y}{2} + \square$

ఐదు సం. ల క్రితం సలీల్ వయస్సు $= x - 5$. ఐదు సం. ల క్రితం సంగ్రామ్ వయస్సు $= y - 5$

ఐదు సం. ల క్రితం వారి వయస్సుల మొత్తం = 55

$\square + \square = 55$

సమీకరణలను సాధించి సాధనను కనుగొనుట.

$2x = y + 46 \qquad 2x - y = 46 \ \ldots\ldots\ldots\ldots (\text{I})$

$(x - 5) + (y - 5) = 55$

$x + y = 65 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (\text{II})$

సమీకరణ (I) మరియు సమీకరణ (II)ల కూడిక చేద్దాం

$$\begin{aligned} 2x - y &= 46 \\ + \quad x + y &= 65 \\ \hline \therefore \ 3x &= 111 \\ \therefore \ x &= 37 \end{aligned}$$

$x = 37$ను సం. (II)లో ప్రతిక్షేపించగా.

$$\begin{aligned} x + y &= 65 \\ \therefore \ 37 + y &= 65 \\ \therefore \ y &= 65 - 37 \\ \therefore \ y &= 28 \end{aligned}$$

సలీల్ ప్రస్తుత వయస్సు 37 సం. మరియు సంగ్రామ్ ప్రస్తుత వయస్సు 28 సం.

ఉదా: (3) ఒక రెండంకెల సంఖ్య దాని అంకెల మొత్తంనకు నాలుగు రెట్లు కలదు. ఆ అంకెల స్థానాలను మార్చగా, లభించే సంఖ్య మొదటి సంఖ్య రెట్టింపు కంటే 9 తక్కువైన ఆ సంఖ్యను కనుగొనండి.

సాధన: మొదటి సంఖ్యలోని ఒకట్ల స్థానములోని అంకెను x అని పదుల స్థానంలోని అంకెను y అని అనుకుందాం.

	పదుల స్థానం లోని అంకె	ఒకట్ల స్థానంలోని అంకె	సంఖ్య	అంకెల మొత్తం
మొదటి సంఖ్యకై	y	x	$10y + x$	$y + x$
అంకెల స్థానాలను మార్చగా లభించే సంఖ్యకై	x	y	$10x + y$	$x + y$

మొదటి నియమానుసారం $10y + x = 4\,(y+x)$

$\therefore 10y + x = 4y + 4x$

$\therefore x - 4x + 10y - 4y = 0$

$\therefore -3x + 6y = 0 \qquad \therefore \ -3x = -6y \qquad \therefore \ x = 2y \quad \ldots\ldots (\text{I})$

రెండవ నియమం ప్రకారం $10x + y = 2(10y+x)-9$

$$10x+y = 20y + 2x-9$$

$$10x-2x+y-20y = -9$$

$$8x - 19y = -9 \quad \text{.............(II)}$$

$$x = 2y \quad \text{.............(I)}$$

$x = 2y$ ఈ విలువను సమీకరణం (II)లో ప్రతిక్షేపించగా,

$$16y - 19y = -9 \quad \text{..............(I)}$$

$$\therefore \; -3y = -9$$

$$\therefore \quad y = 3$$

$y = 3$ను సమీకరణం (I)లో ప్రతిక్షేపించగా, $x - 2y = 0$

$$x - 2 \times 3 = 0 \qquad \therefore \; x - 6 = 0 \qquad \therefore \; x = 6$$

మొదటి రెండు అంకెల సంఖ్య : $10y + x = 10 \times 3 + 6$

$$= 36$$

ఉదా: (4) ఒక గ్రామం జనాభా 50,000 గలదు. ఒక సంవత్సరంలో పురుషుల సంఖ్య 5% పెరిగెను మరియు స్త్రీల సంఖ్య 3% పెరిగెను. దాని వలన ఈ సంవత్సరం జనాభా 52,020 అయ్యెను. అయిన గత సం. ఆ గ్రామంలో పురుషులు మరియు స్త్రీల సంఖ్య ఎంత?

సాధన: గత సం. గ్రామంలోని పురుషుల సంఖ్య x మరియు స్త్రీల సంఖ్యను y అనుకొనుము.

మొదటి నియమం ప్రకారం $\square + \square = 50000$ ....(I)

పురుషుల సంఖ్య 5% పెరిగెను. పురుషుల సంఖ్య $\frac{\square}{\square}x$ అయింది.

స్త్రీల సంఖ్య 3% పెరిగెను. స్త్రీల సంఖ్య $\frac{\square}{\square}y$ అయింది.

రెండవ నియమం ప్రకారం $\frac{\square}{\square}x + \frac{\square}{\square}y = 52020$

$$\square x + \square y = 5202000 \quad \text{.......(II)}$$

సమీకరణం (I) ని 103 చే గుణించగా,

$$\square x + \square y = 5150000 \quad \text{.......(III)}$$

సమీకరణం (II) నుండి సమీకరణం (III) ను తీసివేయగా

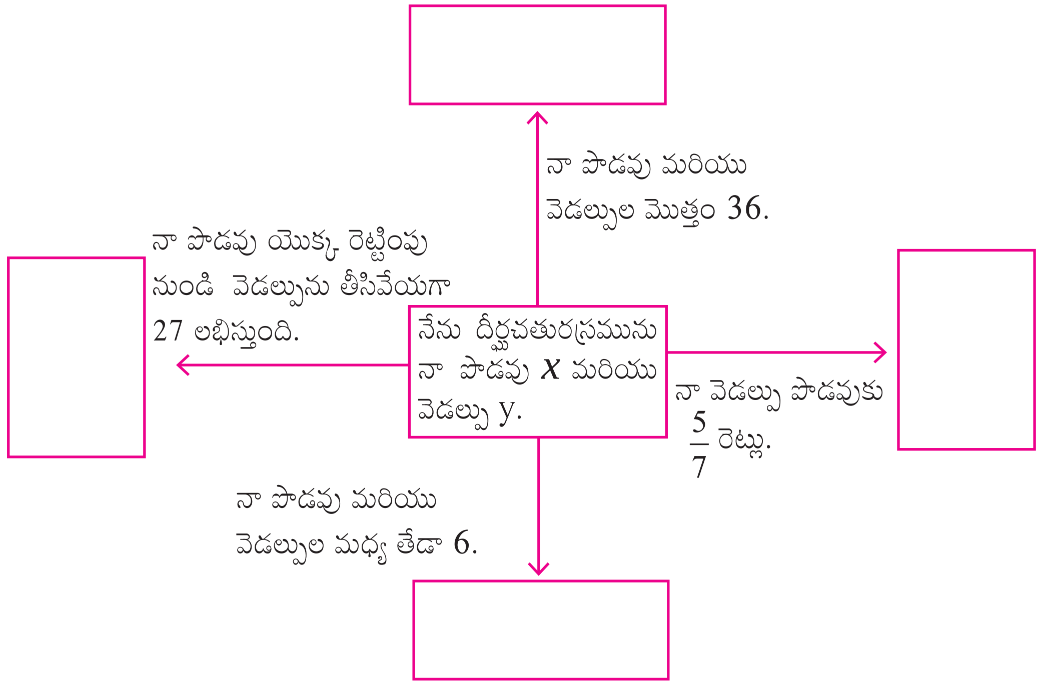
$$2x = 5202000 - 5150000$$

$$2x = 52000$$

$\therefore$ పురుషుల సంఖ్య $= x = \square$ $\therefore$ స్త్రల సంఖ్య $= y = \square$

కృత్యం I: కింది పటములో బాణం గుర్తు దగ్గర కొన్ని సూచనలు రాయబడ్డాయి. దాని ఆధారంగా లభించే సమీకరణం బాణం గుర్తు ఎదురుగా ఉన్న గడిలో రాయండి. గడిలోని ఏవేని రెండు సమీకరణములను తీసుకొని ఆ సమీకరణముల సాధనలను కనుగొనండి. సాధనలను సరిచూడండి.

వీటిలో ఏవేని రెండు సమీకరణముల ఒక జత ఇలాంటి ఎన్ని జతలు లభించును? వాటి సాధనలపై చర్చించండి.



అభ్యాస మాలిక 5.2

(1) ఒక కవరులో కొన్ని 5 రూ. మరియు 10 రూ. నోట్లు గలవు. నోట్ల మొత్తం రూ.350. రూ. 5 నోట్ల సంఖ్య రూ. 10 నోట్ల సంఖ్యకు రెట్టింపు కంటే 10 తక్కువ అయితే కవరులో రూ. 5 మరియు రూ. 10 నోట్లు ఎన్ని గలవు?

(2) ఒక భిన్నములో హారము లవము యొక్క రెట్టింపు కంటే 1 తక్కువ. లవము మరియు హారములకు 1 కలుపగా లభించే హారమునకు లవమునకు గల నిష్పత్తి 3 : 5 అవుతుంది, అయితే ఆ భిన్నమును కనుగొనండి.

(3) ప్రియాంక మరియు దీపికల వయస్సుల మొత్తం 34 సం. ప్రియాంక దీపిక కంటే 6 సం.లు పెద్దది. వారి వయస్సులను కనుగొనండి.

(4) ఒక జంతు ప్రదర్శనశాలలో సింహం మరియు నెమళ్ళ మొత్తం సంఖ్య 50. వాటి కాళ్ళ మొత్తం సంఖ్య 140. అయితే ఆ జంతు ప్రదర్శనశాలలోని సింహం మరియు నెమళ్ళ సంఖ్యను కనుగొనండి.

(5) సంజయ్‌కి ఉద్యోగంలో కొంత నెలసరి జీతం లభిస్తుంది. ప్రతి సంవత్సరం అతని జీతంలో నిర్దిష్ట సొమ్ము పెరుగుతుంది. అయితే నాలుగు సం.లలో అతని నెలసరి జీతం 4,500 రూ. మరియు 10 సం.లలో నెలసరి జీతం 5,400 రూ. అయిన ట్లయితే అతని ప్రారంభ జీతం మరియు సంవత్సరానికి పెరిగే సొమ్మును కనుగొనండి.

(6) 3 కుర్చీలు మరియు టేబుల్ల ధర 4500 రూ. 5 కుర్చీలు మరియు 3 టేబుల్ల ధర 7000 రూ. అయితే 2 కుర్చీలు మరియు 2 టేబుల్ల మొత్తం ధరను కనుగొనండి.

(7) ఒకరెండంకెలసంఖ్యలోని అంకెలమొత్తం 9. ఒకవేళ దాని అంకెలను తారుమారు చేసినవచ్చు సంఖ్య మొదటి సంఖ్యకంటే 27 పెద్దది. అయిన ఆ రెండంకెల సంఖ్యను కనుగొనండి.

(8*) Δ ABCలో కోణం A యొక్క కొలత కోణం $\angle$ B మరియు $\angle$ Cల కొలతల మొత్తమునకు సమానము. అదేవిధంగా కోణం $\angle$ B మరియు $\angle$ C ల కొలతల నిష్పత్తి 4:5 అయితే త్రిభుజంలోని కోణముల కొలతలు కనుగొనండి.

(9*) ఒక 560 సెం.మీల పొడవుగల దారమును, చిన్న ముక్క పొడవు యొక్క రెట్టింపు పెద్ద ముక్క పొడవుకు $\frac{1}{3}$ రెట్లు ఉండునట్టుగా రెండు ముక్కలు చేయాలి. అయిన పెద్ద దారం ముక్క యొక్క పొడవును కనుగొనండి.

(10) ఒక పోటి పరీక్షలో 60 ప్రశ్నలు గలవు, ప్రతి ప్రశ్నకు సరియైన సమాధానానికి 2 మార్కులు, తప్పు సమాధానంకు −1 మార్కు ఇవ్వబడును. యశ్వంత్ మొత్తం 60 ప్రశ్నలు సాధించగా అతనికి 90 మార్కులు లభించెను, అయిన అతని ఎన్ని ప్రశ్నల సమాధానాలు తప్పు అయినవి?

ప్రశ్న సంగ్రహము - 5

(1) కింది వాటిలో సరియైన పర్యాయమును ఎన్నుకొనుము

(i) $3x + 5y = 9$ మరియు $5x + 3y = 7$ అయిన $x + y$ విలువ కింది వాటిలో ఏది?

(A) 2 (B) 16 (C) 9 (D) 7

(ii) దీర్ఘచతురస్రం పొడవు మరియు వెడల్పుల నుండి 5 తీసివేసిన దాని చుట్టుకొలత 26 వస్తుంది. గణిత భాషలో ఈ వివరణ రూపం కింది వాటిలో ఏది?

(A) $x - y = 8$ (B) $x + y = 8$ (C) $x + y = 23$ (D) $2x + y = 21$

(iii) అజయ్, విజయ్ కంటే 5 సం. లు చిన్నవాడు. వారి ఇద్దరి వయస్సుల మొత్తం 25. అయితే అజయ్ వయస్సు ఎంత?

(A) 20 (B) 15 (C) 10 (D) 5

(2) కింది సమ కాలచలన సమీకరణములను సాధించండి.

(i) $2x + y = 5$; $3x - y = 5$

(ii) $x - 2y = -1$; $2x - y = 7$

(iii) $x + y = 11$; $2x - 3y = 7$

(iv) $2x + y = -2$; $3x - y = 7$

(v) $2x - y = 5$; $3x + 2y = 11$

(vi) $x - 2y = -2$; $x + 2y = 10$

(3) చరరాశుల సహగుణకములను సమానం చేసి కింది సమీకరణములను సాధించండి.

(i) $3x-4y=7$; $5x+2y=3$

(ii) $5x + 7y=17$; $3x-2y=4$

(iii) $x-2y= -10$; $3x-5y= -12$

(iv) $4x + y=34$; $x+4y= 16$

(4) కింది సమకాల చలన సమీకరణములను సాధించండి.

(i) $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=4$; $\frac{x}{2}-\frac{y}{4}=1$

(ii) $\frac{x}{3}+5y=13$; $2x+\frac{y}{2}=19$

(iii) $\frac{2}{x}+\frac{3}{y}=13$; $\frac{5}{x}-\frac{4}{y}=-2$

(5*) ఒక రెండంకెల సంఖ్య దాని అంకెల మొత్తమునకు 4 రెట్లకన్న 3 ఎక్కువ. ఒకవేళ ఆ సంఖ్యకు 18 కలిపిన లభించే మొత్తం మొదటి అంకెలను తారుమారు చేయగావచ్చు సంఖ్య లభిస్తుంది. అయిన ఆ సంఖ్యను కనుగొనండి.

(6) 8 పుస్తకములు మరియు 5 పెన్నుల మొత్తం ధర 420 రూపాయలు, 5 పుస్తకములు మరియు 8 పెన్నుల మొత్తం ధర 321 రూపాయలు అయిన ఒక పుస్తకము మరియు రెండు పెన్నుల ధరను కనుగొనండి.

(7*) ఇద్దరు వ్యక్తుల ఆదాయాల నిష్పత్తి 9:7 మరియు వారి ఖర్చుల నిష్పత్తి 4:3. ఒక్కొక్కరి పొదుపు రూ. 200 అయిన వారి నెలసరి ఆదాయములను కనుగొనండి.

(8*) ఒక దీర్ఘచతురస్రం పొడవును 5 యూనిట్లు తగ్గించి వెడల్పును 3 యూనిట్లు పెంచిన దాని వైశాల్యం 9 చ. యూ. తగ్గును. ఒకవేళ ఆ దీర్ఘచతురస్రం పొడవును 3 యూనిట్లు తగ్గించి, వెడల్పును 2 యూనిట్లు పెంచినచో దాని వైశాల్యం 67 చ. యూనిట్లు పెరిగినట్లయితే ఆ దీర్ఘ చతురస్రం పొడవు, వెడల్పులను కనుగొనండి.

(9*) ఒక రహదారిపైనున్న A, B అనే రెండు స్థలాల మధ్యదూరం 70 కి.మీ. ఒక కారు A స్థలం నుండి, రెండవ కారు B స్థలం నుండి బయలుదేరుతాయి. ఒకవేళ అవి ఒకే దిశలో బయలుదేరిన 7 గంటల పిదప ఒకదానికొకటి కలుసుకుంటాయి. వ్యతిరేక దిశలో బయలుదేరిన 1 గంట పిదవ కలుసుకుంటాయి. అయితే వాటి వేగములను కనుగొనండి.

(10*) ఒక రెండంకెల సంఖ్య మరియు ఆ సంఖ్యలోని అంకెలను తారుమారు చేయగా లభించే సంఖ్యల మొత్తం 99, అయిన ఆ సంఖ్యను కనుగొనండి.

కృత్యం: భిన్నమును వెదకండి.

$$\frac{\text{లవము } x}{\text{హారము } y}$$

భిన్నము యొక్క లవమును 3 చే గుణించి హారము నుండి 3 తీసివేయగా లభించు భిన్నము $\frac{18}{11}$.

సమీకరణం I

$$11x - 6y + 18 = 0$$

భిన్నము యొక్క లవముకు 8 కలిపి హారమును రెట్టింపు చేసినచో లభించు భిన్నము. $\frac{1}{2}$.

సమీకరణం II

$$x - y + 8 = 0$$

$\therefore$ ఇచ్చిన భిన్నము = $\frac{\square}{\square}$

వచ్చిన సమాధానమును పరిక్షించుకోండి.

6 ఆర్థిక ప్రణాళిక

RUIHY3

పదండి, నేర్చుకుందాం.

- ఆర్థిక ప్రణాళిక
- పెట్టుబడి, పొదుపు
- పన్నుల విధానం
- ఆదాయ పన్ను-లెక్కింపు

పదండి, చర్చిద్దాం

అనఘా : మనం కంప్యూటర్ (గణన యంత్రం) కొనుక్కుందామా?

అమ్మ : సరే, తీసుకుందాం కాని వచ్చే సంవత్సరం తీసుకుందాం.

అనఘా : మరి, ఈ సంవత్సరం ఎందుకు వద్దు?

అమ్మ : దాని ధర తక్కువ ఏమి (లేదు) ఉండదు.

అనఘా : అంటే డబ్బులు పోగు చేయవలెను. అంతే కదా?

అమ్మ : అవును.

మన పరిసరాలలో ఇలాంటి రకమైన మాటలు చాలా మన చెవిన పడుతుంటాయి.

ప్రతి వ్యక్తికి వివిధ అవసరాలను తీర్చడానికి డబ్బు అవసరం ఉంటుంది. అందువలననే ప్రస్తుత కాలంలో ముఖ్యమైన అవసరాలను తీర్చుకొని ఇతర అవసరాలను తీర్చుకోవడానికి ప్రతి వ్యక్తి డబ్బును ప్రోగు చేసే ప్రయత్నం చేస్తాడు. దానినే మనం 'పొదుపు' చేయడం అని అంటాము. ఈ పొదుపు సురక్షితంగా ఉండటానికి దానిలో పెరుగుదల కొరకు మనం 'ఫిక్స్‌డ్ డిపాజిట్' చేస్తాం లేదా స్థలం, ఇల్లు లాంటి స్థిర ఆస్తులను కొనుగోలు చేస్తాం. దీనినే 'పెట్టుబడి' అని అంటారు.

ప్రతి పెట్టుబడిదారుడు అవసరమైనంత ఖర్చు చేసి మిగిలిన డబ్బును పొదుపు చేస్తాడు, అలాగే పొదుపు చేసిన డబ్బును ఆలోచించి పెట్టుబడి పెడతాడు, దీనిని **'ఆర్థిక ప్రణాళిక'** అంటారు. ధనం యొక్క వృద్ధి, సంరక్షణ ఈ ఆర్థిక ప్రణాళిక యొక్క ముఖ్య ప్రయోజనం.

ప్రతి మనిషి జీవితంలో అనుకున్న లేదా అనుకొని సంఘటనలకై ముందస్తు తయారీగా ఆర్థిక ప్రణాళిక ఉపయోగపడుతుంది. కొన్ని ఉదాహరణలు కిందనీయబడినవి.

అనుకున్న సంఘటనలు

(1) పిల్లల విద్య మరియు వారికై ఇతర ఖర్చులు

(2) వ్యాపారం కొరకు మూలధనం

(3) వాహనాల కొనుగోలు

(4) గృహ నిర్మాణం లేదా కొనుగోలు

(5) వృద్ధాప్యంలోని అవసరాలు

అనుకోని సంఘటనలు

(1) ప్రకృతి వైపరీత్యాలు

(2) కుటుంబంలో ఎవరిదైన ఆరోగ్యం పాడవడం

(3) ప్రమాదాల వలన జరిగేనష్టం

(4) ఆకస్మిక మరణం

ఆర్థిక ప్రణాళిక ఎందుకు చేయాలి అన్న దానికి సమాధానంపై సంఘటనలే కాకుండా మరికొన్ని కారణాలు వీటినుండి లభిస్తాయి. అర్థిక ప్రణాళిక చేస్తున్నప్పుడు కొన్ని విషయాలు గుర్తుంచుకొవలసి ఉంటుంది.

తెలుసుకుందాం.

పొదుపు (Savings)

(1) పొదుపు సురక్షితంగా ఉండి దానిలో పెరుగుదల ఉండడం ఎంతైనా శ్రేయస్కరం. మనం పొదుపు చేసిన డబ్బు బ్యాంకులో లేదా పోస్టాఫీసులో సురక్షితంగా ఉంటుంది. బ్యాంకులో పొదుపు ఖాతాలో జమ అయిన డబ్బు మూలంగా నగదు రహిత (cashless) లావాదేవీలకు వీలుగా ఉంటుంది. ఇలాంటి లావాదేవీల వలన మన దగ్గర పెద్ద మొత్తంలో నగదు ఉంచుకోవలసిన అవసరం ఉండదు. ఆ డబ్బును పోగొట్టుకోవడం లేదా దొంగిలించబడడం అనే భయాలు ఉండవు.

(2) మనం పొదుపు చేసిన డబ్బు నగదు రూపంలో ఉంచిన దానిని చెలామణి చేయకుండా అలాగా ఉంచితే దాని యొక్క విలువ కాలానుగుణంగా తగ్గుతుంది. అనగా వస్తువులను కొనే సామర్థ్యం ఆ నగదుకు అనగా డబ్బు యొక్క కొనుగోలు సామర్థ్యం (Purchasing power) తగ్గుతుంది. (ఉదా. ఈ రోజు 10 రూ.లలో 2 పెన్సిళ్ళు వచ్చినట్లయితే కొన్ని సంవత్సరాల తర్వాత అదే ధరలో ఒకే పెన్సిల్ లభిస్తుంది.) దీని వలన పొదుపును సరియైన చోట పెట్టుబడి పెట్టి అది వృద్ధి చెందునట్లుగా చేయడం తప్పనిసరి అవుతుంది.

(3) జమ చేసిన (ప్రోగు చేసిన) మొత్తం వ్యాపార వృద్ధికి, కొత్త వ్యాపారం ప్రారంభించడానికి ఉపయోగించినట్లయితే జాతీయోత్పత్తి పెరుగుతుంది.

(4) మొత్తం సంపాదనలో కొంత భాగంను సమాజం కొరకు ఖర్చు చేసినట్లయితే వాటి సుదూర ఫలితాలు అందరికి లభిస్తాయి.

(5) అవసరాలకు సరిపోయేంత ఖర్చు చేసి, విలాసాల కొరకు ఖర్చును తగ్గించి, విద్య, వైద్యం మొ. వాటి కొరకు పొదుపు చేయడం శ్రేయస్కరం.

పదండి, చర్చిద్దాం.

పై చిత్రమును పరిశీలించండి. పొదుపు మరియు పెట్టుబడులకు కొన్ని మార్గములను పై చిత్రంలో చూపబడినవి. వాటిపై చర్చించండి. ఇవేకాక ఇంకేమైనా మార్గములు ఉన్నవా, ఆ సమాచారమును సేకరించండి. వాటిని చిత్రములోని ఖాళీ స్థలంలో రాయండి.

తెలుసుకుందాం.

పెట్టుబడి (Investments)

పెట్టుబడి చాలా రకాలుగా ఉంటుంది. పెట్టుబడి దారుడు బ్యాంకు, పోస్టాఫీసు లాంటి ఆర్థిక లావాదేవీలు చేసే సంస్థలలో పెట్టుబడి చేయడానికి ఇష్టపడతారు. ఎందుకనగా డబ్బు ఎక్కువ సురక్షితంగా ఉంటుంది. షేర్లు, మ్యూచువల్ ఫండ్ మొదలైన వాటిలో పెట్టుబడి పెట్టడం కొంచెం సాహసోపేతమైన పని . ఎందుకనగా ఏ వ్యాపారంలో ఈ డబ్బును పెట్టుబడి పెడతారో ఆ వ్యాపారంలో నష్టం వచ్చినచో పెట్టుబడి పెట్టిన డబ్బు తగ్గుతుంది. దీనికి విరుద్ధంగా లాభం వచ్చినచో డబ్బు సురక్షితంగా ఉండి మరియు లాభంలో వాటా లభించే అవకాశం ఉంటుంది.

పెట్టుబడి దారుడు, పెట్టుబడి పెడుతున్నప్పుడు రెండు ముఖ్యమైన విషయాల గురించి ఆలోచించాలి. ఒకటి నష్టం రెండవది లాభం నష్టభయాన్ని అధిగమించిన పెట్టుబడిదారు (పొదుపరి)లకు అధిక లాభాలు లభించవచ్చు. కాని అధిక నష్టాలు ఉండడం వలన నష్టం కూడా కలిగే అవకాశం ఉంటుందని గుర్తుంచుకోవాలి.

ఆదాయం, పెట్టుబడులపై ఆధార పడిన కొన్ని ఉదాహరణలను కింద సాధించి చూపడం జరిగింది, వాటి అభ్యసించండి.

ఉదా: (1) శ్యాంరావు 2015-16 గాను అన్ని రకాల పన్నులు చెల్లించిన తర్వాత వార్షిక ఆదాయం 6,40,000 రూ.లు గలదు. అతడు ప్రతి నెల 2,000 రూ.ల చొప్పున భీమా కిస్తీ చెల్లిస్తాడు. వార్షిక ఆదాయంలో 20% సొమ్మును ప్రావిడెంట్ ఫండ్‌లో జమ చేస్తాడు. అత్యవసర ఖర్చుల కొరకు ప్రతినెల 500 రు.లు పక్కకు పెడతారు. అయిన సంవత్సరంలో మొత్తం ఖర్చు కొరకు అతని వద్ద ఎంత మొత్తం మిగులుతుంది?

సాధన: (i) శ్యాంరావు వార్షిక ఆదాయం = 6,40,000 రూ. లు

(ii) భీమా కొరకు = $2000 \times 12 = 24,000$ రూ. లు

(iii) ప్రావిడెంట్ ఫండ్‌లో జమ చేసిన మొత్తం = $6,40,000 \times \frac{20}{100} = 1,28,000$ రూ.లు

(iv) అత్యవసర ఖర్చుల కొరకు పక్కకు తీసిన మొత్తం = $500 \times 12 = 6000$ రూ. లు

$\therefore$ కేటాయించిన మొత్తం సొమ్ము = $24,000 + 1,28,000 + 6,000 = 1,58,000$ రూ.లు

$\therefore$ సంవత్సర మొత్తం ఖర్చుకు మిగిలే సొమ్ము = $6,40,000 - 1,58,000 = 4,82,000$ రూ.లు

ఉదా: (2) శ్రీ శహ 3,20,000 రూ.లను 10% చక్రవడ్డీ చొప్పున బ్యాంకులో జమ చేసెను. అదే విధంగా అతను 2,40,000 రూ.లను పన్ను రహిత మ్యూచువల్ ఫండ్‌లో పెట్టుబడి పెట్టెను. బజారు ధర ప్రకారం 2 సం.ల తర్వాత అతనికి 3,05,000 రూ.లు లభించినవి. అయిన అతని యొక్క ఏ పెట్టుబడి లాభదాయకంగా ఉంది?

సాధన: (i) చక్రవడ్డీ ప్రకారం పెట్టుబడి మొత్తంపై వడ్డీని ముందుగా కనుగొందాం.

చక్రవడ్డీ = మొత్తం − అసలు

అనగా $I = A - P$

$$= P\left(1+\frac{r}{100}\right)^n - P$$

$$= P\left[\left(1+\frac{r}{100}\right)^n - 1\right]$$

$$= 3,20,000\left[\left(1+\frac{10}{100}\right)^2 - 1\right]$$

$$= 3,20,000 \left[(1.1)^2 - 1\right]$$
$$= 3,20,000 \left[1.21 - 1\right]$$
$$= 3,20,000 \times 0.21$$
$$= 67,200 \text{ రూ.లు}$$

శహ 3,20,000 రూ.లు బ్యాంకులో పొదుపు చేయగా అతనికి 67,200 రూ.ల వడ్డీ లభించింది లభించిన వడ్డీ పెట్టుబడిలో ఎంత శాతమో కనుగొందాము.

వడ్డీ శాతము $= \dfrac{100 \times 67200}{3,20,000} = 21$ $\therefore$ బ్యాంకులోని పెట్టుబడి వలన 21% లాభం లభించింది.

(ii) మ్యుచువల్ ఫండ్‌లో 2 సంవత్సరముల తర్వాత లభించిన మొత్తం = 3,05,000 రూ. లు

$\therefore$ మ్యూచువల్ ఫండ్‌లోని లాభం = 3,05,000 – 2,40,000 = 65,000 రూ. లు

$\therefore$ లాభం యొక్క శాతం $= \dfrac{65000 \times 100}{2,40,000} = 27.08$

మ్యూచువల్ ఫండ్‌లోని పెట్టుబడి వలన అతనికి 27.08% లాభం కలిగింది.
దీనిని బట్టి శ్రీ శహగారికి మ్యూచువల్ ఫండ్ పెట్టుబడి వలన ఎక్కువ లాభం జరిగింది.

ఉదా: (3) కరీం భాయ్, అద్దాల వ్యాపారంలో 4,00,000 రూ. లు పెట్టుబడి పెట్టాడు. 2 సం.ల తర్వాత ఆయనకు ఈ వ్యాపారంలో 5,20,000 రూ. లు లభించినవి. పెట్టుబడి పోగా మిగిలిన లాభంను 3 : 2 నిష్పత్తిలో క్రమముగా ఫిక్స్‌డ్ డిపాజిట్ మరియు షేర్స్‌లలో పెట్టుబడి పెట్టినచో అతడు దేనిలో ఎంత పెట్టుబడి పెట్టాడు?

సాధన: కరీంభాయ్‌కు 2 సం.ల అనంతరం లభించిన లాభం = 5,20,000 – 4,00,000 = 1,20,000 రూ.లు

ఫిక్స్‌డ్ డిపాజిట్‌లోని పెట్టుబడి మొత్తం $= \dfrac{3}{5} \times 1,20,000$

$= 3 \times 24,000$
$= 72,000$ రు.లు

షేర్స్‌లలోని పెట్టుబడి మొత్తం $= \dfrac{2}{5} \times 1,20,000$

$= 2 \times 24,000$

$= 48,000$ రు.లు

కరీంభాయ్ ఫిక్స్‌డ్ డిపాజిట్, షేర్స్ ఈ రెండింటిలో వరసగా 72,000 వరసగా 48,000 రూ.లు పెట్టుబడి పెట్టెను.

ఉదా: (4) శ్రీ అనిల్ ఆదాయ, వ్యయాల నిష్పత్తి 5:4 శ్రీ అమన్ యొక్క అదే నిష్పత్తి 3:2. అదే విధంగా అమన్ నెలసరి ఆదాయంలో 4% అనిల్ నెలసరి ఆదాయం 7% నికి సమానం. అనిల్ నెలసరి ఆదాయం 9600 రూ.లు ఉన్నచో
(i) శ్రీ అమన్ నెలసరి ఆదాయంను కనుగొనండి (ii) శ్రీ. అనిల్ మరియు శ్రీ అమన్‌ల పొదుపును కనుగొనండి.

సాధన: పొదుపు = ఆదాయం − ఖర్చు అని మనకు తెలుసు

అనిల్ ఆదాయం, ఖర్చుల నిష్పత్తి $5 : 4$

అనిల్ ఆదాయం $5x$ అనుకొనిన

అనిల్ ఖర్చు $4x$ అనుకొనిన

అమన్ ఆదాయం, ఖర్చుల నిష్పత్తి $3 : 2$

అమన్ ఆదాయం $3y$ అనుకొనిన

అమన్ ఖర్చు $2y$ అనుకొనిన

అనిల్ నెలసరి ఆదాయం 9600 రూ.లు అనగా $5x = 9600$ దీని నుండి x ని కనుగొందాం

$$\therefore 5x = 9600$$
$$x = 1920$$

నెలసరి ఖర్చు $= 4x = 4 \times 1920 = 7680$ రూ.లు

అనిల్ యొక్క నెలసరి ఖర్చు 7680 రూ.లు $\therefore$ అనిల్ పొదుపు 1920 రూ.లు

అమన్ ఆదాయంలో 4% = అనిల్ ఆదాయంలో 7% అని ఇవ్వబడింది.

$$\therefore \frac{4}{100} \times 3y = 9600 \times \frac{7}{100}$$

$$\therefore 12y = 9600 \times 7$$

$$\therefore y = \frac{9600 \times 7}{12} = 5600$$

అమన్ ఆదాయం $= 3y = 3 \times 5600 = 16,800$ రూ.లు

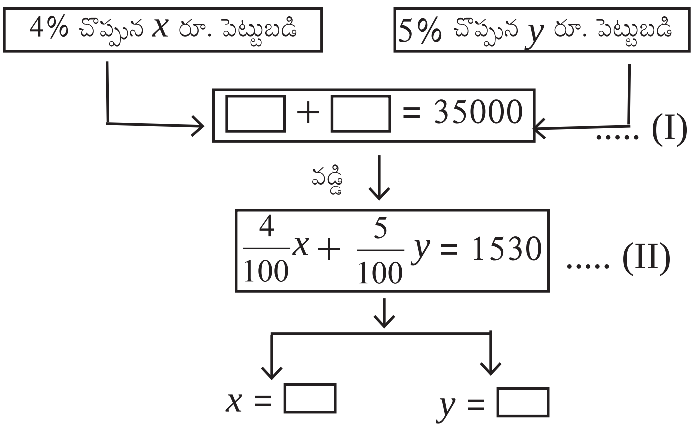
అమన్ ఖర్చు $= 2y = 2 \times 5600 = 11,200$ రూ.లు

$\therefore$ అమన్ పొదుపు $16,800 - 11,200 = 5,600$ రూ.లు

అమన్ యొక్క నెలసరి ఆదాయం 16,800 రూ.లు అమన్ యొక్క పొదుపు 5,600 రూ.లు

అనిల్ యొక్క నెలసరి పొదుపు 1,920 రూ.లు

కృత్యము I : అమిత 35000 రూ.లలో కొంత సొమ్మును 4% మిగిలిన సొమ్మును 5% వడ్డీ చొప్పున ఒక సంవత్సరానికి పెట్టుబడి పెట్టింది. ఆమెకు మొత్తం వడ్డీ 1530 రూ.లు లభించిన ఆమె వేర్వేరు వడ్డీల చొప్పున పెట్టిన పెట్టుబడుల సొమ్మును కనుగొనండి.



ఉపక్రమము : (1) తల్లి దండ్రుల సహాయంతో మీ ఇంటిలో వారం రోజుల జమా ఖర్చులు రాయండి. దానికై ఖర్చుల ప్రకారంగా స్తంభాలు తయారు చేయండి. ఆహార ధాన్యం, విద్య, వైద్య ఖర్చులు, ప్రయాణం, బట్టలు (దుస్తులు), మరియు సాధారణ ఖర్చులు ఇత్యాది విషయాల గురించి ఆలోచించి అన్ని ఖర్చులను రాయండి. జమవైపు ఇంటి ఖర్చులకు లభించిన సొమ్ము అంతకు ముందు మిగులు, ఏదైనా కొత్త ఆదాయం వచ్చినట్లయితే రాయండి.

(2) సెలవులలో నెల మొత్తం జమా ఖర్చులు రాయండి. 52 వ పేజీలోని గోవింద్ యొక్క జమాఖర్చులనభ్యసించండి.

కృత్యము II : మెట్ట సాగు చేసే వ్యవసాయదారుల యొక్క ఆదాయమును పెంచడానికి ఎలాంటి చర్యలు తీసుకోవచ్చో తరగతి గదిలో చర్చించండి. కొంత మంది విద్యార్థులు కింది విధంగా వారి అభిప్రాయాలు తెలిపారు.

సోహేల్ : రైతులకు పంట దిగుబడి అమ్మినప్పుడు మాత్రమే డబ్బు లభిస్తుంది. డబ్బును సంవత్సరమంతా వాడుకోవలసి ఉంటుంది. కావున వారికి ఆర్థిక ప్రణాళిక ఎంతో ముఖ్యమైంది.

ప్రకాశ్ : దిగుబడికి న్యాయమైన మరియు తగిన ధర లభించినట్లయితే ఆదాయం పెరుగుతుంది.

నర్గిస్ : అర్థశాస్త్ర నియమం ప్రకారం ఏదైనా ఒక వస్తువు సరఫరా, గిరాకీ కంటే ఎక్కువ అయిన దాని ధర తగ్గుతుంది. మరి దాని ధర తగ్గితే లాభం కూడ తగ్గుతుంది.

రీటా : ఒకవేళ వ్యవసాయ దిగుబడి ఎక్కువ అయిన ధర పడిపోయే భయమున్నట్లయితే కొంత దిగుబడిని నిల్వచేసి తర్వాత తగిన సమయంలో మార్కెట్ ధర పెరిగిన తర్వాత అమ్మవలెను.

ఆజమ్ : దాని గురించి మంచి గోదాములను నిర్మించాలి.

రేష్మా : రైతులకు తక్కువ వడ్డీపై ఋణాలు లభించాలి.

వత్సలా : పాడి, కోళ్ళ పెంపకం లాంటి వ్యవసాయనుబంధ వృత్తులు చేసినట్లయితే కొంత అధిక (మొత్తం) ఆదాయం లభించడమే కాకుండా జంతువుల మల మూత్రాల ద్వారా మంచి సేంద్రియ ఎరువు లభిస్తుంది.

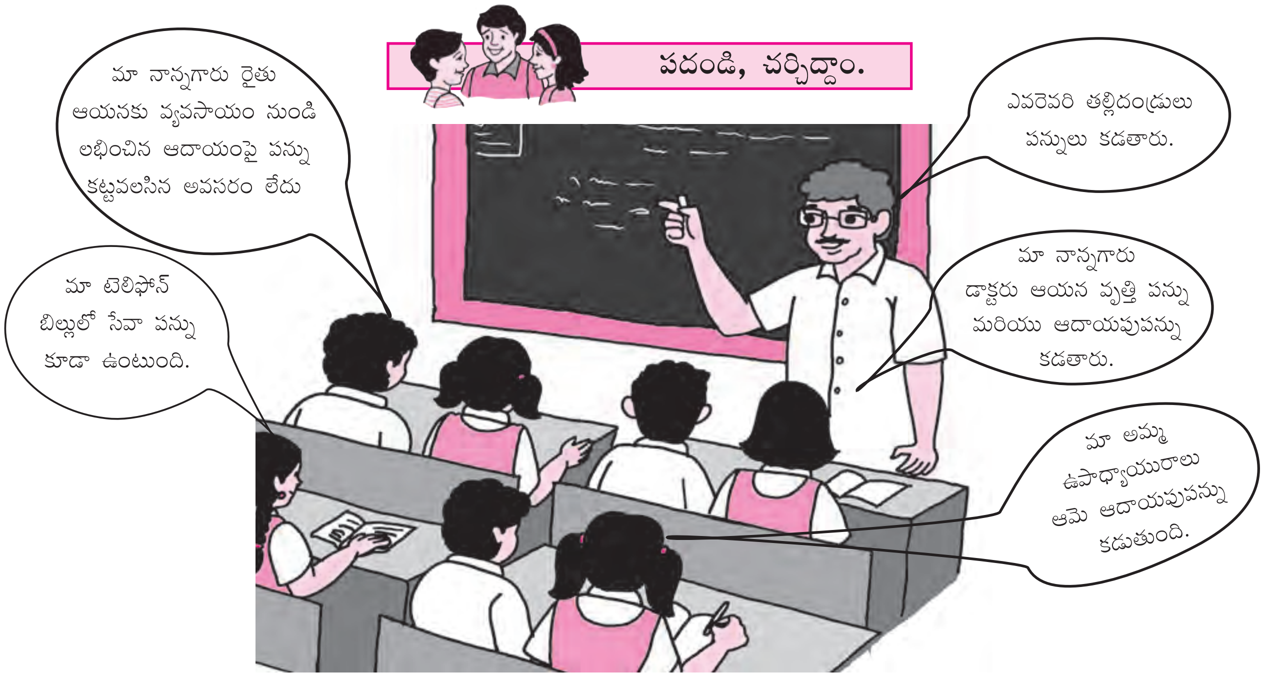
కుణాల్ : వ్యవసాయోత్పత్తులపై ప్రక్రియ చేసే పరిశ్రమలు నెలకొల్పి, కూల్‌డ్రింక్స్ (షర్‌బత్), జాములు, పచ్చళ్ళు, ఒరుగులు (ఎండ బెట్టిన కూరగాయలు), పళ్ళు రసాలు లాంటి ఉత్పత్తులను చక్కగా పాకింగ్ చేసినట్లయితే వాటిని సంవత్సరమంతా అమ్మవచ్చును.

ఎగుమతి వస్తువుల యొక్క ఉత్పత్తి అధికము చేయవలెను

అభ్యాస మాలిక 6.1

1. అల్కా ప్రతినెల పంపిన సొమ్ములో 90% సొమ్మును ఆమె ఖర్చు చేస్తుంది. నెలకు 120 రూ.ల పొదుపు చేస్తుంది. అయిన ఆమెకు పంపిన సొమ్మును కనుగొనండి.
2. సుమీత్ 50,000 రూ.ల మూలధనంతో తినుబండారాల వ్యాపారం మొదలు పెట్టాడు. దానిలో అతనికి మొదటి సంవత్సరంలో 20% నష్టం వచ్చింది. మిగిలిన సొమ్ముతో రెండవ సంవత్సరము అతడు మిఠాయి వ్యాపారం మొదలు పెట్టాడు అందులో అతనికి 5% లాభం వచ్చింది. అయిన అతనికి మూలధనంపై ఎంతశాతం లాభం లేదా నష్టం కలిగింది?
3. నిఖిల్ తన నెలసరి ఆదాయంలో 5% భాగం పిల్లల చదువు కొరకు ఖర్చు చేశాడు, 14% భాగం షేర్స్‌లలో పెట్టుబడి పెట్టాడు, 3% భాగం బ్యాంకు 40% భాగం దినసరి ఖర్చులకు ఉపయోగించాడు. పెట్టుబడి మరియు ఖర్చులు పోను అతని వద్ద 19,000 రూ.లు మిగిలినవి. అయిన అతని నెలసరి ఆదాయంను కనుగొనండి.
4. శ్రీ సయ్యద్ తన ఆదాయంలో 40,000 రూ.లును 8% చక్రవడ్డీ చొప్పున 2 సంవత్సరాల కాలానికై బ్యాంకులో పెట్టుబడి పెట్టెను. శ్రీ ఫర్నాండిస్ 1,20,000 రూ.లను ముచ్యువల్ ఫండ్‌లలో 2 సంవత్సరాలకై పెట్టుబడి పెట్టెను. 2 సంవత్సరాల తర్వాత శ్రీ ఫెర్నాండిస్‌కు 1,92,000 రూ.లు లభించినవి. అయిన శ్రీ ఫెర్నాండిస్ మరియు శ్రీ సయ్యద్‌లలో ఎవరి పెట్టుబడి లాభదాయకమైనదిగా చెప్పవచ్చును?
5. సమీరా తన ఆదాయంలో 3% ఆదాయం సమాజ సేవ కొరకు ఇచ్చింది, మరియు 90% ఆదాయం ఖర్చు చేసింది. ఆమె వద్ద 1750 రూ.లు మిగిలినవి. అయిన ఆమె నెలసరి ఆదాయంను కొనుగొనండి.

పదండి, చర్చిద్దాం.



పన్ను అనగానేమి? ఏయే రకాల పన్నులు ఉంటాయి? దీని గురించి సమాచారమును కింది వెబ్‌సైట్‌నుండి పొందండి.

ICT Tools or Links	www.incometaxindia.gov.in, www.mahavat.gov.in

తెలుసుకుందాం.

పన్ను విధింపు

దేశ పురోగతి కొరకు ప్రభుత్వం వివిధ పథకాలను తయారు చేస్తుంది. ఈ పథకాల అమలుకై ప్రభుత్వానికి పెద్ద మొత్తంలో డబ్బు అవసరం అవుతుంది. అనేక రకాలైన పన్నులను విధించి ఈ డబ్బును ప్రోగు చేస్తారు.

పన్నుల వినియోగం (ప్రయోజనం) (Utility of taxes)

- మౌలిక సదుపాయాల కల్పించుట.
- వివిధ సంక్షేమ పథకాలను అమలు పరచడం.
- వివిధ రంగాలలో అభివృద్ధి మరియు పరిశోధన వీటికై పథకాలు అమలు పర్చుట.
- న్యాయాన్ని మరియు చట్టాన్ని రక్షించుట కొరకు.
- ప్రకృతి వైపరీత్యాల బాధితులను ఆదుకోవడం.
- దేశ మరియు పౌరుల సంరక్షణ చేయడం మొదలైనవి.

పన్నుల రకాలు (Types of taxes)

ప్రత్యక్ష పన్నులు (Direct taxes)

ఏ పన్ను యొక్క భారము ప్రత్యక్షంగా పన్ను చెల్లించే వారిపైన పడుతుందో ఆ పన్నును ప్రత్యక్ష పన్ను అంటారు. ఉదా. ఆదాయ పన్ను, ఆస్తి పన్ను, వృత్తి పన్ను మొదలగునవి.

పరోక్ష పన్నులు (Indirect taxes)

ఏ పన్ను యొక్క భారము ప్రత్యక్షంగా పన్ను చెల్లించే వారిపైన పడదో ఆ పన్నును పరోక్ష పన్ను అంటారు. ఉదా. కేంద్ర ప్రభుత్వ అమ్మకపు పన్ను విలువ ఆధారిత పన్ను, సేవా పన్ను, అబ్‌కారి పన్ను, కస్టమ్ డ్యూటి మొదలగునవి.

2017 సంవత్సరంలో ఏ రకమైన పన్నుల విధానంను అనుసరిస్తారో దానిని బట్టి వాటి రకాలు పైన ఇవ్వడం జరిగింది.

ఉపక్రమము (ప్రాజెక్టు): వివిధ రకాల పన్నులను చెల్లించే ఉద్యోగస్తుల మరియు వ్యాపారస్తుల దగ్గర నుండి వివిధ పన్నుల గురించి సమాచారము సేకరించండి

తెలుసుకుందాం.

ఆదాయ పన్ను (Income tax)

భారతదేశంలోని వ్యక్తి, సంస్థ లేక చట్టబద్ధమైన పరిశ్రమల ఆదాయం, ఆదాయపుపన్నుల చట్టాలకనుగుణంగా నిర్ణయించబడిన ఆదాయంకంటే ఎక్కువ ఆదాయం ఉన్నట్లయితే దానిపై ఆదాయపు పన్ను విధింపబడుతుంది.

దీనిలో మనం ప్రత్యక్ష పన్నులలో కేవలం వ్యక్తులు చెల్లించవలసిన ఆదాయపు పన్నుల గురించి ఆలోచించబోతున్నాం. కేంద్ర ప్రభుత్వం ఆదాయపు పన్ను విధానంను తయారుచేస్తుంది భారతదేశములో ఆదాయపు పన్ను రెండు అధి కరణల ద్వారా విధించబడుతుంది.

(1) తేది 01.04.1962 నుండి ఆదాయపు పన్ను చట్టము 1961 అమలులోనికి వచ్చింది.

(2) ప్రతి సంవత్సరం పార్లమెంట్‌లో ఆమోదింపబడే ఆర్థిక కేటాయింపులు గల చట్టం.

సాధారణంగా ప్రతి సంవత్సం ఫిబ్రవరి నెలలో ఆర్థిక మంత్రి రాబోయే ఆర్థిక సంవత్సరమునకై కేటాయింపులుగల బడ్జెట్ బిల్లు (Budget)ను ప్రవేశ పెడతాడు. దానిలో ఆదాయ పన్ను రేటు సూచించబడి ఉంటుంది. పార్లమెంట్ ఈ బడ్జెట్‌ను ఆమోదించిన తర్వాత అది రాబోయే సంవత్సరానికి అమలు చేయబడుతుంది.

ఆదాయపు పన్ను రేటు ప్రతి సంవత్సరం బడ్జెట్‌లో నిర్ణయించబడుతుంది.

ఆదాయపు పన్ను సంబంధిత పదాలు:

- **పన్ను చెల్లింపుదారుడు (అసెస్సీ)** (An assessee) : ఆదాయపు పన్ను చట్టంలో చేర్చిన నియమాలను బట్టి ఏ వ్యక్తి పన్ను చెల్లించవలెనో ఆ వ్యక్తిని (అసెస్సీ) 'పన్ను చెల్లింపుదారుడు' అంటారు.
- **ఆర్థిక సంవత్సరము** (Financial year): ఒక సంవత్సర కాలంలో పన్ను చెల్లించ దగ్గ ఆదాయం లభించినట్లయితే ఆ సంవత్సరమును 'ఆర్థిక సంవత్సరము' అంటారు. మన దేశంలో ప్రస్తుతము 1 ఎప్రిల్ నుండి 31 మార్చి వరకు ఒక ఆర్థిక సంవత్సరము అవుతుంది.
- **పన్ను విధింపు సంవత్సరము** (Assessment year) : ఆర్థిక సంవత్సరం తర్వాతి ఆర్థిక సంవత్సరమును 'పన్ను విధింపు సంవత్సరము' అంటారు. ప్రస్తుత సంవత్సరములో గత ఆర్థిక సంవత్సరానికి పన్ను విధింపు నిర్ణయించబడుతుంది.

'ఆర్థిక సంవత్సరము' మరియు 'సంబంధిత పన్ను విధింపు సంవత్సరము' క్రింద ఇవ్వబడినవి.

ఆర్థిక సంవత్సరము (Financial Year)	సంబంధిత పన్ను విధింపు సంవత్సరము (Assessment Year)
2016-17 అనగా 01-04-2016 నుండి 31-03-17	2017-18
2017-18 అనగా 01-04-2017 నుండి 31-03-18	2018-19

- **శాశ్వత ఖాతా సంఖ్య** (PAN) : ప్రతి వ్యక్తి ఆదాయ పన్ను విభాగము వారికి వినతి పత్రము ఇచ్చిన, వారు పది అంకాక్షరాల సంఖ్యను ఇవ్వడం జరుగుతుంది. దానిని **'శాశ్వత ఖాతా సంఖ్య'** అనగా 'Permanent Account Number (PAN)' అంటారు. అనేక ముఖ్యమైన పత్రాలలో మరియు ఆర్థిక వ్యవహారలలో ఈ సంఖ్యను నమోదు చేయడం తప్పనిసరి అవుతుంది.

పాన్‌కార్డ్ యొక్క ఉపయోగం: ఆదాయ పన్ను విభాగం ద్వారా ఆదాయపు పన్ను చెల్లించే సమయంలో చలానా, పన్ను వివరణా పత్రం (రిటన్స్ ఫారాలు) మరియు ఇతర పత్ర వ్యవహారాలలో పాన్‌నంబర్ రాయడం తప్పనిసరి. అలాగే అధిక ఆర్థిక లావాదేవిలు చేస్తున్నప్పుడు పాన్ నంబరు రాయవలసి వస్తుంది. అనేకసార్లు పాన్ కార్డు గుర్తింపు కార్డు (Identity proof)గా కూడా ఉపయోగపడుతుంది.

తెలుసుకుందాం.

ఆదాయపన్ను విధింపు

ఆదాయపన్ను విధింపు ఆదాయంపై ఆధారపడి ఉండడం వలన ఆదాయం యొక్క వివిధ మూలాధారాలను (మార్గాలను) తెలుసుకోవలసిన అవసరం ఉంది.

ఆదాయం యొక్క ముఖ్యమైన ఐదు మూలాధారాలు:

(1) జీతం ద్వారా లభించే ఆదాయం. (2) ఇంటి కిరాయి ద్వారా లభించే ఆదాయం.

(3) వ్యాపారము మరియు వృత్తి ద్వారా లభించే ఆదాయం. (4) పెట్టుబడి లాభాల (Capital gain) ద్వారా లభించే ఆదాయం.

(5) ఇతర మార్గాల ద్వారా లభించే ఆదాయం.

ఉద్యోగి యొక్క ఆదాయపు పన్ను లెక్కింపు గురించిన ముఖ్యమైన విషయాలు

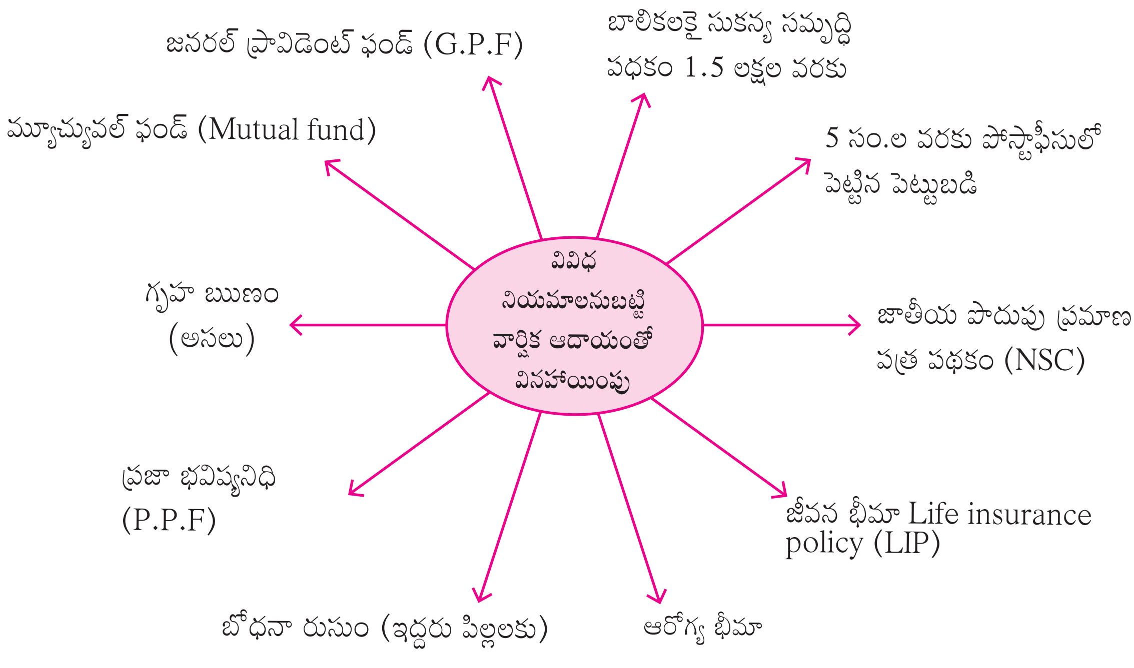
ఆదాయపు పన్ను లెక్కింపు చేయడానికి మొత్తం సంవత్సరాదాయాన్ని పరిగణలోకి తీసుకుంటారు. ఆదాయపు పన్ను చట్టం 80C, 80D, 80G మొదలైన సెక్షన్‌లను అనుసరించి మొత్తం వార్షిక ఆదాయంలో కొంత మినహాయింపు లభిస్తుంది. ఈ మినహాయింపు చేయగా మిగిలిన ఆదాయంను **పన్ను చెల్లించవలసిన ఆదాయం** అంటారు. ఆదాయపు పన్ను విధింపు ఈ ఆదాయంపైనే చేయబడుతుంది.

పన్ను (గణన) లెక్కింపు నియమములు కొన్ని సమయాలలో మారుతాయి, కాబట్టి ప్రత్యక్ష పన్ను లెక్కిస్తున్నప్పుడు తాజా నియమములు తెలిసి ఉండడం చాలా అవసరం.

పన్ను చెల్లించవలసిన ఆదాయంలో నిర్ణీత పరిమితి వరకు ఆదాయ పన్ను విధించబడదు. ఈ సొమ్మును పన్ను చెల్లించవలసిన ఆదాయంలోని **''మూల మినహాయింపు సొమ్ము''** అని అంటారు.

- రైతులకు పంట దిగుబడి యొక్క ఆదాయంపై ఆదాయపు పన్ను మినహాయింపు ఉంటుంది.
- ఆదాయపు పన్ను సెక్షను 80 G ప్రకారం ప్రధానమంత్రి సహాయ నిధి, ముఖ్యమంత్రి సహాయ నిధి లేదా ప్రభుత్వామోదిత సంస్థలకు విరాళం ఇచ్చినచో ఆదాయపు పన్నులో 100% మినహాయింపు ఉంటుంది.
- 80 D అనే సెక్షను ప్రకారం ఆరోగ్య భీమా కిస్తీలపై మినహాయింపు ఇస్తారు.
- సాధారణంగా మొత్తం పెట్టుబడులపై 80C సెక్షను ప్రకారం వివిధ రకాల పెట్టుబడులలో ఎక్కువలో ఎక్కువ 1,50,000 రూ.ల వరకు మినహాయింపు లభిస్తుంది.

2017-18 బడ్జెట్ ప్రకారం కింది పటంలో పేర్కొనిన కొన్ని ముఖ్యమైన పెట్టుబడులకు వార్షిక ఆదాయం నుండి మినహాయింపు లభిస్తుంది



పన్ను చెల్లించే వ్యక్తి వయసును బట్టి ఆదాయపు పన్ను శాతము ప్రతి సంవత్సరం బడ్జెట్‌లో నిర్ణయించబడుతుంది.

కింది పట్టికలో ఆదాయం యొక్క దశలనుబట్టి ఆదాయపు పన్ను శాతము సూచించే నమూనా ఇవ్వబడింది.

పట్టిక I

60 సంవత్సరాలలోపు వ్యక్తులు			
పన్ను చెల్లించ వలసిన ఆదాయ దశలు (రూపాయలలో)	ఆదాయపు పన్ను	విద్యా సుంకం	మాధ్యమిక లేదా మాధ్యమికోన్నత విద్యా సుంకం
2,50,000 వరకు	పన్ను లేదు	పన్ను లేదు	పన్ను లేదు
2,50,001 నుండి 5,00,000	5 శాతము (పన్ను చెల్లించ వలసిన ఆదాయం నుండి రెండున్నర లక్షలుపోగా మిగిలిన దానిపై)	ఆదాయపు పన్నులో 2 శాతం	ఆదాయపు పన్నులో 1 శాతం
5,00,001నుండి 10,00,000	₹ 12,500 + 20 శాతం (పన్ను చెల్లించవలసిన ఆదాయం నుండి 5 లక్షలు పోగా మిగిలిన దానిపై)	ఆదాయపు పన్నులో 2 శాతం	ఆదాయపు పన్నులో 1 శాతం
10,00,000 కంటే ఎక్కువ	₹ 1,12,500 + 30 శాతము (పన్ను చెల్లించవలసిన ఆదాయం నుండి 10 లక్షలు పోగా మిగిలిన దానిపై)	ఆదాయపు పన్నులో 2 శాతం	ఆదాయపు పన్నులో 1 శాతం
(వార్షిక ఆదాయం 50 లక్షల రూ. నుండి ఒక కోటి రూపాయల మధ్యలో ఉన్నట్లయితే ఆదాయపు పన్నుపై 10 శాతము సర్‌ఛార్జ్ మరియు వార్షిక ఆదాయం ఒక కోటికంటే అధికంగా ఉన్నట్లయితే ఆదాయపు పన్నుపై 15 శాతము సర్‌ఛార్జ్ ఉంటుంది.)			

కృత్యం: పై పట్టిక (I)ని పరిశీలించి కింది ఉదాహరణలలోని ఖాళీలలో సరియైన సంఖ్యను రాయండి.

ఉదా.
- మెహతా యొక్క వార్షిక ఆదాయము నాలుగున్నర లక్షల రూ.లు. అతడు ఆదాయం నుండి మినహాయింపు లభించే ఎలాంటి పొదుపులు చేయనట్లయితే ఆయన పన్ను చెల్లించవలసిన ఆదాయం ఏ ఆదాయ దశలో ఉంటుంది. [ ]
- అతడు ఎంత సొమ్ముపై ఎంత శాతము చొప్పున పన్ను చెల్లించవలసి వస్తుంది? ₹ [ ] పై [ ] చొప్పున
- సుంకం ఎంత సొమ్ముపై విధించబడుతుంది [ ]

పట్టిక II

జ్యేష్ఠ పౌరులు (వయస్సు 60 నుండి 80 వరకు)			
పన్ను చెల్లించవలసిన ఆదాయం దశలవారిగా (రూపాయలలో)	ఆదాయపు (పన్ను)	విద్యా సుంకం	మాధ్యమిక మరియు మాధ్యమికోన్నత విద్యా సుంకం
3,00,000 వరకు	పన్ను లేదు	పన్ను లేదు	పన్ను లేదు
3,00,001 నుండి 5,00,000	5 శాతం (పన్ను చెల్లించవలసిన ఆదాయంలో మూడు లక్షలు పాగా మిగిలిన దానిపై)	ఆదాయపు పన్నుపై 2 శాతం	ఆదాయపు పన్నుపై 1 శాతం
5,00,001నుండి 10,00,000	₹ 10,000 + 20 శాతము (పన్ను చెల్లించవలసిన ఆదాయంలో ఐదు లక్షలు పోగా మిగిలిన దానిపై)	ఆదాయపు పన్నుపై 2 శాతంఎ	ఆదాయపు పన్నుపై 1 శాతం
10,00,000 కంటే ఎక్కువ	₹ 1,10,000 + 30 శాతము (పన్ను చెల్లించవలసిన ఆదాయంలో పది లక్షలు పోగా మిగిలిన దానిపై)	ఆదాయపు పన్నుపై 2 శాతం	ఆదాయపు పన్నుపై 1 శాతం
(వార్షిక ఆదాయము 50 లక్షల రూపాయల నుండి ఒక కోటి రూ.ల మధ్య ఉంటే ఆదాయపు పన్నుపై 10 శాతము సర్‌చార్జ్ మరియు వార్షిక ఆదాయం ఒక కోటి రూ.ల కంటే ఎక్కువగా ఉన్నట్లయితే ఆదాయపు పన్నుపై 15 శాతం సర్‌ఛార్జ్ ఉంటుంది.)			

కృత్యము : పట్టిక II నుండి కింది కృత్యమును పూర్తి చేయండి.

ఉదా. శ్రీ పండిత్‌గారి వయస్సు 67 సం.లు. గత సంవత్సరం ఆయన వార్షికాదాయం 13,25,000 రూ.లు అయిన ఆయన పన్ను చెల్లించవలసిన ఆదాయం ఎంత? అతను ఎంత ఆదాయపు పన్ను చెల్లించవలెను.

13,25,000 – 10,00,000 = 3,25,000

పట్టిక ప్రకారం ఆయన 1,10,000 రూ.లు పన్ను చెల్లించవలెను. అంతేగాక పన్ను చెల్లించవలసిన ఆదాయం 3,25,000 రూ.లపై 30% అనగా $3,25,000 \times \frac{30}{100} = \square$ రూ.లు ఆదాయ పన్ను చెల్లించవలెను.

అనగా ఆదాయపు పన్ను సొమ్ము $\square + \square = \square$

చెల్లించవలసిన ఆదాయపు పన్నుపై 2% విద్యాసుంకం అనగా $\square \times \frac{2}{100} = \square$

చెల్లించవలసిన ఆదాయపు పన్నుపై 1% సెకండరి మరియు మాధ్యమికోన్నత విద్యాసుంకం చెల్లించవలెను.

అనగా $\square \times \frac{1}{100} = \square$

∴ మొత్తం ఆదాయపు పన్ను = ఆదాయపు పన్ను + విద్యాసుంకం + మాధ్యమికోన్నత విద్యాసుంకం

$= \square + \square + \square$

$= \boxed{₹\ 2,13,725}$

పట్టిక III

అతి జ్యేష్ఠ పౌరులు (వయస్సు 80 సం.లు పై బడిన వారు)			
ఆదాయం దశలవారిగా (రూపాయలలో)	ఆదాయపు పన్ను	విద్యా సుంకం	మాధ్యమిక లేదా మాధ్యమికోన్నత విద్యా సుంకం
5,00,000 వరకు	పన్ను లేదు	పన్ను లేదు	పన్ను లేదు
5,00,001 నుండి 10,00,000	20 శాతము (పన్ను చెల్లించవలసిన ఆదాయం లో ఐదు లక్షలు పోగా మిగిలిన దానిపై)	ఆదాయపు పన్నుపై 2 శాతము	ఆదాయపు పన్నుపై 1 శాతము
10,00,000 కంటే అధికమైన	₹ 1,00,000 + 30 శాతము (పన్ను చెల్లించవలసిన ఆదాయంలో పది లక్షలు పోగా మిగిలిన దానిపై)	ఆదాయపు పన్నుపై 2 శాతము	ఆదాయపు పన్నుపై 1 శాతము
(వార్షిక ఆదాయం 50 లక్షల రూ.లు నుండి ఒక కోటి రూ.ల మధ్యగల ఆదాయపు పన్నుపై 10 శాతము సర్‌ఛార్జ్ మరియు వార్షిక ఆదాయం ఒక కోటి రూ.ల కంటె అధికమైన ఆదాయపు పన్ను 15 శాతం సర్‌ఛార్జ్ ఉంటుంది.)			

ఉపక్రమము (ప్రాజెక్ట్): 80C, 80G, 80D ఈ సెక్షన్ల సమాచారమును సేకరించండి.
పాన్‌కార్డ్‌ను చూసి, దానిపై ఏ వివరాలుంటాయో వాటిని నమోదు చేయండి.
నగదు రహిత (Cashless) లావాదేవీల కొరకు ఉపయోగించే మార్గాలను గూర్చి సమాచారమును సేకరించిండి.

పై పట్టికలు మరియు వ్యక్తులకు లభించే వివిధ సదుపాయాలను ఉపయోగించి ఆదాయపు పన్ను ఎలా లెక్కిస్తారో దానిని మనం కింది ఉదాహరణ నుండి అర్థం చేసుకుందాం.

ఉదా: (1) శ్రీ మాత్రేగారి వయస్సు 50 సం.లు అతని మొత్తం వార్షిక ఆదాయం ₹ 12,00,000. అతను కింది విధంగా పెట్టుబడి పెట్టారు.

(i) భీమా కిస్తి ₹ 90,000 (ii) భవిష్యనిధి ₹ 25,000

(iii) ప్రజా భవిష్య నిధి ₹ 15,000 (iv) జాతీయ పొదుపు పత్రము : ₹ 20,000

దీని నుండి ఆదాయపు పన్నులో మినహాయింపు, పన్ను చెల్లించవలసిన ఆదాయం మరియు ఆదాయపు పన్నులను కనుగొనండి.

సాధన: (1) మొత్తం వార్షిక ఆదాయం = 12,00,000 రూ.లు

(2) 80C ప్రకారం మొత్తం పెట్టుబడి

పెట్టుబడి	సొమ్ము (రూ.లలో)
(i) భీమా కిస్తి	90,000
(ii) భవిష్యనిధి పెట్టుబడి	25,000
(iii) ప్రజా భవిష్యనిధి	15,000
(iv) జాతీయ పొదుపు పత్రము	20,000
మొత్తం	1,50,000

80C నియమానుసారం ఆదాయపు పన్నులో ఎక్కువలో ఎక్కువ 1,50,000 రూ.ల మినహాయింపు వర్తిస్తుంది.

(3) ∴ పన్ను చెల్లించవలసిన ఆదాయం = [1] లోని సొమ్ము – [2] లోని సొమ్ము

= 12,00,000 – 1,50,000 = 10,50,000

(4) శ్రీ మాత్రేగారు చెల్లించవలసిన ఆదాయపు పన్ను లెక్కింపు పట్టిక (I) సహాయంతో చేద్దాం.

శ్రీ మాత్రేగారి పన్ను చెల్లించవలసిన ఆదాయం = ₹10,50,000 అనగా పది లక్షల కంటే ఎక్కువ గలదు.

∴ పట్టిక (I) ననుసరించి ఆదాయపు పన్ను = ₹ 1,12,500+30% (మొత్తం ఆదాయం నుండి పది లక్షలు పోగా మిగిలిన దానిపై 30%)

∴ 10,50,000 – 10,00,000 = 50,000

∴ ఆదాయపు పన్ను = $1,12,500 + 50,000 \times \frac{30}{100}$

$= 1,12,500 + 15,000$

$= 1,27,500$

ఇదే కాకుండా 2% విద్యాసుంకం మరియు 1% సెకండరీ మరియు ఉన్నత విద్యాసుంకంను కలపవలసి ఉంటుంది.

విద్యాసుంకం $= 1,27,500 \times \frac{2}{100} = 2550$ రూ.లు

సెకండరీ మరియు ఉన్నత విద్యాసుంకం $= 1,27,500 \times \frac{1}{100} = 1275$ రూ.లు

∴ మొత్తం ఆదాయపు పన్ను = 1,27,500 + 2550 + 1275 = 1,31,325 రూ.లు

శ్రీ మాత్రేగారు చెల్లించవలసిన మొత్తం ఆదాయపు పన్ను = 1,31,325 రూ.లు

ఉదా: (2) శ్రీ ఆహమద్ 62 సం.లు జ్యేష్ఠ పౌరుడు ఒక కంపెనీలో ఉద్యోగం చేస్తున్నాడు. ఆయన మొత్తం వార్షిక ఆదాయం 6,20,000 రూ.లు. అతడు ప్రజా భవిష్యనిధిలో 1,00,000 రూ.లు పెట్టుబడిగా పెట్టారు. అదే విధంగా భీమా వార్షిక కిస్తీ 80,000 రూ.లు చెల్లించాడు. ముఖ్యమంత్రి నిధికి 10,000 రూ.లు విరాళమిచ్చాడు. అయిన అహమద్ ఎంత ఆదాయపు పన్ను చెల్లించవలసి ఉంది?

సాధన: (1) మొత్తం వార్షిక ఆదాయం = 6,20,000 రూ.లు.

(2) మొత్తం తగ్గింపులు (80C నియమం ప్రకారం)

(i) ప్రజా భవిష్యనిధి = 1,00,000 రూ.లు.

(ii) భీమా = 80,000 రూ.లు.

1,80,000 రూ.లు.

(iii) 80C సెక్షన్ ప్రకారం ఎక్కువలో ఎక్కువ 1,50,000 రూ.లు మాత్రమే మినహాయింపు

(3) ముఖ్యమంత్రి సహాయనిధికిచ్చిన మొత్తం 80 G ప్రకారం మినహాయింపు = 10000 రూ.లు.

(4) పన్ను చెల్లించవలసిన ఆదాయం = (1) – [(2) + (3)]

= 6,20,000 – [1,50,000 + 10000]

= 4,60,000 రూ.లు.

పట్టిక (II) (నుండి) ప్రకారం పన్ను చెల్లించవలసిన ఆదాయం మూడు లక్షల నుండి ఐదు లక్షల పరిధిలో ఉంది.

$\therefore$ చెల్లించవలసిన ఆదాయపు పన్ను = (పన్ను చెల్లించవలసిన ఆదాయం – 3,00,000)$\times \frac{5}{100}$

$= (4,60,000 - 3,00,000)\times \frac{5}{100}$

$= 1,60,000 \times \frac{5}{100}$

= 8000 రూ.లు

విద్యాసుంకం ఆదాయపన్నుపై విధిస్తారు, కాబట్టి

విద్యాసుంకం : $8,000 \times \frac{2}{100} = 160$ సెకండరీ మరియు ఉన్నత విద్యాసుంకం $8,000\times \frac{1}{100} = 80$

$\therefore$ మొత్తం ఆదాయపు పన్ను = 8000 + 160 + 80 = ₹ 8,240

$\therefore$ ఆహమద్‌గారు మొత్తం 8240 రూ.లు ఆదాయపు పన్ను చెల్లించ వలసి ఉంటుంది.

ఉదా: (3) శ్రీమతి హిందుజగారి వయస్సు 50 సం.ల. పన్నుచెల్లించవలసిన ఆదాయం 16,30,000 అయిన ఆమె మొత్తం ఎంత ఆదాయపు పన్ను చెల్లించవలెను?

సాధన: శ్రీమతి హిందుజ పన్ను చెల్లించవలసిన ఆదాయం పది లక్షల కంటే అధికమైన వర్గంలో ఉన్నది.

ఇప్పుడు మనం పట్టిక Iని ఉపయోగించి ఆమె యొక్క ఆదాయపు పన్ను లెక్కిద్దాం

పట్టిక I ప్రకారం పది లక్షలకంటే ఎక్కువ ఆదాయం కొరకు

ఆదాయపు పన్ను = రూ.లు 1,12,500 + (మొత్తం ఆదాయంలో పది లక్షలు పోగా మిగిలిన దానిపై 30%)

శ్రీమతి హిందుజగారి ఆదాయం − పది లక్షలు = 16,30,000 − 10,00,000

= 6,30,000 రూ.లు

పట్టిక I నుండి

ఆదాయపు పన్ను $= 1,12,500 + 6,30,000 \times \frac{30}{100}$

$= 1,12,500 + 30 \times 6,300$

$= 1,12,500 + 1,89,000$

= 3,01,500 రూ.లు

దీనిపై 1% సెకండరీ మరియు ఉన్నత విద్యాసుంకం $= \frac{1}{100} \times 3,01,500 =$ ₹ 3015

2% విద్యాసుంకం $= \frac{2}{100} \times 3,01,500$ = ₹ 6030

∴ మొత్తం ఆదాయపు పన్ను = 3,01,500 + 3015 + 6030

= 3,10,545

∴ మొత్తం చెల్లించవలసిన ఆదాయపు పన్ను 3,10,545 రూ.లు

అభ్యాస మాలిక 6.2

(1) కింది పట్టికను పరిశీలించి, పట్టికలో ఇవ్వబడిన వ్యక్తుల ఆదాయంపై ఆదాయపు పన్ను చెల్లించ వలెనో, లేదో తెలపండి.

క్ర.సం.	వ్యక్తి	వయస్సు	పన్ను చెల్లించవలసిన (₹) ఆదాయం	ఆదాయపు పన్ను చెల్లించవలె లేదా చెల్లించనవసరం లేదు
(i)	కు. నికిత	27	₹ 2,34,000	
(ii)	శ్రీ కుల్‌కర్ణి	36	₹ 3,27,000	
(iii)	శ్రీమతి మెహతా	44	₹ 5,82,000	
(iv)	శ్రీ బజాజ్	64	₹ 8,40,000	
(v)	శ్రీ డిసిల్వా	81	₹ 4,50,000	

(2) శ్రీ. కర్తార్ సింగ్ (వయస్సు 48 సం.లు) ప్రైవేటు కంపెనీలో ఉద్యోగం చేస్తున్నాడు. యోగ్యమైన భత్యాలు పోగా అతని నెల జీతము 42,000 రూ.లు. అతడు ప్రావిడెంట్ ఫండ్ ఖాతాలో ప్రతి నెల 3000 రూ.లు జమ చేస్తాడు. 15,000 జాతీయ పొదుపు పత్రం తీసుకొన్నాడు, 12000 రూ.లు ప్రధానమంత్రి సహాయ నిధికి విరాళం ఇచ్చాడు. అయిన అతని ఆదాయపు పన్నును లెక్కించండి.

సంకీర్ణ ప్రశ్న సంగ్రహము 6

(1) కింది వాటిలో సరియైన పర్యాయాన్ని ఎన్నుకోండి

(i) వివిధరకాల పెట్టుబడులలో 80 C నియమానుసారం ఆదాయపు పన్ను లెక్కింపునకై ఎక్కువలో ఎక్కువ ఎన్ని రూపాయల మినహాయింపు లభిస్తుంది.

(A) లక్షన్నర రూపాయలు (B) రెండున్నర లక్షల రూపాయలు (C) ఒక లక్ష రూపాయలు (D) రెండు లక్షల రూపాయలు

(ii) ఒక వ్యక్తి 2017-18లో సంపాదించిన ఆదాయంపై పన్ను విధింపు సంవత్సరం కింది వాటిలో ఏది?

(A) 2016-17 (B) 2018-19 (C) 2017-18 (D) 2015-16

(2) శ్రీ శేఖర్ ఆదాయంలో 60% ఖర్చు చేస్తాడు. తర్వాత మిగిలిన ఆదాయంలో 300 రు.లను అనాథ ఆశ్రమానికి విరాళంగా ఇచ్చినప్పుడు అతని వద్ద 3,200 రూ.లు మిగిలినవి. అయిన అతని ఆదాయంను కొనుగొనండి.

(3) శ్రీ హీరాలాల్‌గారు 2,15,000 రూ.లు మ్యూచువల్ ఫండ్‌లో జమ చేశారు. రెండు సంవత్సరాలలో అతనికి 3,05,000 రూపాయలు లభించింది. శ్రీ రమణిక్‌లాల్ 1,40,000 రూ.లను 8% చక్రవడ్డీ చొప్పున 2 సంవత్సరాలకై బ్యాంకులో జమ చేశారు. అయిన ప్రతి ఒక్కరికి లభించిన లాభ శాతమును కనుగొనండి. ఎవరి పెట్టుబడి అధిక లాభదాయకమైనది?

(4) ఒక పొదుపు ఖాతాలో సంవత్సర ప్రారంభంలో 24,000 రూ.లు ఉండెను. దానిలో 56,000 రూపాయలను జమ చేయబడింది. ఆ మొత్తం సొమ్మును 7.5% చక్రవడ్డీ చొప్పున, బ్యాంకులో పెట్టుబడి పెట్టినట్లయితే 3 సంవత్సరాలలో మొత్తం ఎంత సొమ్ము తిరిగి లభిస్తుంది?

(5) శ్రీ మనోహర్ వారి ఆదాయంలో 20% భాగం వారి పెద్ద కుమారునికి 30% భాగం చిన్న కుమారునికి ఇచ్చారు. తర్వాత మిగిలిన సొమ్ములో 10% సొమ్మును విరాళంగా ఒక పాఠశాలకి ఇచ్చారు. అప్పుడు వారి వద్ద 1,80,000 రు.లు మిలిగినవి. అయిన శ్రీ మనోహర్‌గారి ఆదాయంను కనుగొనండి.

(6*) కైలాస్ యొక్క ఆదాయంలో 85% ఖర్చు అవుతుంది. అతని ఆదాయం 36% పెరిగినప్పుడు అతని ఖర్చులు ఇంతకు ముందు ఖర్చులో 40% పెరిగింది. అయిన అతని ప్రస్తుత పొదుపు శాతమును కనుగొనండి.

(7*) రమేశ్, సరేశ్ మరియు ప్రీతీ ఈ ముగ్గురి మొత్తం వార్షిక ఆదాయం 8,07,000 రూ.లు. ఆ ముగ్గురు. తమ ఆదాయాలలో క్రమముగా 75%, 80% మరియు 90% భాగములను ఖర్చు చేస్తారు. ఒకవేళ వారి పొదుపుల నిష్పత్తి 16 : 17 : 12 అయిన ప్రతి ఒక్కరి వార్షిక పొదుపును కనుగొనండి.

(8) కింది వ్యక్తుల చెల్లించవలసిన ఆదాయపు పన్నులను లెక్కించండి.

(i) శ్రీ కదమ్ వయస్సు 35 సం.లు అతని పన్ను చెల్లించవలసిన ఆదాయం 13,35,000 రూపాయలు.

(ii) శ్రీ ఖాన్ వయస్సు 65 సం.లు అతని పన్ను చెల్లించవలసిన ఆదాయం 4,50,000 రూపాయలు.

(iii) కు. వర్ష (వయస్సు 26 సం.లు) పన్ను చెల్లించవలసిన ఆదాయం 2,30,000 రూపాయలు.

ICT Tools or Links

భారత ప్రభుత్వం యొక్క www.incometaxindia.gov.in ఈ వెబ్‌సైట్‌ను సందర్శించండి. ఆ సైటులో incometax calculator మెను మీద క్లిక్ చేయండి. వచ్చే ఫార్మ్‌లో కాల్పనిక ఆదాయము మరియు మినహాయింపు కాల్పనిక సొమ్మును రాసి ఆదాయపు పన్ను సొమ్మును కనుగొనే ప్రయత్నం చేయండి.

7 సాంఖ్యక శాస్త్రము

RUSDZQ

చదవండి, నేర్చుకుందాం.

- జోడు కమ్మీ రేఖాచిత్రము
- ఉపవిభాగ కమ్మీ రేఖాచిత్రము
- శతమాన కమ్మీ రేఖాచిత్రము
- ప్రాథమిక మరియు ద్వితీయ సమాచారము
- అవర్గీకృత మరియు వర్గీకృత పౌనఃపున్య విభజన పట్టిక
- సంచిత పౌనఃపున్య పట్టిక
- సగటు, మధ్యగతము మరియు బహుళకము (అవర్గీకృత దత్తాంశమునకై)

కొంచెం గుర్తుకు తెచ్చుకుందాం.

కింది తరగతిలో మీరు సాధారణ కమ్మీ రేఖాచిత్రాలు మరియు జోడు కమ్మీ రేఖచిత్రాలు మొదలగునవి ఎలా గీయవలెనో చూసారు. అదే విధంగా వార్త పత్రికలు, మాస పత్రికలు, దూరదర్శనం మొదలగు మాధ్యమాలనుండి వివిధ రేఖాచిత్రాలను చూసి వాటి యొక్క సమాచారమును పొందినారు.

సమాచార స్వరూపం ప్రకారం ఆ సమాచారాన్ని యోగ్యమైన రీతిలో ప్రదర్శించగల రేఖా చిత్రాలను గీయగలడం ముఖ్యమైనది.

ఉదా: ఒక రైతు మూడు సంవత్సరాలలో తన పంట చేను నుండి లభించిన గోధుమలు మరియు జొన్నలు ఈ రెండు పంటల యొక్క ఉత్పత్తిని చూపడానికి జోడు కమ్మీ రేఖాచిత్రమును గీసి చూపబడింది. దానిని బట్టి కింది ప్రశ్నల జవాబులు రాయండి.

(i) మూడు సంవత్సరాలలో ఏ ధాన్యము యొక్క ఉత్పత్తి నిరంతరంగా పెరిగింది?

(ii) 2012లో 2011కంటే జొన్నల ఉత్పాదన ఎంత తగ్గింది?

(iii) 2010లో గోధుమల ఉత్పత్తి మరియు 2012లో గోధుమల ఉత్పత్తిల మధ్య భేదం ఎంత?

(iv) ఈ రేఖా చిత్రములోని వివరాల ఆధారంగా కింద పట్టికను పూర్తి చేయండి.

సం. \ ఉత్పత్తి (క్వింటల్)	గోధుమలు	జొన్నలు	మొత్తము
2010			
2011			
2012	48	12	60

తెలుసుకుందాం.

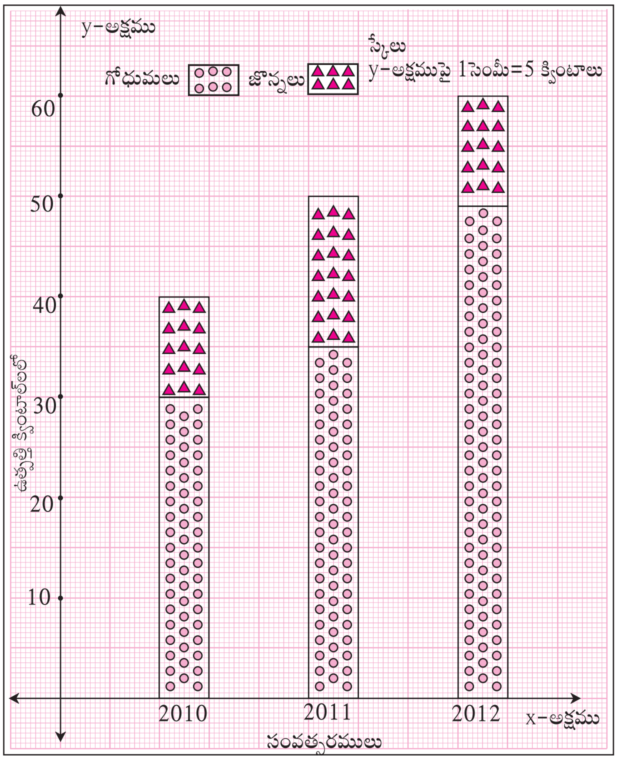
ఉపవిభాగ కమ్మీ రేఖాచిత్రము (Sub-divided bar diagram)

దత్తాంశములోని సమాచారము యొక్క పోలికను చూపించడానికి కమ్మీ రేఖాచిత్రమును వేరొక పద్దతిలో కూడా గీయవచ్చు. దానిని ఉపవిభాగ కమ్మీ రేఖాచిత్రమని అంటారు. దాని గురించి దత్తాంశములోని ఒకే రకమైన రెండు విషయాల మొత్తమును తీసుకుంటారు. వచ్చిన మొత్తములను యోగ్యమైన ప్రమాణము తీసుకొని కమ్మీలతో సూచిస్తారు, కమ్మీలో ప్రతీ విషయాన్ని చూపించటానికి ప్రమాణమును అనుసరించి దానిని భాగాలుగా చేస్తారు. పై ఉదాహరణలోని దత్తాంశమును చూపించే ఉపవిభాగ కమ్మీ రేఖాచిత్రమును ఎలా గీయవలెనో చూద్దాం

(i) ప్రతీ కమ్మీ ఎత్తును మొత్తం ఉత్పత్తికి సమానంగా యోగ్యమైన ప్రమాణంలో చూపించండి.

(ii) వాటిలో గోధుమల యొక్క ఉత్పత్తి అనేది మొత్తం ఉత్పత్తి యొక్క కమ్మీలో ఒక భాగంగా ఉంటుంది. దానిని కొన్ని గుర్తులతో చూపించండి.

(iii) కమ్మీ యొక్క మిగిలిన భాగము సహజంగా జొన్నల యొక్క ఉత్పత్తిని చూపిస్తుంది. దానిని వేరే గుర్తులతో చూపించండి.



ఈ విధంగా పక్కన గీయబడిన ఉపవిభాగ కమ్మీ రేఖా చిత్రమును చూడండి.

రెండు విషయాల శాతాల యొక్క పోలిక అప్పుడప్పుడు అధిక ఉపయోగకరంగా ఉంటుందని మనం నేర్చుకొన్నాం. ఉదాహరణకు 2000 రూ.ల పై 600 రూ.ల లాభం 1500 రూ.లపై 510 రూ.ల లాభం. దీనిలో 600 రూ.ల లాభం అనేది ఎక్కువగా కనిపిస్తుంది. కాని రెండు లాభాల వరుసగా 30% మరియు 34% ఈ శాతాలను గమనించినట్లయితే 1500 రూ.లపై 510 రూ.ల లాభం అనేది అధిక లాభదాయకమైనది, అని తెలుస్తుంది.

శతమాన కమ్మీ రేఖాచిత్రము (Percentage bar diagram)

ఇచ్చిన సమాచారము యొక్క పోలిక మరోరకంగా అర్థము కావడానికి వాటిని శాతరూపములోనికి మార్చి ఏ ఉపవిభాగ కమ్మీ రేఖాచిత్రమును గీస్తామో. దానినే శతమాన కమ్మీ రేఖాచిత్రము అంటారు. పై ఉదాహరణలోని సమాచారము యొక్క శాతములను పక్కనున్న పట్టికలో చూపించడం జరిగింది.

సం.	గోధుమల ఉత్పత్తి (క్విం.)	జొన్నల ఉత్పత్తి (క్విం.)	మొత్తం ఉత్పత్తి యొక్క ప్రమాణములో గోధుమల ఉత్పత్తి శాతము
2010	30	10	$\frac{30}{40} \times 100 = 75\%$
2011	35	15	$\frac{35}{50} \times 100 = 70\%$
2012	48	12	$\frac{48}{60} \times 100 = 80\%$

ఈ సమాచారమును చూపించే (సూచించే) కమ్మీ రేఖాచిత్రము కింది సోపానములలో గీయబడింది

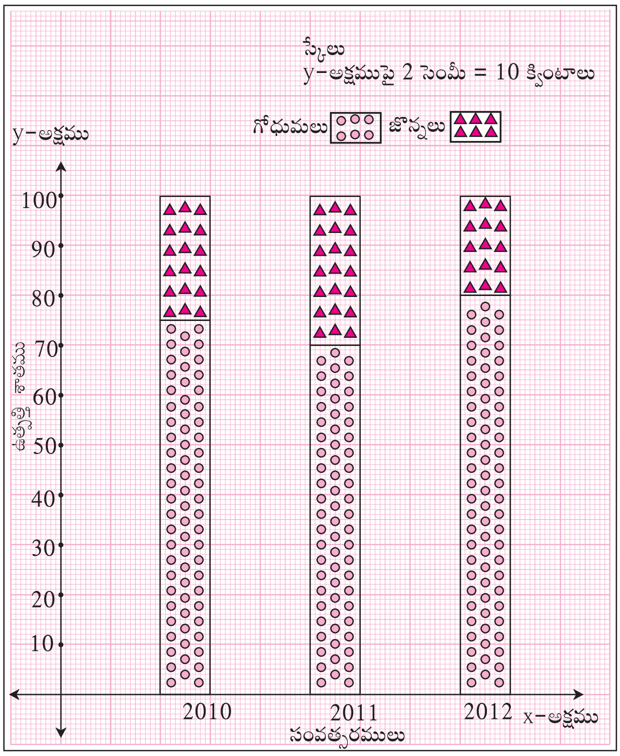
(i) ప్రతి సం.లోని గోధుమ మరియు జొన్నల యొక్క మొత్తం ఉత్పత్తిలోగల గోధుమల ఉత్పత్తి మరియు జొన్నల ఉత్పత్తి యొక్క శాతాలను కనుగొన్నాము.

(ii) ప్రతి కమ్మీ యొక్క ఎత్తు Y−అక్షముపై ప్రమాణమును 100గా తీసుకొన్నాము.

(iii) గోధుమల ఉత్పత్తికి, మొత్తం ఉత్పత్తితోగల శాతమును, తీసుకోబడిన ప్రమాణంలో కమ్మీలను భాగములను గుర్తులతో చూపించాం.

(iv) కమ్మీలలో మిగిలిన భాగం, మొత్తం ఉత్పత్తిలో జొన్నల యొక్క శాతమును సూచిస్తుంది.

రెండు కంటే ఎక్కువ విషయముల సమాచారము ఈ ఉపవిభాగ లేదా శతమాన కమ్మీ రేఖాచిత్రాలతో సూచించవచ్చును.



సాధించిన ఉదాహరణలు

ఉదా: (1) పక్కన శతమాన కమ్మీ రేఖాచిత్రము ఇవ్వబడింది. దానిలో రెండు కుంటుంబాల యొక్క వివిధ అంశాలపై ఖర్చుల సమాచారం ఇవ్వబడింది. దానిని బట్టి క్రింది ప్రశ్నలకు సమాధానములు రాయండి.

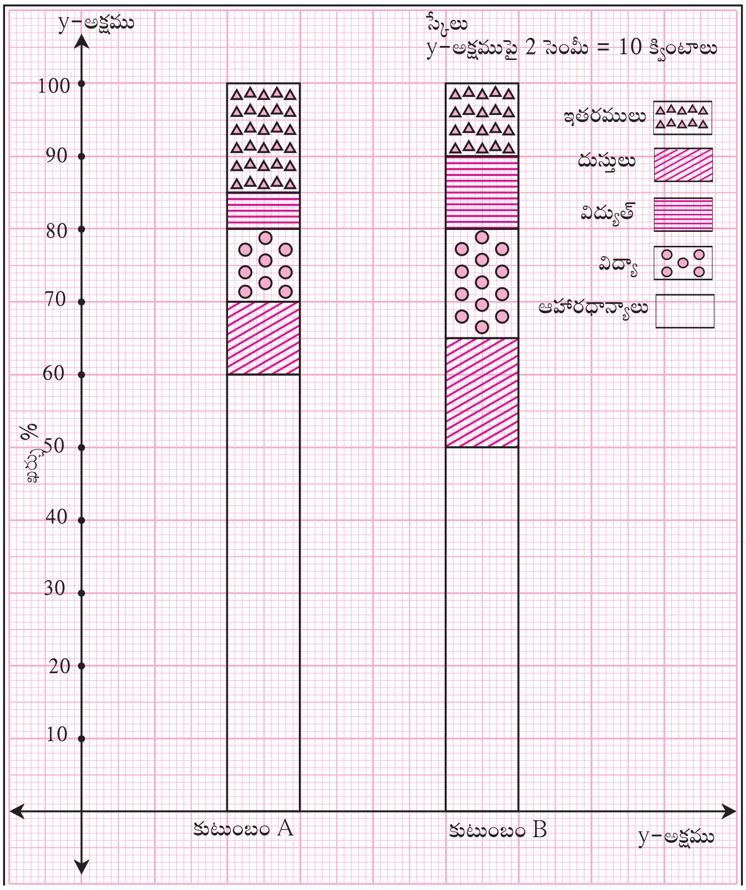
(i) ప్రతి కుంటుంబం యొక్క వివిధ అంశాలపై ఖర్చుల శాతములను రాయండి.

(ii) ఏ కుటుంబం యొక్క అహారధాన్యాల ఖర్చు వారి అన్ని ఖర్చుల యొక్క ప్రమాణములలో ఎక్కువగా ఉంది? ఎంత శాతము ఎక్కువగా ఉంది?

(iii) రెండు కుంటుబాల ఇతర ఖర్చుల శాతము ప్రకారం ఎంతెంత కలవు?

(iv) ఏ కుటుంబం యొక్క విద్యుత్ ఛార్జీల శాతము ఎక్కువగా ఉంది?

(v) ఏ కుటుంబం యొక్క విద్యా ఖర్చు శాతము ఎక్కువగా ఉంది?



సాధన: (i)

కుటుంబం \ ఖర్చులు	ఆహారధాన్యాలు	దుస్తులు	విద్యకై	విద్యుత్	ఇతరములు
A	60%	10%	10%	5%	15%
B	50%	15%	15%	10%	10%

(ii) కుటుంబం A యొక్క ఆహారధాన్యముల ఖర్చు మొత్తం ఖర్చుల యొక్క ప్రమాణములో కుటుంబం B యొక్క ఖర్చు కంటే 10% ఎక్కువగా ఉంది.

(iii) కుటుంబం A యొక్క ఇతర ఖర్చులు 15% మరియు కుటుంబం B యొక్క ఇతర ఖర్చులు 10%.

(iv) కుటుంబం B యొక్క విద్యుత్ ఛార్జీల ఖర్చు యొక్క శాతము ఎక్కువగా ఉంది.

(v) కుటుంబం B యొక్క విద్యకై ఖర్చు శాతము ఎక్కువగా ఉంది.

అభ్యాస మాలిక 7.1

(1) కింది పట్టికలో భారతదేశంలోని ట్రక్కుల మరియు బస్సుల యొక్క సంఖ్యలు లక్షలకు సమీపంగా ఇవ్వబడ్డాయి. దాని నుండి శతమాన కమ్మీ రేఖాచిత్రమును గీయండి. (శాతమును సమీప పూర్ణసంఖ్యగా తీసుకోండి)

సంవత్సరం	ట్రక్కుల సంఖ్య	బస్సుల సంఖ్య
2006-2007	47	9
2007-2008	56	13
2008-2009	60	16
2009-2010	63	18

(2) కింది పట్టికలో భాతరదేశంలో పక్కారోడ్లు మరియు కచ్చా రోడ్ల యొక్క సమాచారము ఇవ్వబడింది. దాని నుండి ఉప విభాగ మరియు శతమాన కమ్మీ రేఖాచిత్రాలను గీయండి. (శాతమును సమీప పూర్ణ సంఖ్యగా తీసుకోండి)

సంవత్సరం	పక్కా రోడ్లు (లక్ష కి.మీ.)	కచ్చా రోడ్లు (లక్ష కి.మీ.)
2000-2001	14	10
2001-2002	15	11
2002-2003	17	13
2003-2004	20	19

కృత్యము : కింది పట్టికలో వివిధ రాష్ట్రాలలో ప్రతి 1000 మంది అబ్బాయిలకు ఉండే అమ్మాయిల సంఖ్య ఇవ్వడం జరిగింది. దానిని బట్టి పట్టికలో ఇచ్చిన ఖాళీగడులను పూరించండి.

రాష్ట్రాలు	అబ్బాయిల సంఖ్య	అమ్మాయిల సంఖ్య	మొత్తం	అబ్బాయిల శాతము (సమీప పూర్ణ సంఖ్య)	అమ్మాయిల శాతము (సమీప పూర్ణ సంఖ్య)
అసామ్	1000	960	1960	$\frac{1000}{1960}\times\frac{100}{1} = = 51\%$	100 - 51 = 49%
బిహార్	1000	840	1840		
పంజాబ్	1000	900			
కేరళ	1000	1080			
మహారాష్ట్ర	1000	900			

పట్టిక నుండి లభించిన వివరాల యొక్క శతమాన కమ్మీ రేఖాచిత్రము గీయండి. దానిని బట్టి కనుగొనిన ఫలితంపై చర్చించండి.

ఆలోచిద్దాం. పేజీ నం. 111లో కృత్యము కొరకు ఇచ్చిన పట్టికలో ఐదు రాష్ట్రాల్లోని ప్రతి వెయ్యి అబ్బాయిలకు గల అమ్మాయిల సంఖ్య ఇవ్వడం జరిగింది.

అవే రాష్ట్రాలలోని అక్షరాస్యత యొక్క ప్రమాణం కింద ఇవ్వడం జరిగింది.

ఆసామ్ (73%), బిహార్ (64%), పంజాబ్ (77%), కేరళ (94%) మరియు మహారాష్ట్ర (83%) పట్టికలోని అమ్మాయిల సంఖ్య మరియు ఆయా రాష్ట్రాలలోని అక్షరాస్యత ప్రమాణాలపై ఆలోచించండి. దాని నుండి ఏమైన ఫలితం లభిస్తుందా?

పదండి, చర్చిద్దాం.

కింది వివరాలను సూచించుట కొరకు ఏ రకమైన కమ్మీ రేఖాచిత్రాలను గీయుట యోగ్యమైనదిగా ఉంటుంది?

(1) నాలుగు ఊళ్ళలోని అక్షరాస్యత యొక్క శాతము.

(2) ఒక కుటుంబానికి వివిధ అంశాలపై అయ్యే ఖర్చు.

(3) ఐదు డివిజనులలోని ప్రతి డివిజన్‌లోని బాలురు మరియు బాలికల సంఖ్య.

(4) మూడు రోజులు సాగిన విజ్ఞాన ప్రదర్శనను రోజు దర్శించే వ్యక్తుల సంఖ్య.

(5) జనవరి నుండి జూన్ వరకు గల ప్రతి నెలలోని మీ ఊరి కనిష్ఠ మరియు గరిష్ఠ ఉష్ణోగ్రతలు.

(6) ద్విచక్ర వాహన దారులలో శిరస్త్రానము (Helmet) వాడే మరియు వాడని 100 కుటుంబాలలోని వ్యక్తుల సంఖ్య.

తెలుసుకుందాం.

సాంఖ్యక శాస్త్రము (Statistics)

ఒక పెద్ద సమూహమును అభ్యసించుట కొరకు దానిలోని కొన్ని అంశాలను తగినన్ని చిన్న సముదాయాలుగా యాదృచ్ఛిక పద్ధతిలో ఎన్నుకొంటారు. ఇది పెద్ద సమూహము యొక్క ప్రతినిధిత్వ సముదాయమవుతుంది. ఈ ప్రతినిధిత్వ సముదాయమును అభ్యసించుటకు వివరాలను సేకరిస్తారు. ఈ వివరాలు ఎక్కువ సార్లు సాంఖ్యక శాస్త్ర రూపములో ఉంటాయి. దానిని విశ్లేషించి కొన్ని సారాంశాలను నిర్ధారించుతారు. ఈ రకమైన అభ్యాసమునకు సాంఖ్యక శాస్త్రము(statistics) అనే పేరు ఉంది.

Statistics అనే పదము status అనే లాటిన్ పదం నుండి తయారైంది. దాని అర్థము రాజ్యము యొక్క స్థితి. దీనిని బట్టి పూర్వము సాంఖ్యకశాస్త్రము అనేది రాజ్య పాలనా వ్యవహారాలకు సంబంధించినది అని మనకు తెలుస్తుంది. కాని ఇప్పుడు ఈ శాస్త్రము యొక్క ఉపయోగము అన్ని రంగాలలో చేస్తున్నారు. **సర్ రోనాల్డ్ ఐల్మర్ ఫిశర్ (Sir Ronald Aylmer Fisher)** (17 ఫిబ్రవరి 1890 – 29 జూలై 1962) ఇతనిని సాంఖ్యక శాస్త్రము యొక్క జనకునిగా భావిస్తారు.

దత్తాంశ సేకరణ (Data collection)

టీచర్ : ఒక గ్రామంలో ప్రతి కుటుంబం వద్ద ఎంత పొలం ఉందో ఈ సమాచారాన్ని సేకరించాలి, ఏమి చేస్తారు.?

రాబర్ట్ : గ్రామంలోని ప్రతి ఇంటికి వెళ్ళి ప్రతి ఒక్కరి వద్ద ఎంత పొలం ఉంది అని నమోదు చేసుకొంటాం.

టీచర్ : సరిగా చెప్పావు, విద్యార్థి మిత్రులారా ఏదేని ఒక ప్రత్యేక సమూహం గురించి మనం వివరాలను క్రోడీకరిస్తామో ఆ వివరాలు ముఖ్యంగా సంఖ్యల రూపంలో ఉంటాయి. దానిని దత్తాంశము అంటారు. దత్తాంశ సేకరణకు ముందు దానిని మనం ఎందుకొరకు ఉపయోగించబోతున్నాం అని తెలియాలి. ఎప్పుడైతే ఒక వ్యక్తి వివరాలను సేకరించే స్థలానికి వెళ్ళి ప్రశ్నలు అడగడం. సంఖ్యలను రాసుకోవడం మొదలైనటువంటి దత్తాంశమును సేకరించినట్లయితే ఆ దత్తాంశమును ప్రాథమిక దత్తాంశము అంటారు.

ఆఫ్రిన్ : అనగా రాబర్ట్ చెప్పిన విధంగా ప్రతి ఇంటికి వెళ్ళి పొలం యొక్క సేకరించిన వివరాలు ప్రాథమిక దత్తాంశము అవుతుంది.

టీచర్ : శభాష్ ఆఫ్రిన్!

రమేశ్ : కాని, పై వివరాలను అతి తక్కువ సమయంలో సేకరించాలంటే?

టీచర్ : రమేశ్ చెప్పేది సరియైనది. మరి ఇలాంటి సమయంలో వివరాల సేకరణకు వేరొక ఉపాయం ఏమై ఉంటుందో, దీనిపై చర్చించండి.

కవితా : మనం తలాటి కార్యాలయానికి వెళ్ళి వారి వద్ద నున్న రికార్డుల నుండి పొలం యొక్క వివరాలను సేకరించవచ్చు.

టీచర్ : సరియైన జవాబు. కొన్ని పరిస్థితులలో సమయాభావం, సాధనముల కొరత లాంటి కారణముల వలన దత్తాంశ సేకరణ వ్యక్తుల వలన స్వయంగా చేయడం సాధ్యం కాదు. ఇలాంటి సమయంలో ఇతరలు నుండి సేకరించిన దత్తాంశం, అనగా కార్యాలయాలలో దస్తావేజులలో నమోదైన దత్తాంశం, ప్రభుత్వ శాఖలలో లభ్యమయ్యే వివరాలు, పరిశోధన వ్యాసాల రూపాలలో ఉన్న దత్తాంశాలను ఉపయోగిస్తారు. ఇలాంటి దత్తాంశమును ద్వితీయ దత్తాంశము అని అంటారు. అనగా కవిత సూచించిన దానిని బట్టి తలాటి కార్యాలయంకు వెళ్ళి పొలం యొక్క వివరాల సేకరణ అనేది ద్వితీయ దత్తాంశము అవుతుంది.

కింది ఉదాహరణలను చూడండి.

(i) దిన పత్రికలలోని సమాచారమును ఉపయోగించి సేకరించిన వివరాలు ద్వితీయ దత్తాంశం అవుతుంది.

(ii) అల్పాహార గృహములో పదార్థాల యొక్క నాణ్యతను గూర్చి తెలుసుకొనుటకై వినియోగదారులను వారి అభిప్రాయము అడిగి సేకరించిన సమాచారము ప్రాథమిక దత్తాంశము అవుతుంది.

(iii) తరగతిలోని విద్యార్థుల యొక్క ఎత్తులను ప్రత్యక్షంగా కొలిచి నమోదు చేసిన, అది ప్రాథమిక దత్తాంశము అవుతుంది.

ప్రాథమిక దత్తాంశము	ద్వితీయ దత్తాంశము
1. సేకరించడానికి ఎక్కువ సమయం పడుతుంది. 2. వర్తమాన మరియు వివరణయుక్తంగా ఉంటుంది. 3. నిర్దిష్టత మరియు విశ్వసనీయంగా ఉంటుంది	1. తొందరగాలభించే అవకాశము ఉంటుంది. 2. దీనిలో పూర్వం సేకరించిన సమాచారాన్ని తీసుకోవడం వలన కాలానుగుణంగా ఉంటుంది అని చెప్పలేము. సమాచారము యొక్క విపదీకరణ తక్కువయ్యే అవకాశము ఉంది. 3. తక్కువ విశ్వసనీయతను కలిగి ఉండవచ్చు.

కృత్యము : మీరు అనేక సందర్భాలలో వేర్వేరు కారణముల వలన సమాచారమును సేకరిస్తారు; ఇలాంటి 3, 4 ఉదాహరణలు తీసుకొని సేకరించిన దత్తాంశము ప్రాథమిక దత్తాంశమాలేక ద్వితీయ దత్తాంశమా చర్చించండి.

అభ్యాస మాలిక 7.2

(1) కింది విధంగా సేకరించిన దత్తాంశమును ప్రాథమిక దత్తాంశము లేక ద్వితీయ దత్తాంశములుగా వర్గీకరించండి.

(i) స్వయంగా తరగతిలోకి వెళ్ళి పాఠశాలలోని ప్రతి తరగతిలోని విద్యార్థుల యొక్క హాజరు సమాచారమును సేకరించారు.

(ii) ప్రతి విద్యార్థి యొక్క ఎత్తుల సమాచారమును పై కార్యాలయమునకు అత్యవసరముగా పంపించాలని పాఠశాలలోని శారీరక విద్యావిభాగములోని రికార్డుద్వారా సమాచారమును సేకరించారు.

(iii) నాంద్‌పూర్‌లో ప్రతి కుటుంబంలో పాఠశాల విడిచిన విద్యార్థుల సమాచారమును ప్రత్యక్షంగా ఇంటింటికి వెళ్ళి సేకరించారు.

(iv) సైన్స్ ప్రాజెక్టు కొరకు ప్రత్యక్షంగా ఆడవిలోకి వెళ్ళి చెట్లను పరిశీలించి సమాచారమును సేకరించారు.

కొంచెం గుర్తుతెచ్చుకుందాం.

దత్తాంశ వర్గీకరణ (Classification of data)

ఉదా: (1) ఒక పాఠశాలలో 9వ తరగతిలోని 50 మంది విద్యార్థులకు మొదటి యూనిట్ పరీక్షలో గణితంలో 20 మార్కులకు లభించిన మార్కులు కింది విధంగా ఉన్నాయి.

20, 6, 14, 10, 13, 15, 12, 14, 17, 17, 18, 11, 19, 9, 16, 18, 14, 7, 17, 20,
8, 15, 16, 10, 15, 12, 18, 17, 12, 11, 11, 10, 16, 14, 16, 18, 10, 7, 17, 14,
20, 17, 13, 15, 18, 20, 12, 12, 15, 10

ఇక్కడ సేకరించిన సంఖ్యారూపములోని సమాచారమును ఏమంటారు?.......ముడి దత్తాంశము

దీనిలోని ప్రతి సంఖ్యను ఏమంటారు? ....ప్రాప్తాంకం

పై సమాచారము ఆధారంగా కింది ప్రశ్నల జవాబులను సేకరించండి.

(i) 15 మార్కులు లభించిన విద్యార్థులు మొత్తం ఎంత మంది ?

(ii) 15 మార్కుల కంటే అధిక మార్కులు లభించిన విద్యార్థులు మొత్తం ఎంత మంది?

(iii) 16 మార్కుల కంటే తక్కువ మార్కులు లభించిన విద్యార్థులు మొత్తం ఎంత మంది?

(iv) అతి తక్కువ మార్కులు ఎన్ని ఉన్నాయి?

(v) అత్యధిక మార్కులు ఎన్ని ఉన్నాయి?

పదండి, చర్చిద్దాం.

(1) మీకు పై ప్రశ్నల యొక్క సమాధానము సులభంగా లభించిందా లేక ప్రతిసారి మార్కులను పరిశీలించవలసి వచ్చిందా?

(2) పై పనిని సులభతరం చేయడానికి ఏమి చేయవచ్చు?

శ్యామ్ : పై సమాధానములు ప్రతిసారి పరిశీలించడం వలన లభిస్తున్నందున ఈ పని క్లిష్టతరం మరియు విసుగు కలిగించే పని అవుతుంది, కానీ ఇచ్చిన ముడి దత్తాంశంను ఆరోహణ లేదా అవరోహణ క్రమంలో రాసిన ఈ పని సులభతరం అవుతుంది.

శ్యామ్ చెప్పినవిధంగా దత్తాంశలోని మార్కులను ఆరోహణ క్రమంలో రాద్దాం.

6, 7, 7, 8, 9, 10, 10, 10, 10, 10, 11, 11, 11, 12, 12, 12, 12, 12, 13, 13,
14, 14, 14, 14, 14, 15, 15, 15, 15, 15, 16, 16, 16, 16, 17, 17, 17, 17, 17, 17,
18, 18, 18, 18, 18, 19, 20, 20, 20, 20

సమాచారమును ఆరోహణ క్రమంలో రాయడం ద్వారా ఉదా. 1లోని ఐదు ప్రశ్నల సమాధానములు సులభంగా లభిస్తున్నాయా? దీనిని సరిచూడడండి.

సరిచూడడం నుండి దత్తాంశం ఆరోహణ క్రమములో అమర్చడం వలన ఐదు పశ్నల సమాధానములు అతి సులభంగా లభిస్తాయని స్పష్టమౌతుంది.

కొంచెం గుర్తుతెచ్చుకుందాం.

మార్టిన్ : దత్తాంశమును పట్టిక రూపంలో అమర్చిన కూడా పై పనిని అత్యంత సులువుగా చేయయవచ్చు, దీనిని మనం కింది తరగతిలో నేర్చుకున్నాము. ఈ పట్టికను పౌనఃపున్య విభజన పట్టిక అంటారు.

టీచర్ : మార్టీన్, చాలా చక్కని సమాధానము! ఇప్పుడు ఈ పట్టికను పై ఉదా. 1 ఆధారంగా తయారుచేయండి.

ఉదాహరణ (1)లో అతి తక్కువ మార్కులు 6 మరియు అత్యధిక మార్కులు 20 గలవు. కావున పట్టికలో ప్రాప్తాంకం యొక్క నిలువు వరసలో 6 నుండి 20 ప్రాప్తాంకములను రాయండి. రెండవ నిలువు వరుసలో గణన చిహ్నాలను, చివరి నిలువు వరుసలో గణన చిహ్నాలను లెక్కించి పౌనఃపున్యమును రాయండి.

పౌనః పున్యవిభజన పట్టిక

ప్రాప్తాంకము	గణన చిహ్నాలు	పౌనః పున్యము(f)(విద్యార్థుల సంఖ్య)
6	|	1
7	||	2
8		
9		
10	卌	5
11		
12		
13		
14		
15		
16		
17	卌 |	6
18		
19		
20	||||	4
		మొత్తం N = 50

N అనేది పౌనఃపున్యాల మొత్తము

పదండి, చర్చిద్దాం.

వర్గీకృత పౌనఃపున్య విభజన పట్టిక (Grouped frequency distribution table)

పై పౌనఃపున్య విభజన పట్టికలో

(1) ఈ పట్టిక చాలా పెద్దదిగా అనిపిస్తుంది కదా?

(2) ఎప్పుడైతే దత్తాంశములోని ప్రాప్తాంకముల సంఖ్య ఎక్కువగా ఉన్నప్పుడు ఈ పట్టికను తయారు చేయడం కఠినంగా ఉంటుంది కదా?

టీచర్ : పై చర్చనుండి ఎప్పుడైతే దత్తాంశములోని ప్రాప్తాంకముల సంఖ్య ఎక్కువగా ఉన్నట్లయితే వర్గీకృత పౌనఃపున్య విభజన పట్టిక చాలా పెద్దదౌతుంది. దానిని తయారు చేయడానికి చాలా సమయం పడుతుంది. అని మనకు తెలుస్తుంది. పట్టిక యొక్క విస్తారాన్ని మరియు సమయమును తగ్గించుట కొరకు కొన్ని ఉపాయములను సూచించ వచ్చునా?

రోహిత్ : ఇలాంటి సమయంలో దత్తాంశమును సమూహములుగా విభజించండి.

టీచర్ : శబాష్ రోహిత్, దత్తాంశము యొక్క సమూహాలను తయారు చేయటం అనగా తరగతులను తయారుచేసినట్లయితే దత్తాంశ వ్యవస్థీకరణ జరిగి సమయము తగ్గుతుంది. ఇలాంటి పట్టికలనే వర్గీకృత పౌనఃపున్య విభజన పట్టికలు అంటారు.

ఇలాంటి పట్టికలు రెండు పద్ధతులలో రాయవచ్చును. (1) విలీన పద్ధతి (2) మినహాయింపు పద్ధతి

(1) విలీన రూపము (విచ్ఛిన్న తరగతి) (Inclusive method)

6, 7, 7, 8, 9, 10, 10, 10, 10, 10, 11, 11, 11, 12, 12, 12, 12, 12, 13, 13, 14, 14, 14, 14, 14, 15, 15, 15, 15, 15, 16, 16, 16, 16, 17, 17, 17, 17, 17, 17, 18, 18, 18, 18, 18, 19, 20, 20, 20, 20

పై దత్తాంశములోని అన్నింటికన్న చిన్న సంఖ్య ☐ మరియు అన్నింటికంటే పెద్ద సంఖ్య ☐. అన్నిటి కన్న పెద్ద మరియు అన్నిటికంటే చిన్న సంఖ్యల మధ్య భేదము 20 – 6 = 14. ఈ భేదమును **దత్తాంశము యొక్క వ్యాప్తి** అంటారు. ఈ వ్యాప్తిని దృష్టిలో ఉంచుకొని దత్తాంశంను ఎలాంటి వీలైన తరగతులుగా తయారుచేయవచ్చు?

(i) 6 నుండి 8, 9 నుండి 11, 12 నుండి 14, 15 నుండి 17, 18 నుండి 20 లేదా

(ii) 6 నుండి 10, 11 నుండి15, 16 నుండి 20 ఇలాంటి తరగతులను తయారుచేయవచ్చు.

6 నుండి 10, 11 నుండి15 మరియు 16 నుండి 20 ఈ తరగతులను తీసుకొని పై దత్తాంశం యొక్క పౌనఃపున్య విభజన పట్టికను తయారుచేద్దాం.

వర్గీకృత పౌనః పున్య పట్టిక (విలీన పద్ధతి)

తరగతి	గణన చిహ్నాలు	పౌనః పున్యము(f)(విద్యార్థుల సంఖ్య)
6 నుండి10	卌 卌	10
11 నుండి 15	.....	.....
16 నుండి20	.....	20
		N = 50

ఈ పట్టికను తయారు చేస్తున్నప్పుడు 6, 10 మరియు వాటి మధ్యలోని అన్ని ప్రాప్తాంకములను 6 నుండి 10 ఈ తరగతిలో చేర్చడం జరిగింది, కాబట్టి పట్టిక తయారు చేసే ఈ పద్ధతిని విలీన పద్ధతి అని అంటారు. 6 నుండి 10, 11 నుండి 15, 16 నుండి 20 ఈ తరగతులను విచ్ఛిన్న తరగతులు అంటారు.

తెలుసుకుందాం.

సాంఖ్యక శాస్త్రములోని కొన్ని మూల పదములు (Basic terms in statistics)

(1) **తరగతి (Class)** : ప్రాప్తాంకముల యొక్క వీలైన సమూహాలను తరగతి అని అంటారు.
6 నుండి 10, 11 నుండి15 ఈ తరగతులను 6–10, 11–15 అని కూడా రాస్తారు.

(2) **తరగతి హద్దులు (Class limits)** : తరగతి సూచించే సంఖ్యలను తరగతి హద్దులు అంటారు.
6 నుండి 10 ఈ తరగతిలో 6 తరగతి దిగువ హద్దు మరియు 10 తరగతి ఎగువ హద్దులు అవుతాయి.

(3) **పౌనఃపున్యము (Frequency)** : ప్రతి తరగతిలో ఎన్ని ప్రాప్తాంకాలు వస్తాయో ఆ ప్రాప్తాంకాల మొత్తం సంఖ్యను ఆ తరగతి యొక్క పౌనఃపున్యం అంటారు.
పై పట్టికలో 11 నుండి 15 ఈ తరగతిలో 20 ప్రాప్తాంకాలు వచ్చాయి. 11 నుండి 15 ఈ తరగతిలోని పౌనఃపున్యమును 20 అని అంటారు.

4. **తరగతి అంతరము (Class width) :** అవిచ్ఛిన్న తరగతులు ఇచ్చినప్పుడు వరుసగా వచ్చే రెండు తరగతుల యొక్క దిగువ (లేదా ఎగువ) హద్దుల తేడాను తరగతి అంతరము అని అంటారు.
ఉదా: 5 - 10, 10 - 15, 15 - 20, ... ఇలాంటి తరగతులున్నట్లయితే 5 - 10 తరగతి అంతరము =10 - 5 = 5 అవుతుంది.

5. **తరగతి మధ్య విలువ (Class mark) :** తరగతి యొక్క దిగువ మరియు ఎగువ హద్దుల సరాసరిని తరగతి మధ్య విలువ అంటారు.

$$\text{తరగతి మధ్య విలువ} = \frac{\text{తరగతి దిగువ హద్దు} + \text{తరగతి ఎగువ హద్దు}}{2}$$

ఉదా. 11 నుంచి 15 ఈ తరగతుల మధ్యవిలువ $= \frac{\square + \square}{2} = \frac{26}{2} = 13$

(2) మినహాయింపు పద్ధతి (అవిచ్ఛిన్న తరగతి) (Exclusive method)

ఉదా: 6, 10, 10.3, 11, 15.7, 19, 20, 12, 13 అనే ప్రాప్తాంకాలు ఇవ్వబడ్డాయి.

6−10, 11−15, 16−20 ఇలా తరగతులను తీసుకొని దాని వర్గీకృత పౌనః పున్య పట్టికను తయారు చేయండి.

సాధన:

తరగతి	గణన చిహ్నాలు	పౌనః పున్యము (f)
6−10	||	**2**
11−15	|||	**3**
16−20	||	**2**

పై పట్టికలో ఇచ్చిన సంఖ్యలలో 10.3 మరియు 15.7 అనే రెండు ప్రాప్తాంకాలను చేర్చే అవకాశం లేదు.

ఎందుకనగా 10.3, 15.7 ఈ సంఖ్యలు 6−10, 11−15, 16−20లలో ఏ తరగతిలో కూడా చేర్చే అవకాశం లేదు. దీని కొరకు తరగతులను మార్చవలెను. కావున ఈ తరగతులు 5−10, 10−15, 15−20, ... ఈ విధంగా వరుసగా రాసిన పై ప్రశ్న ఏర్పడదు. 10 అనే సంఖ్యను 5−10, 10−15లలో ఏ తరగతులలో నమోదు చేయాలి అన్న ప్రశ్న ఏర్పడుతుంది, ఈ అడ్డంకిని దూరము చేయుటకు 10 అనే సంఖ్యను 5−10 అనే తరగతిలో చేర్చకుండా 10−15 తరగతిలో చేర్చండి. కావున 10 యొక్క నమోదు 10−15 ఈ తరగతిలో అవుతుంది. ఈ పద్ధతిని మినహాయింపు పద్ధతి అంటారు. ఈ రకమైన తరగతులను తీసుకోవడం వలన 10.3 మరియు 15.7 సంఖ్యలను పట్టికలో చేర్చ వచ్చింది.

ఇప్పుడు ఇదే విధంగా తరగతులను తీసుకొని మరియు సూచనలను పాటిస్తు తయారు చేసిన పట్టికను చూడండి.

వర్గీకృత పౌనఃపున్య విభజన పట్టిక (మినహాయింపు పద్ధతి)

తరగతి (అవిచ్ఛిన్న) మార్కులు	గణన చిహ్నాలు	పౌనః పున్యము (f) (విద్యార్థుల సంఖ్య)
5−10	|	1
10−15	||||̸	5
15−20	||	2
20−25	|	1

ఇది గుర్తుంచుకోండి.

పౌనఃపున్య విభజన పట్టిక

అవర్గీకృత

9వ తరగతిలోని విద్యార్థుల యొక్క వయస్సు	విద్యార్థుల సంఖ్య
14	12
15	23
16	10

వర్గీకృత

విలీన పద్ధతి (విచ్ఛిన్న తరగతి)

బూటు యొక్క సైజు	విద్యార్థుల సంఖ్య
2-4	12
5-7	29
8-10	7

మినహాయింపు పద్ధతి (అవిచ్ఛిన్న తరగతి)

ఎత్తు (సెం.మీ)	విద్యార్థుల సంఖ్య
145-150	18
150-155	27
155-160	3

అభ్యాస మాలిక 7.3

(1) 20 నుండి 25 ఈ తరగతి యొక్క దిగువ మరియు ఎగువ హద్దులను రాయండి.

(2) 35 నుండి 40 ఈ తరగతి యొక్క తరగతి మధ్యవిలువను కనుగొనండి.

(3*) ఒక తరగతి యొక్క మధ్యవిలువ 10 తరగతి అంతరం 6 అయిన ఆ తరగతి ఏది?

(4) కింది పట్టికను పూర్తి చేయండి.

తరగతి (వయస్సు సం.)	గణన చిహ్నాలు	పౌనఃపున్యము (f) (విద్యార్థుల సంఖ్య)
12-13	卌	☐
13-14	卌 卌 ||||	☐
14-15		☐
15-16	||||	☐
		$N=\sum f = 35$

(5) ఒక పాఠశాల యొక్క హరితసేనలోని 45 విద్యార్థులలో ప్రతి ఒక్కరు నాటిన మొక్కల సంఖ్య కింద ఇవ్వబడింది.

3, 5, 7, 6, 4, 3, 5, 4, 3, 5, 4, 7, 5 , 3, 6, 6, 5, 3, 4, 5, 7, 3, 5, 6, 4, 4, 3, 5, 6, 6, 4, 3, 5, 7, 3, 4, 5, 7, 6, 4, 3, 5, 4, 4, 7.

దీనిని బట్టి అవర్గీకృత పౌనఃపున్య విభజన పట్టికను తయారు చేయండి.

(6) π యొక్క 50 దశాంశ స్థానముల వరకుగల విలువ కింద ఇవ్వబడింది.

3.14159265358979323846264338327950288419716939937510 దీనిబట్టి అవర్గీకృత పౌనఃపున్య విభజన పట్టికను తయారు చేయండి.

(7*) కింది పట్టికలోని సమాచారమును బట్టి తరగతి అంతరమును కనుగొనండి మరియు అవిచ్ఛిన్న తరగతి మరియు విచ్ఛిన్న తరగతులు గల పౌనఃపున్య విభజన పట్టికను తయారుచేయండి.

(i)

తరగతి మధ్య విలువ	పౌనఃపున్యము
5	3
15	9
25	15
35	13

(ii)

తరగతి మధ్య విలువ	పౌనఃపున్యము
22	6
24	7
26	13
28	4

(8) ఒక పాఠశాలలో 9వ తరగతిలోని 46 మంది విద్యార్థులను వారివారి కంపాసు బాక్స్‌లోని పెన్సిల్ యొక్క పొడవును కొలవమని చెప్పారు. ఆ పొడవులు సెం. మీ.లలో కింది విధంగా ఉన్నాయి.

16, 15, 7, 4.5, 8.5, 5.5, 5, 6.5, 6, 10, 12,
13, 4.5, 4.9, 16, 11, 9.2, 7.3, 11.4, 12.7, 13.9, 16,
5.5, 9.9, 8.4, 11.4, 13.1, 15, 4.8, 10, 7.5, 8.5, 6.5,
7.2, 4.5, 5.7, 16, 5.7, 6.9, 8.9, 9.2, 10.2, 12.3, 13.7,
14.5, 10

0-5, 5-10, 10-15, ... ఈ విధంగా తరగతులను తీసుకొని మినహాయింపు పద్ధతిలో వర్గీకృత పౌనఃపున్య విభజన పట్టికను తయారు చేయండి.

(9) ఒక ఊరిలోని సహకార పాలసేకరణ కేంద్రంలో 50 మంది వ్యక్తులు ప్రతి ఒక్కరు ఎన్ని లీటర్ల పాలు పోస్తారో ఆ సమాచారం కింద ఇవ్వబడింది

27, 75, 5, 99, 70, 12, 15, 20, 30, 35, 45, 80,
77, 90, 92, 72, 4, 33, 22, 15, 20, 28, 29, 14,
16, 20, 72, 81, 85, 10, 16, 9, 25, 23, 26, 46,
55, 56, 66, 67, 51, 57, 44, 43, 6, 65, 42, 36,
7, 35

యోగ్యమైన తరగతులను తీసుకొని వర్గీకృత పౌనఃపున్య విభజన పట్టిక తయారు చేయండి.

(10) ఒక సంస్థకు దివ్యాంగుల అభివృద్ధి నిధి కొరకు ఊళ్ళోని 38 మంది ప్రతి ఒక్కరు కొన్ని రూపాయలు ఇచ్చిరి. ఈ సమాచారము కింద ఇవ్వబడింది.

101, 500, 401, 201, 301, 160, 210, 125, 175, 190, 450, 151,
101, 351, 251, 451, 151, 260, 360, 410, 150, 125, 161, 195,
351, 170, 225, 260, 290, 310, 360, 425, 420, 100, 105, 170,
250, 100

(i) 100-149, 150-199, 200-249, ... ఇలాంటి తరగతులనను తీసుకొని వర్గీకృత పౌనఃపున్య విభజన పట్టికను తయారుచేయండి.

(ii) పట్టిక నుండి 350 రూ. మరియు అంతకంటే ఎక్కువ నిధి ఇచ్చిన వారి సంఖ్య ఎంతనో అది రాయండి.

తెలుసుకుందాం.

ఆరోహణ సంచిత పౌనఃపున్య పట్టిక (Less than cumulative frequency)

ఉదా: ఒక పాఠశాలలో 50 మంది 9వ తరగతి విద్యార్థులకు మొదటి యూనిట్ పరీక్షలో గణితంలో 40 మార్కులకు లభించిన మార్కుల పౌనఃపున్య విభజన పట్టిక కింద ఇవ్వబడింది.

తరగతి	పౌనఃపున్యం (విద్యార్థుల సంఖ్య) (f)
0−10	02
10−20	12
20−30	20
30−40	16
	మొత్తం N = 50

(1) పట్టికనుండి కింది వాక్యాలలోని ఖాళీలను పూరించండి.

(i) 10 నుండి 20 ఈ తరగతి యొక్క దిగువ హద్దు ☐ మరియు ☐ తరగతి ఎగువ హద్దు

(ii) 10 కంటే తక్కువ మార్కులు లభించిన విద్యార్థులు ఎంత మంది ? [2]

(iii) 20 కంటే తక్కువ మార్కులు లభించిన విద్యార్థులు ఎంత మంది ? 2 + ☐ = 14

(iv) 30 కంటే తక్కువ మార్కులు లభించిన విద్యార్థులు ఎంత మంది ? ☐ + ☐ = 34

(v) 40 కంటే తక్కువ మార్కులు లభించిన విద్యార్థులు ఎంత మంది ? ☐ + ☐ = 50

ఇది గుర్తుంచుకొందాం.

ఒక ప్రత్యేకమైన తరగతి యొక్క పౌన్యఃపున్యము మరియు దాని ముందున్న అన్ని తరగతుల పౌనఃపున్యాల మొత్తమును, ఆ తరగతి యొక్క తరగతి ఎగువ హద్దు కంటే తక్కువైన సంచిత పౌనఃపున్యము అంటారు. క్లుప్తంగా దానిని ఆరోహణ సంచిత పౌనః పున్యము అని కూడా అంటారు.

ఆరోహణ సంచిత పౌనఃపున్యము పట్టిక యొక్క వివరణ

తరగతి మార్కులు	పౌనః పున్యము	ఆరోహణ సంచిత పౌనఃపున్యము
0−10	2	2
10−20	12	2 + 12 = ☐
20−30	20	☐ +20=34
30−40	16	34 + ☐ =50
మొత్తం 50		

తరగతి	సంచిత పౌనః పున్యము	ఆరోహణ సంచిత పౌనఃపున్య వివరణ
0−10	2	2 విద్యార్థులకు 10 కంటె తక్కువ మార్కులు
10−20	14	14 విద్యార్థులకు 20 కంటె తక్కువ మార్కులు
20−30	34	34 విద్యార్థులకు 30 కంటె తక్కువ మార్కులు
30−40	50	50 విద్యార్థులకు 40 కంటె తక్కువ మార్కులు
	మొత్తం 50	

(2) తరగతి దిగువ హద్దు యంత లేదా అవరోహణ సంచిత పౌనఃపున్య పట్టిక

తరగతి	పౌనః పున్యము	సంచిత పౌనః పున్యము
0–10	2	50
10–20	12	50 – 2 = 48
20–30	20	48 – 12 = 36
30–40	16	36 – 20 = 16
మొత్తం 50		

తరగతి	సంచిత ఫౌనః పున్యము	తరగతి దిగువ హద్దు లేదా అవరోహణ సంచిత పౌనఃపున్య వివరణ
0–10	50	50 విద్యార్థులకు 0 లేదా 0 కంటె ఎక్కువ మార్కులు లభించెను.
10–20	48	48 విద్యార్థులకు 10 లేదా10 కంటె ఎక్కువ మార్కులు లభించెను.
20–30	36	36 విద్యార్థులకు20 లేదా 20 కంటె ఎక్కువ మార్కులు లభించెను.
30–40	16	16 విద్యార్థులకు 30 లేదా 30 కంటె ఎక్కువ మార్కులు లభించెను.

ఉదా: ఒక స్పోర్ట్స్‌క్లబ్ టేబుల్ టెన్నిస్ పోటీల కొరకు వచ్చిన ఆటగాళ్ళ వయస్సుల వర్గీకరణ కింద పట్టికలో ఇవ్వబడింది. దాని నుండి అవరోహణ సంచిత పౌనఃపున్య పట్టికను పూర్తి చేయండి.

సాధన: అవరోహణ సంచిత పౌనః పున్య పట్టిక

వయస్సు (సం.)	గణన చిహ్నాలు	పౌనఃపున్యం (ఆటగాళ్ళ సంఖ్య)	తరగతి దిగువ హద్దు లేదా అవరోహణ సంచిత పౌనః పున్యము
10–12	卌 ||||	09	50
12 – 14	卌 卌 卌 卌 |||	☐	☐ – 9 = 41
14–16	卌 卌 |||	☐	41 – 23 = ☐
16– 18	卌	05	☐ – 13 = ☐
		మొత్తం N = 50	

అభ్యాస మాలిక 7.4

(1) కింది సంచిత పౌనఃపున్య పట్టిక పూర్తి చేయండి

తరగతి (ఎత్తు–సెం.లలో)	పౌనః పున్యము (విద్యార్థి సంఖ్య)	ఆరోహణ సంచిత పౌనః పున్యం
150–153	05	05
153–156	07	05+ ☐ = ☐
156–159	15	☐ + 15 = ☐
159–162	10	☐ + ☐ = 37
162–165	05	37+5=42
165–168	03	☐ + ☐ = 45
	మొత్తము N = 45	

(2) కింది సంచిత పౌనఃపున్య పట్టికను పూర్తి చేయండి.

తరగతి (నెలసరి ఆదాయం రూ.లు)	పౌనః పున్యం (వ్యక్తుల సంఖ్య)	అవరోహణ పౌనఃపున్యం
1000–5000	45	....
5000–10000	19	....
10000–15000	16	....
15000–20000	02	....
20000–25000	05	....
	మొత్తం N = 87	

(3) ఒక తరగతిలోని 62 విద్యార్థులకు గణితములో 100 కి లభించిన మార్కులు కింద ఇవ్వబడినది.
0–10, 10–20 ..... ఈ తరగతులను తీసుకొని పౌనః పున్య పట్టిక మరియు సంచిత పౌనఃపున్య పట్టిక (అవరోహణ)ను తయారు చేయండి.

55,	60,	81,	90,	45,	65,	45,	52,	30,	85,	20,	10,
75,	95,	09,	20,	25,	39,	45,	50,	78,	70,	46,	64,
42,	58,	31,	82,	27,	11,	78,	97,	07,	22,	27,	36,
35,	40,	75,	80,	47,	69,	48,	59,	32,	83,	23,	17,
77,	45,	05,	23,	37,	38,	35,	25,	46,	57,	68,	45,
47,	49										

తయారు చేసిన పట్టిక నుండి కింది ప్రశ్నల జవాబులు రాయండి.

(i) 40 లేదా 40 కంటే ఎక్కువ మార్కులు లభించిన విద్యార్థుల సంఖ్య ఎంత?

(ii) 90 లేదా 90 కంటే ఎక్కువ మార్కులు లభించిన విద్యార్థుల సంఖ్య ఎంత?

(iii) 60 లేదా 60 కంటే ఎక్కువ మార్కులు లభించిన విద్యార్థుల సంఖ్య ఎంత?

(iv) 0–10 ఈ తరగతి యొక్క అవరోహణ సంచిత పౌనః పున్యము ఎంత?

(4) పై ఉదాహరణ (3) యొక్క ఆరోహణ సంచిత పౌనఃపున్య పట్టికను తయారు చేసి, కింది ప్రశ్నలకు జవాబులు రాయండి.

(i) 40 కంటె తక్కువ మార్కులు లభించిన విద్యార్థుల సంఖ్య ఎంత?

(ii) 10 కంటె తక్కువ మార్కులు లభించిన విద్యార్థుల సంఖ్య ఎంత?

(iii) 60 కంటె తక్కువ మార్కులు లభించిన విద్యార్థుల సంఖ్య ఎంత?

(iv) 50–60 ఈ తరగతి యొక్క ఆరోహణ సంచిత పౌనఃపున్యము ఎంత?

తెలుసుకుందాం.

కేంద్ర స్థానీయ కొలతలు (Measures of central tendancy)

కేంద్రీయ ప్రవృత్తి : సర్వేలో లభించిన సాంఖ్యక దత్తాంశములలో సాధారణంగా ఒక ధర్మము కన్పిస్తుంది. దత్తాంశవ ళిలోని ఏదేని సంఖ్య యొక్క చుట్టు పక్కల ఇతర సంఖ్యల సాంద్రత అధికంగా కనబడుతుంది. సమూహం యొక్క ఈ ధర్మవ ును సమూహం యొక్క కేంద్రీయ ప్రవృత్తి అంటారు.

సమూహంలోని ఏ సంఖ్య చుట్టుపక్కల ఇతర సంఖ్యల యొక్క సాంద్రత అధికంగా ఉంటుందో, ఆ సంఖ్య ఆ సమూహానికి ప్రాతినిధ్యం వహిస్తుందని అంటారు. ఇలాంటి సంఖ్యను కేంద్రీయ స్థాన కొలతలు అంటారు.

సాంఖ్యక శాస్త్రములో కేంద్రీయ ప్రవృత్తిని బట్టి దాని కేంద్రీయ స్థాన కొలతలను కింది విధంగా ఉపయోగిస్తారు.

(1) సగటు (Mean): దత్తాంశములోని అన్ని సంఖ్యల యొక్క అంకగణిత సరాసరిని అ దత్తాంశము యొక్క సగటు అంటారు.

$$\text{దత్తాంశము యొక్క సగటు} = \frac{\text{దత్తాంశంలోని అన్ని సంఖ్యల మొత్తం}}{\text{దత్తాంశంలోని మొత్తం సంఖ్యలు}}$$

ఉదా: (1) 25, 30, 27, 23 మరియు 25 ఈ సంఖ్యల సగటును కనుగొనండి.

సాధన : $\frac{25+30+27+23+25}{5} = \frac{130}{5} = 26$

ఉదా: (2) 35 మంది 9వ తరగతి విద్యార్థులకు అర్థ సంవత్సర పరీక్షలలో బీజగణితంలో 40 మార్కులకు లభించిన మార్కులు కింది విధంగా ఉన్నాయి. వాటి నుండి మార్కుల యొక్క సగటును కనుగొనండి.

40, 35, 30, 25, 23, 20, 14, 15, 16, 20, 17, 37,
37, 20, 36, 16, 30, 25, 25, 36, 37, 39, 39, 40,
15, 16, 17, 30, 16, 39, 40, 35, 37, 23, 16.

సాధన : ఇక్కడ ఇచ్చిన సంఖ్యలు ఎక్కువ ఉండడం వలన మొత్తమును కనుగొనవచ్చు, కాని సంఖ్యలను గణించుట క్లిష్టమగును. ఇచ్చట ప్రతి 3గురు విద్యార్థులకు ఒక్కొక్కరికి 30 మార్కులు ఉన్నాయి. వారి మార్కుల మొత్తం 30 + 30 + 30 = 90 ఇలా చేయడం కంటే 30 × 3 = 90 అని చేయడం సులభం అవుతుంది. దాని గురించి పౌనఃపున్య పట్టిక ఉపయోగపడుతుంది.

సాంఖ్యక శాస్త్రములో $\sum_{i=1}^{n}$ అనే చిహ్నమును ఉపయోగించడం సులువుగా ఉంటుంది. $\sum_{i=1}^{n} f_i x_i$ దీని అర్థమును అర్థం చేసుకుందాం. i అనేది ధన పూర్ణ సంఖ్య f_i అనేది విద్యార్థుల యొక్క పౌనః పున్యము x_i మార్కులు లభించినవి అని అనుకుందాం. Σ (సిగ్మా) అనే చిహ్నము మొత్తము గురించి వాడబడుతుంది. $\sum_{i=1}^{n}$ అనే చిహ్నము i యొక్క 1 నుండి n విలువలకు n పదముల మొత్తమును సూచిస్తుంది.

మార్కులు	విద్యార్థుల సంఖ్య	$f_i \times x_i$
14	1	14 × 1 = 14
15	2	15 × 2 = ...
16	5	16 × .... = ...
17	2	17 × 2 = 34
20	3	.... × 3 = ...
23	2	23 × 2 = ...
25	3	25 × 3 = ...
30	3	.... × .... = ...
35	2	35 × 2 = 70
36	2	.... × .... = ...
37	4	..... × .... = ...
39	3	39 × 3 = 117
40	3	.... × .... = 120
	N= ☐	$\sum f_i x_i = 956$

$$\text{సగటు } \bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{N} = \frac{956}{35}$$

$= 27.31$ (సుమారుగా)

∴ ఇచ్చిన దత్తాంశము యొక్క సగటు 27.31 అవుతుంది.

(2) మధ్యగతము (Median) : దత్తాంశలోని సంఖ్యలను ఆరోహణ (లేదా అవరోహణ) క్రమంలో రాస్తారు. ఇలా రాయగా దానిలో, మధ్యలో వచ్చే సంఖ్యను ఆ దత్తాంశం మధ్యగతము అంటారు.

దత్తాంశములో ప్రాప్తాంకాల సంఖ్య సరి సంఖ్య అయిన మధ్యలో వచ్చే రెండు సంఖ్యల సరాసరిని దాని మధ్యగతము అంటారు.

ఉదా. (1) 72, 66, 87, 92, 63, 78, 54 ఈ దత్తాంశము యొక్క మధ్యగతము కనుగొనండి.

సాధన : ఇచ్చిన సంఖ్యలను ఆరోహణ క్రమంలో రాద్దాం

54, 63, 66, **72,** 78, 87, 92

ఈ అమరికలోని నాల్గవ సంఖ్య మధ్యలో ఉంది, అది 72.

$\therefore$ ఇచ్చిన దత్తాంశ మధ్యగతము = 72

ఉదా. (2) 30, 25, 32, 23, 42, 36, 40, 33, 21, 43 ఈ దత్తాంశము యొక్క మధ్యగతము కనుగొనండి

సాధన: ఇచ్చిన ప్రాప్తాంకాలను ఆరోహణ క్రమంలో రాద్దాం.

21, 23, 25, 30, **32, 33,** 36, 40, 42, 43

ఇక్కడ 10 ప్రాప్తాంకాలున్నాయి. అనగా సరి సంఖ్య

$\therefore$ ఐదవ మరియు ఆరవ ఇలా రెండు సంఖ్యలు మధ్యలో వస్తాయి. అవి వరుసగా 32 మరియు 33.

$\therefore$ దత్తాంశ మధ్యగతము = $\frac{32+33}{2} = \frac{65}{2}$ = 32.5

ఆలోచిద్దాం.

దత్తాంశలోని సంఖ్యల సంఖ్య n అయినపుడు,

(i) n బేసి సంఖ్య అయినట్లయితే ఎన్నవ ప్రాప్తాంకం ఆ దత్తాంశం మధ్యగతము అవుతుంది?

(ii) n సరి సంఖ్య అయినప్పుడు ఎన్నవరెండు ప్రాప్తాంకాల సరాసరి ఆ దత్తాంశ మధ్యగతము అవుతుంది?

(3) బహుళకము (Mode): దత్తాంశములో అన్నింటి కంటే అత్యధిక సార్లు వచ్చే సంఖ్య ఆ దత్తాంశ బహుళకము అవుతుంది.

ఉదా. (1) 90, 55, 67, 55, 75, 75, 40, 35, 55, 95 ఈ దత్తాంశము బహుళకము కనుగొనండి.

సాధన: దత్తాంశంలోని సంఖ్యలు ఆరోహణ క్రమములో అమర్చినట్లయితే ఏ సంఖ్య అత్యధిక సార్లు వచ్చిందో, దీనిని గుర్తించడం చాలా సులభమవుతుంది.

ఇచ్చిన దత్తాంశం యొక్క ఆరోహణ క్రమం : 35, 40, 55, 55, 55, 67, 75, 75 90, 95

దీనిని బట్టి అత్యధిక సార్లు వచ్చిన సంఖ్య = 55

$\therefore$ ఇచ్చిన దత్తాంశ బహుళకం 55.

ఉదా.(2) ఒక పరిశ్రమలో కార్మికుల యొక్క వయస్సులు కింది పట్టికలో ఇవ్వడం జరిగింది.

వయస్సు (సం.)	19	21	25	27	30
కార్మికులు	5	15	13	15	7

దీని నుండి వయస్సులు యొక్క బహుళకము కనుగొనండి.

సాధన: ఇక్కడ అత్యధిక పౌనఃపున్యము 15. కాని ఈ పౌనఃపున్యము రెండు ప్రాప్తాంకాలది.

$\therefore$ బహుళకము = 21 మరియు 27 $\therefore$ వయస్సుల యొక్క బహుళకము 21 సం. మరియు 27 సం.

అభ్యాస మాలిక 7.5

(1) ముకుంద్ యొక్క 7సం.ల సోయాబీన్ ఉత్పత్తి ఎకరానికి క్వింటాళ్ళలో 10,7,5,3,9,6,9. దీనిని బట్టి ఎకరము ఉత్పత్తి యొక్క సగటును కనుగొనండి.

(2) ఇచ్చిన దత్తాంశం యొక్క మధ్యగతమును కనుగొనండి 59,75,68,70,74,75,80

(3) గణితము యొక్క ఇంటిపనిలో (Assignment) 7గురు విద్యార్థులకు 100 మార్కులకు లభించిన మార్కులు కింది విధంగా ఉన్నాయి. 99, 100, 95, 100, 100, 80, 90. దీనిని బట్టి లభించిన మార్కుల యొక్క బహుళకమును కనుగొనండి.

(4) ఒక పరిశ్రమలోని 30 మంది కార్మికులకు లభించే నెలసరి జీతాలు రూ.లలో కింది విధంగా ఉన్నాయి.
5000, 7000, 3000, 4000, 4000, 3000, 3000, 3000, 8000, 4000,
4000, 9000, 3000, 5000, 5000, 4000, 4000, 3000, 5000, 5000,
6000, 8000, 3000, 3000, 6000, 7000, 7000, 6000, 6000, 4000
దీనిని బట్టి కార్మికుల యొక్క నెలసరి జీతము యొక్క సగటును కనుగొనండి.

(5) ఒక బుట్టలోని 10 టమాటాలలో ప్రతిదాని బరువు గ్రాములలో 60, 70, 90, 95, 50, 65,70, 80, 85, 95. దీని నుండి టమాటాల బరువు యొక్క మధ్యగతమును కనుగొనండి.

(6) ఒక హాకీ క్రీడాకారుడు 9 పోటీలలో చేసిన గోల్స్ కింది విధంగా ఉన్నాయి.
5, 4, 0, 2, 2, 4, 4, 3, 3 వీటిని బట్టి సగటు, మధ్యగతము మరియు బహుళకములను కనుగొనండి.

(7) 50 సంఖ్యల యొక్క సగటు 80. కాని దానిలోని 19 అనే ప్రాప్తాంకానికి బదులుగా 91 అని తప్పుగా తీసుకొబడిందని తరువాత గమనించడం జరిగింది, అయిన తప్పు సరిదిద్దిన తరువాత సగటు ఎంత?

(8) ఇచ్చట 10 సంఖ్యలు ఆరోహణ క్రమంలో అమర్చడం జరిగింది. 2, 3, 5, 9, $x + 1$, $x + 3$, 14, 16, 19, 20 వీటి మధ్యగతము 11 అయినట్లయితే x విలువను కొనుగొనండి.

(9*) 35 సంఖ్యల సగటు 20. వీటిలో మొదటి 18 సంఖ్యల యొక్క సగటు 15 మరియు చివరి 18 సంఖ్యల యొక్క సగటు 25 అయినట్లయితే 18వ ప్రాప్తాంకమును కనుగొనండి.

(10) ఐదు ప్రాప్తాంకాల సగటు 50. వీటిలో ఒక ప్రాప్తాంకం తగ్గిన సగటు 45 అవుతుంది. అయితే ఆ ప్రాప్తాంకం ఏది?

(11*) ఒక తరగతిలో 40 మంది విద్యార్థులు గలరు వారిలో 15 మంది అబ్బాయిలు. ఒక పరీక్షలో అబ్బాయిలకు లభించిన మార్కుల సగటు 33 మరియు అమ్మాయిలకు లభించిన మార్కుల సగటు 35. వీటిని బట్టి తరగతిలోని మొత్తం విద్యార్థులకు లభించిన మార్కుల సగటును కనుగొనండి.

(12) 10 విద్యార్థుల యొక్క బరువు కి.గ్రాలలో కింది విధంగా ఇవ్వబడింది. 40, 35, 42, 43, 37, 35, 37, 37, 42, 37 వీటిని బట్టి బహుళకమును కనుగొనండి.

(13) కింది పట్టికలో కొన్ని కుటుంబాలలోని 14 సం.లలోపు పిల్లల సంఖ్య చూపబడింది. దీని ఆధారంగా 14 సం.ల లోపు పిల్లల సంఖ్యల యొక్క బహుళకము కనుగొనండి.

పిల్లల సంఖ్య	1	2	3	4
కుటుంబాలు (పౌనఃపున్యము)	15	25	5	5

(14) కింది దత్తాంశాల బహుళకము కనుగొనండి

లభించిన మార్కుల సంఖ్య	35	36	37	38	39	40
విద్యార్థుల సంఖ్య	09	07	09	04	04	02

'కేంద్రీయ ప్రవృత్తి కొలతలలో ఏ కొలతలు తీసుకోవడం యోగ్యముగా ఉంటుంది? ఈ ప్రశ్నకు సమాధానము, వాటిని ఏ కారణంతో ఎన్నుకోవాలనే దానితో సంబంధం ఉంటుంది.

ఒక క్రికెట్ క్రీడాకారుడు మొత్తము పదకొండు ఆటలలో వరసుగా 41, 58, 35, 80, 23, 12, 63, 48, 107, 9 మరియు 73 పరుగులు తీసినాడు. అతని సామర్థ్యాన్ని నిర్ణయిస్తున్నప్పుడు అతను ప్రతి ఆటలో తీసిన పరుగులను దృష్టిలోకి తీసుకోవలసిన అవసరము ఉంది. కావున అతని పరుగుల కేంద్రీయ ప్రవృత్తి యొక్క సగటును నిర్ణయించడం యోగ్యమైనది అవుతుంది.

అదే విధంగా బట్టలు తయారుచేసే ఏదేని కంపెనీలో ఏ కొలతగల షర్ట్‌లు ఎక్కువ సంఖ్యలో కుట్టవలెనో నిర్ణయించాలి. దాని గురించి (34, 36, 38, 40, 42, 44 వీటిలో) ఏ కొలత యొక్క షర్ట్ అత్యధికంగా ప్రజలు ఉపయోగిస్తారు ఒక సర్వే ద్వారా తెలుసుకోవాల్సి వస్తుంది. అనగా కేంద్రీయ ప్రవృత్తి యొక్క 'బహుళకమును'ను నిర్ణయించుట యోగ్యము అవుతుంది.

సంకీర్ణ ప్రశ్న సంగ్రహము 7

(1) యోగ్యమైన పర్యాయమును ఎన్నుకొనుము.

(i) కింది వాటిలో ఏ దత్తాంశం ప్రాథమిక దత్తాంశము కాదు?

(A) తరగతిని సందర్శించి విద్యార్థుల హాజరు సమాచారాన్ని సేకరించారు.

(B) ప్రత్యక్షంగా సందర్శించి ఇంట్లోని వ్యక్తుల సంఖ్య యొక్క సమాచారాన్ని సేకరించారు.

(C) తలాటి వద్దకు వెళ్ళి ఊరులోని ప్రతి వ్యవసాయదారుని సోయాబీన్ సాగుబడి కింద గల వ్యవసాయ క్షేత్రమును నమోదు చేసారు.

(D) ప్రత్యక్షంగా దర్శించి మురుగు నీటి కాలువల స్వచ్ఛత సమాచారమును తీసుకొన్నారు.

(ii) 25-35 ఈ తరగతి యొక్క ఎగువ హద్దు ఏది?

(A) 25 (B) 35 (C) 60 (D) 30

(iii) 25-35 ఈ తరగతి యొక్క తరగతి మధ్య విలువ ఏది?

(A) 25 (B) 35 (C) 60 (D) 30

(iv) 0-10, 10-20, 20-30 .... ఇలాంటి తరగతులు గల పౌనఃపున్య పట్టికలో 10 అనే ప్రాప్తాంకాన్ని ఏ తరగతిలో అమర్చవచ్చు?

(A) 0-10 (B) 10-20 (C) 0-10 మరియు 10-20 ఈ రెండు తరగతులలో (D) 20-30

(v*) ఒకవేళ $\bar{x}$ అనేది $x_1, x_2, \ldots\ldots x_n$ మరియు $\bar{y}$ అనేది $y_1, y_2, \ldots\ldots y_n$ యొక్క సగటు అయిన మరియు $\bar{z}$ అన్నది $x_1, x_2, \ldots\ldots x_n, y_1, y_2, \ldots\ldots y_n$ ల సగటు అయినట్లయితే $\bar{z} = ?$

(A) $\frac{\bar{x}+\bar{y}}{2}$ (B) $\bar{x}+\bar{y}$ (C) $\frac{\bar{x}+\bar{y}}{n}$ (D) $\frac{\bar{x}+\bar{y}}{2n}$

(vi*) ఐదు సంఖ్యల యొక్క సగటు 50 అయి అందులోని 4 సంఖ్యల యొక్క సగటు 46 అయిన ఐదవ సంఖ్య ఏది?

(A) 4 (B) 20 (C) 434 (D) 66

(vii*) 100 ప్రాప్తాంకాల సగటు 40. దానిలోని 9వ ప్రాప్తాంకం 30. దాని స్థానములో 70 తీసుకొని మిగిలిన సంఖ్యలను అలాగే ఉంచినట్లయితే కొత్త సగటు ఎంత?

(A) 40.6 (B) 40.4 (C) 40.3 (D) 40.7

(viii) 19, 19, 15, 20, 25, 15, 20, 15 ఈ దత్తాంశం యొక్క బహుళకము ఏది?

(A) 15 (B) 20 (C) 19 (D) 25

(ix) 7, 10, 7, 5, 9, 10 ఈ దత్తాంశం యొక్క మధ్యగతము ఏది?

(A) 7 (B) 9 (C) 8 (D) 10

(x) కింది పట్టిక ప్రకారం 30-40 ఈ తరగతి యొక్క ఆరోహణ సంచిత పౌనః పున్యము ఎంత?

తరగతి	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50
పౌనః పున్యము	7	3	12	13	2

(A) 13 (B) 15 (C) 35 (D) 22

(2) 20 మంది కార్మికుల జీతముల సగటు 10,250 రూ. ఒకవేళ వాటిలో మేనేజరు యొక్క జీతము కలిపినట్లయితే సగటు 750 రూ. పెరుగుతుంది. అయిన మేనేజర్ యొక్క జీతమును కనుగొనండి.

(3) తొమ్మిది సంఖ్యల సగటు 77. ఒకవేళ వాటిలో తిరిగి ఒక సంఖ్యను కలిపిన దాని సగటు 5 పెరిగినట్లయితే కలుపబడిన సంఖ్య ఏది?

(4) ఒక పట్టణములో ఒక నెలలో ప్రతి రోజు యొక్క గరిష్ఠ ఉష్ణోగ్రత సెల్సియస్‌లో కింద ఇవ్వబడింది. యోగ్యమైన తరగతులు తీసుకొని వర్గీకృత పౌనఃపున్య విభజన పట్టికను (మినహాయింపు పద్ధతి) తయారు చేయండి.

29.2, 29.0, 28.1, 28.5, 32.9, 29.2, 34.2, 36.8, 32.0, 31.0,
30.5, 30.0, 33, 32.5, 35.5, 34.0, 32.9, 31.5, 30.3, 31.4,
30.3, 34.7, 35.0, 32.5, 33.5, 29.0, 29.5, 29.9, 33.2, 30.2

పట్టికనుండి కింది ప్రశ్నలకు జవాబులు రాయండి.

(i) గరిష్ఠ ఉష్ణోగ్రత 34°c కంటే తక్కువగల రోజులు ఎన్ని?

(ii) గరిష్ఠ ఉష్ణోగ్రత 34°c లేదా దానికంటే ఎక్కువ ఉండే రోజులు ఎన్ని?

(5) ఒకవేళ కింది ప్రాప్తాంకాల సగటు 20.2 అయినట్లయితే P యొక్క విలువను కనుగొనండి.

x_i	10	15	20	25	30
f_i	6	8	p	10	6

(6) మాడెల్ హై స్కూల్ నాంద్‌పూర్‌లోని 68 మంది 9వ తరగతి విద్యార్థులకు గణిత లిఖిత పరీక్షలో 80 మార్కులకు లభించిన మార్కులు కింద ఇవ్వబడినవి.

70, 50, 60, 66, 45, 46, 38, 30, 40, 47, 56, 68,
80, 79, 39, 43, 57, 61, 51, 32, 42, 43, 75, 43,
36, 37, 61, 71, 32, 40, 45, 32, 36, 42, 43, 55,
56, 62, 66, 72, 73, 78, 36, 46, 47, 52, 68, 78,
80, 49, 59, 69, 65, 35, 46, 56, 57, 60, 36, 37,
45, 42, 70, 37, 45, 66, 56, 47

30-40, 40-50, ... ఈ తరగతులను తీసుకొని ఆరోహణ సంచిత పౌనఃపున్య పట్టికను తయారుచేయండి. ఆ పట్టిక ఆధారంగా కింది ప్రశ్నలకు జవాబులు రాయండి.

(i) 80 కంటే తక్కువ మార్కులు లభించిన విద్యార్థులు ఎంతమంది?

(ii) 40 కంటే తక్కువ మార్కులు లభించిన విద్యార్థులు ఎంతమంది?

(iii) 60 కంటే తక్కువ మార్కులు లభించిన విద్యార్థులు ఎంతమంది?

(7) ఉదా. 6లోని దత్తాంశము ఆధారంగా 30−40, 40−50 .... ఇలా తరగతులను తీసుకొని అవరోహణ సంచిత పౌనఃపున్య పట్టికను తయారు చేయండి. దానిని బట్టి

(i) 70 లేదా 70 కంటే ఎక్కువ మార్కులు లభించిన విద్యార్థులు ఎంత మంది?

(ii) 30 లేదా 30 కంటే ఎక్కువ మార్కులు లభించిన విద్యార్థులు ఎంత మంది?

(8) కింద 10 ప్రాప్తాంకాలు ఆరోహణ క్రమంలో అమర్చబడినవి.

45,47,50,52,x, x+2, 60,62,63,74 వాటి మధ్యగతము 53 దీని నుండి x యొక్క విలువను కనుగొనండి. అదే విధంగా ఇచ్చిన దత్తాంశం యొక్క సగటు మరియు బహుళకము కనుగొనండి.

గణితము యొక్క గమ్మత్తు

పాస్కల్ త్రిభుజము లేదా మేరు పర్వతం

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

....

....

....

సంఖ్యల పై ఆకృతి త్రికోణాకారంలో అమర్చబడి ఉంది. ఈ అమరిక పాస్కల్ త్రిభుజాలుగా గుర్తించబడుతాయి. ఈ అమరికలో కింది మూడు వరుసలను మీరు రాయండి. ఈ అమరికలో అడ్డు వరుసలో వచ్చే సంఖ్య $(x + y)$ అనే ద్విపది యొక్క ఘాతాంక విస్తరణ యొక్క క్రమములో లభించే సహగుణకాలు అవుతాయి. కింది విస్తరణలను చూడండి.

$(x + y)^0 = 1$

$(x + y)^1 = 1x + 1y$

$(x + y)^2 = 1x^2 + 2xy + 1y^2$

$(x + y)^3 = 1x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$

$(x + y)^4 = 1x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + 1y^4$

ఈ విస్తరణలో x మరియు yల ఘాతాంకాలను పరిశీలించండి. దానిని బట్టి $(x + y)^{10}$ యొక్క విస్తరణ రాసే ప్రయత్నం చేయండి.

జవాబులు

1. సమితులు

అభ్యాస మాలిక 1.1

(1) (i) $\{2, 4, 6, 8, \ldots\}$ (ii) $\{2\}$ (iii) $\{-1, -2, -3, \ldots\}$ (iv) {సా, రె, గ, మ, ప, ద, ని}

(2) (i) $\frac{4}{3}$ అనేది సమితి Q యొక్క మూలకము (ii) -2 అనేది సమితి N యొక్క మూలకము కాదు.

(iii) సమితి P యొక్క మూలకం p, బేసి సంఖ్య అగునట్లుగా p గలదు

(4) (i) A = {చైత్రం, వైశాఖం, జ్యేష్ఠం, ఆషాఢం, శ్రావణం, భాద్రపదం, ఆశ్వయుజం, కార్తీకం, మార్గశీర్షం, పుష్యం, మాఘం, ఫాల్గుణం}

(ii) X = {C, O, M, P, L, E, N, T} (iii) Y = {ముక్కు, చెవి, కళ్ళు, నాలుక, చర్మము}

(iv) Z = {2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19}

(v) E = {ఆసియా, ఆఫ్రికా, యూరోప్, ఆస్ట్రేలియా, అంటార్కిటికా, దక్షిణ అమెరికా, ఉత్తర అమెరికా}

(5) (i) $A = \{x | x = n^2, n \in N, n \leq 10\}$ (ii) $B = \{x | x = 6n, n \in N, n < 9\}$

(iii) C = {y|y అనేది 'SMILE' అనే పదములోని అక్షరములు}

(iv) D = {z|z అనేది వారములోని రోజులు } (v) X = {y|y అనేది 'eat' అనే పదములోని అక్షరములు}

అభ్యాస మాలిక 1.2

(1) A = B = C (2) A = B (3) సమితి A మరియు C లు శూన్య సమితిలు.

(4) (i), (iii), (iv), (v) ఈ ఉదాహరణలోని సమితులు పరిమిత సమితులు (ii), (vi), (vii) ఈ సమితులు అపరిమిత సమితులు అవుతాయి.

అభ్యాస మాలిక 1.3

(1) (i), (ii), (iii), (v) ఈ వాక్యములు అసత్యము (iv), (vi) వాక్యములు సత్యములు అవుతాయి.

(4) {1}, {3}, {2}, {7}, {1, 3}, {1, 2}, {1, 7}, {3, 2}, {3, 7}, {2, 7}, {1, 3, 2}, {1, 2, 7}, {3, 2, 7}, {1, 3, 2, 7} లాంటివి ఏవేని 3.

(5) (i) $P \subseteq H$, $P \subseteq B$, $I \subseteq M$, $I \subseteq B$, $H \subseteq B$, $M \subseteq B$ (ii) సమితి B

(6) (i) N, W, I వీటిలోని ఏవేని సమితులు (ii) N, W, I వీటిలోని ఏవేని సమితులు

(7) గణితములో 50% కంటే తక్కువ మార్కులు లభించిన విద్యార్థుల సమితి.

అభ్యాస మాలిక 1.4

(1) n (B) = 21 (2) ఏ ఒక్క పానీయమును తీసుకొని విద్యార్థుల సంఖ్య = 5

(3) మొత్తం విద్యార్థుల సంఖ్య = 70

(4) పర్వతారోహణము మరియు అంతరిక్ష దర్శనము ఈ రెండింటిలో దేనిపై ఇష్టము లేని విద్యార్థుల సంఖ్య = 20

కేవలం పర్వతారోహణము ఇష్టపడే విద్యార్థులు = 20, కేవలం అంతరిక్ష దర్శనమును ఇష్టపడే విద్యార్థులు = 70

(5) (i) $A = \{x, y, z, m, n\}$ (ii) $B = \{p, q, r, m, n\}$

(iii) $A \cup B = \{x, y, z, m, n, p, q, r\}$ (iv) $U = \{x, y, z, m, n, p, q, r, s, t\}$

(v) $A' = \{p, q, r, s, t\}$ (vi) $B' = \{x, y, z, s, t\}$ (vii) $(A \cup B)' = \{s, t\}$

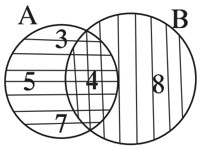
సంకీర్ణ ప్రశ్న సంగ్రహము: 1

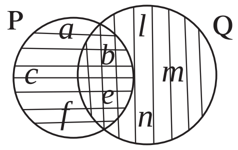
(1) (i) (C) (ii) (D) (iii) (C) (iv) (B) (v) (A) (vi) (A)

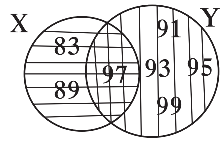
(2) (i) (A) (ii) (A) (iii) (B) (iv) (C)

(3) కేవలం ఇంగ్లీష్ మాట్లాడేవారు 57, కేవలం ఫ్రెంచ్ మాట్లాడేవారు 28, రెండు భాషలు మాట్లాడేవారు 15

(4) 135 (5) 12 (6) 4

(7) (i)


(ii)


(iii)


(8) $S \subseteq X$, $V \subseteq X$, $S \subseteq X$, $T \subseteq X$, $S \subseteq Y$, $S \subseteq V$, $S \subseteq T$, $V \subseteq T$, $Y \subseteq T$,

(9) $M \cup \phi = M$, $M \cap \phi = \phi$

(10) U = {1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 13}, A = {1, 2, 3, 5, 7} B = {1, 5, 8, 9, 10}
$M \cup B$ = {1, 2, 3, 5, 7, 8, 9, 10}, $A \cap B$ = {1, 5}

(11) $n(A \cup B) = 16$

2. వాస్తవ సంఖ్యలు

అభ్యాస మాలిక 2.1

(1) అంతమయ్యే : (i), (iii), (iv) అంతము కాని ఆవర్తిత (ii), (v)

(2) (i) 0.635 (ii) $0.\overline{25}$ (iii) $3.\overline{285714}$ (iv) 0.8 (v) 2.125

(3) (i) $\frac{2}{3}$ (ii) $\frac{37}{99}$ (iii) $\frac{314}{99}$ (iv) $\frac{1574}{99}$ (v) $\frac{2512}{999}$

అభ్యాస మాలిక 2.2

(4) (i) −0.4, −0.3, 0.2 లాంటి అసంఖ్యాకమైన సంఖ్యలు

(ii) −2.310, −2.320, −2.325 లాంటి అసంఖ్యాకమైన సంఖ్యలు

(iii) 5.21, 5.22, 5.23 లాంటి అసంఖ్యాకమైన సంఖ్యలు

(iv) −4.51, −4.55, −4.58 లాంటి అసంఖ్యాకమైన సంఖ్యలు

అభ్యాస మాలిక 2.3

(1) (i) 3 (ii) 2 (iii) 4 (iv) 2 (v) 3

(2) (i), (iii), (vi) కరణులు మరియు (ii), (iv), (v) కరణులు కావు.

(3) సజాతి కరణులు (i), (iii), (iv) మరియు విజాతి కరణులు (ii), (v), (vi)

(4) (i) $3\sqrt{3}$ (ii) $5\sqrt{2}$ (iii) $5\sqrt{10}$ (iv) $4\sqrt{7}$ (v) $2\sqrt{42}$

(5) (i) $7\sqrt{2} > 5\sqrt{3}$ (ii) $\sqrt{247} < \sqrt{274}$ (iii) $2\sqrt{7} = \sqrt{28}$

(iv) $5\sqrt{5} < 7\sqrt{5}$ (v) $4\sqrt{42} > 9\sqrt{2}$ (vi) $5\sqrt{3} < 9$ (vii) $7 > 2\sqrt{5}$

(6) (i) $13\sqrt{5}$ (ii) $10\sqrt{5}$ (iii) $24\sqrt{3}$ (iv) $\frac{12}{5}\sqrt{7}$

(7) (i) $18\sqrt{6}$ (ii) $126\sqrt{5}$ (iii) $6\sqrt{10}$ (iv) 80

(8) (i) 7 (ii) $\sqrt{\frac{5}{2}}$ (iii) $\sqrt{2}$ (iv) $\sqrt{62}$.

(9) (i) $\frac{3}{5}\sqrt{5}$ (ii) $\frac{\sqrt{14}}{14}$ (iii) $\frac{5\sqrt{7}}{7}$ (iv) $\frac{2}{9}\sqrt{3}$ (v) $\frac{11}{3}\sqrt{3}$

అభ్యాస మాలిక 2.4

(1) (i) $-3+\sqrt{21}$ (ii) $\sqrt{10}-\sqrt{14}$ (iii) $-18+13\sqrt{6}$

(2) (i) $\frac{\sqrt{7}-\sqrt{2}}{5}$ (ii) $\frac{3\left(2\sqrt{5}+3\sqrt{2}\right)}{2}$ (iii) $28-16\sqrt{3}$ (iv) $4-\sqrt{15}$

అభ్యాస మాలిక 2.5

(1) (i) 13 (ii) 5 (iii) 28 (2) 2 లేదా $\frac{4}{3}$ (ii) 1 లేదా 6 (iii) -2 లేదా18 (iv) 0 లేదా -40

సంకీర్ణ ప్రశ్న సంగ్రహము: 2

(1) (i) B (ii) D (iii) C (iv) D (v) A

(vi) C (vii) C (viii) C (ix) A (x) B

(2) (i) $\frac{555}{1000}$ (ii) $\frac{29539}{999}$ (iii) $\frac{9306}{999}$ (iv) $\frac{357060}{999}$ (v) $\frac{30189}{999}$

(3) (i) $-0.\overline{714285}$ (ii) $0.\overline{81}$ (iii) 2.2360679... (iv) $9.\overline{307692}$ (v) 3.625

(5) (i) $\frac{3}{2}\sqrt{2}$ (ii) $-\frac{5}{3}\sqrt{5}$

(6) (i) $\sqrt{2}$ (ii) $\sqrt{2}$ (iii) $\sqrt{3}$ (iv) $\sqrt{10}$ (v) $\sqrt{2}$ (vi) $\sqrt{11}$

(7) (i) $6\sqrt{3}$ (ii) $\frac{34}{3}\sqrt{3}$ (iii) $\frac{15}{2}\sqrt{6}$ (iv) $-25\sqrt{3}$ (v) $\frac{8}{3}\sqrt{3}$

(8) (i) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ (ii) $\frac{2\sqrt{7}}{21}$ (iii) $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ (iv) $\frac{3\sqrt{5}-2\sqrt{2}}{37}$ (v) $\frac{6\left(4\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}{23}$

3. బహుపది

అభ్యాస మాలిక 3.1

(1) (i) కాదు, ఎందుకనగా $\frac{1}{y}$ లో y యొక్క ఘాతాంకము (-1).

(ii) కాదు, ఎందుకనగా $5\sqrt{x}$ లో x యొక్క ఘాతాంకము $\left(\frac{1}{2}\right)$ భిన్నము.

(iii) అగును (iv) కాదు, ఎందుకనగా $2m^{-2}$ లో ఘాతాంకము (-2) (v) అగును.

(2) (i) 1 (ii) $-\sqrt{3}$, (iii) $-\frac{2}{3}$

(3) (i) x^7 (ii) $2x^{35}-7$ (iii) x^8-2x^5+3 ఈ మూడు ఉదాహరణలలో వీటి లాగే అనేక జవాబులు ఉండవచ్చు.

(4) (i) 0 (ii) 0 (iii) 2 (iv) 10 (v) 1 (vi) 5 (vii) 3 (viii) 10

(5) (i) వర్గము (ii) రేఖీయ (iii) రేఖీయ (iv) ఘనము (v) వర్గము (vi) ఘనము

(6) (i) $m^3 + 5m + 3$ (ii) $y^5 + 2y^4 + 3y^3 - y^2 - 7y - \frac{1}{2}$

(7) (i) (1, 0, 0, −2) (ii) (5, 0) (iii) (2, 0, −3, 0, 7) (iv) $\left(\frac{-2}{3}\right)$

(8) (i) $x^2 + 2x + 3$ (ii) $5x^4 - 1$ (iii) $-2x^3 + 2x^2 - 2x + 2$

(9) వర్గ బహుపది : x^2; $2x^2 + 5x + 10$; $3x^2 + 5x$; ఘన బహుపది : $x^3 + x^2 + x + 5$; $x^3 + 9$

రేఖీయ బహుపది : $x + 7$; ద్విపది : $x + 7$, $x^3 + 9$; త్రిపది : $2x^2 + 5x + 10$; ఏకపది: x^2

అభ్యాస మాలిక 3.2

(1) (i) $a + bx$ (ii) xy (iii) $10n + m$

(2) (i) $6x^3 - 2x^2 + 2x$ (ii) $-2m^4 + 2m^3 + 2m^2 + 3m - 6 + \sqrt{2}$ (iii) $5y^2 + 6y + 11$

(3) (i) $-6x^2 + 10x$ (ii) $10ab^2 + a^2b - 7ab$

(4) (i) $2x^3 - 4x^2 - 2x$ (ii) $x^8 + 2x^7 + 2x^5 - x^3 - 2x^2 - 2$ (iii) $-4y^4 + 7y^2 + 3y$

(5) (i) $x^3 - 64 = (x - 4)(x^2 + 4x + 16) + 0$

(ii) $5x^5 + 4x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 2 = (x^2 - x)(5x^3 + 9x^2 + 6x + 8) + (8x + 2)$

(6) $a^4 + 7a^2b^2 + 2b^4$

అభ్యాస మాలిక 3.3

(1) (i) భాగఫలము = $2m + 7$, శేషము = 45

(ii) భాగఫలము = $x^3 + 3x - 2$, శేషము = 9

(iii) భాగఫలము = $y^2 + 6y + 36$, శేషము = 0

(iv) భాగఫలము = $2x^3 - 3x^2 + 7x - 17$, శేషము = 51

(v) భాగఫలము = $x^3 - 4x^2 + 13x - 52$, శేషము = 200

(vi) భాగఫలము = $y^2 - 2y + 3$, శేషము = 2

అభ్యాస మాలిక 3.4

(1) 5 (2) 1 (3) $4a^2 + 20$ (4) −11

అభ్యాస మాలిక 3.5

(1) (i) −41 (ii) 7 (iii) 7 (2) (i) 1, 0, −8 (ii) 4, 5, 13 (iii) −2, 0, 10

(3) 0 (4) 2 (5) (i) 17 (ii) $2a^3 - a^2 - a$ (iii) 1544 (6) 92 (7) అగును

(8) 2 (9) (i) కాదు (ii) అగును (10) 30 (11) అగును

(13) (i) −3 (ii) 80

అభ్యాస మాలిక 3.6

(1) (i) $(x + 1)(2x - 1)$ (ii) $(m + 3)(2m - 1)$ (iii) $(3x + 7)(4x + 11)$

(iv) $(y - 1)(3y + 1)$ (v) $(x + \sqrt{3})(\sqrt{3}x + 1)$ (vi) $(x - 4)\left(\frac{1}{2}x - 1\right)$

(2) (i) $(x - 3)(x + 2)(x - 2)(x + 1)$ (ii) $(x - 13)(x - 2)$

(iii) $(x - 8)(x + 2)(x - 4)(x - 2)$ (iv) $(x^2 - 2x + 10)(x^2 - 2x - 2)$

(v) $(y^2 + 5y - 22)(y + 4)(y + 1)$ (vi) $(y + 6)(y - 1)(y + 4)(y + 1)$

(v) $(x^2 - 8x + 18)(x^2 - 8x + 13)$

సంకీర్ణ ప్రశ్న సంగ్రహము: 3

(1) (i) D (ii) D (iii) C (iv) A (v) C (vi) A (vii) D (viii) C (ix) A (x) A

(2) (i) 4 (ii) 0 (iii) 9

(3) (i) $7x^4 - x^3 + 4x^2 - x + 9$ (ii) $5p^4 + 2p^3 + 10p^2 + p - 8$

(4) (i) (1, 0, 0, 0, 16) (ii) (1, 0, 0, 2, 3, 15)

(5) (i) $3x^4 - 2x^3 + 0x^2 + 7x + 18$ (ii) $6x^3 + x^2 + 0x + 7$ (iii) $4x^3 + 5x^2 - 3x + 0$

(6) (i) $10x^4 + 13x^3 + 9x^2 - 7x + 12$ (ii) $p^3q + 4p^2q + 4pq + 7$

(7) (i) $2x^2 - 7y + 16$ (ii) $x^2 + 5x + 2$

(8) (i) $m^7 - 4m^5 + 6m^4 + 6m^3 - 12m^2 + 5m + 6$

(ii) $5m^5 - 5m^4 + 15m^3 - 2m^2 + 2m - 6$

(9) శేషము = 19 (10) $m = 1$ (11) మొత్తం జనాభా $= 10x^2 + 5y^2 - xy$

(12) $b = \frac{1}{2}$ (13) $11m^2 - 8m + 5$ (14) $-2x^2 + 8x + 11$ (15) $2m + n + 7$

4. నిష్పత్తి మరియు అనుపాతం

అభ్యాస మాలిక 4.1

(1) (i) 6 : 5 (ii) 2 : 3 (iii) 2 : 3

(2) (i) 25 : 11 (ii) 35 : 31 (iii) 2 : 1 (iv) 10 : 17 (v) 2 : 1 (vi) 220 : 153

(3) (i) 3 : 4 (ii) 11 : 25 (iii) 1 : 16 (iv) 13 : 25 (v) 4 : 625

(4) 4 మనుషులు (5) (i) 60% (ii) 94% (iii) 70% (iv) 91% (v) 43.75%

(6) అరుణ వయస్సు 18 మరియు తల్లి వయస్సు 45 సం.లు (7) 6 సం.లకు

(8) శ్రేయ యొక్క ప్రస్తుత వయస్సు 8 సం.లు

అభ్యాస మాలిక 4.2

(1) (i) వరుసగా 20, 49, 2.5 (ii) వరుసగా 7, 27, 2.25

(2) (i) $1 : 2\pi$ (ii) $2 : r$ (iii) $\sqrt{2} : 1$ (iv) 34 : 35

(3) (i) $\frac{\sqrt{5}}{3} < \frac{3}{\sqrt{7}}$ (ii) $\frac{3\sqrt{5}}{5\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{63}}{\sqrt{125}}$ (iii) $\frac{5}{18} > \frac{17}{121}$

(iv) $\frac{\sqrt{80}}{\sqrt{48}} = \frac{\sqrt{45}}{\sqrt{27}}$ (v) $\frac{9.2}{5.1} > \frac{3.4}{7.1}$

(4) (i) 80° (ii) అల్బర్ట్ యొక్క ప్రస్తుత వయస్సు 25 సం.లు, సలీం యొక్క ప్రస్తుత వయస్సు 45 సం.లు
(iii) పొడవు 13.5 సెం.మీ. వెడల్పు 4.5 సెం.మీ. (iv) 124, 92 (v) 20, 18

(5) (i) 729 (ii) 45 : 7 (6) 2 : 125 (7) $x = 5$

అభ్యాస మాలిక 4.3

(1) (i) 22 : 13 (ii) 125 : 71 (iii) 316 : 27 (iv) 38 : 11

(2) (i) 3 : 5 (ii) 1 : 6 (iii) 7 : 43 (iv) 71 : 179 (3) 170 : 173

(4) (i) $x = 8$ (ii) $x = 9$ (iii) $x = 2$ (iv) $x = 6$ (v) $x = \frac{9}{14}$ (vi) $x = 3$

అభ్యాస మాలిక 4.4

(1) (i) 36, 22 (ii) 16, $2a - 2b + 2c$

(2) (i) 29 : 21 (ii) 23 : 7 (4) (i) $x = 2$ (ii) $y = 1$

అభ్యాస మాలిక 4.5

(1) $x = 4$ (2) $x = \frac{347}{14}$ (3) 18, 12, 8 లేదా 8, 12, 18 (6) $\frac{x+y}{xy}$

సంకీర్ణ ప్రశ్న సంగ్రహము: 4

(1) (i) B (ii) C (iii) B (iv) D (v) C

(2) (i) 7 : 16 (ii) 2 : 5 (iii) 5 : 9 (iv) 6 : 7 (v) 6 : 7

(3) (i) 1 : 2 (ii) 5 : 4 (iii) 1 : 1

(4) (i) మరియు (iii) పరంపరానుపాతంలో ఉన్నవి (ii) మరియు (iv) పరంపరానుపాతంలో లేవు (5) $b = 9$

(6) (i) 7.4% (ii) 62.5% (iii) 73.33% (iv) 31.25% (v) 12%

(7) (i) 5 : 6 (ii) 85 : 128 (iii) 1 : 2 (iv) 50 : 1 (v) 3 : 5

(8) (i) $\frac{17}{9}$ (ii) 19 (iii) $\frac{35}{27}$ (iv) $\frac{13}{29}$

(11) $x = 9$

5. రెండు చరరాశులు గల రేఖీయ సమీకరణములు

అభ్యాస మాలిక 5.1

(3) (i) $x = 3;\ y = 1$ (ii) $x = 2;\ y = 1$ (iii) $x = 2;\ y = -2$
(iv) $x = 6;\ y = 3$ (v) $x = 1;\ y = -2$ (vi) $x = 7;\ y = 1$

అభ్యాస మాలిక 5.2

(1) 5 రూపాయలవి 30 నోట్లు మరియు 10 రూపాయలవి 20 నోట్లు గలవు.

(2) $\frac{5}{9}$ (3) ప్రియాంక వయస్సు 20 సం.లు దీపిక వయస్సు 14 సం.లు (4) 20 సింహాలు, 30 నెమళ్ళు

(5) ప్రారంభ జీతం ₹ 3900, వార్షిక పెరుగుదల ₹ 150

(6) ₹ 4000 (7) 36 (8) $\angle A = 90^0$, $\angle B = 40^0$, $\angle C = 50^0$

(9) 420 సెం.మీ (10) 10

సంకీర్ణ ప్రశ్న సంగ్రహము: 5

(1) (i) A (ii) C (iii) C

(2) (i) $x = 2;\ y = 1$ (ii) $x = 5;\ y = 3$ (iii) $x = 8;\ y = 3$

(iv) $x = 1;\ y = -4$ (v) $x = 3;\ y = 1$ (vi) $x = 4;\ y = 3$

(3) (i) $x = 1;\ y = -1$ (ii) $x = 2;\ y = 1$ (iii) $x = 26;\ y = 18$ (iv) $x = 8;\ y = 2$

(4) (i) $x = 6;\ y = 8$ (ii) $x = 9;\ y = 2$ (iii) $x = \frac{1}{2};\ y = \frac{1}{3}$ (5) 35

(6) ₹ 69 (7) ప్రతి ఒక్కరి నెలసరి ఆదాయం వరసగా ₹ 1800 మరియు ₹ 1400

(8) పొడవు 347 యూనిట్లు, వెడల్పు 207 యూనిట్లు (9) 40 కి.మీ/గంట, 30 కి.మీ/గంట

(10) (i) 54, 45 (ii) 36, 63 మొదలగునవి

6. ఆర్థిక ప్రణాళిక

అభ్యాస మాలిక 6.1

(1) ₹ 1200 (2) రెండవ సం. తర్వాత పెట్టుబడి ₹ 42,000, మూల పెట్టుబడిలో 16 శాతము నష్టం వచ్చింది

(3) నెలసరి ఆదాయం ₹ 50,000 (4) శ్రీ ఫెర్నాండిస్ (5) ₹ 25,000

అభ్యాస మాలిక 6.2

(1) (i) ఆదాయపు పన్ను చెల్లించవలసిన అవసరం లేదు (ii) పన్ను చెల్లించవలెను (iii) పన్ను చెల్లించవలెను

(iv) పన్ను చెల్లించవలెను (v) పన్ను చెల్లించవలసిన అవసరం లేదు.

(2) ₹ 9836.50

సంకీర్ణ ప్రశ్న సంగ్రహము: 6

(1) (i) A (ii) B (2) ఆదాయం ₹ 8750

(3) హిరాలాల్ యొక్క లాభశాతము 36.73, రమణికలాల్ యొక్క లాభశాతము 16.64, హిరాలాల్

(4) ₹ 99383.75 (5) ₹ 4,00,000 (6) 12.5%

(7) రమేశ్ యొక్క పొదుపు ₹ 48000 ; సురేశ్ యొక్క పొదుపు ₹ 51000 ; ప్రీతి యొక్క పొదుపు ₹ 36000
(8) (i) ₹ 213000 (ii) ₹ 7500 (iii) పన్ను లేదు

7. సాంఖ్యక శాస్త్రము

అభ్యాస మాలిక 7.2

(1) ప్రాథమిక దత్తాంశం (i), (iii), (v) ద్వితీయ దత్తాంశం: (ii), (iv)

అభ్యాస మాలిక 7.3

(1) దిగువ హద్దు = 20, ఎగువ హద్దు = 25 (2) 37.5 (3) 7−13

అభ్యాస మాలిక 7.4

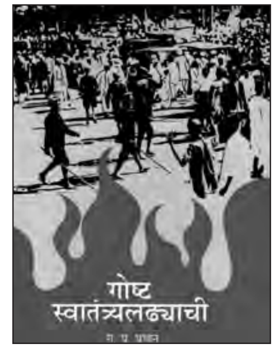
(3) (i) 38 (ii) 3 (iii) 19 (iv) 62 (4) (i) 24 (ii) 3 (iii) 43 (iv) 43

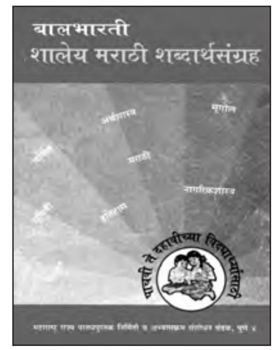
అభ్యాస మాలిక 7.5

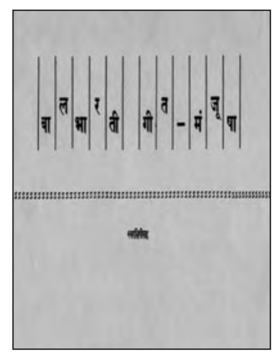
(1) 7 క్వింటాళ్ళు (2) 74 (3) 100 (4) ₹ 4900 (5) 75 గ్రా
(6) సగటు = 3, మధ్యగతము = 3, బహుళకము = 4 (7) 78.56 (8) $x = 9$ (9) 20 (10) 70
(11) 34.25 (12) 37 కి.గ్రా. (13) 2 (14) 35 మరియు 37

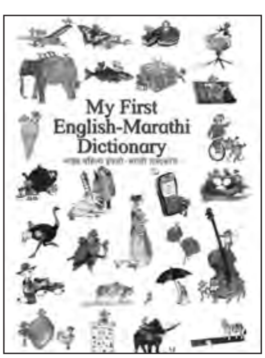
సంకీర్ణ ప్రశ్న సంగ్రహము: 7

(1) (i) C (ii) B (iii) D (iv) B (v) A (vi) D
(vii) B (viii) A (ix) C (x) C
(2) ₹ 26000 (3) ₹ 127
(4) (i) 24 (ii) 06
(5) P = 20
(6) (i) 66 (ii) 14 (iii) 45
(7) (i) 11 (ii) 68
(8) $x = 52$, సగటు = 55.9, బహుళకము = 52









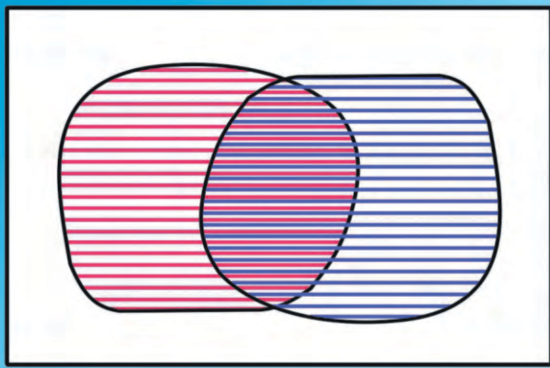
- पाठ्यपुस्तक मंडळाची वैशिष्ट्यपूर्ण पाठ्येत्तर प्रकाशने.
- नामवंत लेखक, कवी, विचारवंत यांच्या साहित्याचा समावेश.
- शालेय स्तरावर पूरक वाचनासाठी उपयुक्त.

पुस्तक मागणीसाठी www.ebalbharati.in, www.balbharati.in संकेत स्थळावर भेट द्या.

साहित्य पाठ्यपुस्तक मंडळाच्या विभागीय भांडारांमध्ये विक्रीसाठी उपलब्ध आहे.

ebalbharati

विभागीय भांडारे संपर्क क्रमांक : पुणे - ☎ २५६५९४६५, कोल्हापूर- ☎ २४६८५७६, मुंबई (गोरेगाव) - ☎ २८७७१८४२, पनवेल - ☎ २७४६२६४६५, नाशिक - ☎ २३९१५११, औरंगाबाद - ☎ २३३२१७१, नागपूर - ☎ २५४७७१६/२५२३०७८, लातूर - ☎ २२०९३०, अमरावती - ☎ २५३०९६५



$$x + y = 4$$

$$2x + 3y = 3$$

$$x = \square, \quad y = \square$$

మహారాష్ట్ర రాష్ట్ర పాఠ్యపుస్తక నిర్మితి మరియు
పాఠ్యప్రణాళిక పరిశోధన సంస్థ,
పుణె-411 004.
तेलुगु गणित इ. ९वी भाग-१ ₹ 64.00