حساب ڀاڱو- II

درجو نائون

ڀارتيہ سنوڌان

باب - چوٿون الف

بنيادي فرض

قلم 51A

بُنيادي فرض : ڀارت جي هرهڪ ناگرڪ جو فرض آهي تہ :

(الف) هوُ ڀارت جي سنوڌان کي مڃيندو، اُن جي قومي جهنڊي، قومي تراني، آدرشن ۽ سنستا جي عزت ڪندو.

(ب) آدرش ويچارن، جن آزاديءَ جي لڙائيءَ لاءِ همٿايو ۽ اُتساهہ ڏوڪيو، اُنهن جي سنڀال ۽ پوئواري ڪندو.

(ڀ) ڀارت جي ايڪتا، اکنڊتا ۽ سمپوريتا جي رکشا ڪندو.

(پ) ديش جي حفاظت ڪندو ۽ وقت پوڻ تي ديش سيوا ۾ ٽپي پوندو.

(ٻ) سيني ماڻهن ۾ هڪ ايڪتا جي ڀاونا پئدا ڪندو، جيڪا ڌرم، ڀاشا، ڪيترواد جي ڀيدڀاءُ کان پري هوندي. اَهڙيون رسمون جيڪي عورت ذات خلاف هونديون، اُنهن جو بهشڪار ڪندو.

(ت) ڀارت جي جامع سنسڪرتي ۽ شاندار ورثي جي حفاظت ڪندو ۽ مُلهہ سمجهندو.

(ٿ) قدرتي ماحول جهڙوڪ جهنگل، ڍنڍون، نديون، جهنگلي-زندگي اِنهن جو بچاءُ ڪندو ۽ سيني پراڻين لاءِ دردمندي رکندو.

(ٽ) وگيانڪ درشٽي، اِنساني مُلهہ، جاچ جوُچ ۽ سڌاري جي ڀاونا کي اَهميت ڏيندو.

(ٺ) عام ملڪيت کي سلامت رکندو ۽ هنسا کان پري رهندو.

(ث) شخصي ۽ گڏيل مشغولين جي سيني کيترن ۾ اَڳتي وڌڻ جي لڳاتار ڪوشش ڪندو جئن ملڪ اَڳتي وڌندو رهي ۽ ڪاميابيءَ جي اوچاين کي ڇُهي.

(ڪ) ماءُ يا پيءُ يا پالڪ آهي تہ اُهو ضرور ڏسي تہ پنهنجي ٻار کي تعليم حاصل ڪرڻ جو موقعو ڏيندو. جنهن جي عمر ڇهن ۽ چوڏهن سالن وچہ هجي.

سرڪاري فيصلو نمبر : اڀياس ٢١١٦ (پر.ڪر ١٦/ ٤٣) ايس. ڊي. ٤ تاريخ ١٦-٠٤-٢٥ موجب اسٽاپت ڪيل ڪو آرڊينيٽنگ ڪاميٽيءَ جي تا. ١٧-٣-٣ جي ميٽنگ ۾ هي درسي ڪتاب طيءِ ڪرڻ لاءِ مختصر منظوري ڏني ويئي.

حساب

پاڱو - II

درجو نائون

مهاراشٽر راجيه پاٺيه پُستڪ نرمتي وَ اڀياسڪرم سنشوڌن منڊل، پُڻي

RV2A2D

پنهنجي سمارٽ فون ۾ DIKSHA APP ذريعي درسي ڪتاب جي پهرين صفحي واري Q.R. Code ذريعي Digital درسي ڪتاب ۽ هرهڪ سبق ۾ آيل Q.R. Code ذريعي ان سبق بابت پڙهڻ / پڙهائڻ لاءِ ڪارائتيون لنڪس ملنديون.

چاپو پهريون : 2017
سڌاريل چاپو : 2022

© مهاراشٽر راجيه پاٺيه پُستڪ نرمتي وَ اڀياس ڪرم سنشوڌن منڊل، پُڻي - ۴۱۱۰۰۴.
مهاراشٽر راجيه پاٺيه پُستڪ نرمتي وَ اڀياس ڪرم سنشوڌن منڊل، هن ڪتاب جا سڀ حق واسطا محفوظ ٿو رکي. منڊل جي ڊائريڪٽر جي لکيل اجازت کانسواءِ هن ڪتاب جو ڪوبه ٽڪر ڇپائي نٿو سگهجي.

حساب وشيه ماهر ڪاميٽي

ڊاڪٽر منگلا نارڙيڪر (اَڌيڪش)
ڊاڪٽر جئشري اَترِي (ميمبر)
شري رماڪانت سرودي (ميمبر)
شري داداسو سرڙي (ميمبر)
شري سنديپ پنچ ڀائي (ميمبر)
شريمتي لتا ٽڙيڪر (ميمبر)
شريمتي اُجولا گوڙبولي (ميمبر - سيڪريٽري)

مُکيه سنيوجڪ: شريمتي اُجولا شريڪانت گوڙبولي
انچارج آفيسر حساب،
پاٺيه پُستڪ منڊل پُڻي
ٻاهريون صفحو ۽ سجاوٽ : ڌنشوري موڪاشي، پُڻي
ڪمپيوٽر آريکن : شري سنديپ ڪوڙي ممبئي
چترڪار: ڌنشوري موڪاشي

حساب وشيه ڪاريه گٽ ميمبر

شري اُميش ريڙي
شري چندن ڪلڪرني
شريمتي انيتا جاوي
شري ٻاگيشوري چوهاڻ
شريمتي پوجا جاڌو
شري اَڪپا پريت
شري ڪلياڻ ڪڙيڪر
شري سنديش سوناوڻي
شري سجيت شندي
شري هنومنت جگتاپ
شري شريپاد ديشپانڊي
شري پرتاپ ڪاشد
شري ڪاشيرام بوساني
شري پپو گاڙي
شري انسار شيخ
شري راما وهنياڙڪر
شري پرمود ڊومبري
شري پرڪاش جهينڊي
شري ساگر سڪڙي
شري شريڪانت رتنپارکي
شري سوريڪانت شهاڻي
شري سريش داتي
شريمتي سُورنا ديشپانڊي
شري پرڪاش ڪاپسي
شري سليم هاشمي
شريمتي آريا ڀڙي
شري ملند ڀاڪري
شري گيانيشور ماهاڙڪر
شري لڪشمڻ داوڻڪر
شري سڌير پاٽيل
شري گڻيش ڪولتي
شري راجارام پنڊگر
شريمتي روهڻي شِرڪي
شري بنسي هوالي
شري پرديپ گوڊسي
شري رويندر کنداري
شري راجيندر چوڌري

شري وِ. دِ. گوڙبولي (نيمنڊ ڊنل ميمبر)
شريمتي تروبين پوپٽ (نيمنڊ ڊنل ميمبر)
شريمتي پراجڪتا گوکلي (نيمنڊ ڊنل ميمبر)

ٽائيپسيٽنگ : شريمتي شوڀا لالچنداڻي
سنيوجڪ: سهايڪ شريمتي ڪيتڪي جاني
انچارج آفيسر سنڌي.
سنيوجن : شريمتي گيتا گڻيش ٺاڪر
ڪاپي رائيٽر سنڌي
شري سچيتانند آڦڙي، مکيه نرمتي اڌڪاري
شري سنجيه ڪانبلي، نرمتي اڌڪاري
شري پرشانت هرڻي، نرمتي سهايڪ اڌڪاري
ترجمو ڪندڙ : شري اشوڪ ڪملداس مڪنا
چڪاس ڪندڙ: شري وجيه راجڪمار منگلاڻي.
ڪاغذ : 70 جي. ايس. ايم ڪريم وو.
ڇاپيندڙ :
پرنٽنگ آرڊر: N/PB/2017-18/1,000

پرڪاشڪ

وويڪ اُتم گوساوي، ڪنٽرولر
پاٺيه پُستڪ نرمتي منڊل،
پرڀاديوي، ممبئي - ۲۵.

ڀارت جو سنوڌان

ديباچو

اسين ڀارت جا لوڪ، ڀارت کي هڪُ مڪمل طور خودمُختيار سماجوادي سَرو ڌرم ۽ سم-ڀاوَ وارو لوڪشاهي گڻراجيہ بڻائڻ لاءِ گنڀيرتا سان فيصلو ڪري ۽ انهيءَ جي سڀني ناگرڪن کي :

سماجڪ، آرٿڪ ۽ راڄنيتڪ نياءُ، ويچار، اظهار، وشواس، شرڌا ۽ اُپاسنا جي آزادي؛ درجي ۽ موقعي جي سمانتا؛ خاطريءَ سان حاصل ڪرائڻ ۽ اُنهن سڀني ۾ شخصي سؤمان ۽ راشٽر جي ايڪتا توڙي اکنڊتا جي خاطري ڏيندڙ ڀائيچارو وڌائڻ لاءِ.

اسان جي هن سنوڌان سڀا ۾ اڄ تاريخ ڇويهين نومبر، ١٩٤٩ جيِ ڏينهن، هن ذريعي هيءُ سنوڌان سويڪار ڪري، اُن کي قانون جي روپ ۾ پاڻ کي ارپڻ ڪريون ٿا.

راشٽر گيت

جَنَ گَڻَ مَنَ اَڌِينايَڪ جَيَہ هي،
ڀارَتَ ڀاڳِيہ وڌاتا
پَنجابَ، سِنڌ، گُجراتَ، مَراٺا،
دراوڙَ، اُتڪَلَ، بَنگَ،
وِنڌيہ، هِماچَلَ، يَمُنا، گَنگا،
اُڇَلَ، جل ڌِ تَرَنگَ،
تَوَ شُڀَ نامي جاڳي،
تَوَ شُڀَ آشيس ماڳي،
ڳاهي تَوَ جَيَہ - ڳاٿا،
جَنَ گَڻَ - مَنگَلَ دايَڪ جَيَہ هي
ڀارت ڀاڳِيَہ وِڌاتا،
جَيَہ هي، جَيَہ هي، جَيَہ هي،
جَيَہ جَيَہ جَيَہ جَيَہ هي،

پرِتگيا

’ڀارت منهنجو ديش آهي. سڀ ڀارتواسي منهنجا ڀائر ۽ ڀينر آهن.

مونکي پنهنجي ديش لاءِ پيار آهي ۽ مونکي ان جي شاندار ۽ طرح طرح جي ورثي تي گَوُرو آهي. مان سدائين ان جي لائق ٿيڻ جو جتن ڪندو رهندس.

مان پنهنجن مٽن مائٽن، اُستادن ۽ سڀني بزرگن جو سنمان ڪندس ۽ هر ڪنهن سان فضيلت ڀريو ورتاءُ ڪندس .

مان پرتگيا ٿو ڪريان تہ مان پنهنجي ديش ۽ ديشواسين سان سچو ٿي رهندس. انهن جي ڪلياڻ ۽ آسودگيءَ ۾ ئي منهنجو سک سمايل آهي.‘

پرستاونا

شاگرد دوستو،

درجي نائين ۾ توهان سڀني جو سواگت!

پرائمري تعليم جو اَڀياس ڪرم توهان سيڪنڊري سطح جي اَڀياس جي شروعات ڪري رهيا آهيو درجي اَٺين ۾ حساب وشيہ لاءِ فقط هڪ ئي ڪتاب هو. هاڻي حساب ڀاڱو - I ۽ حساب ڀاڱو - II، اَهڙن ٻن ڪتابن جو اَڀياس ڪرڻو آهي.

درجي اَٺين تائين، حساب وشيہ ۾ توهان ليڪ ، ٽڪنڊو، چوڪنڊو، گول وغيرهہ شڪلين جون خاصيتون سمجهيون آهن. هاڻي وڌيڪ ڪجهہ خاصيتون توهان دليلن جي آڌار تي ڏاڪي ثابت ڪرڻ سکڻ وارا آهيو. ترڪن سان سمجهائڻ وارو هنر وهنوار لاءِ سڀني ڪيترن ۾ اَهم آهي. ڇا درسي ڪتاب ذريعي اِهو هنر سولائيءَ سان سکڻ جو هڪ سٺو موقعو آهي. درسي ڪتاب ۾ ڏنل مشغوليون. اُستاد، ٻار هڪ دوستاڻي ماحول ۾ ڪن. مشغوليون ڪري، خاصيتن جي ثابتي اَڀياس ڪريو ثابتين ۾ هرهڪ ڏاڪي تي ڏنل سبب سمجهي اُهي خاصيتون ڌيان سان سمجهو، وڏي سطح تي حساب سان سمجهڻ لاءِ، اِن درسي ڪتاب ۾ علم مثلث ۽ مساوي جاميٽري جهڙا ايڪا جوڙيا ويا آهن. ساڳئي نموني وهنوار ۾ ڪم ايندڙ ايراضي ۽ مقدار بہ توهان اَڀياس ڪرڻ وارا آهيو.

اَنٽرنيٽ ذريعي ڪيترين ئي مشغوليون سمجهي وٺو، درسي ڪتاب ۾ سمجهاڻي ڏنل ٽڪر مشغوليون ۽ اَڀياس اِن ٽسوتري حسابن جي ياترا توهان لاءِ بيحد آنند دائڪ ٿيندي اِن ۾ ڪو بہ شڪ نہ آهي اَچو هاڻي اُستاد، مائٽ ، دوست ، اِنٽرنيٽ اِنهن سڀني کي گڏ ڪٽي حسابن جو اَڀياس ڪريون.

اِن اَڀياس لاءِ توهان کي شُڀ ڪامنائون.

(ڊا. سُنيل مگر)
سنچالڪ
مهاراشٽر راجيہ پاٺيہ پُستڪ نرمتي
و اڀياسڪرم سنشوڌن منڊل پڻي.

پڻي
تاريخ ٢٨ اَپريل ٢٠١٧ ، اڪڻ ٽيج،
ڀارتيہ سوريہ : ٨ ويساکہ ١٩٣٩

درجو نائون : حساب ڀاڱو : II اَڀياس ڪرڻ بعد هيٺ ڏنل لياقتون وديارٿي حاصل ڪندا.

ڪيٽر	يونٽ	لياقت
1. جاميٽري	1.1 يوڪلڊ جي جاميٽري 1.2 پوروچوٽ ليڪون ۽ ڪنڊن جا جوڙا 1.3 ٽڪنڊي ۽ ڪنڊ، اِنهن جا سڏيان 1.4 هڪ جهڙا ٽڪنڊا 1.5 گول 1.6 جاميٽري جا جوڙجڪ 1.7 چوڪندا	• ڏنل بيان ۾ اِستعمال ڪرڻ لاءِ چاڻ (ڏنل) ۽ ثابت ڪرڻ جو بيان (ثابت ڪرڻ ته) اِهو چٽيءَ طرح ٻڌائي سگهڻ . • دلين سمت ڏنل, ثابت ڪرڻ لاءِ اِها بيبهڪ پيش ڪري سگهڻ. • پوروچوٽ ليڪون ۽ چيدئي، اِنهن وسيلي تيار ٿيل جدا جدا ڪندن جي جوڙن ڪي سڃاڻڻ • ڪندن جي جوڙن جون خاصيتون سمجهڻ ۽ اِستعمال ڪرڻ • ڏنل چاڻ موجب ڏنل ۽ ثابت ڪرڻ ۽ اُن جي ثابتي پيش ڪرڻ • هڪ جهڙن ٽڪندن جي سڃاڻپ ۽ اُنهن جي پاسن جو ريشو لکي سگهڻ ٺهڪندڙ ٽڪندن جون آزمائشون ڪم آڻي گول جون خاصيتون سمجهڻ اِرڌ گول ۽ گرد گول ڪيڻ سگهڻ ٽڪندي ۾ خاص چاڻ موجب ٽڪندا ڪيڻ. چوڪندن جا قسم ۽ خاصيتون سمجهڻ ICT Tools جي مدد سان ٽڪندا, چوڪندا, گول ڪيڻ
2. مساوي جاميٽري	2.1 مساوي جاميٽري	• سطح ۾ هڪ ٽپڪي جي مساوات جو جوڙ مطلب سمجهڻ • مساوت جو اِستعمال ڪري ٽپڪا ڪيڻ • ICT Tools جو اِستعمام ڪري ٽپڪا ڳولهڻ
3. مکيه ماپون	3.1 ايراضي ۽ مقدار	• گولو ۽ کون اِنهن جي ايراضي ۽ مقدار لهي سگهڻ
4. علم مثلت	4.1 علم مثلت	• هڪ جهڙا ٽڪندا ۽ پائٿاگورس جو سڏيان اِستعمال ڪري، علم مثلت جا ريشو ٻڌائي سگهڻ ۽ اُنهن کي اِستعمال ڪرڻ.

ماسترن لاءِ سوچنا

ماستر درجو ناٺون حساب پاڱو II اِن ڪتاب کي گهرائيءَ سان پڙهن. سڀ مشغوليون ۽ عملي ڪم چڱيءَ طرح سمجهائين. مشغوليءَ جا ٻه پاڱا آهن. هڪ ۾ ثابتي لکڻ ۽ ٻئي پاڱي ۾ خاصيت يا سکيل نتيجو عملي روپ ۾ ڪري اُن جي جاچ ڪرڻ. مشغوليون توڙي ڪتاب جئن چڱيءَ طرح ٻارن کي سمجهه ۾ اَچي، اِن لاءِ اُميد ڪئي وڃي ٿي ته ماستر بحث ، سوال جواب، گڏيل پراجيڪٽ وغيرهه طريقا اَپنائيندو. ڪتاب ۾ ڏنل مشغوليون ٻارن کان پاڻ ڪرايو ۽ اهڙيون ٻيون مشغوليون تيار ڪرڻ لاءِ ٻارن کي همٿايو.

سڏيان رٽڻ بدران اُن کي دليلن سان سمجهڻ وڌيڪ اَهميت وارو آهي. اَهڙا دليلن سان ڏنل ڪيترائي علحدا علحدا مثال درسي ڪتاب ۾ ڏنل آهن. اَهڙا ٻيا مثال ماستر ۽ ٻار ملي تيار ڪن. ڪجهه للڪاريندڙ مثال تاري نشان سان ڏنل آهن. شاگرد جيڪڏهن ٻيو ڪو طريقو حل ڪرڻ ۾ اَپنائي ٿو ۽ ثابتي برابر دليلن سان ٻڌائي ٿو ته ماستر جو فرض آهي ته اَهڙي شاگرد جي ڪلاس ۾ ساراهه ڪري شاباسي ڏي.

ماستر کي آزاد سوال ۽ علمي پرچي جو اِستعمال ملهه ماپڻ لاءِ ڪرڻو آهي. ملهه ماپڻ طريقو وڪاس ڪرڻ لاءِ ماستر ڪوششون وٺي. اِن سان گڏ درسي ڪتاب ۾ علمي ڪمن بابت ياداشت ڏنل آهي. اِن کان سواءِ ماستر موجود ساهتيه مان جدا جدا عملي ڪم تيار ڪري درسي ڪتاب ۾ علحدين مشغولين کي عملي ڪمن ۾ شامل ڪيو ويو آهي. اُن مٿان مدار رکندڙ ملهه ماپڻ طريقي جو اِستعمال، اِها اُميد ڪجي ٿي ته ايندڙ درجن لاءِ شاگردن ۾ قابليت پيدا ڪندي.

عملي ڪم ياداشت

1. عدد ليڪ تي ٻن ٽٻڪن وچ ۾ مفاصلو لهڻ.
2. پوروچوٽ ليڪون ۽ چيدڪي، اِنهن وسيلي ٺهيل ڪندن جون خاصيتون، سامگري ڪم آڻي جاچڻ.
3. جدا جدا ساهتيه ڪم آڻي ٽڪنڊي جي پاسن ۽ ڪندن جون خاصيتون جاچڻ.
4. گوني ڪنڊ ٽڪنڊي ۽ مڏيان بابت خاصيتن کي چڪاسڻ.
5. ٽڪنڊي جي جوڙجڪ لاءِ ٽڪندن جون جدا جدا ماپون ڪٽي، سيني قسمن جي جوڙجڪ ڪيڏڻ.
6. ڪون جي وريل مٿاڇڙو ايراضي بابت هڪ مشغولي ڏنل آهي. اُها مشغولي 'r' اِن نيم قطر واري گول سان ڪرڻ ڪرڻ ۽ گول جي ايراضي πr^2 اِهو چڪاسڻ.
7. ڪنهن ڪمري، اُن اَندر سيني شين جون ماپون ڏيان ۾ رکندي نقشو گراف پني تي ڪيڏڻ.
8. اِسڪول جي ميدان تي x ۽ y محور ڪيڍي شاگردن کي ٻيهاري، مساوا مقرر ڪرڻ.
9. سلينڊر شڪل واري ڊبي جو مقدار فارمولا جي مدد سان لهڻ ۽ اُن ڊبي ۾ سڄو پاڻيءَ سان ڀري، پاڻيءَ جو مقدار لهڻ، ٻنهي جوابن جي ڀيٽ ڪرڻ اَهڙي نموني جدا جدا ته-ماپي شين جو مقدار چڪاسڻ.

فهرست

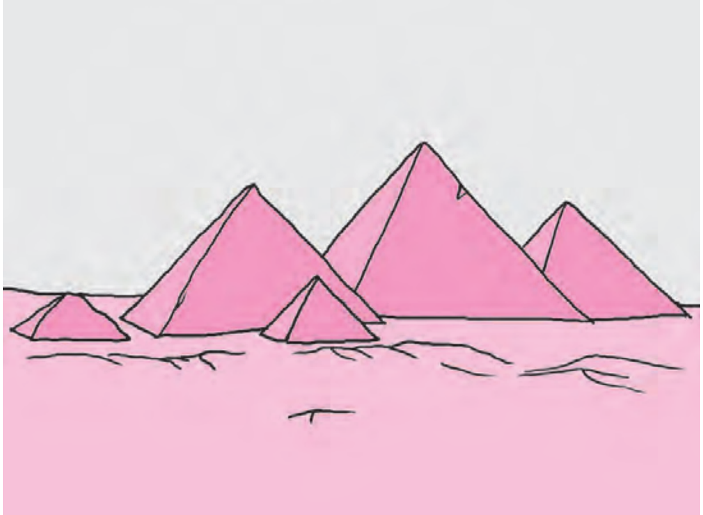
باب	صفحو
.1 جاميٽري جون بنيادي ويچار ڌارائون	1 کان 12
.2 پوروچوٽ ليکون	13 کان 23
.3 ٽڪنڊو	24 کان 50
.4 ٽڪنڊي جي جوڙجڪ	51 کان 56
.5 چوڪنڊا	57 کان 75
.6 گول	76 کان 87
.7 مساوي جاميٽري	88 کان 99
.8 علم مثلث	100 کان 113
.9 متاچڙو ايراضي ۽ مقدار	114 کان 123
• جواب	124 کان 128

1 جاميٽريءَ جون بنيادي ويچار ڌارائون

RVB641

اچو تہ سکي وٺون

- ٽپڪو، ليڪ، سطح
- ٽپڪن جا مساوا ۽ مفاصلو
- درميانتا
- شرطي بيان
- ثابتي



پرواري شڪل سُڃاڻي سگهو ٿا ڇا؟ اهو ايجپٽ جي پرامڊِ جو چٽر آهي عيسوي س ٣٠٠٠ کان اڳہ اهڙي شاندارررچنا اَڳي جي ماڻهن ڪيئن ڪئي هوندي؟ اَڏاوت شاسترءِ جاميٽري، اِنهن وشين جي وڪاس ڪانسواءِ اَهڙي جوڙجڪ ممڪن نہ آهي.

اَچو تہ جاميٽري، اِن نالي جي اَصليت سمجهون. ”جيئو“ معنيٰ زمين ۽ ”ميٽران“ معنيٰ ماپڻ اِن ڪري زمين ماپڻ جي ضرورت ڪري ”جاميٽري“ وشيہ جو وجود آيو، اِهو دليل ڪيو ويندو آهي.

جُدا جُدا ديشن ۾ جاميٽريءَ جو وڪاس جُدا جُدا وقتن ۽ جُدا جُدا رچنا لاءِ ٿيو. ائين چيو ويندو آهي تہ گريڪ جو مشهور رياضدان ٿيلن ايجپٽ ۾ ويو هو پرامڊ جو پاڇو ماپي ۽ ٽپورپاسي ٽڪنڊي جون خاصيتون واپرائي پرامڊ جي اوچائي مقرر ڪئي هئي. پائٿاگورس ٿيلس جو شش هو، اهو پڻ چيو ويندو آهي.

پراچين ڀارتواسين کي بہ جاميٽريءَ جو سمورو گيان هو. ويدن واري يُگہ ڀارت جا ماڻهو يگيہ - ڪُنڊ ٺاهڻ وقت جاميٽريءَ جون خاصيتون اِستعمال ڪندا هئا. ڏوريءَ جي مدد سان ماپ ڪيئن ڪجي ۽ جُدا جُدا آڪار ڪيئن تيار ڪجن، اِنهن جو شلوسوترن ۾ ذڪر ڪيل آهي. پوءِ واري عرصي ۾ آريہ ڀٽ، وراهمهر برهمگپت، ڀاسڪر آچاريہ وغيرهہ رياضدانن ، اِن وشيہ جو گُوڙهو اَڀياس ڪيو.

ڄاڻي وٺون

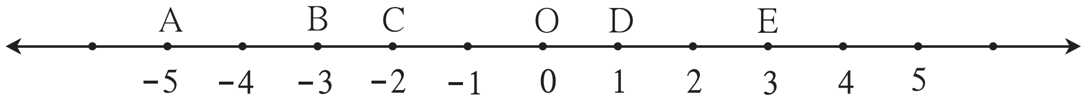
جاميٽريءَ جون بنيادي ويچار ڌارائون ٽپڪو، ليڪ ۽ سطح
(Basic concepts in geometry : point, line and plane)

جنهن نموني اسان عددن بابت وصف بيان ڪري سگهون ٿا، اُن نموني ٽپڪو، ليڪ ۽ سطح بابت وصف بيان نٿا ڪري سگهون. اِهي جاميٽريءَ جون بنيادي ويچار ڌارائون آهن ليڪ ۽ سطح اِهي ٽپڪن جا سيٽ آهن.

ليڪ مطلب سڌي ليڪ، اِهو ڌيان ۾ رکو.

ٽپڪن جا مساوا ۽ مفاصلو (Co−ordinates of points and distance)

ڏنل لائين تي ڌيان ڏيو



شڪل 1.1

مٿي ڏنل شڪل ۾ D اهو ٽپڪ ليڪ تي '1' عدد ڏيکاري ٿو مطلب عدد 1 اِهو ٽپڪي D جو مساوو آهي. اِئين چئبو آهي ٽپڪو B عدد (-3) ڏيکاري ٿو مطلب ٽپڪي B جو مساوو (-3) آهي. اهڙي نموني A جو مساوو (-5) ۽ E جو مساوو 3 آهي. ٽپڪي D کان ٽپڪي E وچ ۾ مفاصلو 2 ايڪا آهي. هتي ايڪا ماپي آسان ۾ ٽپڪن وچ ۾ مفاصلو لهي سگهون ٿا. ليڪ تي A ۽ B ٽپڪن وچ ۾ مفاصلو 2 ايڪا آهي.

هاڻي ٽپڪن جا مساوا ڪم آڻي، اُنهن وچ ۾ مفاصلو ڪيئن لهبو، اِهو ڏسنداسين ۾ ٽپڪن وچ ۾ مفاصلو لهڻ مطلب اُنهن ٽپڪن جي مساون مان، وڏي مساوو مان ننڍو ڪٽ ڪرڻ.

D جو مساوو 1 آهي. E جو مساوو 3 آهي ۽ 3>1 اِها آسان ڪي ڄاڻ آهي ٽپڪن E ۽ D وچ ۾ مفاصلو 3-1 مطلب 2 آهي.

ٽپڪن E ۽ D اِنهن وچ ۾ مفاصلو، اِهو d (E ،D) اَهڙي نموني ڏيکاريو آهي اِن مفاصلي جو مطلب l(E ،D) آهي. اِهو ٽڪر ED جي ڊيگهه آهي.

$$d(E, D) = 3 - 1 = 2$$
$$\therefore \; l(ED) = 2$$
$$d(E, D) = l(ED) = 2$$
$$d(D, E) = 2$$

$$d(C, D) = 1 - (-2)$$
$$= 1 + 2 = 3$$
$$\therefore \; d(C, D) = l(CD) = 3$$
$$d(D, C) = 3$$

d (A ،B) لهون A جو مساوو -5 آهي B جو مساوو -3 آهي ۽ -3 > -5

$$\therefore \; d(A, B) = -3 - (-5) = -3+5 = 2.$$

جيڪڏهن P ۽ Q اِهي علحدا ٽپڪا آهن ته d(P،Q) ∠ O

جيڪڏهن P ۽ Q اِهي علحدا ٽپڪا نه آهن مطلب P ۽ Q هڪ ئي ٽپڪو آهي ته d(P،Q)=O

اِهو ڌيان ۾ رکو

- ٻن ٽپڪن درميان مفاصلو، اُنهن جي مساون مان، وڏي مساوو مان ننڍو مساوو ڪٽ ڪرڻ سان ملندو آهي.
- ٻن ٽپڪن وچ ۾ مفاصلو هميشهه غير ڪاٽو حقيقي عدد هوندو آهي.

چاڪي وٺون

درميانتا (Betweenness)

جيڪڏهن P،Q،R اِهي هڪ ليڪي ٽِٻڪا آهن تہ هيٺ ڏنل شڪلين موجب ٽي سمياونائون ٿي سگهن ٿيون.

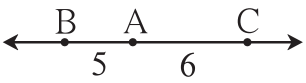
شڪل 1.2

(i) ٽِٻڪو P اِهو R ۽ Q وچ ۾ آهي . (ii) ٽِٻڪو R اِهو P ۽ Q وچ ۾ آهي. (iii) ٽِٻڪو Q اِهو P ۽ R وچ ۾ آهي.

جيڪڏهن $d(P,Q)+d(Q,R) = d(P,R)$ هجي تہ چئبو آهي ٽِٻڪو Q، اِهو ٽِٻڪو P ۽ R وچ ۾ آهي. اِها درميانتا P-Q-R ائين ڏيکاربي آهي.

مثال (1) هڪ عددي ليڪ مٿان A,B, C اِهي ٽِٻڪا آهن جيڪڏهن $d(A,B)=5$, $d(B,C)=11$ ۽ $d(A,C)=6$ ٻڌايو تہ کهڙو ٽِٻڪو باقي ٽِٻڪن وچ ۾ آهي؟

حل: هتي A,B ۽ C اِنهن ٽِٻڪن مان کهڙو ٽِٻڪو وچ ۾ آهي، اِهو هيٺ ڏنل نموني لڀبو.



شڪل 1.3

$$d(B,C) = 11 \quad .... \quad (I)$$

$$d(A,B) + d(A,C) = 5+6 = 11 \quad .... \quad (II)$$

(I) ۽ (II) وچ ۾ $d(B,C) = d(A,B) + d(A,C)$ ....

مطلب ٽِٻڪو A اِهو B ۽ C ٽِٻڪن وچ ۾ آهي.

مثال (2) هڪ رستي تي سڌي ليڪ ۾ U,V ۽ A شهر آهن U ۽ A وچ ۾ مفاصلو 215 ڪ.م. آهي. V ۽ A وچ ۾ 140 ڪ.م ۽ U ۽ V وچ ۾ 75 ڪ.م آهي تہ کهڙو شهر کهڙن ٻن شهرن وچ ۾ آهي؟

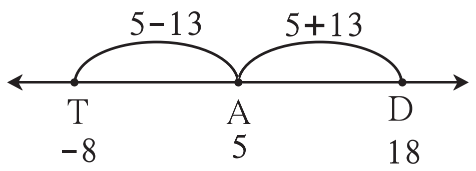
حل : $d(U,A) = 215;\quad d(V,A) = 140;\quad d(U,V) = 75$

$$d(U,V) + d(V,A) = 75 + 140 = 215;\quad d(U,A) = 215$$

$$\therefore d(U,A) = d(U,V) + d(V,A)$$

∴ يعني V شهر U ۽ A شهرن وچ ۾ آهي.

مثال (3) هڪ عددي ليڪ مٿان A ٽپڪي جو مساوو 5 آهي اُن ئي ليڪ تيA کان 13 ايڪن جي مفاصلي تي ٽپڪي جو مساوو لهو.



شڪل 1.4

ٽپڪيA جي کاٻي پاسي T جو مساوو ٿيندو $5-13=-8$

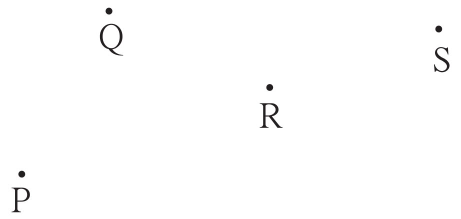
ٽپڪي A ساڄي پاسي D ٽپڪي جو مساوو ٿيندو $5+13=18$

چڪاس ڪريو : $d(\text{A},\text{D}) = d(\text{A},\text{T}) = 13$

مشغولي

(1) C,B,A اِهي ٽپڪا هم - ليڪي ٽپڪا آهن ڇا؟ اِهو ڏاڍو ٻڌي ٽپاسيو جيڪڏهن اِهي هڪ ئي ليڪ مٿان آهن تہ ڪهڙو ٽپڪو وچ ۾ آهي اِهو لکو.

(2) S,R,Q,P اِهي چار ٽپڪا مليل آهن. اُنهن مان ٻڌايو تہ ڪهڙا ٽي ٽپڪا هم - ليڪي آهن ۽ ڪهڙا ٽي ٽپڪا غير - هم ليڪي آهن اِهو چڪاسيو. هم ليڪي ٽپڪن ۾ درميانتا لکو.

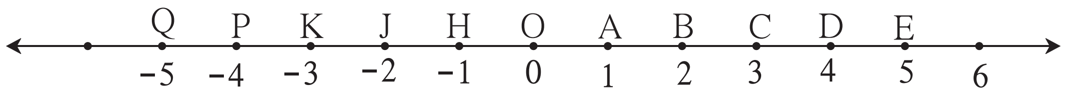


(3) قوائد ۾ ٻارن کي سڌي قطار ۾ بيهڻ لاءِ چيو ويو آهي. هرهڪ قطار ۾ ٻار سڌي ليڪ ۾ آهن، اِهو ڪيئن چڪاسبو؟

(4) روشني جا ترورا هڪ سڌي ليڪ ۾ ويندا آهن، اِها ڄاڄ توهان ڪيئن ڪندا آهيو؟ اڳيم پڙهيل درجن ۾ ڪيل تجربو ياد ڪريو.

اَپياس 1.1

1. متي ڏنل عددي ليڪ جاچي هيٺ ڏنل مفاصلا لھو.



شڪل 1.5

(i) d(B,E)	(ii) d(J, A)	(iii) d(P, C)	(iv) d(J, H)
(v) d(K, O)	(vi) d(O, E)	(vii) d(P, J)	(viii) d(Q, B)

2. ٽپڪي A جو مساوو X ۽ ٽپڪي B جو مساوو Y آهي تہ هيٺ ڏنل ڄاڻ موجب d(A,B) لھو

(i) $x = 1, y = 7$	(ii) $x = 6, y = -2$	(iii) $x = -3, y = 7$
(iv) $x = -4, y = -5$	(v) $x = -3, y = -6$	(vi) $x = 4, y = -8$

3. هيٺ ڏنل ڄاڻ موجب ڪهڙا ٽپڪو ڪهڙن ٻن ٽپڪن وچ۾ آهي، اُهو لهو ڏنل ٽپڪا جيڪڏهن غير هم ليڪي هجن، اُهو پڻ لکو

(i) d(P, R) = 7,	d(P, Q) = 10,	d(Q, R) = 3
(ii) d(R, S) = 8,	d(S, T) = 6,	d(R, T) = 4
(iii) d(A, B) = 16,	d(C, A) = 9,	d(B, C) = 7
(iv) d(L, M) = 11,	d(M, N) = 12,	d(N, L) = 8
(v) d(X, Y) = 15,	d(Y, Z) = 7,	d(X, Z) = 8
(vi) d(D, E) = 5,	d(E, F) = 8,	d(D, F) = 6

4. هڪ عددي ليڪ تي C,B,A ٽپڪا آهن d(A,C)=10 ,d(C,B)=8 تہ d(A,B)لھو. سڀ ممڪن جواب لھو.

5. Z,Y,X اِهي هم - ليڪي ٽپڪا آهن. جيڪڏهن d(X,Y)=17 ۽ d(Y,Z)=8 تہ d(X,Z) لھو.

6. شڪل ڪيدي سوالن جا جواب لکو

(i) جيڪڏهن A–B–C ۽ $l(BC) = 6.5$, $l(AC) = 11$, تہ $l(AB)$ = ؟

(ii) جيڪڏهن R–S–T ۽ $l(RS) = 2.5$, $l(ST) = 3.7$, تہ $l(RT)$ = ؟

(iii) جيڪڏهن X–Y–Z ۽ $l(XY) = 7$, $l(XZ) = 3\sqrt{7}$ ، $l(YZ)\sqrt{7}$ = ؟

7. هڪ جهڙا ٽپڪا ڪهڙي شڪل تيار ڪندا؟

چاڪي وٺون

درجي نائين جي پهرين ڀاڱي ۾ سيٽ باب ۾ توهان سنجوڳ سيٽ، ڇيد سيٽ بابت اَڀياس ڪيو آهي. اِنهن جو اِستعمال ڪري ليڪ ٽڪر ڪرڻو ۽ ليڪ جو بيان ٽٻڪو سيٽ ۾ ڪريون ٿا.

(1) ليڪ ٽڪر (Line segment) :

شڪل 1.6

ٽٻڪو A، ٽٻڪو B ۽ اِنهن ٻن ٽٻڪن وچ ۾ سڀني ٽٻڪن کي سمائيندڙ ٽٻڪن جي سيٽ کي ليڪ ٽڪر AB چئبو آهي ٿوري ۾ اهو ٽڪر AB ڪري چئبو آهي

ٽڪر AB مطلب ٽڪر BA ٽٻڪا A ۽ B ٽڪر AB جا پڇڙ ٽٻڪا آهن ليڪ ٽڪر جي پڇڙ- ٽٻڪن وچ ۾ مفاصلو، اُن ليڪ ٽڪر جي ڊيگهه هوندي آهي. $l(AB)=d(A,B)$ $l(AB)=5$ اهو $AB=5$ ائين لکبو آهي.

(2) ڪرڻو AB (Ray AB) :

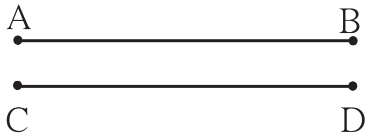
شڪل 1.7

سمجهو A ۽ B ٻہ ٽڪبا آهن ٽڪر AB جا سڀ ٽٻڪا ۽ ليڪ AB تي A-B-P اَهڙا سڀ ٽٻڪا اِنهن جو سنجوڳ سيٽ مطلب ڪرڻو AB هوندو آهي. هتي ٽٻڪو A کي ڪرڻي جو منڍ ٽٻڪو چئبو آهي.

(3) ليڪ AB (Line AB) :

ڪرڻي AB جا ٽٻڪا ۽ اُنجي اُبتڙ ڪرڻي جا سڀ ٽٻڪا، اِنهن جي سيٽ کي ليڪ AB چئبو آهي. ٽڪر AB اِهو سيٽ ليڪ AB جو اُپ سيٽ آهي.

(4) ٺهڪندڙ ٽڪر (Congruent segments) :



شڪل 1.8

ساڳئي ڊيگهه وارن ٽڪرن کي ٺهڪندڙ ٽڪر چئبو آهي

جيڪڏهن $l(AB) = l(CD)$ ٽڪر AB ≅ ٽڪر CD

(5) ٺهڪندڙ ٽڪرن جون خاصيتون (Properties of congruent segements) :

(i) عڪس خاصيت (Reflexivity) ٽڪر AB ≅ ٽڪر AB

(ii) سمتا (Symmetry) ٽڪر AB ≅ ٽڪر CD تہ ٽڪر CD ≅ ٽڪر AB

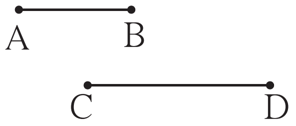
(iii) متاستا (Transitivity) ٽڪر AB ≅ ٽڪر CD تہ ٽڪر CD ≅ ٽڪر EF تہ ٽڪر AB ≅ ٽڪر EF

(6) ٽڪر جو مڌيہ ٽٻڪو (Midpoint of a segment) :

شڪل 1.9

جيڪڏهن A-M-B ۽ ٽڪر MB ≅ ٽڪر AM تہ ٽٻڪو M ٽڪر AB جو مڌيہ - ٽٻڪو آهي، ائين چئبو آهي. هرهڪ ٽڪر کي هڪ ۽ فقط هڪ مڌيہ ٽٻڪو هوندو آهي.

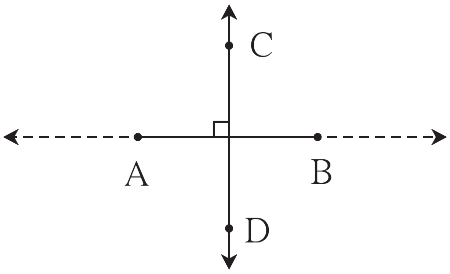
(7) ٽڪرن جي ڀيٽ (Comparison of segments)



شڪل 1.10

جيڪڏهن ٽڪر AB جي ڊيگهه ٽڪر CD کان گهٽ آهي مطلب $l(AB) < l(CD)$ تہ ٽڪر CD > ٽڪر AB يا ٽڪر AB < ٽڪرCD ائين لکبو آهي. ٽڪرن جي ننڍ وڏائي اُنهن جي ڊيگهه تي مدارکي ٿي.

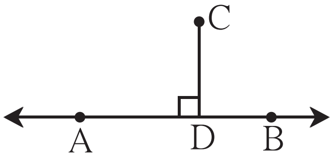
(8) ٽڪرن يا ڪرڻن جي عموديت
(Perpendicularity of segments or rays)



شڪل 1.11

بہ ٽڪر يا بہ ڪرڻا يا هڪ ڪرڻو ۽ هڪ ٽڪر اِنهن کي B سمائيندڙ ليڪو هڪ ٻئي تي عمود آهن تہ ٻئي تي عمود آهن تہ ٻئي ٽڪرا ٻئي ڪرڻا يا هڪ ٽڪر ۽ هڪ ڪرڻو پاڻ ۾ عمود هوندا شڪل 1.11 ۾ ٽڪرCD ⊥ ٽڪرAB ڪرڻو CD ⊥ ٽڪر AB

(9) ٽٻڪي جو ليڪ کان مفاصلو
(Distance of a point from a line)



شڪل 1.12

جيڪڏهن ليڪ AB ⊥ ٽڪر CD ۽ ٽٻڪو D ليڪ AB مٿان آهي تہ ٽڪر CD جي ڊيگهه مطلب C جو ليڪ AB تائين مفاصلو ائين چئبو آهي. ٽٻڪي CD کي عمود جو پير چئبو آهي. جيڪڏهن $l(CD)=a$ تہ ٽٻڪو C ليڪ AB کان a مفاصلي تي آهي.

اڀياس 1.2

1. هيٺ ڏنل خاڪي ۾ عددي ليڪ تي ٽٻڪن جا مساوا ڏنل آهن. ڏنل ٽڪر نهڪندڙ آهن يا نہ اِهو ٻڌايو.

ٽٻڪو	A	B	C	D	E
مساوو	−3	5	2	−7	9

(i) ٽڪر DE ۽ ٽڪر AB (ii) ٽڪرBC ۽ ٽڪر AD (iii) ٽڪرBE ۽ ٽڪر AD

2. ٽٻڪو M اِهو ٽڪرBC جو مڏيہ - ٽٻڪو آهي ۽ AB=8 تہ AM ڪيترو ؟

3. ٽٻڪو P اِهو ٽڪر CD جو مڏيہ - ٽٻڪو آهي ۽ CP=2.5 ۽ ٽڪر CD جي ڊيگهه لهو.

4. جيڪڏهن AB= 5 س.م، BP= 2 س.م ۽ AP= 3.4 س.م تہ اِنهن ٽڪرن جي ننڍ -وڏائي لهو.

.5 شڪل 1.13 موجب هيٺ ڏنل سوالن جا جواب لکو

شڪل 1.13

(i) ڪرڻو RP جو اُبتڙ (مخالف) ڪرڻو لکو

(ii) ڪرڻو PQ ۽ ڪرڻو RP جو ڇيد سيٽ لکو

(iii) ٽڪر PQ ۽ ٽڪر QR جو سِيٽ لکو.

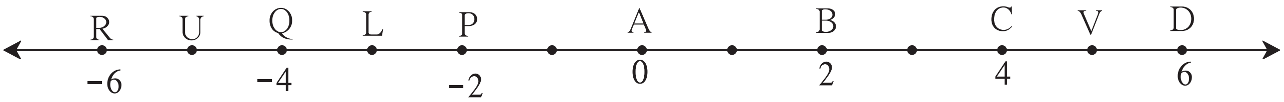
(iv) ٽڪر QR، اِهو ڪهڙن ڪرڻن جو اُپ سيٽ آهي؟

(v) R اِن منڊ ٽبڪي سان شروع ٿيندڙ اُبتڙ ڪرڻن جا جوڙا لکو.

(vi) S اِن منڍ ٽبڪي وارا ڪهڙا ٻہ ڪرڻا لکو.

(vii) ڪرڻو SP ۽ ڪرڻو ST اِنهن جو ڇيد سيٽ لکو

.6 هيٺ ڏنل شڪل 1.14 جي عددي ليڪ موجب سوالن جا جواب لکو



شڪل 1.14

(i) ٽبڪي B ڪان **هم مفاصلي** وارن ٽبڪن جا نالا لکو

(ii) ٽبڪي Q ڪان هم مفاصلي وارن ٽبڪن جو هڪ جوڙو لکو.

(iii) d (U, L), d (V,B), d (P,C), d (U,V) ڪيو.

چاڪي وٺون

شرطي بيان ۽ اُبتڙ (Conditional statements and converse)

اُهي بيان جيڪي جيڪڏهن تہ پوءِ (if-then) جي روپ ۾ لکيا آهن انهن کي شرطي بيان چئبو آهي.
شرطي بيانن ۾ ”جيڪڏهن“ سان شروع ٿيندڙ بيان کي ”پهريون اَڌ“ ۽ ”تہ پوءِ“ سان شروع ٿيندڙ بيان کي ”پويون اَڌ“ چئبو آهي.

مثال :- رامبس جا اُريب هڪ ٻئي جا عمودي اَڌڪ آهن. اِهو بيان آهي .

شرطي بيان :- جيڪڏهن ڏنل چوڪندو رامبس آهي تہ پوءِ اُنجا اُريب هڪ ٻئي جا عمودي اَڌڪ هوندا آهن.

هڪ شرطي بيان ۾ اُن جو 'پهريون اَڌ' ۽ 'پويون اَڌ' پاڻ ۾ بدلِ - سدل ڪبا تہ اِن شرطي بيان جو اُبتڙ بيان (Converse) ملندو. جيڪڏهن هڪ شرطي بيان صحيح آهي تہ ضروري نہ آهي تہ اُن جو اُبتڙ بيان صحيح هوندو اَڳتي ڏنل مثال ڏسو.

شرطي بيان : جيڪڏهن ڪو چوڪنڊو رامبس آهي تہ اُنجا اُريب هڪ ٻئي جا عمودي اَڌڪ هوندا آهن.

اُبتڙ بيان : جيڪڏهن ڪنهن چوڪنڊي جا اُريب هڪ ٻئي جا عمودي اَڌڪ آهن تہ اُهو چوڪنڊو رامبس آهي. اِن مثال ۾اَصلوڪو بيان ۽ اُبتڙ بيان، اِهي ٻئي بيان صحيح آهن.

شرطي بيان : جيڪڏهن ڪو عدد مفرد آهي تہ پوءِ اُهو ٻڌي يا اِڪي عدد هوندو آهي.

اُبتڙ بيان : جيڪڏهن ڪو عدد اِڪي عدد يا ٻڌي عدد آهي تہ پوءِ اُهو مفرد عدد هوندو اِن مثال ۾شرطي بيان صحيح آهي پر اُبتڙ بيان غلط آهي.

چاڻي وٺون

ثابتيون (Proofs)

اَسان ڪنڊ، ٽڪنڊو، چوڪنڊو اِنهن شڪلين جي ڪيترن ئي خاصيتن جو اَڀياس ڪيو آهي. اِهي خاصيتون اَسان تجربي طريقي سکيا آهيون. هن درجي ۾اَسان جاميٽري، اِن وشيہ لاءِ جُدا جُدا نظريا ڏسڻ وارا آهيون. اِن نظريقي جو شرف عيسوي سن کان اَڳہ ٽين صدي جي گريڪ رياضدان يوڪلڊ ڏانهن وڃي ٿو. اُن عرصي ۾جيڪا جاميٽري وشيہ جي ڄاڻ حاصل ٿيل هئي، اُن تي هن ڪجهہ لڳاپو رکندڙ بيان ٺاهيا. اُنهن بيانن ۾هڪ ڪرو سنہنڊ آندو هن خاص طور ٻڌايو تہ ڪي مڃيل بيان مطلب بنيادي بيان (Postulates) ڪري قبول ڪيا. اُنهن جي آڌار تي دليل ڏيئي نوان بيان ثابت ڪيا. اُنهن ثابت ڪيل بيانن کي سڏيان (Theorems) چئبو آهي.

يوڪلڊ پاران مڃيل بيانن مان ڪجهہ هيٺ ڏنل آهن .

يوڪلڊ

(1) هڪ ٽبڪي مان نڪرندڙ بيشمار ليڪون هونديون آهن.

(2) جن ٽبڪن مان هڪ ليڪ لنگهي ٿي.

(3) ڪنهن بہ ٽبڪي کي مرڪز مڃي گول ڪڍي سگهجي ٿو.

(4) سڀ گوني ڪُنڊون هڪ ٻئي سان ٺهڪندڙ هونديون آهن.

(5) بہ ليڪون ۽ اُنهن جي ڇيد ئي ڪيڏي سان جيڪڏهن هڪ پاسي ٺهيل اَندرين ڪنڊن جو جوڙ ٻن گوني ڪنڊن کان گهٽ آهي تہ پوءِ اُهي ليڪون ساڳئي طرف اَڳتي وڌائڻ سان هڪ ٻئي کي ڪپين ٿيون.

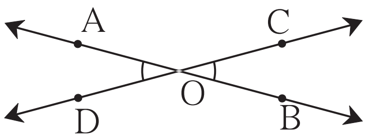
اِنهن مڃيل بيانن کي اَسان عملي ڪم رستي چڪاسيو آهي. ڪنهن خاصيت کي دليلن وسيلي ثابت ڪبو تہ اُها خاصيت صحيح مڃي ويندي. اُن قسم جي دليلن سميت بناوت کي اُن خاصيت مطلب اُن سڏيان جي ثابتي (Proof) چئبو آهي شرطي بيان ۾پهريون اَڏ' ڏنل ۽ 'پوين اَڏ' ثابتيءَ جا بہ قسم آهن. سڌي ثابتي ۽ اَڻ سڌي ثابتي. هڪ ٻئي کي ڪپيندڙ ٻن ليڪن جي ڪنڊن جون خاصيتون سڌي ثابتي (Proof) وسيلي ڏسو.

خاصيت : هڪ ٻئي کي ڪپيندڙ ٻن ليڪن جو ٺهيل اُبتڙ ڪندون (آمهون سامهون نوڪ ڪندون) ساڳئي ماپ واريون هونديون آهن.

ڏنل : ليڪ AB ۽ ليڪ CD هڪ ٻئي کي ٽڪي O وٽ ڪپين ٿيون A – O – B, C – O – D

ثابت ڪرڻ تہ (i) $\angle AOC = \angle BOD$

(ii) $\angle BOC = \angle AOD$



شڪل 1.15

ثابتي : $\angle AOC + \angle BOC = 180^\circ$ . . . . (I) (ليڪي جوڙو ڪندون)

$\angle BOC + \angle BOD = 180^\circ$ . . . . (II) (ليڪي جوڙو ڪندون)

(I) ۽ (II) . . . . مان $\angle AOC + \angle BOC = \angle BOC + \angle BOD$

$\angle BOC$ . . . . $\therefore \angle AOC = \angle BOD$ ڪٽڻ سان

اِن نموني $\angle AOD = \angle BOC$ سڌي ثابتي ڪرڻي .

اڻ سڌي ثابتي (Indirect proof) :

اِن طريقي ۾ جيڪو ثابت ڪرڻو آهي ، اُنکي پهريان غلط مڃبو آهي. اُن آڌار تي دليلن ۽ اَڳ مڃيل بيانن جي آڌار تي ڪنهن نتيجي تي پهچبو آهي. اِهو نتيجو ڏنل بيان جي اُبتڙ هوندو آهي. اِن مان ظاهر ٿئي ٿو تہ جيڪو ثابت ڪرڻو آهي، اُن کي غلط سمجهڻ هڪ چوڪ آهي. مطلب تہ جيڪو ثابت ڪرڻو آهي اُهو صحيح آهي هيٺ ڏنل مثال جاچيو.

ڏنل بيان : ٻن کان وڌو هوندڙ مفرد عدد اِڪي عدد هوندو آهي.

شرطي بيان : جيڪڏهن P اِهو 2 کان وڌو مفرد عدد آهي تہ پوءِ P اِڪي عدد آهي.

ڏنل بيان : P اِهو عدد 2 کان وڌو مفرد عدد آهي. مطلب P جا 1 ۽ P اِهي ٻئي ونڊيندڙ آهن.

ثابت ڪرڻ تہ : P هڪ اِڪي عدد آهي.

ثابتي : سمجهو تہ P اِڪي عدد نہ آهي.

مطلب P هڪ ٻڌي عدد آهي.

$\therefore$ P کي 2 سان ونڊ ڪري سگهجي ٿي ..... (I)

پر P اِهو 2 کان وڌو مفرد عدد آهي (ڏنل بيان)

$\therefore$ P جا 1 ۽ P اِهي ٻئي ونڊيندڙ آهن . ..... (II)

هتي ڏنل بيان (I) ۽ (II) غلط ٿئي ٿو.

مطلب جيڪڏهن اَسان سمجهو، اُها چوڪ آهي.

مطلب P اِهو 2 کان وڌو مفرد عدد هوندو تہ اُهو اِڪي عدد آهي. اِهو ثابت ٿيو.

اڀياس 1.3

.1 هيٺيان بيان جيڪڏهن ...... ته پوءِ روپ ۾ لکو

(i) پوروچوٽ پاسي چوڪندي ۾ آمهون سامهون ڪنڊون ٺهڪندڙ هونديون آهن.

(ii) مستطيل جا اُريب ٺهڪندڙ هوندا آهن .

(iii) ٻپورپاسي ٽڪنڊي ۾ نوڪي ٽٻڪي ۽ پاسي جي مڌيہ ٽٻڪي کي ملائيندڙ ٽڪرپايي تي عمود هوندو آهي.

.2 هيٺ ڏنل بيانن جا اُبتڙ بيان لکو :

(i) ٻن پوروچوٽ ليڪن ۽ انُهن جي ڇيدڻي وسيلي ٺهيل متبدل ڪنڊون ٺهڪندڙ هونديون آهن.

(ii) ٻن ليڪن ۽ انُهن جي ڇيدڻي وسيلي ٺهيل اَندرين ڪنڊن جو هڪ جوڙو تتمهہ آهي ته اُهي ليڪون پوروچوٽ هونديون آهن.

(iii) مستطيل جا اُريب ٺهڪندڙ هوندا آهن.

گڏيل اَڀياس 1

.1 هيٺ ڏنل سوالن جي ڏنل جوابن مان مناسب چونڊ ڪريو - چونڊ گهڻ

(i) هرهڪ ليڪ ٽڪر کي ڪيترا مڌيہ - ٽٻڪا هوندا آهن

(A) هڪ (B) ٻہ (C) ٽي (D) بيشمار

(ii) ٻہ علحديون ليڪون هڪ ٻئي کي ڪيڏي سان گهٽا ڇيد ٽٻڪا ٿاهن ٿيون؟

(A) بيشمار (B) ٻہ (C) هڪ (D) هڪ بہ نہ

(iii) ٽن علحدن ٽٻڪن کي ملائيندڙ گهٽيون ليڪون ٿينديون.

(A) ٻہ (B) ٽي (C) هڪ يا ٽي (D) ڇهہ

(iv) ٽٻڪي A جو مسارو 2- ۽ ٽٻڪي B جو مساوو 5 ته d(A,B) ڪيترو

(A) -2 (B) 5 (C) 7 (D) 3

(v) جيڪڏهن $d(P,Q) = 2$ ۽ $P-Q-R$، $d(P,R) = 10$، ته $d(Q,R) =$ ڪيترو؟

(A) 12 (B) 8 (C) $\sqrt{96}$ (D) 20

.2 هڪ عددي ليڪ تي P,Q,R جا مساوا نمبروار 3، 5- ۽ 6 آهن ته هيٺ ڏنل بيان صحيح آهن يا غلط سمجهائي ڏيو

(i) $d(P,Q) + d(Q,R) = d(P,R)$

(ii) $d(P,R) + d(R,Q) = d(P,Q)$

(iii) $d(R,P) + d(P,Q) = d(R,Q)$

(iv) $d(P,Q) - d(P,R) = d(Q,R)$

.3 هيٺ ڪجهہ ٽٻڪن جي جوڙن جا مساوا ڏنل آهن انُهن مان هرهڪ جوڙي ۽ جو مفاصلو لهو.

(i) $3, 6$ (ii) $-9, -1$ (iii) $-4, 5$ (iv) $0, -2$

(v) $x + 3, x - 3$ (vi) $-25, -47$ (vii) $80, -85$

4. هڪ عددي ليڪ مٿان P ٽپڪي جو مساوٍ 7- آهي تہ P کان 8 ايڪن جي مفاصلي تي هوندڙ ٽپڪن جا مساوا لهو

5. ڏنل چاٽ موجب سوالن جا جواب لکو

(i) جيڪڏهن $d(A,C) = 17$ ۽ $A-B-C$، $d(A,B)$ تہ $6.5 = d(B,C) = ?$

(ii) جيڪڏهن $d(P,Q) = 3.4$ ۽ $P-Q-R$، $d(P,R)$ تہ $5.7 = d(Q,R) = ?$

6. هڪ عددي ليڪ مٿان ٽپڪي A جو مساوو 1 آهي تہ A کان 7 ايڪن جي مفاصلي تي ٽپڪن جا مساوا لهو.

7. هيٺ ڏنل بيان شرطي بيانن جي روپ ۾ لکو

(i) هرهڪ چورس رامبس آهي.

(ii) ليڪي جوڙو کنڊون هڪ ٻئي جو تتمه هونديون آهن.

(iii) ٽن ليڪ ٽڪرن سان تيارٿيل شڪل ٽڪنڊو هوندو آهي.

(iv) فقط ٻہ ونڊيندڙ هوندڙ عدد کي مفرد عدد چئبو آهي.

8. هيٺ ڏنل بيانن جا اُبتڙ بيان لکو

(i) جوڙ $180°$ آهي تہ اُها شڪل ٽڪنڊو آهي.

(ii) جيڪڏهن ٻن کنڊن جي ماپن جو جوڙ $90°$ آهي تہ اُهي هڪ ٻئي جون پورڪ کنڊون هونديون آهن.

(iii) ٻن پوروچوٽ ليڪن کي ڪپيندڙ ڇيدڪي وسيلي ٺهيل نسبتي کنڊون ٺهڪندڙ هونديون آهن.

(iv) ڏنل عدد جي سيني انگن جو جوڙ ٽن سان ونڊي سگهبو تہ اُن عدد کي پڻ ٽن سان ونڊي سگهبو.

9. هيٺ ڏنل بيانن ۾ 'ڏنل' ۽ ثابت ڪرڻ تہ' لکو.

(i) جيڪڏهن هڪ ٽڪنڊي جا پاسا ٺهڪندڙ آهن تہ اُن جو ٽيئي کنڊون ٺهڪندڙ هونديون آهن ٻئي کي پورن ٻن اڌن ۾ ورهائين ٿا.

(ii) پوروچوٽ پاسي چوڪنڊي ۾ اُريب هڪ ٻئي کي پورن ٻن اڌن ۾ ورهائين ٿا.

*10. هيٺ ڏنل بيانن موجب، نالن سميت شڪل ڪڍي 'ڏنل' ۽ 'ثابت ڪرڻ تہ' لکو

(i) ٻہ ٽپورپاسو - ٽڪنڊا هڪ جهڙا ٽڪنڊا هوندا آهن.

(ii) ليڪي جوڙو کنڊون ٺهڪندڙ هونديون تہ هرهڪ کنڊ گوني هوندي.

(iii) ٽڪنڊي جي نوڪي ٽپڪن وٽان، اُنهن جي سامهون وارا پاسا ٺهڪندڙ هوندا آهن.

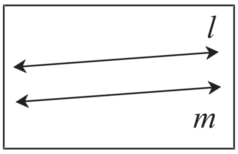
پوروچوٽ ليڪون

RVK25N

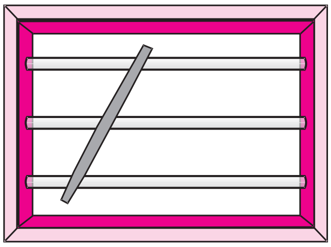
چاڪي وٽون

- پوروچوٽ ليڪون ۽ ڇيدڪي ڪندن جون خاصيتون
- پوروچوٽ ليڪن جي خاصيتن جو اِستعمال
- پوروچوٽ ليڪن لاءِ آزمائشون

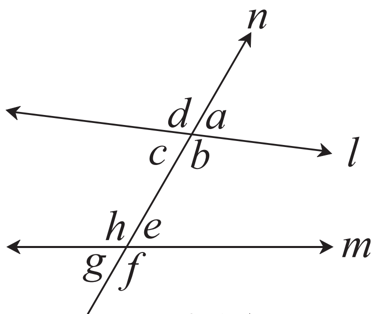
ذرا ياد ڪريو



پوروچوٽ ليڪون : اُهي ليڪون جيڪي هڪ سطح ۾ هجن پرهڪ ٻئي کي نه ڪپين، اُنهن کي پوروچوٽ ليڪون چئبو آهي.



ير واري شڪل جاچيو دري ۾ پوروچوٽ شيخن وچ ۾ هڪ آڏي لڪڙي رکو چا ٿو نظر اَچي؟ گهٽيون ڪُندون نهيون آهن؟



شڪل 2.1

- ٻہ ليڪون ۽ ڇيدڪي وسيلي ٺهيل ڪندن جا جوڙا ياد اَچن ٿا چا؟ ليڪ l ۽ ليڪ m جي ڇيدڪي ليڪ n آهي هتي ڪل 8 ڪندون تيار ٿيون آهن. اُنهن جا جوڙا هيٺ ڏنل آهن.

نسبتي ڪند جا جوڙا

(i) $\angle d, \angle h$

(ii) $\angle a,$ ☐

(iii) $\angle c,$ ☐

(iv) $\angle b,$ ☐

اَندرين متبدل ڪندن جا جوڙا

(i) $\angle c, \angle e$

(ii) $\angle b, \angle h$

ٻاهرين متبدل ڪندن جا جوڙا

(i) $\angle d, \angle f$

(ii) $\angle a, \angle g$

ڇيدڪيءَ جي هڪ پاسي اَندرين ڪندن جا جوڙا

(i) $\angle c, \angle h$

(ii) $\angle b, \angle e$

اَهميت واريون ڪجهه خاصيتون :

(1) ٻن ليڪن وسيلي ٺهيل آمهون سامهون ڪندن جون ماپون ساڳئي ماپ واريون هونديون آهن

(2) ليڪي جوڙو ڪندون تتمهہ هونديون آهن.

3. جيڪڏهن نسبتي ڪنڊن جو هڪ جوڙو نهڪندڙ هوندو تہ باقي بچيل نسبتي ڪنڊن جا سڀ جوڙا نهڪندڙ هوندا آهن.

4. جيڪڏهن متبدل ڪنڊن جو هڪ جوڙو نهڪندڙ هوندو آهي تہ باقي بچيل متبدل ڪنڊن جا سڀ جوڙا نهڪندڙ هوندا آهن.

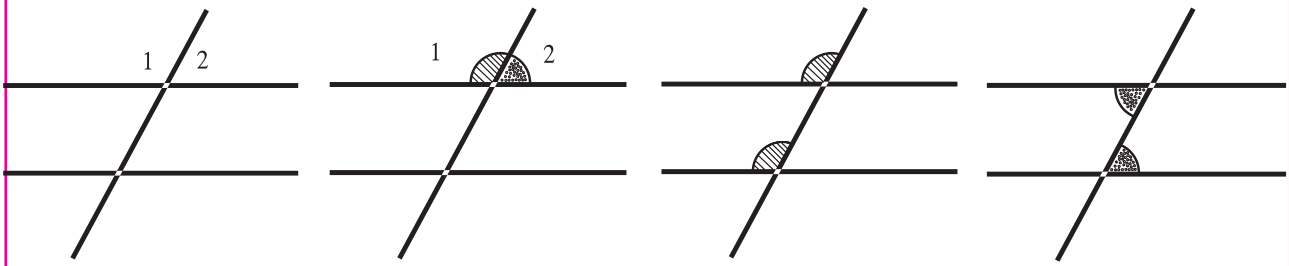
5. جيڪڏهن اَندرين ڪنڊن جي هڪ جوڙي جو جوڙ 180° هوندو آهي تہ باقي بچيل اَندرين ڪنڊن جي جوڙن جو جوڙ 180° هوندو آهي.

چاڪي وٺون

پوروچوٽ ليڪن جون خاصيتون (Properties of parallel lines)

مشغولي :

ٻن پوروچوٽ ليڪن ۾ اُنهن جي ڇيدڪي وسيلي تيارٿيل ڪنڊن جي ڇڪاس ڪرڻ سامان، جهونا نينڊ ڪارڊر يا ٿلهو ڪاغذ، ڪئنچي، ٽديون، تيليون،ڪوئنر مشغولي : ٿلهو ڪاغذ ڪٽو اُن مٿان ٻہ پوروچوٽ ليڪون ڪڍي، هڪ ڇيدي ڪڍو. اِنهن ٽنهي ليڪن مٿان ڪوئنر جي مدد سان تيليون چيڪايو هتي تيارٿيل 8 ڪنڊن مان ڪنڊ 1 ۾ ڪنڊ 2 جي ماپن جهڙا رنگين ڪاغذ جا ٽڪرا ڪپيو (پرواري شڪل اَنوسار) اِهي ٽڪرا نسبتي، ڪنڊن، متبدل ڪنڊن ۾ اَندرين ڪنڊن مٿان رکي خاصيتن جي ڇڪاس ڪريو.

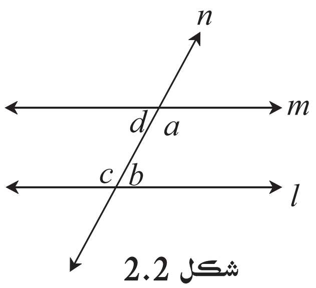


ٻہ ليڪون ۽ اُنهن جي چيدڪي ڪيڙ سان، جيڪڏهن هڪ پاسي ٺهيل اَندرين ڪنڊن جا جوڙا ٻن ڳوني ڪنڊن کان گهٽ آهي تہ اِهي ٻہ ليڪون، اُن ئي طرف اَڳتي وڌائڻ سان هڪ ٻئي کي ڪٽيندڻ ٿيون.

ٻن پوروچوت ليڪن ۽ اُنهن جي چيدڪي وسيلي ٺهيل ڪنڊن جون، مشظولي ذريعي جاچيل خاصيتون اَسان هاڻي ثابت ڪنداسين. اِهي خاصيتون ثابت ڪرڻ لاءِ اَسان يوڪلڊ جو متي ڏنل مڃيل بيان ڪم آڻينداسين اَندرين ڪنڊن جو سڌيان

اَندرين ڪنڊن جو سڌيان (Interior angle theorem)

سڌيان : ٻن پوروچوت ليڪن ۽ اُنهن جي چيدڪيءَ وسيلي، هڪ پاسي ٺهيل اَندريون ڪنڊون هڪ ٻئي جو تتمھ هونديون آهن.



شڪل 2.2

ڏنل : ليڪ l ليڪ m ۽ ليڪ n چيدڪي آهي.
$\angle a, \angle b$, $\angle c, \angle d$ اَندريون ڪنڊون آهن.

ثابت ڪرڻ تہ : $\angle a + \angle b = 180°$
$\angle d + \angle c = 180°$

ثابتي : $\angle a$ ۽ $\angle b$ اِنهن جي ماپن جي جوڙ بابت ٽي سمپاوناڻون آهن :
(i) $\angle a + \angle b < 180°$ (ii) $\angle a + \angle b > 180°$ (iii) $\angle a + \angle b = 180°$

(i) سمجهو تہ $\angle a + \angle b < 180°$ آهي .
مطلب ليڪ l ۽ ليڪ m ڪنڊن جي ساڳئي طرف اَڳتي وڌائڻ سان هڪ ٻئي سان ڪٽيندڻ ٿيون (يوڪلڊ جو مڃيل بيان)
پر ليڪ l ۽ ليڪ m اِهي پوروچوت ليڪون آهن
$\therefore \angle a + \angle b < 180°$ اهو غلط آهي. . . . . (I)
هاڻي سمجهو تہ $\angle a + \angle b > 180°$ آهي.
$\therefore \angle a + \angle b > 180°$
پر $\angle a + \angle d = 180°$
۽ $\angle c + \angle b = 180°$ . . . . . ليڪي جوڙو ڪنڊون
$\therefore \angle a + \angle d + \angle b + \angle c = 180° + 180° = 360°$
$\therefore \angle c + \angle d = 360° - (\angle a + \angle b)$
جيڪڏهن $\angle a + \angle b > 180°$ اهڙي نموني $[360° - (\angle a + \angle b)] < 180°$
$\therefore \angle c + \angle d < 180°$

مطلب $\angle c$ ۽ $\angle d$ جي ساڄئي طرف ليڪون ايل ۽ ايم وڌائڻ سان، اُهي هڪ ٻئي کي ڪپين ٿيون، پر ليڪ l ۽ ليڪ m پوروچوٽ آهن

$\therefore \angle c + \angle d < 180$ اهو غلط آهي ھاڻي صرف هڪ ئي سنڀاونا بچيل آهي.

ساڄئي نموني $\angle a + \angle b > 180^\circ$

$\therefore \angle a + \angle b = 180^\circ$

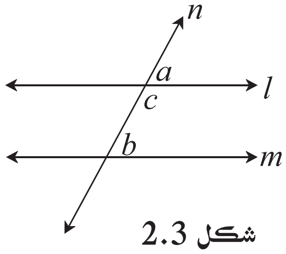
$\therefore \angle a + \angle b = 180^\circ$

ڏيان ڇڪرايو اِن ثابتيءَ ۾ $\angle a + \angle b < 180^\circ$, $\angle a + \angle b > 180^\circ$

اِهي غلطي ثابت ڪرڻ مطلب اِها اَڻ سڌي ثابتي آهي.

ڪندن ۽ متبدل ڪندن جون خاصيتون (Corresponding angle and alternate angle theorem)

سڌيان : ٻن پوروچوٽ ليڪن ۽ چيدڻي وسيلي ٺهيل متبدل ڪُندن جي جوڙن ۾ ڪُندن جون ماپون برابر هونديون آهن



شڪل 2.3

ڏنل : ليڪ l || ليڪ m

ليڪ n چيدڻي آهي

ثابت ڪرڻ ته : $\angle a = \angle b$

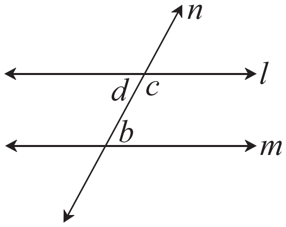
ثابتي : $\angle a + \angle c = 180^\circ$ . . . . . . (I) (ليڪي جوڙو)

$\angle b + \angle c = 180^\circ$ . . . . . . (II) (اَندريون ڪُندون)

$\angle a + \angle c = \angle b + \angle c$ . . . (I) ۽ (II) مان

$\therefore \angle a = \angle b$

سڌيان : سڌيان : ٻن پوروچوٽ ليڪن کي هڪ چيدڻيءَ سان چيدڻ تي متبدل ڪندون ٺهڪندڙ هونديون آهن.



شڪل 2.4

ڏنل : ليڪ l || ليڪ m

ليڪ n چيدڻي آهي

ثابت ڪرڻ ته : $\angle d = \angle b$

ثابتي : $\angle d + \angle c = 180^\circ$ . . . . (I) (ليڪي جوڙو)

$\angle c + \angle b = 180^\circ$ . . . . (II) (اَندريون ڪُندون)

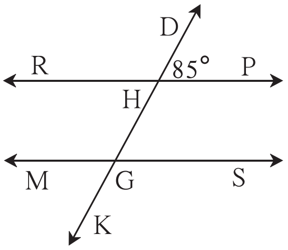
$\angle d + \angle c = \angle c + \angle b$ . . . . . (I) ۽ (II) مان

$\therefore \angle d = \angle b$

اڀياس 2.1

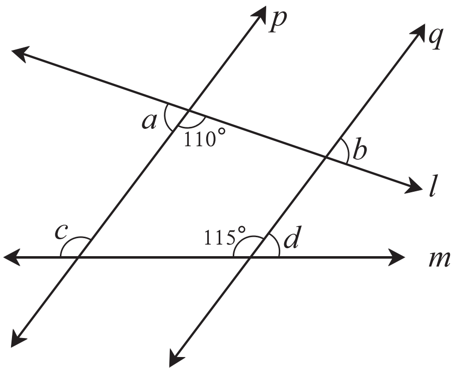
1. شڪل 2.5 ۾ ليڪ RP || ليڪ MS ۽ ليڪ DK انُهن جي ڇيدڪ آهي. $\angle DHP = 85^\circ$
ته هيٺ ڏنل ڪُندن جون ماپون لکو

(i) $\angle RHD$ (ii) $\angle PHG$
(iii) $\angle HGS$ (iv) $\angle MGK$



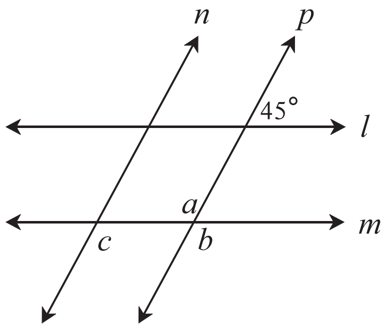
شڪل 2.5

2. شڪل 2.6 ۾ ليڪ p || ليڪ q ۽ ليڪ l ۽ ليڪ m اِهي ڇيدڪيون آهن ڪجهه ڪُندن جون ماپون هليل آهن انُهن مان $\angle a, \angle b, \angle c, \angle d$ جي ماپ لکو



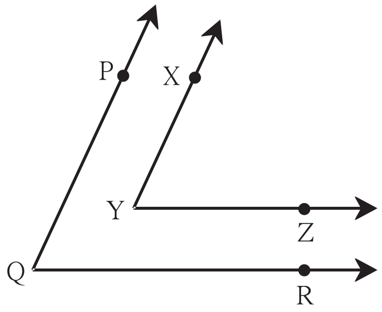
شڪل 2.6

3. شڪل 2.7 ۾ ليڪ l || ليڪ m ۽ ليڪ n || ليڪ p هڪ ڪند جي ماپ ڏنل آهن اُن مان $\angle a, \angle b, \angle c$ ماپ لکو.



شڪل 2.7

4*. شڪل 2.8 ۾ ليڪ، $\angle PQR$ ۽ $\angle XYZ$
اِنهن جا پاسا پاڻ ۾ پوروچوت آهن.
ثابت ڪريو
$\angle PQR \cong \angle XYZ$

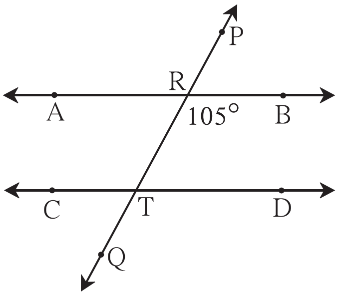


شڪل 2.8

.5 شڪل 2.9 ۾ ليڪ AB || ليڪ CD ۽ ليڪ PQ شڪل ۾ ڏيکاريل ماپ اَنوسار هيٺين ڪُنڊن جون ماپون لکو.

(i) $\angle ART$ (ii) $\angle CTQ$

(iii) $\angle DTQ$ (iv) $\angle PRB$



شڪل 2.9

چاڪي وٺون

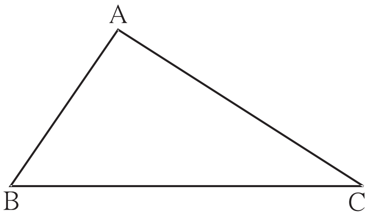
پوروچوٽ ليڪن جي خاصيتن جو اِستعمال

پوروچوٽ ليڪن ۽ ڇيدڪي وسيلي ٺهيل ڪُنڊن جون خاصيتون واپرائي ٽڪنڊي جي هڪ خاصيت ثابت ڪنداسين.

سڌيان : ٽڪنڊي جي سڀني ڪنڊن جي ماپن جو جوڙ 180° هوندو آهي.

ڏنل : ΔABC هڪ ٽڪنڊو آهي.

ثابت ڪرڻ تہ : $\angle ABC + \angle ACB + \angle BAC = 180°$



شڪل 2.10

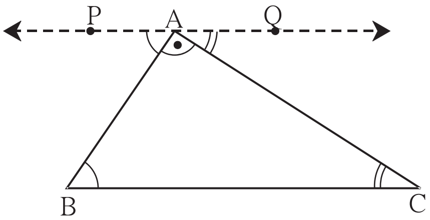
ثابتي : ٽپڪي A وٽان ليڪ BC کي ويو جيڪا ٽڪر BC جي پوروچوٽ هجي ليڪ مٿان P ۽ Q ٽپڪا کڻو جيئن P-A-Q

ليڪ PQ || ليڪ BC ۽ ليڪ AB :

$\therefore \angle ABC = \angle PAB$ (متبدل ڪُنڊون)....I

ليڪ PQ || ليڪ BC ۽ ليڪ AC ساڳئي نموني

$\therefore \angle ACB = \angle QAC$ (متبدل ڪُنڊون).....II



شڪل 2.11

I ۽ II مان ,

III . . . $\angle ABC + \angle ACB = \angle PAB + \angle QAC$

مساوات III ۾ $\angle BAC$ ملائڻ سان

$\angle ABC + \angle ACB + \angle BAC = \angle PAB + \angle QAC + \angle BAC$

$\angle PAB + \angle BAC + \angle QAC =$

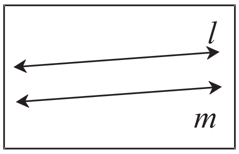
$\angle PAC + \angle QAC$ ...($\because \angle PAB + \angle BAC = \angle PAC$) =

$180° =$ ... ليڪي ڪُنڊن جو جوڙ

مطلب : ٽڪنڊي جي ٽنهي ڪُنڊن جي ماپن جو جوڙ 180° هوندو آهي.

اَچو تہ ويچار ڪريون

پرواري شڪل ۾سطح ۾ڏنل ليڪون l ۽ m پوروچوت آهن ڇا؟ اِهو ڪيئن لهبو؟



شڪل 2.12

ڄاڻي وٺون

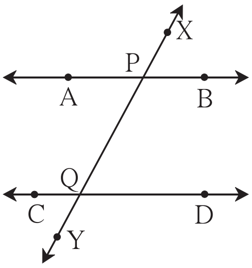
پوروچوت ليڪن جون آزمائشون (Tests for parallel lines)

ٻہ ليڪون ۽ اُنهن جي چيدڪي وسيلي ٺهيل ڪندون ڄاڃي اَسان ٻڌائي سگهون ٿا تہ اُهي پوروچوت ليڪون آهن يا نہ.

(1) جيڪڏهن اَندرين ڪنهن جو جوڙو تتمهہ آهي تہ اُهي ليڪون پوروچوت آهن.
(2) متبدل ڪندن جو هڪ جوڙو ٺهڪندڙ آهي تہ اُهي ليڪون پوروچوت آهن.
(3) نسبتي ڪندن جو هڪ جوڙو ٺهڪندڙ آهي تہ اُهي ليڪون پوروچوت آهن.

اندرين ڪُندن جي آزمائش (Interior angles test)

سڏيان: ٻن علحدن ليڪن کي هڪ چيدڪي ڪپي ٿي چيدڪيءَ جي هڪ طرف ٺهيل اَندرين ڪندن جو جوڙ $180°$ آهي تہ اُهي ليڪون پوروچوت آهن.



شڪل 2.13

ڏنل: ليڪ AB ۽ ليڪ CD جي چيدڪي ليڪ XY آهي

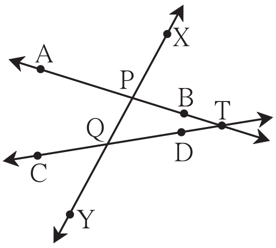
$\angle BPQ + \angle PQD = 180°$

ثابت ڪرڻ تہ: ليڪ AB || ليڪ CD

ثابتي: اِها آزمائش اَسان اَڻ سڌي ثابتيءَ ذريعي ثابت ڪنداسين.

سمجهو تہ ليڪ A B ۽ CD ليڪ پورو چوت نہ آهن.

سمجهو تہ ليڪ A B ۽ CD ليڪ T تي ڪي ٿا هڪ ٻئي کي ڪپين ٿيون اِن مان △ PQT تيار ٿيو.



شڪل 2.14

$\angle TPQ + \angle PQT + \angle PTQ = 180°$ .... ٽڪندي جي ڪُندن جو جوڙ

پر $\angle TPQ + \angle PQT = 180°$ ..... ڏنل

مطلب ٽُڪندي جي ٻن ڪندن جو جوڙ $180°$ آهي پر ٽڪندي جي ٽنهي ڪندن جو جوڙ $180°$ ٿيندو آهي

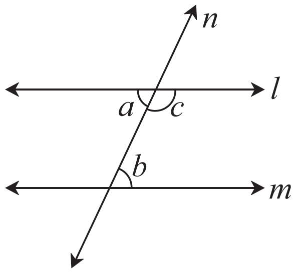
$\therefore \angle PTQ = 0°$

∴ PT ۽ QT مطلب ليڪ AB ۽ ليڪ CD اِهي علحديون نہ آهن اَسان کي ليڪ AB ۽ ليڪ CD پوروچوٽ آهن.

∴ اِن مان ظاهر آهي تہ ٻن ليڪن ۽ انُهن جي چيدئي جي هڪ طرف ٺهيل اَندرين ڪنڊن جي جوڙ 180° آهي تہ اُهي ليڪون پوروچوٽ آهن. اِن خاصيت کي اَندرين ڪنڊن جي آزمائش چئبو آهي.

متبدل ڪنڊون آزمائش (Alternate angles test)

سڏيان : ٻن ليڪن ۽ هڪ چيدڪي وسيلي ٺهيل متبدل ڪنڊن جو هڪ جوڙو ٺهڪندڙ آهي تہ اُهي ليڪون پوروچوٽ آهي.



شڪل 2.15

ڏنل : ليڪ l ۽ ليڪ m جي چيدڪي ليڪ n آهي

$\angle a$ ۽ $\angle b$

$\therefore \angle a = \angle b$

ثابت ڪرڻ تہ : ليڪ $l \parallel$ ليڪ m

ثابتي : $\angle a + \angle c = 180^\circ$ ..... (ليڪي جوڙو)

$\angle a = \angle b$ .... (ڏنل)

$\therefore \angle b + \angle c = 180^\circ$

پر $\angle b$ ۽ $\angle c$ اندريون ڪنڊون آهن

∴ ليڪ $l \parallel$ ليڪ m .... (اندرين ڪنڊن جي آزمائش)

ان کي متبدل ڪُنڊون آزمائش چئبو آهي.

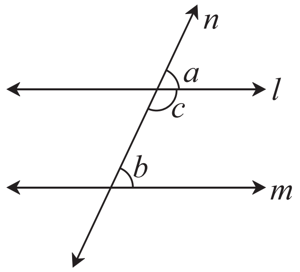
نسبتي ڪنڊون آزمائش (Corresponding angles Test)

سڏيا : ٻن ليڪن ۽ هڪ چيدڪيءَ وسيلي ٺهيل نسبتي ڪنڊن جو هڪ جوڙو ٺهڪندڙ آهي تہ اُهي ليڪون پوروچوٽ آهن.

ڏنل : ليڪ l ۽ ليڪ m جي چيدڪي ليڪ n آهي.

$\angle a$ ۽ $\angle b$

$\therefore \angle a = \angle b$



شڪل 2.16

ثابت ڪرڻ تہ : ليڪ $l \parallel$ ليڪ m

ثابتي : $\angle a + \angle c = 180^\circ$ .... (ليڪي جوڙو ڏنل)

$\angle a = \angle b$ . ... ڏنل

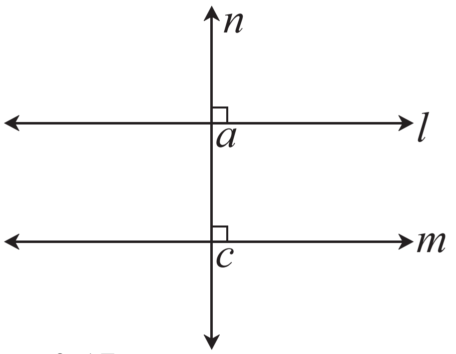
$\therefore \angle b + \angle c = 180^\circ$

مطلب اَندرين ڪنڊن جو جوڙ .... آهي

∴ ليڪ $l \parallel$ ليڪ m .... (اَندرين ڪنڊن جي آزمائش)

اِن خاصيت کي نسبتي ڪنڊون آزمائش چئبو آهي.

اُپ سڌيان I جيڪڏهن ڪا ليڪ ٻن هم سطحي ليڪن تي عمود آهن تہ اُهي ليڪون هڪ ٻئيجون پوروچوت آهن.



شڪل 2.17

ڏنل : ليڪ $n \perp$ ليڪ l ۽ ليڪ $n \perp$ ليڪ m

ثابت ڪرڻ تہ : ليڪ $l \parallel$ ليڪ m

ثابتي : ليڪ $n \perp$ ليڪ l ۽ ليڪ $n \perp$ ليڪ m

$\therefore \angle a = \angle c = 90^\circ$

$\angle a$ ۽ $\angle c$ ليڪ l ۽ ليڪ m

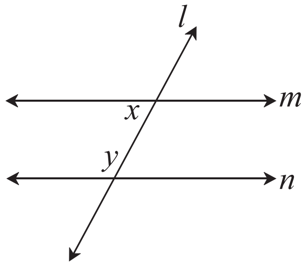
پر n اِهي نسبتي ڪنڊون آهن

$\therefore$ ليڪ $l \parallel$ ليڪ m . . . . (نسبتي ڪنڊون آزمائش)

اُپ سڌيان II جيڪڏهن ٻہ ليڪون ساڳئي ليڪ جي پوروچوت آهن تہ اُهي ليڪون پاڻ ۾ بہ پوروچوت آهن اِهو ثابت ڪريو.

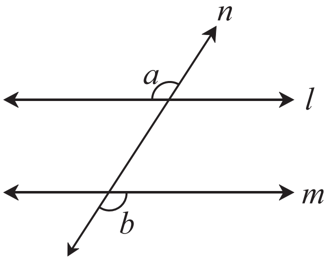
اَڀياس 2.2

1. شڪل 2.18 ۾ $y=108^\circ$ ۽ $x=71^\circ$ ڏنل آهي تہ ليڪ m ۽ ليڪ n پوروچوت آهن ڇا؟ سبب ٻڌايو.



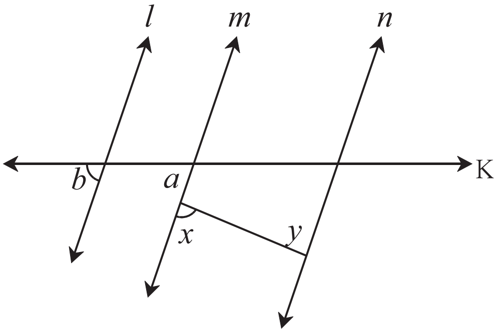
شڪل 2.18

2. شڪل 2.19 ۾ $\angle a \cong \angle b$ ثابت ڪريو ليڪ $l \parallel$ ليڪ m



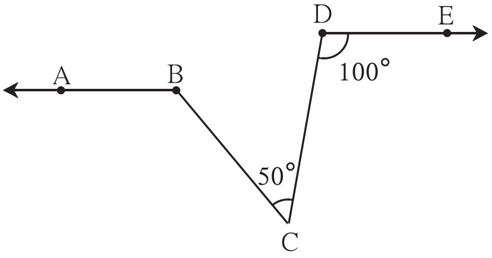
شڪل 2.19

3. شڪل 2.20 ۾ جيڪڏهن $\angle a \cong \angle b$ ۽ $\angle x \cong \angle y$ تہ ثابت ڪريو ليڪ n ليڪ $\parallel l$



شڪل 2.20

4. شڪل 2.21 ۾ ڪرڙو AB $\parallel$ ڪرڙو DE، $\angle C = 50^\circ$ ۽ $\angle D = 100^\circ$، تہ $\angle ABC$ جي ماپ لهو.



شڪل 2.21

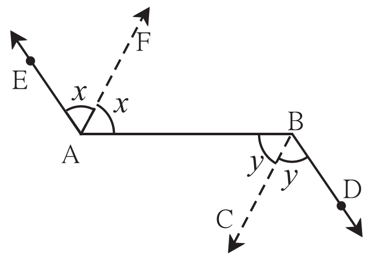
(ٽپ : ٽيڪي C وٽان ليڪ AB جي پوروچوت هڪ ليڪ ڪڍو)

5. شڪل 2.22 ۾ ڪرڙو AE || ڪرڙو BD

ڪرڙو AF اِهو ∠EAB ۽ ڪرڙو BC اِهو

∠ABD جا ڪنڊ اڌڪ آهن ته ثابت ڪريو

ليڪ AF || ليڪ BC



شڪل 2.22

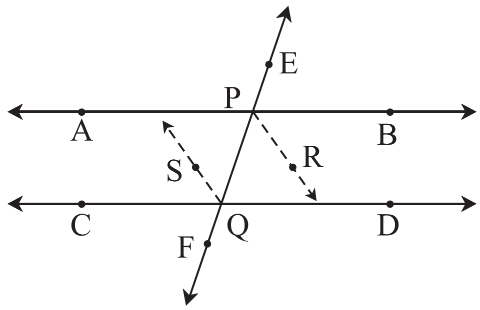
6. ليڪ AB ۽ ليڪ CD کي ليڪ ئي EF سلسليوار

P ۽ Q ٽپڪن وٽ ڪپي ٿي.ڪرڙو PR ۽ ڪرڙو QS

اِهي پوروچوٽ ڪرڙا ∠BPQ ۽ ∠PQC

جا نمبروار ڪنڊ اڌڪ آهن ته ثابت ڪريو

ليڪ AB || ليڪ CD



شڪل 2.23

گڏيل اَڀياس 2

1. ڏنل جوابن مان مناسب جواب ڳولهي خال پريو

(i) ٻن ليڪن ۽ ڇيدڪ وسيلي هڪ طرف ٺهيل اَندرين ڪندن جو جوڙ .... هوندو آهي .

(A) $0°$ (B) $90°$ (C) $180°$ (D) $360°$

(ii) ٻن ليڪن کي هڪ ڇيدڪ ۽ جي ڪپڻ سان ....ڪندون تيار ٿين ٿيون.

(A) 2 (B) 4 (C) 8 (D) 16

(iii) ٻن پوروچوٽ ليڪن ۽ ڇيدڪ وسيلي ٺهيل ڪندن مان هڪ ڪنڊ جي ماپ $40°$ آهي ته اُنجي نسبتي ڪنڊ جي ماپ .... ٿيندي.

(A) $40°$ (B) $140°$ (C) $50°$ (D) $180°$

(iv) ΔABC ۾ $\angle A = 76°$، $\angle B = 48°$، $\angle C$ ته . . . . آهي.

(A) $66°$ (B) $56°$ (C) $124°$ (D) $28°$

(v) ٻن پوروچوٽ ليڪن ۽ ڇيدڪ وسيلي ٺهيل متبدل ڪندن جي جوڙي ۾ هڪ ڪنڊ جي ماپ $75°$ آهي ته ٻي ڪنڊ جي ماپ .... ٿيندي .

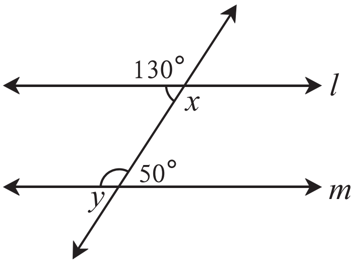
(A) $105°$ (B) $15°$ (C) $75°$ (D) $45°$

2*. ڪرڙو PQ ۽ ڪرڙو PR اِهي ٻئي جا عمود آهن ٽپڪو B اهو ∠QPR جي اَندرين حصي ۽ ٽپڪو A اهو ∠RPQ جي ٻاهرين حصي ۾ آهي ڪرڙو PA ۽ ڪرڙو PB پاڻ ۾ عمود آهي اِها شڪل ڪڍو ۽ هيٺ ڏنل ڪندن جا جوڙا لکو .

(i) ٺهڪندڙ ڪندون (ii) تتمه ڪندون (iii) پورڪ ڪندون

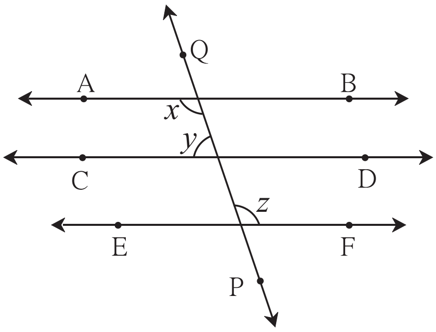
3. جيڪڏهن ڪا ليڪ ٻه پورو چوٽ ليڪون هم سطحي آهن ۽ اُنهن مان اُها ليڪ هڪ ئي عمود آهي ته اُها ليڪ ٻيءَ ليڪ تي پڻ عمود آهي ثابت ڪريو.

4. شڪل 2.24 ۾ ڏيکاريل ماپن جي آڌارتي $\angle x$ ۽ $\angle y$ جي ماپ لهو ۽ ثابت ڪريو ليڪ m || ليڪ l



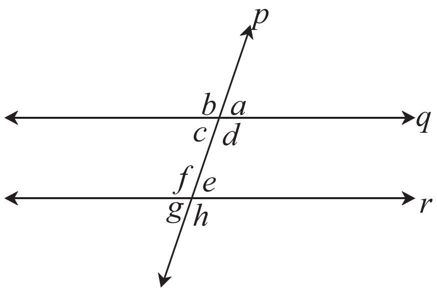
شڪل 2.24

5. ليڪ AB || ليڪ CD || ليڪ EF ۽ ليڪ QP اِنهن جي چيدڪي آهي جيڪڏهن $y : z = 3 : 7$ ته x جو ملهه لهو



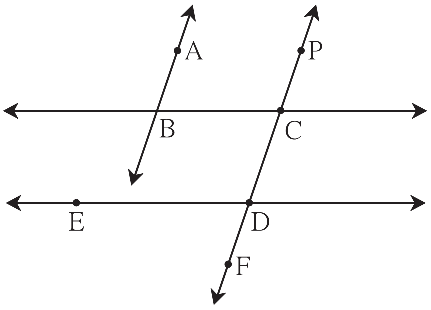
شڪل 2.25

6. شڪل 2.26 ۾ ليڪ q || ليڪ r ۽ ليڪ p چيدڪي آهي جيڪڏهن $a = 80°$ ته f ۽ g لهو.



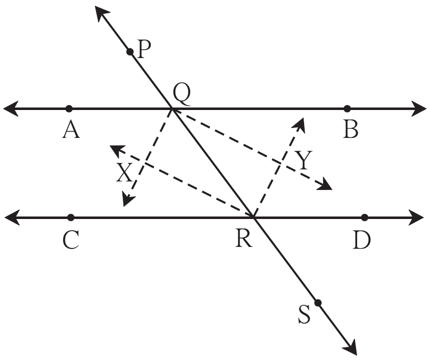
شڪل 2.26

7. شڪل 2.27 ۾ ليڪ AB || ليڪ CF ۽ ليڪ BC || ليڪ ED ثابت ڪريو $\angle ABC = \angle FDE$.



شڪل 2.27

8. شڪل 2.28 ۾ ليڪ AB || ليڪ CD ۽ ليڪ PS چيدڪي آهي ڪرڙو QX، ڪرڙو QY، ڪرڙو RX، ڪرڙو RY اِهي ڪنڊ اڌ آهن. QXRY □ ثابت ڪريو ته مستطيل آهي.



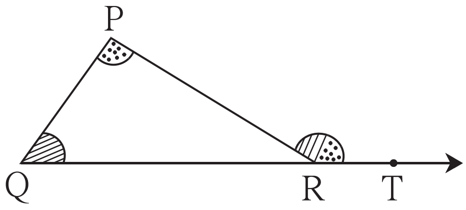
شڪل 2.28

ٽڪنڊو

اچو تہ سکون

- ٽڪنڊي جي مديان
- گوني ڪنڊ ٽڪنڊي ۾ هئپاٽينوز مٿان مديان
- عمودي اڏڪ سڌيان
- ڪنڊ - اڏڪ سڌيان
- ٽڪنڊي جي پرين اَندرين ڪنڊن جو سڌيان
- ٽڪنڊن جو نهڪڙ
- ٻپورپاسو ٽڪنڊو سڌيان
- 30°-60°-90° سڌيان
- هڪ جهڙا ٽڪنڊا

مشغولي : هڪ ٿلهي ڪاغذ مٿان ڪنهن بہ ماپ جو PQR △ ڪيو شڪل ۾ ڏيکاريل نموني QR مٿان ٽپڪو T ڪٽو. رنگين ٿُلهي ڪاغذ جا ∠P ۽ ∠Q ماپ وارا ٽڪرا ڪپيو اُهي ٽڪرا رکي ∠PRT کي پورو ڪن ٿا. اهو آزمودو وٺو.

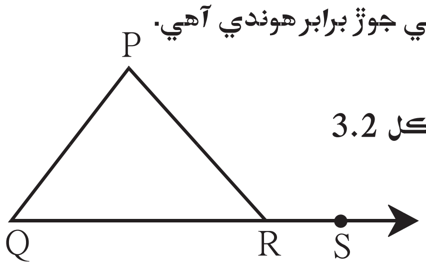


شڪل 3.1

چاڪي وٺون

ٽڪنڊي جي پرين اَندرين ڪنڊن جو سڌيان (Theorem of remote interior angles of a triangle)

سڌيان : ٽڪنڊي جي ٻاهرين ڪنڊ جي ماپ، اُنجي پرين اَندرين ڪنڊن جي جوڙ برابر هوندي آهي.



شڪل 3.2

ڏنل : ΔPQR ۾ $\angle PRS$ ٻاهرين ڪنڊ آهي.

ثابت ڪرڻ تہ : $\angle PRS = \angle PQR + \angle QPR$

ثابتي : ٽڪنڊي جي ماپ ٽنهي ڪنڊن جو جوڙ 180° هوندو آهي.

$\therefore \angle PQR + \angle QPR + \angle PRQ = 180^\circ$---(I)

$\angle PRQ + \angle PRS = 180^\circ$---(II) . . . . (ليڪي جوڙو)

∴ I ۽ II مان

$\angle PQR + \angle QPR + \angle PRQ = \angle PRQ + \angle PRS$

$\therefore \angle PQR + \angle QPR = \angle PRS$--------($\angle PRQ$ رد ڪرڻ)

∴ ٽڪنڊي جي ٻاهرين ڪنڊ جي ماپ اُنجي پرين اَندرين ڪنڊن جي جوڙ برابر هوندي آهي.

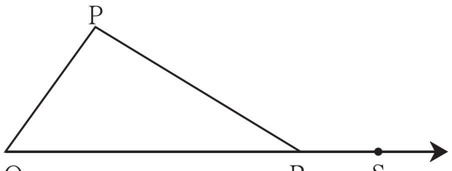
ويچار ڪريون

شڪل 3.3 ۾ ٽڪي R وٽان ٽڪر PQ جي پوروچوٽ ليڪ ڪڍي، اِن سڏيان جي ٻي ڪا ثابتي ڏيئي سگهجي ٿي ڇا؟

چاڪي وٺون

ٽڪنڊي جي ٻاهرين ڪنڊ جو سڏيان (Property of an exterior angle of triangle)

a ۽ b اِنهن عددن جو جوڙ (a+b) آهي اِهو جوڙ (a+b) a جي ڀيٽ ۾ وڏو آهي ۽ ساڳئي وقت b جي ڀيٽ ۾ وڏو آهي مطلب a ∠a+b ۽ b ∠a+b اِهو اِستعمال ڪري آسان ڪي نئين خاصيت ملي ٿي. △PQR ۾ جيڪڏهن ∠PRS ٻاهرين ڪنڊ آهي ته



شڪل 3.3

$$\angle PRS > \angle P \ , \ \angle PRS > \angle Q$$

∴ ٽڪنڊي جي ٻاهرين ڪنڊ، هرهڪ پرين اَندرين ڪنڊ کان وڏي هوندي آهي.

حل ڪيل مثال

مثال (1) هڪ ٽڪنڊي ۾ ڪنڊن جون ماپون 5:6:7 ريشي ۾ آهن ته هرهڪ ڪنڊ جي ماپ لکو.

حل : سمجهو ته ڪنڊن جون ماپون آهن 5x, 6x ۽ 7x

$$5x + 6x + 7x = 180^\circ$$

$$18x = 180^\circ$$

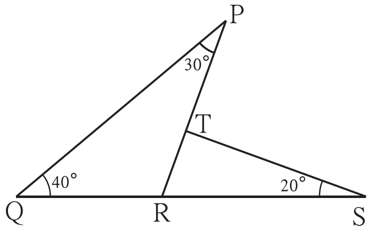
$$x = 10^\circ$$

$$5x = 5 \times \ \ 0 = 50^\circ, \qquad 6x = 6 \times 10 = 60^\circ, \qquad 7x = 7 \times 10 = 70^\circ$$

مثال (2) پرواري شڪل 3.4 جاچيو ∠PRS ۽ ∠RTS جون ماپون لکو

حل : △PQR ۾ ∠PRS ٻاهرين ڪنڊ آهي پرين

اَندرين ڪنڊن جي سڏيان موجب



شڪل 3.4

$$\angle PRS = \angle PQR + \angle QPR$$

$$= 40^\circ + 30^\circ$$

$$\angle PRS = 70^\circ$$

$$\Delta \ RTS$$

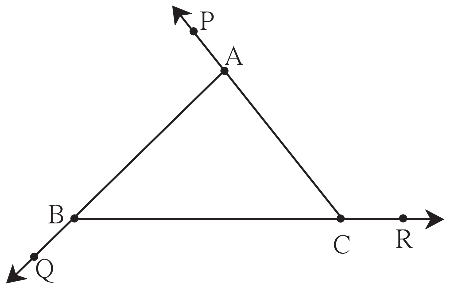
$$\angle TSR + \angle RTS + \angle TRS = \square$$ .... (ٽڪنڊي جي ٽنهي ڪنڊن جو جوڙ)

$$\therefore \ 180^\circ = \square + \angle RTS + \square$$

$$\therefore \ 180^\circ = 90^\circ + \angle RTS$$

$$\therefore \ \square = \angle RTS$$

مثال (3) ثابت ڪريو تہ ٽڪنڊي جا پاسا هڪ طرف وڌائڻ سان ٺهندڙ ٻاهرين ڪنڊن جو جوڙ 360° هوندو آهي.



شڪل 3.5

ڏنل : $\angle PAB$ ، $\angle QBC$ ۽ $\angle ACR$ آهي

$\Delta\, ABC$ جون ٻاهريون ڪنڊون آهن.

ثابت ڪرڻ تہ : $\angle PAB + \angle QBC + \angle ACR = 360^\circ$.

ثابتي : اِن مثال کي حل ڪرڻ جا ٻہ طريقا آهن

طريقو I

$\triangle ABC$ ۾ $\angle PAB$ ٻاهرين ڪنڊ آهي.

$$\text{(I)} \text{ ---- } \angle BAP = \angle ABC + \angle ACB$$

$\text{(II)} \text{ ---- } \angle ACR = \angle ABC + \angle BAC$ . . . . جا ٻئي پاسا جوڙ ڪرڻ سان

$$\text{(III)} \text{ ---- } \angle CBQ = \angle BAC + \angle ACB$$

(I)، (II)، (III) جا ٻئي پاسا جوڙ ڪرڻ سان

$$\angle BAP + \angle ACR + \angle CBQ$$

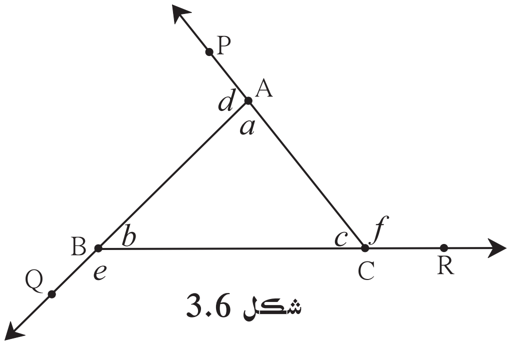
$$= \angle ABC + \angle ACB + \angle ABC + \angle BAC + \angle BAC + \angle ACB$$

$$= 2\angle ABC + 2\angle ACB + 2\angle BAC$$

$$= 2(\angle ABC + \angle ACB + \angle BAC)$$

$$= 2 \times 180^\circ \; . \; . \; . \; . \; .$$

$$= 360^\circ.$$



شڪل 3.6

طريقو II

$\angle c + \angle f = 180^\circ$ . . . . (ليڪي جوڙو)

$\angle a + \angle d = 180^\circ$ ساڳئي نموني

$\angle b + \angle e = 180^\circ$

$$\therefore \angle c + \angle f + \angle a + \angle d + \angle b + \angle e = 180^\circ \times 3 = 540^\circ$$

$$\angle f + \angle d + \angle e + (\angle a + \angle b + \angle c) = 540^\circ$$

$$\therefore \quad \angle f + \angle d + \angle e + 180^\circ = 540^\circ$$

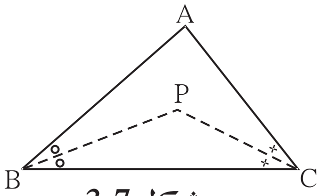
$$\therefore f + d + e = 540^\circ - 180^\circ$$

$$= 360^\circ$$

مثال (4) شڪل 3.7 ۾ $\triangle ABC$ ۾ $\angle B$ ۽ $\angle C$ جا اَڌڪ P تي ڪٽين ٿا. ثابت ڪريو تہ

$$\angle BPC = 90 + \frac{1}{2}\angle BAC$$

خالي جڳهيون پريو



شڪل 3.7

ثابتي : ΔABC ۾ ،

$$\angle BAC + \angle ABC + \angle ACB = \square \text{ ......}$$ (ٽڪنڊي جي ڪندن جو جوڙ)

$$\therefore \frac{1}{2}\angle BAC + \frac{1}{2}\angle ABC + \frac{1}{2}\angle ACB = \frac{1}{2}\times\square$$ (هرهڪ کي $\frac{1}{2}$ سان ضرب)

$$\therefore \frac{1}{2}\angle BAC + \angle PBC + \angle PCB = 90^\circ$$

$$\therefore \angle PBC + \angle PCB = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle BAC \text{ ......(I)}$$

ΔBPC ۾

$$\angle BPC + \angle PBC + \angle PCB = 180^\circ \text{ ......}$$

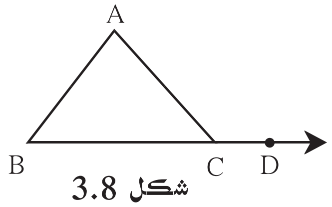
$$\therefore \angle BPC + \square = 180^\circ \text{ ......}$$

$$\therefore \angle BPC = 180^\circ - (90^\circ - \frac{1}{2}\angle BAC)$$

$$\therefore = 180^\circ - 90^\circ + \frac{1}{2}\angle BAC$$

$$= 90^\circ + \frac{1}{2}\angle BAC$$

اڀياس 3.1



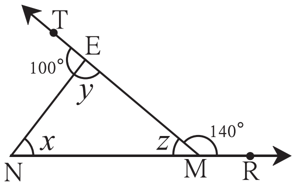
شڪل 3.8

.1 شڪل 3.8 ۾ $\angle ACP$ اِها $\triangle ABC$ جي ٻاهرين ڪنڊ آهي $\angle B=40^\circ$ ۽ $\angle B=70^\circ$ تہ $m\angle ACD$ لهو.

.2 $\triangle PQR$ ۾ $\angle P=70^\circ$، $\angle P=65^\circ$ تہ $\angle R$ لهو.

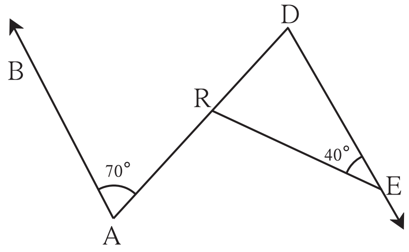
.3 ٽڪنڊي جي ڪندن جون ماپون x°، $(x-20)^\circ$ ، $(x-40)^\circ$ آهن تہ هرهڪ ڪنڊ جي ماپ لهو.

.4 ٽڪنڊي جي ٽنهي ڪندن ۾ هڪ ڪنڊ سيني کان ننڍي ڪنڊ جي ٻيڻي ۽ ٻي ڪنڊ سيني کان ننڍي ڪنڊ کان ٽيڻي آهي تہ انهن ٽنهي ڪندن جون ماپون لهو.



شڪل 3.9

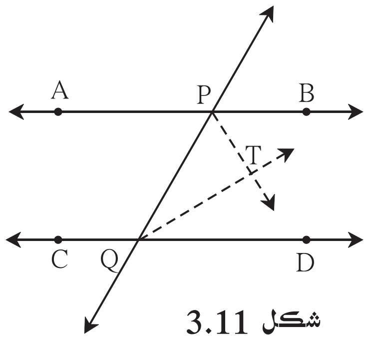
5. شڪل 3.9 ۾ ڏنل ڪندن جي آڌار تي x , y , z ملهہ لهو.



شڪل 3.10

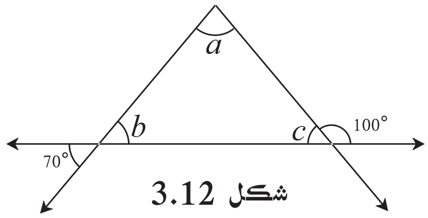
6. شڪل 3.10 ۾ تڪر DE || تڪر AB ڏنل ماپن وسيلي ∠DRE ۽ ∠ARE جون ماپون لهو.

7. $\triangle ABC$ ۾ ∠A ۽ ∠B جا ڪندبَ اَڌڪ O وٽ ملن ٿا جيڪڏهن ∠C=70° تہ ∠AOB لهو.



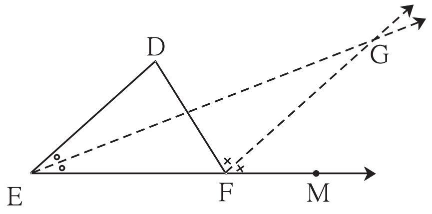
شڪل 3.11

8. شڪل 3.11 ۾ ليڪ CD || ليڪ AB ۽ ليڪ PQ اِها اُنهن جي چيدڪي آهي ڪرڙو PT ۽ ڪرڙو QT اِهي سلسليوار ∠BPQ ۽ ∠PQD جا اَڌڪ آهن ثابت ڪريو ∠PTQ=90°



شڪل 3.12

9. شڪل 3.12 ۾ ڏنل چاڪ موجب ∠a، ∠b، ∠c ماپون لهو.



شڪل 3.13

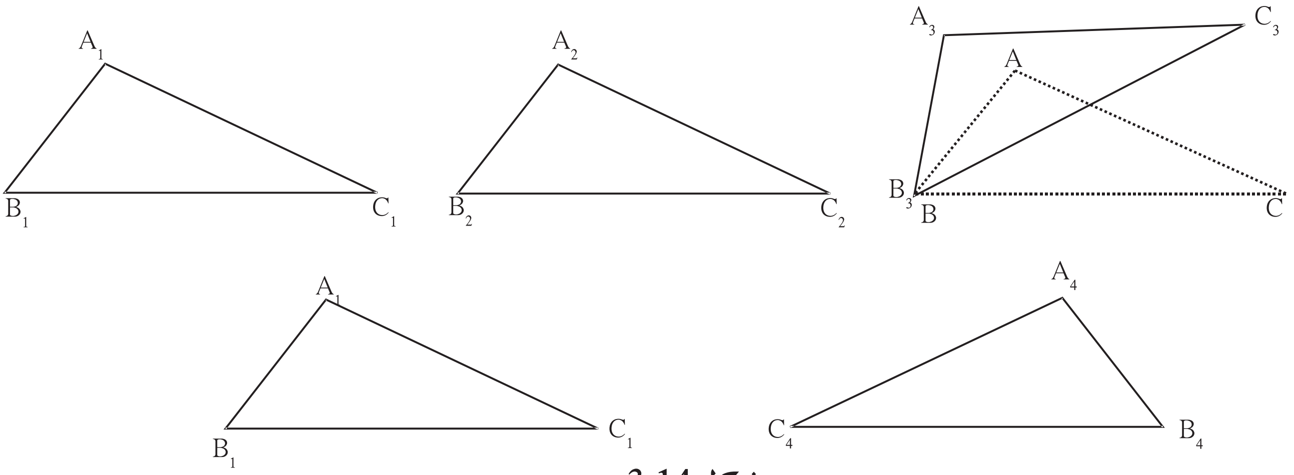
10*. شڪل 3.13 ۾ تڪر GF || تڪر ED آهي ڪرڙو EG ۽ ڪرڙو FQ سلسليوار ڪند ∠DEF ۽ ∠DFM جا اَڌڪ آهن ثابت ڪريو

(i) ∠DEF = ∠EDF (ii) EF = FG

چاڻي وٺون

ٽڪنڊن جو ٺهڪڻ (Congruence of triangles)

اها ليڪ ٽڪر ٻئي ليڪ ٽڪر مٿان رکڻ سان، اُهو جيڪڏهن پوريءَ طرح ٺهڪي اَچي ته اُنهن کي ٺهڪندڙ ٽڪر چئبو آهي ساڳئي نموني هڪ ڪنڊ ڪڍي، اُها ٻي ڪنڊ مٿان رکڻ سان پوريءَ طرح ٺهڪي اَچي ته اُنهن ڪنڊن کي ٺهڪندڙ ڪنڊون چئبو آهي. ساڳئي نموني هڪ ٽڪنڊو، ٻئي ٽڪنڊي مٿان رکڻ سان پوريءَ طرح ٺهڪي اَچي ته اُنهن ٽڪنڊن کي ٺهڪندڙ ٽڪنڊا چئبو. جيڪڏهن $\triangle ABC$ ۽ $\triangle PQR$ اِهي ٺهڪندڙ آهن ته $\triangle PQR \cong \triangle ABC$ ائين آهي اُهي ڏيکاريا آهن.



شڪل 3.14

مشغولي: هڪ پاڻي تي کهڙي به ماپ جو $\triangle ABC$ ڪپي ڪٽو

اُهو ٿلهي ڪاغذ مٿان رکي ساڳيو ٽڪنڊو ڪپيو اُن کي $\triangle A_1B_1C_1$ نالو ڏيو وري ساڳئي نمونو هڪ ٻيو ٽڪنڊو ڪپيو

اُن کي $\triangle A_2B_2C_2$ نالو ڏيو. شڪل کي ڏسي، اُن نموني ٽڪنڊو ٿورو ڦيرائي هڪ ٻيو ٽڪنڊو $\triangle A_3B_3C_3$ ڪپيو ساڳئي نموني هڪ ٻيو ٽڪنڊو $\triangle A_4B_4C_4$ ڪپي ڪٽو. هاڻي $\Delta A_1B_1C_1$، $\Delta A_2B_2C_2$، $\Delta A_3B_3C_3$ ۽ $\Delta A_4B_4C_4$

اِهي سڀ ٽڪنڊا $\triangle ABC$ سان ٺهڪندڙ آهن، اِهو ڌيان ۾ آيو ڇا؟

ڇاڪاڻ ته $\triangle ABC$ اِنهن سڀني سان پوريءَ طرح ٺهڪي اَچي ٿو.

$\triangle A_3B_3C_3$ ۾ جاچيندا سين $\angle A$ اِها $\angle A_3$، $\angle B$ اِها $\angle B_3$ ۽ $\angle C$ اِها $\angle C_3$ مٿان رکڻ سان اِهي ٺهڪي اَچن ٿيون $\triangle A_3B_3C_3 \cong \triangle ABC$ ائين چيو ويندو آهي $CA = C_3A_3$, $BC = B_3C_3$, A_3B_3 اِهو ڏسڻ ۾ اچي ٿو.

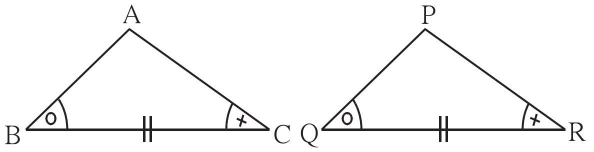
جيڪڏهن $\Delta ABC \cong \Delta PQR$، ته $\angle A = \angle P$، $\angle B = \angle Q$، $\angle C = \angle R$ . . . . (I)

ساڳئي نموني (II) . . . . . . $AB = PQ, BC = QR, CA = RP$ اَهڙيون

ڇهه مساوتون ملن ٿيون اِن مان ظاهر آهي ته اِنهن ٻن ٽڪنڊن ۾ ٽي پاسا ۽ ٽي ڪنڊون نمبروار ٽن پاسن ۽ ٽن ڪنڊن جي برابر آهي.

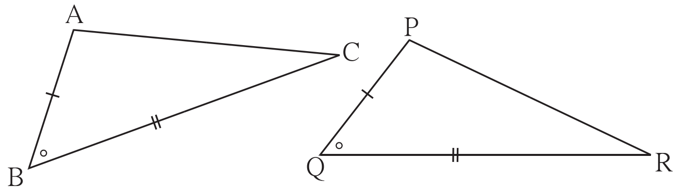
مٿين ڇهن مساوتن مان صرف ٽي خاص مساوتون برابر آهن ته ڇهه ئي مساوتون صحيح هونديون آهن ۽ ٻئي ٽڪنڊا نهڪندڙ هوندا آهن ڪيئن؟ اِهو جاچينداسين.

(1) ڏنل هڪ هڪ نسبت لاءِ جيڪڏهن ABCجون ٻه ڪنڊون $\triangle PQR$ جي ٻن ڪنڊن برابر آهن ۽ اُنهن ڪنڊن ڪي سمائيندڙ پاسا برابر آهن ته اِهي ٻئي ٽڪنڊا نهڪندڙ هوندا آهن اِن خاصيت کيASA آزمائش چئبو آهي



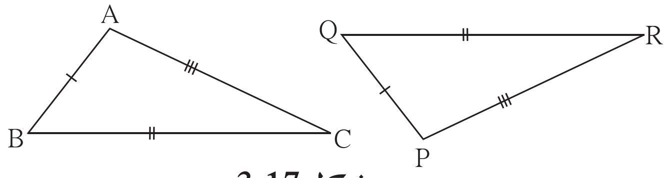
شڪل 3.15

(2) ڏنل هڪ هڪ نسبت لاءِ جيڪڏهن $\triangle ABC$ جا ٻه پاسا ۽ اُنهن کي سمايل ڪنڊ $\triangle PQR$ جي ٻن پاسن ۽ اُنهن جي سمايل ڪنڊ برابر هوندا آهن ته اُهي ٻئي ٽڪنڊا نهڪندڙ آهن اِن خاصيتن کي SAS آزمائش چئبو آهي.



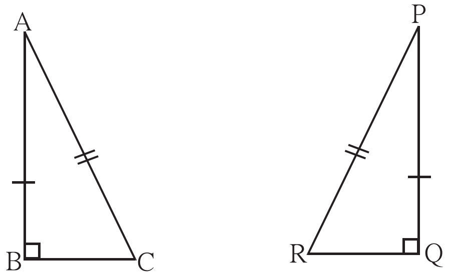
شڪل 3.16

(3) جيڪڏهن $\triangle ABC$ جا ٽيئي پاسا ڏنل هڪ - هڪ نسبت لاءِ $\triangle PQR$ جي ٽنهي پاسن جي برابر آهن ته اُهي ٻئي ٽڪنڊا نهڪندڙ هونداآهن اِن خاصيت کيSSS آزمائش چئبو آهي.



شڪل 3.17

(4) $\triangle ABC$ ۽ $\triangle PQR$ اِهي ٻئي ڳوني ڪنڊ ٽڪنڊا آهن جيڪڏهن ٻنهي ڪنڊن جا هئپاٽينيوز برابر آهن ۽ AB=PQ شاهي ٻئي ٽڪنڊا نهڪندڙ هوندا آهن اِن خاصيت کي هئپاٽينيوز پاسو آزمائش چئبو آهي.



شڪل 3.18

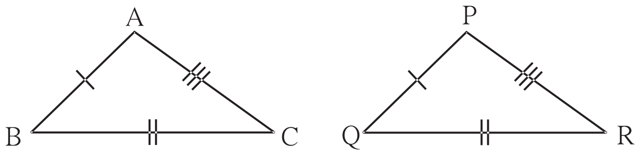
اِهو ڌيان ۾ رکو

اَسان ڪجهہ تتون ملڻ سان ٽڪنڊا ڪيڊيا آهن (مثال ٢ پاسا ۽ سمائيندڙ ڪنڊ ٽيئي پاسا، ٻہ ڪنڊون ۽ سمائيندڙ پاسو. اِنهن مان ڪابہ چاڻ ملڻ سان ٽڪنڊو ڪيڊي سگهجي ٿو. اِهو اَسان ڏٺو آهي. اِنڪري ٻن ٽڪنڊن ۾ هڪ - هڪ نسبت ملڻ سان ٽي ڳالهيون برابر آهن تہ اِهي ٽڪنڊا نهڪندڙ هوندا آهن. اِن مان ٽيئي پاسا ۽ ٽيئي ڪنڊون نهڪندڙ هونديون اِهو سمجهہ ۾ اَچي ٿو. ٻہ ٽڪنڊا جيڪڏهن نهڪندڙ هوندا تہ هڪ - هڪ نسبت ۾ ٽيئي پاسا ۽ ٽيئي ڪنڊون بہ نهڪندڙ هونديون اِنجو اِستعمال جاميٽريءَ جي ڪيترن ئي مثالن ۾ ٿيندو آهي.

اَڀياس 3.2

1. هيٺ ڏنل ٽڪنڊن جي جوڙن ۾ ساڳيو نشان ڏنل ڀاڱا نهڪندڙ آهن. اِهي ٽڪنڊا ڪهڙي آزمائش موجب نهڪندڙ آهن اِهو خالن ۾ لکو

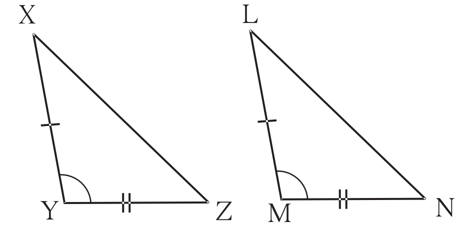
(i)



آزمائش. . . . .

$\Delta ABC \cong \Delta PQR$

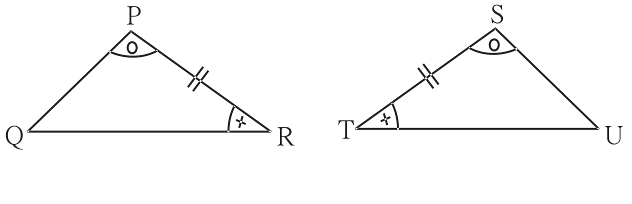
(ii)



آزمائش . . . .

$\Delta XYZ \cong \Delta LMN$

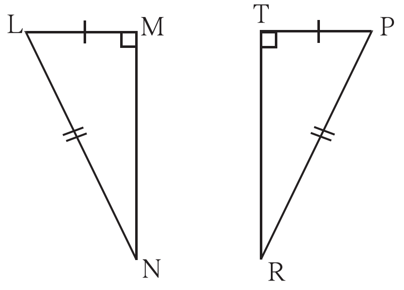
(iii)



آزمائش . . . .

$\Delta PRQ \cong \Delta STU$

(iv)



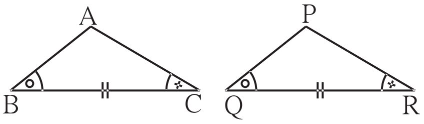
آزمائش . . . .

$\Delta LMN \cong \Delta PTR$

شڪل 3.19

2. هيٺ ڏنل ٽڪنڊن جي جوڙن ۾ ڏنل ڄاڻ چڪاس ڪريو. اُهي ڪهڙي آزمائش موجب ٺهڪندڙ آهن اُهو لکو. اُنهن جا بچيل ٺهڪندڙ تتوَ لکو

(i)



شڪل 3.20

ΔABC ۽ ΔPQR ۾

$\angle ABC \cong \angle PQR$

ليڪ $BC \cong$ ليڪ QR

$\angle ACB \cong \angle PRQ$

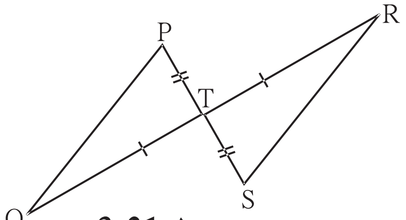
$\therefore \Delta PQR \cong \Delta ABC$ .... ______ آزمائش

$\therefore \angle BAC \cong$ ______ ...... ٺهڪندڙ ٽڪنڊن جون نسبتي ڪنڊون

ليڪ $AB \cong$ ______ ۽ ______ $\cong$ ليڪ PR

....(ٺهڪندڙ ٽڪنڊن جا نسبتي پاسا)

(ii)



شڪل 3.21

ΔPTQ ۽ ΔSTR ۾

ليڪ $PT \cong$ ليڪ ST

$\angle PTQ \cong \angle STR$ ..... (آمهون سامهون ڪنڊون)

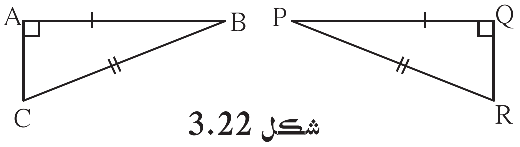
ليڪ $TQ \cong$ ليڪ TR

$\therefore \Delta STR \cong \Delta PTQ$ .... ______ آزمائش

$\therefore \angle TPQ \cong$ ______ ۽ $\angle TRS \cong$ ______ ..... ٺهڪندڙ ٽڪنڊن جون نسبتي ڪنڊون

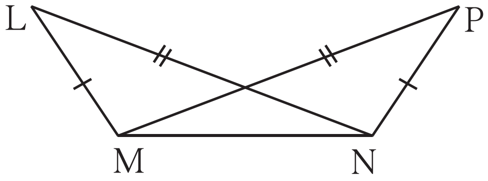
ليڪ $PQ \cong$ ______ (ٺهڪندڙ ٽڪنڊن جا نسبتي پاسا)

3. ڏنل ڄاڻ موجب $\triangle ABC$ ۽ $\triangle PQR$ جي ٺهڪڻ جي آزمائش لکي، باقي بچيل تتوَن جو ٺهڪڻ لکو



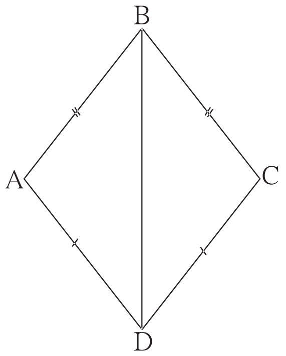
شڪل 3.22

4. هيٺ ڏنل $\triangle LMN$ ۽ $\triangle PNM$ ۾ $LM=PN$ ۽ $LN=PM$ آهي ته ٽڪنڊن جي ٺهڪڻ جي آزمائش لکو ۽ باقي بچيل تتون جو ٺهڪڻ لکو.



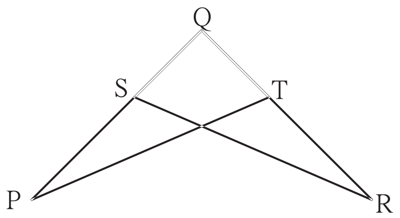
شڪل 3.23

5. شڪل 3.24 ۾ ٽڪر $BC \cong$ ٽڪر AB ۽ ٽڪر $CD \cong$ ٽڪر AD آهي ته ثابت ڪريو $\triangle ABD \cong \triangle CBD$



شڪل 3.24

.6 شڪل 3.25 ۾ $\angle P \cong \angle R$
۽ ٽڪر $PQ \cong$ ٽڪر QR
تہ ثابت ڪريو
$\Delta PQT \cong \Delta RQS$



شڪل 3.25

چاڙھي ونون

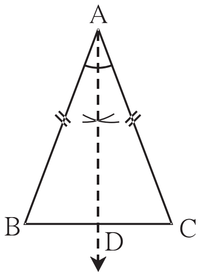
پيورپاسو ٽڪنڊو سڏيان (Isosceles triangle theorem)

سڏيان : پيورپاسي ٽڪنڊي ۾ٹھڪندڙ پاسن جي سامھون واريون ڪنڊون ٹھڪندڙ ھونديون آھن.

ڏنل : ΔABC ۾ پاسو $AB \cong$ پاسو AC

ثابت ڪرڻ تہ : $\angle ABC \cong \angle ACB$

جوڙجڪ : ΔABC ۾ ڪنڊ $\angle BAC$ جو اَڌ ڪيو.



شڪل 3.26

ثابتي : ΔABD ۽ ΔACD ۾

ليڪ $AB \cong$ ليڪ AC .... ڏنل

$\angle BAD \cong \angle CAD$ .... جوڙجڪ

ليڪ $AD \cong$ ليڪ AD .... (عام پاسو)

$\therefore \Delta ABD \cong \Delta ACD$ ...... ______

$\therefore$ ______ $\cong \angle ABD$ .... (ٹھڪندڙ ٽڪنڊن جون نسبتي ڪنڊون)

$\therefore \angle ABC \cong \angle ACB$ $\because B - D - C$

اُپ سڏيان : ٽڪنڊي جا ٽيئي پاسا ٹھڪندڙ ھوندا تہ اُنھن جي سامھون واريون ڪنڊون بہ ٹھڪندڙ ھونديون آھن ۽ ھرھڪ جي ماپ $60°$ ھوندي آھي. اِھو اُپ سڏيان توھان ثابت ڪريو.

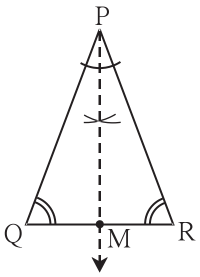
پيور پاسو ٽڪنڊو ابتڙ سڏيان (Converse of an isosceles triangle theorem)

سڏيان : ٽڪنڊي ۾ بہ ڪنڊون ٹھڪندڙ ھونديون تہ اُنھن جا سامھون وارا پاسا بہ ٹھڪندڙ ھوندا آھن.

ڏنل : ΔPQR ۾ $\angle PRQ \cong \angle PQR$

ثابت ڪرڻ تہ : پاسو $PQ \cong$ پاسو PR

جوڙجڪ : $\angle P$ جو اَڌ ڪيو جيئن QR



شڪل 3.27

ثابتي : ΔPQM ۽ ΔPRM ۾

$\angle PQM \cong$ ______ .... ڏنل

$\angle QPM \cong \angle RPM$........ ______

ٽڪر $PM \cong$ ______ .... (عام پاسو)

$\therefore \Delta PQM \cong \Delta PRM$ ...... ______ (آزمائش)

$\therefore$ ٽڪر $PQ \cong$ ٽڪر PR....... (ٹھڪندڙ ٽڪنڊن جا نسبتي پاسا)

مٿين ٻنھي سڏيانن جا بيان ھڪ ٻئي جا اُبتڙ آھن.

اُپ سڏيان : ٽڪنڊي جون ٽيئي ڪنڊون ٺهڪندڙ هونديون تہ اُن جا ٽيئي پاسا بہ ٺهڪندڙ هوندا آهن.

(اِن اُپ سڏيان جي ثابتي توهان لکو)

ويچار ڪريو

(1) ٻپورپاسو ٽڪنڊو سڏيان ۾ ٻي ڪا جوڙجڪ ڪري سگهجي ٿي ڇا؟

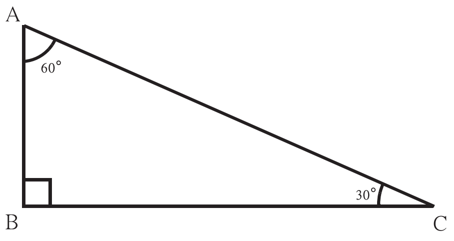
(2) ٻپورپاسو ٽڪنڊو مو ڪهڙي جوڙجڪ ٿي ڪري سگهجي ؟

چاڙي وٺون

$90^\circ - 60^\circ - 30^\circ$ ٽڪنڊي جي ماپن واري خاصيت (Property of $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$ triangle)

مشغولي I

گروپ ۾ هرهڪ شاگرد هڪ گوني ڪند ٽڪنڊو ڪيڏي جنهن ۾ ٻيون ڪندون 30° ۽ 60° هجن. اُنکي نالو $\triangle ABC$ ڏيو پاسو BC جي ڊيگهہ ڪهڙي بہ ڪٽو. ٽنهي پاسن جي ڊيگهہ ماپيو. حاصل ڪيل ڄاڻ موجب هيٺ ڏنل تختو پورو ڪريو.



شڪل 3.28

ٽڪنڊو	1	2	3	4
30° ڪند جي سامهون واري پاسي جي ڊيگهہ				
هئپاٽينيوز جي ڊيگهہ				

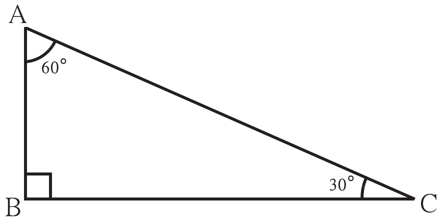
مٿين تختي مان 30° ، 60° ۽ 90° اَهڙن ڪندن واري ٽڪنڊي ۾ ڪا خاصيت ملي ٿي ڇا؟

مشغولي II

ڪمپاس پيٽيءَ ۾ گونيا جون ڪندون 30° ، 60° ۽ 90° هونديون آهن اُن پاسن جي حوالي حاصل ڪيل خاصيت چڪاس ڪريو.

هن مشغوليءَ وسيلي حاصل ڪيل هڪ اَهم خاصيت ثابت ڪنداسين

سڌيان : جيڪڏهن گوني ڪنڊ ٽڪنڊي ۾سوڙهي ڪنڊن جون ماپون 30° ۽ 60° آهن ته 30° جي سامهون وارو پاسو هئپاٽينيوز جو اڌ هوندو آهي .



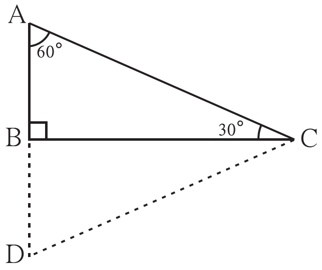
شڪل 3.29

ڏنل : گوني ڪنڊ ABC Δ ۾

$\angle B = 90^\circ, \angle C = 30^\circ, \angle A = 60^\circ$

ثابت ڪرڻ ته : $AB = \frac{1}{2} AC$

جوڙجڪ : AB ٽڪر کي وڌائي اُن تي ٽپڪو D ڪڍو جيئن $AB = BD$، جيئن DC ٽڪر ملايون



شڪل 3.30

ثابتي : Δ ABC ۽ Δ DBC ۾

ٽڪر AB $\cong$ ٽڪر DB .... ____

$\angle ABC \cong \angle DBC$ .... ____

ٽڪر BC $\cong$ ٽڪر BC .... ____

$\therefore \Delta ABC \cong \Delta DBC$ ..... ____

$\therefore \angle BAC \cong \angle BDC$ .... (نهڪندڙ ڪنڊن جون نسبتي ڪنڊون)

Δ ABC ۾ $\angle BAC = 60^\circ \therefore \angle BDC = 60^\circ$

۽ Δ ADC ۾

$\angle DAC = \angle ADC = \angle ACD = 60^\circ$ ...

$\therefore \Delta$ ADC ٽيورپاسو ٽڪنڊو آهي

$\therefore AC = AD = DC$

پر $AB = \frac{1}{2} AD$ .... $\therefore AB = \frac{1}{2} AC$ .... $(\because AD = AC)$

مشغولي :

مٿي ڏنل شڪل 3.29 موجب خالي چوڪنڊا پري هيٺ ڏنل سڌيان جي ثابتي پوري ڪريو .

گوني ڪنڊ ٽڪنڊي ۾پيون ڪندون 30° ۽ 60°هجن ته 60° واري ڪنڊ جي سامهون وارو پاسو هئپاٽينيوز $\frac{\sqrt{3}}{2} \times$ هوندو آهي .

$AB = \frac{1}{2}$

____ $= AB^2 + BC^2$ . . . . . (پائٿاگورس سڌيان موجب)

____ $= \frac{1}{4} AC^2 + BC^2$

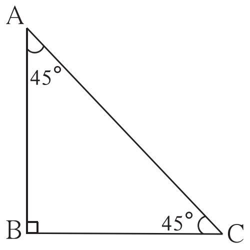
$\therefore BC^2 = AC^2 - \frac{1}{4} AC^2$

$\therefore BC^2 =$ ____

$\therefore BC = \frac{\sqrt{3}}{2} AC$

مشغولي

گوني ڪنڊ ٽڪنڊي ۾ جيڪڏهن ڪنڊون 45°، 45° ۽ 90° هونديون ته گوني ڪنڊ ٺاهيندڙ هرهڪ پاسو هئپاٽينيوز $\frac{1}{\sqrt{2}} \times$ هوندو آهي.



شڪل 3.31

ΔABC ۾، $\angle B = 90^\circ$ ۽ $\angle A = \angle C = 45^\circ$

$\therefore BC = AB$

(پائٿا گورس سڏيان موجب)

$\boxed{} = AB^2 + BC^2$

$(\because BC = AB) \ldots AC^2 = \boxed{} + AB^2$

$\therefore \boxed{} = 2AB^2$

$\therefore \boxed{} = AB^2$

$\therefore \frac{1}{\sqrt{2}} AC = AB$

اِنڪري 45° - 45° - 90° سڏيان ثابت ٿيو آهي.

اِهو ڌيان ۾ رکو

(1) گوني ڪنڊ ٽڪنڊي ۾ ڪنڊون 30°، 60°، 90° هونديون ته 30° جي سامهون وارو پاسو هئپاٽينيوز — ۽ 60° جي سامهون وارو پاسو هئپاٽينيوز $\frac{\sqrt{3}}{2}$ هوندو آهي اِنڪري 30°، 60°، 90° سڏيان ثابت ٿيو آهي.

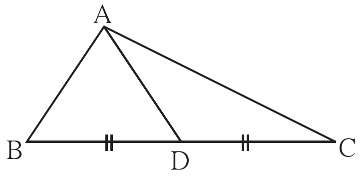
(2) جيڪڏهن گوني ڪنڊ ٽڪنڊي ۾ ڪنڊون 45°، 45° ۽ 90° هونديون ته گوني ڪنڊ ٺاهيندڙ هرهڪ پاسو هئپاٽينيوز $\frac{1}{\sqrt{2}}$ هوندو آهي اِن ڪري 45° - 45° - 90° سڏيان ثابت ٿيو آهي.

ذرا ياد ڪريو

ٽڪنڊي جو مڌيان

ٽڪنڊي جي نوڪ ۽ اُن جي سامهون واري پاسي جي مڌيه - ٽِپڪي کي جوڙيندڙ ٽڪري مڌيان ٿيندو آهي شڪل ۾ D اِهو BC جو مڌيه ٽپڪو آهي.

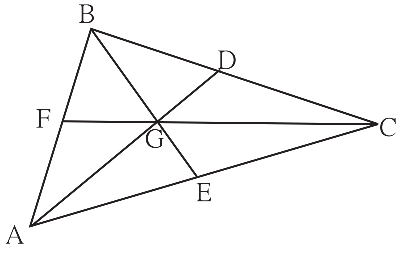
اِن ڪري AD اِهو $\triangle ABC$ جو مڌيان آهي.



شڪل 3.32

مشغولي I

ڪوبہ هڪ $\triangle ABC$ ڪيڏو اِن ٽڪنڊي ۾ AD، BE ۽ CF مڊيان ڪيڏو. اُنهن جي چيڊ ٽپڪي کي G نالو ڏيو. AG اِن جي ڊيگهہ GD جي ڊيگهہ ڪان ٻيڻي آهي اِن جي چڪاس ڪريو. ساڳئي نموني CG جي ڊيگهہ GF ڪان ٻيڻي ۽ BG جي ڊيگهہ GE ڪان ٻيڻي آهي. اِن جي پڻ جاچ ڪريو.

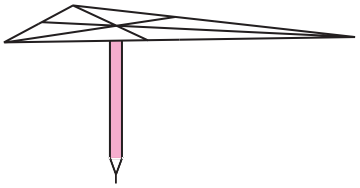


شڪل 3.33

مطلب مڊيان عام چيڊي ٽپڪو هرهڪ مڊيان کي 2:1 ۾ ورهائي ٿو. اِها خاصيت ڌيان ۾ رکو.

مشغولي II

هڪ پاٺي تي $\triangle ABC$ ڪيڏي، اُهو ڪپيو اُن جي ٽپڪي مڊيان ڪيڏو. اُنهن جي عام چيڊ ٽپڪي کي G نالو ڏيو. هاڻي هڪ تلهو ڪوڪو يا اِسڪرو کڻي، اُنجي چهنب تي ٽڪنڊو آڏو رکي جي ڪوشش ڪريو. ڪپيل ٽڪنڊي جو G ٽپڪو پينسل جي چهنب مٿان هوندو تہ بہ اِن مان G ٽپڪو مطلب مڊيانن جي عام چيڊي ٽپڪي جي خاصيت جي جاڻ پوي ٿي.


شڪل 3.34

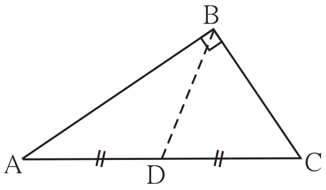
چاڻي وٺون

گوني ڪنڊ ٽڪنڊي ۾ هئپاٽينيوز جي مڊيان جي خاصيت

مشغولي: شڪل 3.35 ۾ $\triangle ABC$ هڪ گوني ڪنڊ ٽڪنڊو آهي ٽڪر BD مڊيان آهي ڪمپاس جي مدد سان هيٺيان ٽڪرماپيو.

$l(AD) =$ ……… $l(DC) =$ ………… $l(BD) =$ …………

اِن مان $(BD) = \frac{1}{2}\ (AC)$ اِها خاصيت حاصل ٿئي ٿي.

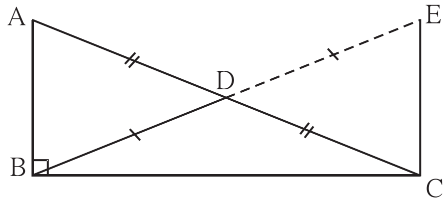


شڪل 3.35

سڌيان : گوني ڪنڊ ٽڪنڊي ۾هئپاٽينيوز مٿان نڪتل مڌيان جي ڊيگهه هئپاٽينيوز جي اڌ هوندي آهي.

ڏنل : گوني ڪنڊ ٽڪنڊي ۾ٽڪرBDهئپاٽينيوز جو مڌيان آهي.

ثابت ڪرڻ تہ : $BD = \frac{1}{2} AC$



شڪل 3.36

جوڙجڪ : ڪرڙو BD تي E ڪٽو جيئن تہ $l(BD) = l(DE)$ ٽڪر EC ملايو.

ثابتي : (مکيہ ڏاڪا ڏيکاري ڪارڻ سميت ثابتي پوري ڪريو)

$\Delta ADB \cong \Delta CDE$ .....SAS آزمائش .

ٽڪر $AB \parallel$ ٽڪر EC.........(متبدل ڪندون آزمائش)

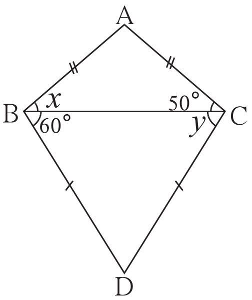
$\Delta ABC \cong \Delta ECB$ ......SAS آزمائش

$BD = \frac{1}{2}(AC)$

اِهو ڌيان ۾رکو

ڪنهن بہ گوني ڪنڊ ٽڪنڊي ۾هئپاٽينيوز مٿان نڪتل مڌيان، هئپاٽينيوز جو اڌ هوندو آهي .

اَپياس 3.3



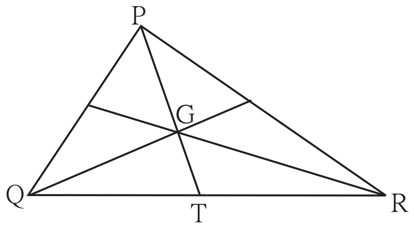
شڪل 3.37

1. شڪل 3.37 ۾ڏيکاريل ماپن انوسار x ۽ y جو ملهہ لهو ۽ $\angle ABD$ ۽ $\angle ACD$ جي پڻ ماپ لهو.

2. گوني ڪنڊ ٽڪنڊي ۾هئپاٽينيوز جي ڊيگهہ 15 آهي تہ اُن مٿان نڪتل مڌيان جي ڊيگهہ لهو.

3. ΔPQR ۾ $\angle Q = 90^\circ$, $PQ = 12$, $QR = 5$ ۽ QS اِهو PR جو مڌيان آهي تہ QS لهو.

4. شڪل 3.38 ۾ ΔPQR ۾ٽپڪو G مڌيانن جو عام ڇيدي ٽپڪو آهي. جيڪڏهن GT=2.5 س.م. تہ PG ۽ PT انهن جي ڊيگهہ لهو.

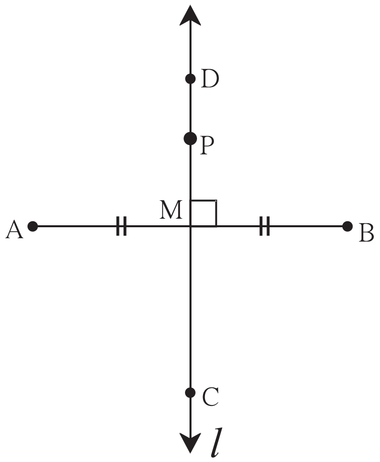


شڪل 3.38

ذرا ياد ڪريو

مشغولي :

سهوليت اَنوسار ٽڪر ABڪڍو ۽ اُن جي مڌيہ ٽپڪي کي Mنالو ڏيو ٽپڪي Mوٽان ليڪ l عمود ڪڍيو ليڪ l اِها ٽڪر AB جو عمودي اَڌڪ آهي اِهو ڌيان ۾ رکو ليڪ l تي P ٽپڪو ڪڍو PF ۽ PB اِهو ماپيو ڇا توسمجهہ ۾ اچي؟ PA=PB ائين آهي ڇا؟ اِن مان ڌيان ۾ اَچي ٿو ليڪ ٽڪر جي عمودي اَڌڪ مٿان ڪهڙو بہ ٽڪبو، ٽڪر جي پڇڙ -ٽپڪن کان هم - مفاصلي تي ٿيندو آهي. هاڻي ساڳئي نموني C ۽ D ٽپڪا کڻو سڀ ٽپڪا ليڪ .. مٿان آهن ڇا؟ اِن مان ڇا تو ڌيان ۾ اَچي ليڪ ٽڪر جي پڇڙ - ٽپڪن کان هم مفاصلي وارا سڀ ٽپڪا اُن جي عمودي اَڌڪ جي سڌيان جا بہ ڀاڱا آهن اِهو اَسان هاڻي ثابت ڪنداسين.



شڪل 3.39

جاڻي وٺون

عمودي اَڌڪ سڌيان (Perpendicular bisector theorem)

ڀاڱو I : ليڪ - ٽڪر جي عمودي اَڌڪ جو هرهڪ ٽپڪو، ليڪ ٽڪر جي پڇڙ - ٽپڪن کان هم - مفاصلي هوندو آهي.

ڏنل : ليڪ l اِها ٽڪر AB جو عمودي اَڌڪ آهي M مڌيہ ٽپڪو آهي ليڪ l تي ٽپڪو P آهي.

ثابت ڪرڻ تہ : $l\,(PA) = l\,(PB)$

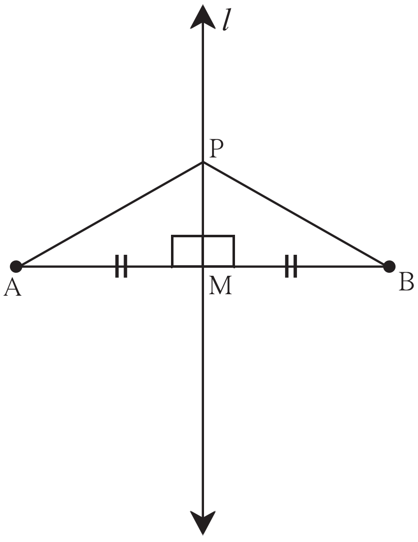
جوڙجڪ : ٽڪر AP ۽ BP ڪڍو

ثابتي : Δ PMA ۽ Δ PMB ۾

ٽڪر PM $\cong$ ٽڪرPM........ (عام پاسو)

$\angle$PMA $\cong$ $\angle$PMB .... (هرهڪ کوني ڪنڊ)

AM $\cong$ ٽڪرBM .... (M مڌيہ ٽپڪو)



شڪل 3.40

$\therefore \Delta PMA \cong \Delta PMB$ ...... آزمائش

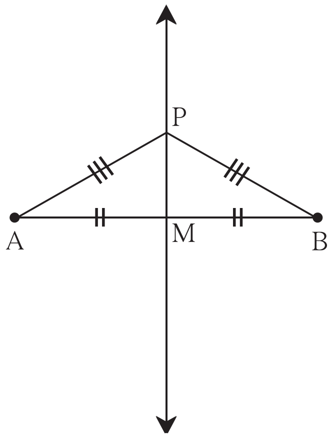
$\therefore$ ٽڪر PA $\cong$ ٽڪر PB......ڇهڪندڙ ٽڪنڊن جا نسبتي پاسا

$\therefore l(PA) = l(PB)$

مطلب ليڪ ٽڪر جي عمودي اَڌڪ جو هرهڪ ٽپڪو اُن ٽڪر جي پڇڙ - ٽپڪن کان هم - مفاصلي هوندو آهي.

ياڳو II : ليڪ ٽڪر جي پڇڙ - ٽپڪن کان هم مفاصلي وارو ڪوبه ٽپڪو ، اُن ٽڪر جي عمودي اَڌڪ مٿان هوندو آهي.

ڏنل : ٽپڪو P ، AB جي پڇڙ - ٽپڪن کان هم مفاصلي هڪ ٽپڪو آهي مطلب AB=PB



شڪل 3.41

ثابت ڪرڻ نه : ٽپڪو P اِهو AB جي عمودي اَڌڪ مٿان آهي.

جوڙجڪ : ٽڪر AB جو M مڌيہ ٽپڪو ڪڍو PM پاڻ ۾ ملايو.

ثابتي : ΔPAM ۽ ΔPBM ۾

ٽڪر PA $\cong$ ٽڪر PB......... ______

ٽڪر AM $\cong$ ٽڪر BM .... ______

ٽڪر PM $\cong$ ______ .... عام پاسو

$\therefore \Delta PAM \cong \Delta PBM$ ...... ______ آزمائش

$\therefore \angle PMA \cong \angle PMB$.......ڇهڪندڙ ٽڪنڊن جون نسبتي ڪنڊون

ٽڪر $\angle PMA$ + ______ = 180°

$\angle PMA + \angle PMA = 180^\circ$ .... $(\because \angle PMB = \angle PMA)$

$2\angle PMA$ = ______

$\therefore \angle PMA = 90^\circ$

$\therefore$ ٽڪر PM $\perp$ ٽڪر AB ......(1)

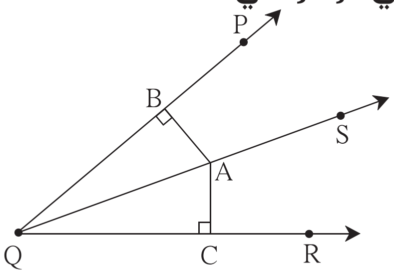
$\therefore$ مطلب ٽڪر PM اِهو ٽڪر AB جو عمودي اَڌڪ آهي.

PM اِهو ٽڪر AB جي عمودي اَڌڪ مٿان آهي. ......(2)

ڪنڊ - اَڌڪ سڏيان (Angle bisector theorem)

ياڳو I : ڪنڊ - اَڌڪ جو هرهڪ ٽپڪو، اُن ڪنڊ جي پاسن کان هم - مفاصلي هوندو آهي.

ڏنل : $\angle PQR$ ۾ ڪرڻو QS ڪنڊ - اَڌڪ آهي. A اِهو ڪنڊ - اَڌڪ جو هڪ ٽپڪو آهي، ڪرڻو ٽڪر $\perp$ QP ڪرڻو AB ٽڪر $\perp$ QR ڪرڻو AC



شڪل 3.42

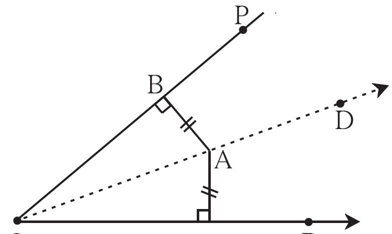
ثابت ڪرڻ نه : ٽڪر AC $\cong$ ٽڪر AB

ثابتي : ٽڪنڊن جي ڇهڪڻ جي مناسب آزمائش واراڻي ثابتي لکو.

پاڳو II : ڪنڊ جي پاسن کان هم مفاصلي ڪوبہ ٽپڪو اُن ڪنڊ جي ڪنڊ - اَڌڪ مٿان هوندو آهي .

ڏنل : $\angle PQR$ جي اَندرين حصي ۾ P ڪوبہ ٽپڪو آهي
ڪرڙو $QP \perp$ ڏکر AC

$AB = AC$



شڪل 3.43

ثابت ڪرڻ تہ : ڪرڙو QA اِهو ڪنڊ $\angle PQR$
جو اَڌڪ آهي مطلب $\angle BQA = \angle CQA$

ثابتي : ٽڪنڊن جي ٺهڪڻ جي مناسب آزمائش واپرائي ثابتي لکو.

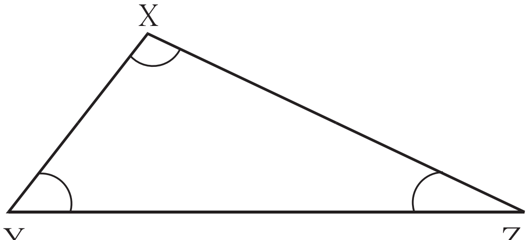
ذرا ياد ڪريو

مشغولي :

ڏيکاريل شڪل اَنوسار پاسو XZ اِها پاسو XY کان وڏو

هجي. اَهڙو $\triangle ABC$ ڪيو.

$\angle Z$ ۽ $\angle Y$ ماپيو ڪهڙي ڪنڊ وڏي آهي؟



شڪل 3.44

چاڪي وٺون

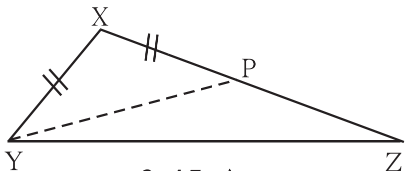
ٽڪنڊي ۾ پاسن ۽ ڪنڊن وچم برابري خاصيت

سڏيان : $\triangle XYZ$ ۾ پاسو XY پاسو XZ

ثابت ڪرڻ تہ : $\angle XYZ > \angle XZY$

جوڙجڪ : پاسو XZ مٿان P ٽپڪو اَهڙي ريت ڪڍو جيئن

$l(XY) = l(XP)$ هجي ڏکر YP ڪيو



شڪل 3.45

ثابتي : ΔXYP ۾

$XY = XP$ .... جوڙجڪ

$\therefore \angle XYP = \angle XPY$ .... پيور پاسو ٽڪنڊو سڏيان .....(I)

$\angle XPY$ اِها ΔYPZ جي ٻاهرين ڪنڊ آهي.

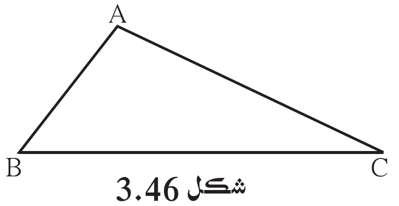
$\therefore \angle XPY > \angle PZY$ ....

$\angle XYP > \angle PZY$ .... مساوت I موجب

$\angle XYP + \angle PYZ > \angle PZY$ (تہ $a < b$ ۽ $0 < c$ تہ $a + c < b$)

$\angle XYZ > \angle PZY$ مطلب $\angle XYZ > \angle XZY$

سڌيان : ٽڪنڊي ۾ وڏي ڪنڊ جي سامهون وارو پاسو، اِهو ننڍي ڪنڊ جي سامهون واري پاسي کان وڏو هوندو آهي اِن سڌيان جي ثابتي اَڻ سڌي طريقي ڏجي ٿي. خالي جڳهيون ڀري ثابتي پوري ڪريو.



شڪل 3.46

ڏنل : ΔABC ۾ $\angle B > \angle C$

ثابت ڪرڻ: $AC > AB$

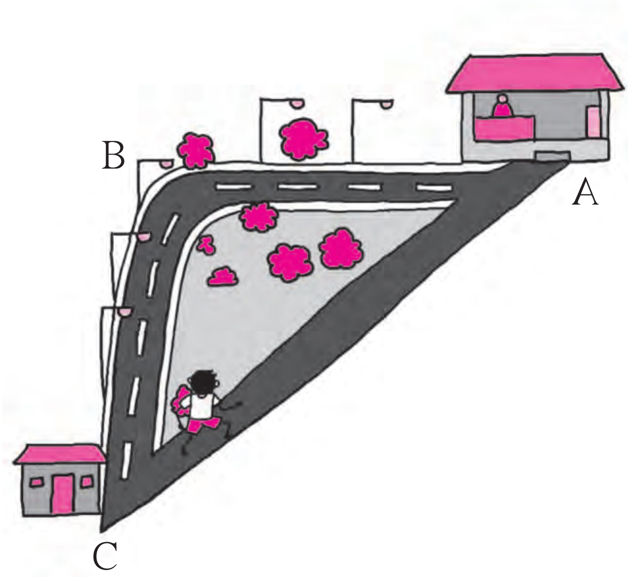
ثابتي : ΔABC ۾ AB ۽ AC اِنهن پاسن بابت هيٺيان اِمڪان ٿي سگهن ٿا.

(i) $AC < AB$ (ii) ______ (iii) ______

(i) $AC < AB$ اِهو ڪٿون ٿا.
ٽڪنڊي ۾ وڏي پاسي سامهون ڪنڊ،
ننڍي پاسي سامهون ڪنڊ کان
هوندي ______ آهي.
$\therefore \angle C <$ ______
پر $\angle C < \angle B$ .... ڏنل
اِن ڪري اَسان مڃتا غلط ثابت ٿئي ٿي.
$\therefore$ ______ $<$ ______ اِهو غلط آهي.

(ii) $AC = AB$ اِهو مڃيون ٿا
$\angle B = \angle C$
پر ______ $>$ ______ ...... ڏنل
وري اَسان جي مڃتا غلط ثابت ٿئي ٿي
$\therefore$ ______ $=$ ______ اِهو غلط آهي
$\therefore AC > AB$ هاڻي فقط اِهو ئي ثابت ٿئي ٿو.
$\therefore AC > AB$

ذرا ياد ڪريو :



گذريل درجي ۾ اَسان هڪ مشغولي ڪئي هئي اُن مان جاميٽريءَ جي خاصيت ڏٺي هئي اُها ياد ڪريو پر واري شڪل ۾ A اِن هنڌ هڪ دڪان آهي. سمير C اِن جڳهه تي بيٺو هو. دڪان تي پهچڻ لاءِ اُن $A \rightarrow B \rightarrow C$ اِن ڏامرواري رستي بدران $A \rightarrow C$ اِهو رستو ورتو. اُن کي ڌيان ۾ آيو ته اِهو رستو ننڍو آهي. مطلب ٽڪنڊي جي ڪهڙي خاصيت هن جي دماغ ۾ آئي؟ ٽڪنڊي جا ڪهڙا به ٻه پاسا، اُنهن جو جوڙ ٽئين پاسي کان وڏو هوندو آهي اِها خاصيت اَسان ثابت ڪنداسين.

سڌيان : ٽڪنڊي جي ڪنهن به ٻن پاسن جو جوڙ ٽئين پاسي کان وڌو هوندو آهي.

ڏنل : ΔABC ڏنل آهي

ثابت ڪرڻ ته: $AB + AC > BC$

$AB + BC > AC$

$AC + BC > AB$

جوڙجڪ : ڪرڙو BA مٿان D ٽيڪو اهڙي نموني کڻو جيئن $AD = AC$

ثابتي : ΔACD ۾ $AD = AC$ ..... جوڙجڪ

$\therefore \angle ACD = \angle ADC$ ...... ٻپورپاسو ٽڪنڊو سڌيان

$\therefore \angle ACD + \angle ACB > \angle ADC$

$\therefore \angle BCD > \angle ADC$

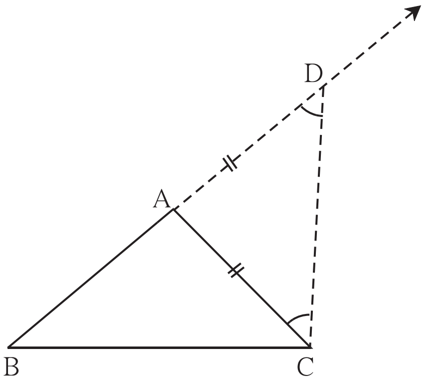
∴ پاسو $BD >$ پاسو BC .... وڏي ڪنڊ جي سامهون پاسو وڏو

$\therefore BA + AD > BC$ ....$(\because BD = BA + AD)$

$BA + AC > BC$ .... $(\because AD = AC)$

ساڳئي نموني $AB + BC > AC$

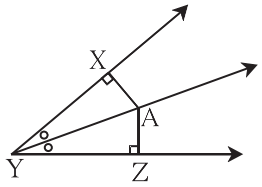
۽ $BC + AC > AB$ اهو ثابت ڪرڻو آهي.



شڪل 3.47

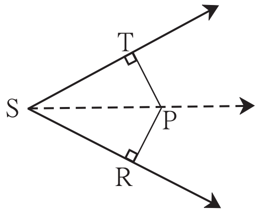
اَيپياس 3.4

.1 شڪل 3.48 ۾ ٽيڪو A ‎<XYZ جي اڌڪ مٿان آيو. جيڪڏهن AX=2 س م ته AZ لهو.



شڪل 3.48

.2 شڪل 3.49 ۾ $\angle RST = 56^\circ$، ٽڪر $PT \perp ST$ ڪرڙو، ٽڪر $PR \perp SR$ ڪرڙو ۽ ٽڪر $PR \cong$ ٽڪر PT ته $\angle RSP$ لهو سبب لکو



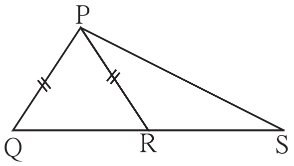
شڪل 3.49

.3 ΔPQR ۾ $PQ = 10$ س م، $QR = 12$ س م، $PR = 8$ س م ته اِن ٽڪنڊي ۾ سڀ کان وڏي ڪنڊ ۽ سڀ کان ننڍي ڪنڊ سڃاڻي لکو.

.4 ΔFAN ۾ $\angle F = 80^\circ$، $\angle A = 40^\circ$ ته سڀني کان وڏو ۽ سڀني کان ننڍو پاسو، اِنهن پاسن جا نالا لکو. سبب ٻڌايو.

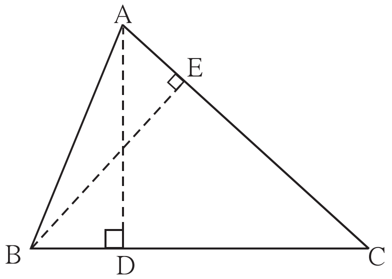
.5 ثابت ڪريو ته ٽيورپاسو ٽڪنڊو ٽيور ڪنڊ ٽڪنڊو هوندو آهي.

6. Δ ABC ۾ $\angle$BAC جو ڪنڊ اڌڪ BC پاسي مٿان عمود آهي. ثابت ڪريو Δ ABC هڪ ٻيورپاسو ٽڪنڊو آهي .



شڪل 3.50

7. شڪل 3.50 ۾ ٽڪر PR $\cong$ ٽڪرPQ
آهي تہ ثابت ٽڪرPS > ٽڪر PQ



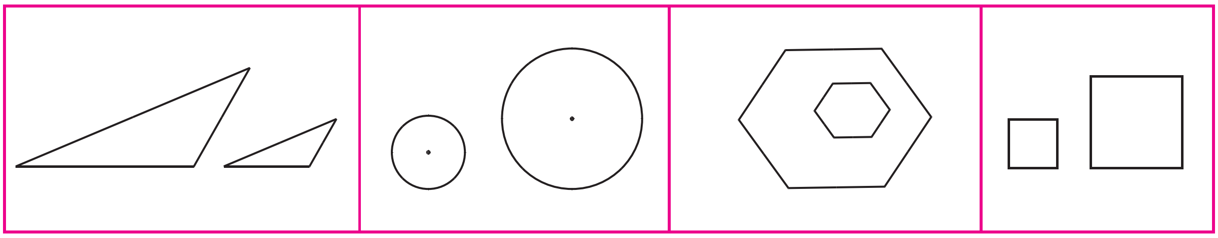
شڪل 3.51

8. شڪل 3.51 ۾ Δ ABC ٽڪر AD
۽ ٽڪر BE اِهي عمود آهن ۽
AE = BD تہ ثابت ڪريو
ٽڪر AD $\cong$ ٽڪر BE

ڄاڻي وٺون

هڪ جهڙا ٽڪنڊا(Similar triangles)

هيٺ ڏنل شڪليون جاچيو



هرهڪ حصي ۾ٻن ٻن شڪلين جا آڪار (Shape) ساڳيا آهن پر اِهي شڪليون ننڍيون وڏيون آهن ساڳئي آڪار وارن نظراينديون شڪلين کي هڪ جهڙيون شڪليون چئبو آهي.

ڪا تصوير اُن کي وڏو ڪري حاصل ڪيل تصوير اِنهن تصويرن ۾ هڪ جھڙائي آهي رستو ۽ اُن رستي جو نقشو اِنهن ۾ هڪ جھڙائي آهي.

ٻن شڪلين ۾ پاسا پرپورشن ۾ هئڻ گھرجن اِها هڪ جھڙائيءَ جي اَهم خاصيت آهي هڪ جھڙي شڪلين ۾ ڪندون ٺهڪندڙ هونديون آهن. ٻن رستن جي وچ ۾ جيڪا ڪنڊ هوندي آهي، اُها اُنهن جي نقشي ۾ ساڳئي ماپ جي نہ هوندي تہ اُن کي غلط نقشو چئبو.

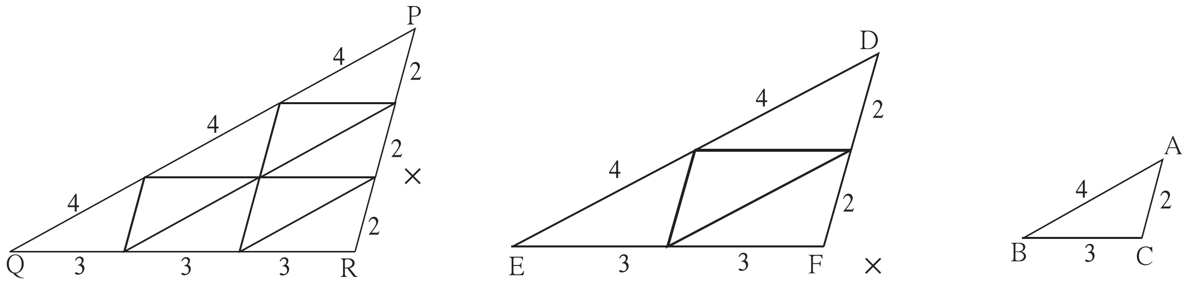
ICT Tools or Links

موبائيل يا ڪمپيوٽر تي هڪ تصوير ڪيو اُن کي ننڍي يا وڏي ڪرڻ لاءِ توهان ڇا ڪندا آهيو اُهو ياد ڪريو.

ساڳئي نموني تصوير جو ڪو بہ هڪ حصو ڏسڻ لاءِ توهان ڪهڙي مشغولي ڪندا آهيو اُهو ياد ڪريو.

هاڻي اَسان هڪ جھڙا ٽڪنڊا اُنهن جون خاصيتون مشغوليءَ وسيلي ڪنداسين .

مشغولي : 4 س م ۽ 2 س م پاسن وارو هڪ ٽڪنڊو ڪاغذ مٿان ڪيو. اِهو ٽڪنڊو هڪ ٿلهي پني تي رکو اُن جي چوڌاري پينسل رکي 14 ٽڪنڊا ڪپي تيار ڪريو ڪاغذ جا اِهي ٽڪنڊا ٺهڪندڙ آهن اِهو ڌيان ۾ رکو اُهي هيٺ ڏنل نموني رکي ٽي ٽڪنڊا تيار ڪريو.



شڪل 3.52 — ٽڪنڊن جو انداز 1

شڪل 3.53 — ٽڪنڊن جو انداز 4

شڪل 3.54 — ٽڪنڊن جو انداز : 9

Δ ABC ۽ Δ DEF ۾ ABC ↔ DEF

$\angle A \cong \angle D,\ \angle B \cong \angle E,\ \angle C \cong \angle F$

$\frac{AB}{DE} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ ؛ $\frac{BC}{EF} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ ؛ $\frac{AC}{DF} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

ساڳئي نموني Δ DEF ۽ Δ PQR بابت ويچار ڪريو DEF ↔ PQR

اِن نسبت ۾ اِنهن جون ڪندون ٺهڪندڙ ۽ پاسا پروپورشن ۾ آهن ڇا؟

ڄاڻي وٺون

ٽڪنڊن جي هڪ جهڙائي

Δ ABC ۽ Δ PQR ۾ جيڪڏهن (i) $\angle A = \angle P, \angle B = \angle Q, \angle C = \angle R$ ۽

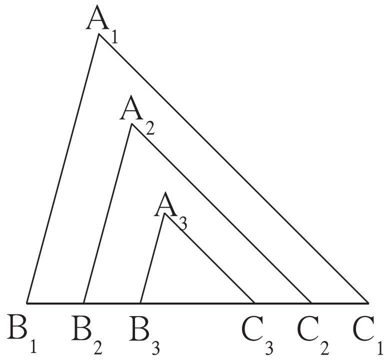
$\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{AC}{PR}$ ؛ ۾ Δ ABC ۽ Δ PQR

اِهي هڪ جهڙا ٽڪنڊا آهن اِهو ΔPQR بہ ΔABC ائين لکبو آهي. ٽڪنڊجي نسبتي کندن ۽ نسبتي پاسن جو پاڻ ۾ لاڳاپو، هيٺ ڏنل مشغوليءَ وسيلي سمجهنداسين.

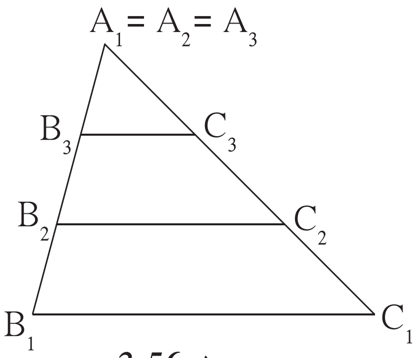
مشغولي: $\Delta A_1B_1C_1$ هڪ ٿلهي ڪاغذ مٿان ڪڍي ڪپيو $\angle A_1, \angle B_1, \angle C_1$ ماپيو ٿلهي ڪاغذ مٿان $\Delta A_2B_2C_2$ ۽ $\Delta A_3B_3C_3$ اهڙي نموني ڪڍو جيئن

$\angle A_1=\angle A_2=\angle A_3$, $\angle B_1 =\angle B_2 =\angle B_3$, $\angle C_1 = \angle C_2 =\angle C_3$

۽ $B_1C_1 > B_2C_2 > B_3C_3$ هاڻي اُهي بہ ٽڪنڊا ڪپيو ۽ پاسي ڪان رکو اِنهن ٽڪنڊن جي رچنا هيٺ ڏنل نموني ٻن قسمن ۾ ڪريو. ٽنهي ٽڪنڊن جي پاسن جي ڊيگهہ ماپيو.



شڪل 3.55



شڪل 3.56

$\frac{A_1B_1}{A_2B_2}, \frac{B_1C_1}{B_2C_2}, \frac{A_1C_1}{A_2C_2}$ پروپورشن جاچيو اِهي برابر آهن ڇا اِهو ڏسو

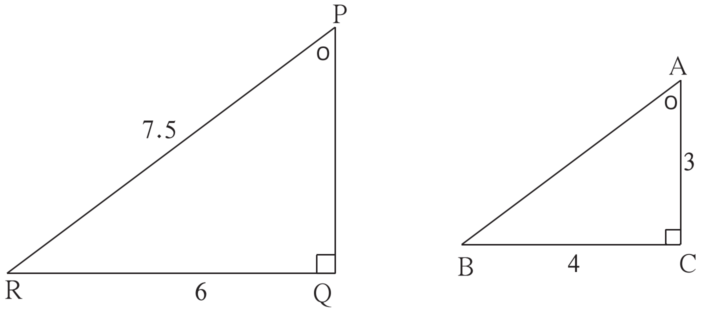
$\frac{A_1C_1}{A_3C_3}, \frac{B_1C_1}{B_3C_3}, \frac{A_1B_1}{A_3B_3}$

سڀ پاسا پروپورشن ۾ آهن. اِن مشغوليءَ مان ظاهر ٿئي ٿو تہ جنهن ٽڪنڊي جون نسبتي ڪندون ٺهڪندڙ آهن ۽ نسبتي پاسا پروپورشن ۾ آهن تہ اُهي ٽڪنڊا هڪ جهڙا ٽڪنڊا آهن.

اِهو ڌيان ۾ رکو

- ٻن ٽڪنڊن ۾ نسبتي پاسا پروپورشن ۾ آهن ۽ نسبتي ڪنڊون ٺهڪندڙ آهن ته اِهي ٽڪنڊا هڪ جهڙا ٽڪنڊا هوندا آهن
- جيڪڏهن ٻه ٽڪنڊا هڪ جهڙا ٽڪنڊا آهن ته انُهن جا نسبتي پاسا پروپورشن ۾ ۽ نسبتي ڪنڊون ٺهڪندڙ هونديون آهن
- ٻن ٽڪنڊن جون نسبتي ڪنڊون ٺهڪندڙ آهن ته اُهي ٻه ٽڪنڊا هڪ جهڙا ٽڪنڊا هوندا آهن.

مثال : شڪل 3.57 ۾ Δ ABC ۽ Δ PQR ڏيکاريل آهن. ڏنل ماپون جاچيو جن پاسن جي ڊيگهه نه مليل آهي اُهي لکو.



شڪل 3.57

حل : هرهڪ ٽڪنڊي جي ڪنڊن جو جوڙ 180° هوندو آهي.

$\angle A = \angle P$ ۽ $\angle B = \angle Q \qquad \therefore \angle C = \angle R$

$\therefore$ Δ ABC ۽ Δ PQR ٽڪنڊي جي ٽنهي ڪنڊن جو جوڙ

$$\therefore \frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{AC}{PR}$$

$$\therefore \frac{3}{PQ} = \frac{4}{6} = \frac{AC}{7.5}$$

$$\therefore 4 \times PQ = 18$$

$$\therefore PQ = \frac{18}{4} = 4.5$$

$$6 \times AC = 7.5 \times 4$$

$$\therefore AC = \frac{7.5 \times 4}{6} = \frac{30}{6} = 5$$

اَڀياس 3.5

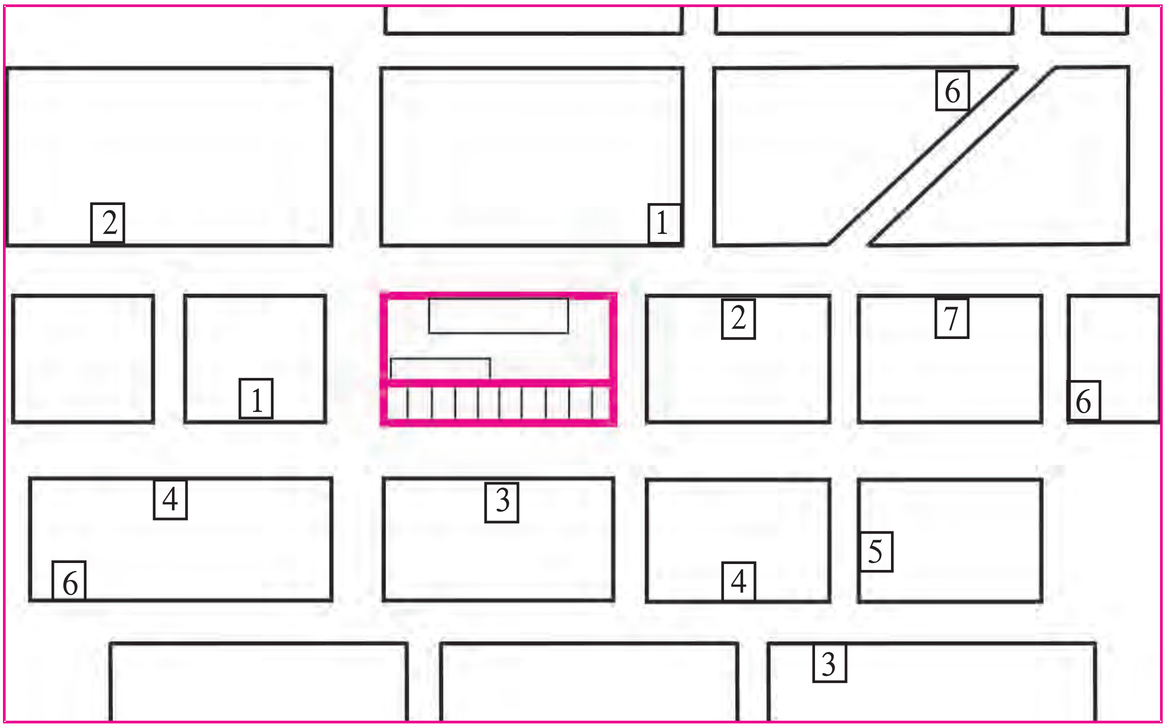
1. Δ XYZ ~ Δ LMN اِنهن جا نسبتي ڪنڊن جا ٺهڪندڙ جوڙا ۽ نسبتي پاسن جا ريشو - جوڙا لکو .
2. Δ XYZ ۾ XY = 4س م، YZ = 6 س م، XZ = 5س م، ۾ Δ XYZ ~ Δ PQR ۽ PQ = 8 س م جيڪڏهن Δ PQR جا باقي پاسا لهو.
3. هڪ جهڙن ٽڪنڊن جي هڪ ڪچي شڪل ڪيو ٽڪنڊن کي نالا ڏيو. انُهن جون نسبتي ڪنڊون ساڳئي نشانين رستي ڏيکاريو ٽڪنڊن جا نسبتي پاسا پروپورشن ۾ هجن ائين ڏيکاريو.

ذرا ياد ڪريو

توهان نقشو تيار ڪرڻ وقت رستن جو مفاصلو مناسب پئمانو وٺي ڏيکاريو آهي. مثال 1 س م = 100 م يا 1 س م = 50 ٽڪنڊي جي خاصيت بابت ويچار ڪيو ڇا؟ وڏي ڪنڊ جي سامهون پاسو وڏو ٿيندو آهي اِهو ياد ڪريو.

عملي ڪم:

توهان جي اِسڪول يا گهر جي چوڌار 500 ميٽر حد اَندر رستي جو نقشو تيار ڪريو. رستن تي ٻن جڳهين وچ مفاصلو ڪيئن ماپيو؟ 2 ميٽر هلڻ سان توهان ڪيترا قدم (Steps) هلندا. ٻن ميٽرن مفاصلي تي 3 قدم هلڻ سان 90 قدمن مطلب 60 ميٽر، ائين مڃي مفاصلا مقرر ڪريو. پسگردائيءَ ۾ سڀني رستن تي هلندي جُدا جُدا مفاصلا مقرر ڪرڻا پوندا. جتي ٻه رستا ملن ٿا، اُتي ڪنڊ ٺهندي. اُن جي ماپ جو اَندازو وٺو اَهڙي نموني مناسب پئمانو وٺي نقشو تيار ڪريو چوڌاري دڪان، عمارتون ۾ هٽ، بس اِسٽاپ، رڪشا اِسٽئنڊ ڏيکارڻ جي ڪوشش ڪريو. هيٺ هڪ نمونو ڏنل آهي



لسٽ : 1. لئبرري 2. بس اِسٽاپ 3. ڪسرت شالا 4. بئنڪ
5. رستو 6. گهر 7. وڏي عمارت

1. هيٺ ڀھو - چونڊ سوال ڏنل آهن مناسب جواب ڳولهيو .

(i) هڪ ٽڪنڊي جا پاسا 5 س م ۽ 1.5 س م آهن ته ٽيون پاسو .... نه ٿيندو.

(A) 3.7 س م (B) 4.1 س م (C) 3.8 س م (D) 3.4 س م

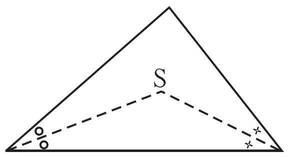
(ii) ΔPQR ۾ $\angle R > \angle Q$ ته ....

(A) $QR > PR$ (B) $PQ > PR$ (C) $PQ < PR$ (D) $QR < PR$

(iii) ΔTPQ ۾ $\angle T = 65^\circ$, $\angle P = 95^\circ$ ته وڏان صحيح آهي؟

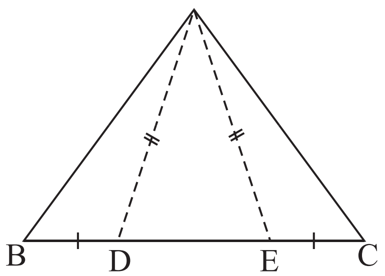
(A) $PQ < TP$ (B) $PQ < TQ$ (C) $TQ < TP < PQ$ (D) $PQ < TP < TQ$

2. ΔABC ۾ هڪ ٻهورپاسو ٽڪنڊو آهي $AB = AC$ ۽ BD ۽ CE اِهي مڏيان آهن ته ثابت ڪريو $BD = CE$



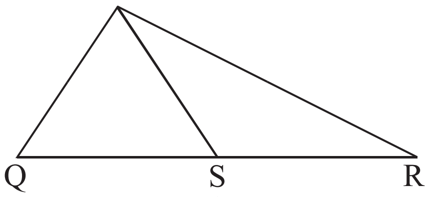
شڪل 3.58

3. ΔPQR ۾ $PR > PQ$ ۽ $\angle Q$ ۽ $\angle R$ جا ڪنڊ اَڌڪ S وٽ ملن ٿا ثابت ڪريو, $SR > SQ$.



شڪل 3.59

4. شڪل 3.59 ۾ ΔABC ۾ پاسو BC مٿان ٽپڪا D ۽ E آهن. $BD = CE$ ۽ $AD = AE$ ثابت ڪريو, $\Delta ABD \cong \Delta ACE$.



شڪل 3.60

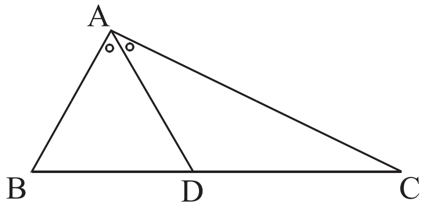
5. شڪل 3.60 ۾ ΔPQR ۾ پاسي QR مٿان S ڪوبه هڪ ٽپڪو آهي ته ثابت ڪريو

$PQ + QR + RP > 2PS$

.6 شڪل 3.61 ۾ ΔABC ۾ $\angle BAC$

جو ڪنڊ - اَڌڪ BC پاسي مٿان D

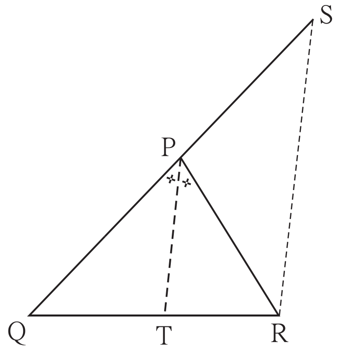
وٽ ڇيد ڪري ٿو ثابت ڪريو $AB > BD$



شڪل 3.61

.7 شڪل 3.62 ۾ $\angle QPR$ جو ڪنڊ - اَڌڪ ٽڪر PT آهي ٽِبڪي RP وٽان

نڪتل ٽڪر PT اِهو RS جي پوروچوٽ آهي G-P-S



شڪل 3.62

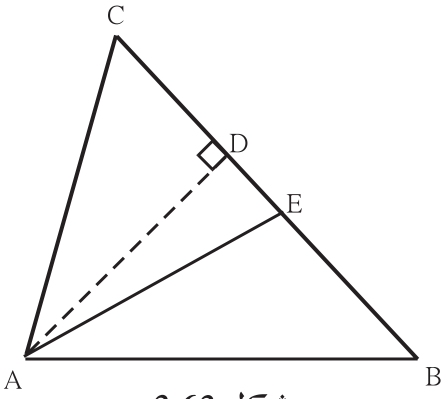
.8 شڪل 3.63 ۾ ٽڪر $\perp BC$ ٽڪر AD

ٽڪر AE اهو $\angle CAB$ جو

ڪنڊ - اَڌڪ آهي

ثابت ڪريو

$$m\angle DAE = \frac{1}{2}\,(m\angle C - m\angle B)$$



شڪل 3.63

ويچار ڪريو

اسان سکيا آهيون تہ جيڪڏهن ٻہ ٽڪنڊا ساڳئين ڪنڊن وارا هوندا تہ اُنهن جا نسبتي پاسا پروپورشن ۾ هوندا آهن ٻہ چوڪنڊا ساڳين ڪنڊن وارا هوندا تہ اُنهن جا نسبتي پاسا پروپورشن ۾ هوندا ڇا؟ جدا جدا شڪليون ڪڍي جاچيو.

اِها خاصيت ٻين گهڻپاسن شڪلين لاءِ چڪاسيو.

4 ٽڪنڊي جي جوڙجڪ

اَچو تہ سکون

ٽڪنڊي جي ٽنون جي هيٺ ڏنل چار ملڻ سان ٽڪنڊا ڪيڻ .

- پايو ، پايي جي هڪ پرواري ڪنڊ ۽ بچيل ٻن پاسن جو جوڙ
- پايو، پايي جي هڪ پرواري ڪنڊ ۽ بچيل ٻن پاسن جو فرق
- گرد ماپ ۽ پايي جو پرواريون ڪنڊون

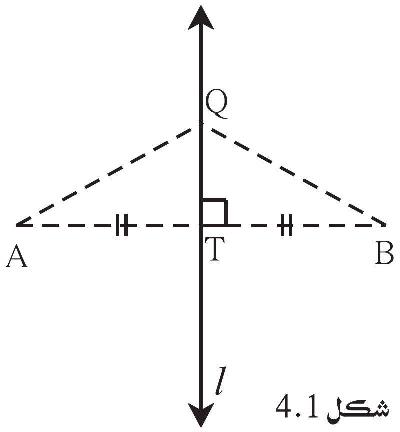
ذرا ياد ڪريو

گذريل درجي ۾ اَسان هيٺ ڏنل ٽڪنڊن جو جوڙجڪ سکيو آهي.

* سيني پاسن جي ڊيگهہ مليل موجب ٽڪنڊو ڪيڻ.
* پايو ۽ اُن کي سمائيندڙ ڪنڊون مليل موجب ٽڪنڊو ڪيڻ.
* ٻہ پاسا ۽ اُنهن جي سمائيندڙ ڪنڊ مليل موجب ٽڪنڊو ڪيڻ.
* هئپاٽينيوز ۽ هڪ پاسو مليل موجب ٽڪنڊو ڪيڻ .

عمودي اَڌڪ جا سڏيان

- ڏنل ليڪ ٽڪرجي عمودي اَڌڪ جو هرهڪ ٽبڪو ، اُن ليڪ ٽڪرجي پڇڙ - ٽبڪن کان هم مفاصلي هوندو آهي.
- ليڪ ٽڪرجي پڇڙ - ٽبڪن کان هم مفاصلي هوندڙ هرهڪ ٽبڪو، اُن ليڪ ٽڪرجي عمودي اَڌڪ مٿان هوندو آهي.



شڪل 4.1

جاڻي وٺون

ٽڪنڊن جا جوڙجڪ (Constructions of triangles)

ٽڪنڊي جي جوڙجڪ لاءِ گهٽ ۾ گهٽ ٽي ٽنوَ ضروري آهن. ٽي ڪنڊون يا ٽي پاسا، اِنهن مان فقط ٻہ ٽنوَ مليا يا اُن کان سواءِ ٽڪنڊي سان لاڳاپو رکندڙ ڪجهہ چار مليا اُن مليل چار ۽ ڏنل ٻن ٽنوَن جو اِستعمال ڪري ٽڪندو ڪيئن ڪيو اِهو ڏسنداسين.

هڪ ٽبڪو ٻن جُدا جُدا ليڪن تي هوندو تہ اُهو اُنهن ٻنهي ليڪن جو چيد ٽبڪو هوندو آهي. اِها خاصيت هيٺ جوڙجڪن ۾ ڪيترائي دفعا ڪتب آندي ويئي آهي.

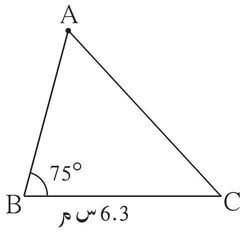
جوڙجڪ I

ٽڪنڊي جو پايو، اُن جي هڪ پرواري ڪنڊ ۽ باقي ٻچيل ٻن پاسن جو جوڙ ملڻ موجب ٽڪنڊو ڪڍڻ.

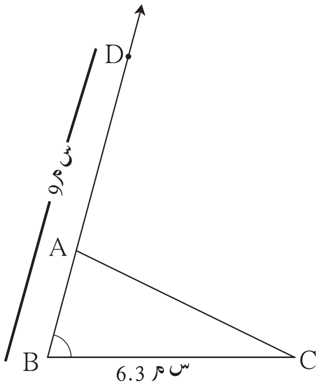
مثال ΔABC ڪڍو جنهن ۾ $BC = 6.3$ س م، $\angle B = 75^\circ$ ۽ $AB + AC = 9$ س م آهي.

حل : پهريائين مناسب ٽڪنڊي جي ڪچي شڪل ڪڍي.

سمجهاڻي : ڪچي شڪل اَنوسار BC= 6.3س اِهو پايو ڪڍيو. ٽپڪي B وٽ ڪرڻو BDاِهو 9س م ڪٽي (BD=AB+AC) 75° جي ڪنڊ ڪڍي ڪرڻو BDمٿان ٽپڪو A ڳولهڻو آهي.



ڪچي شڪل 4.2

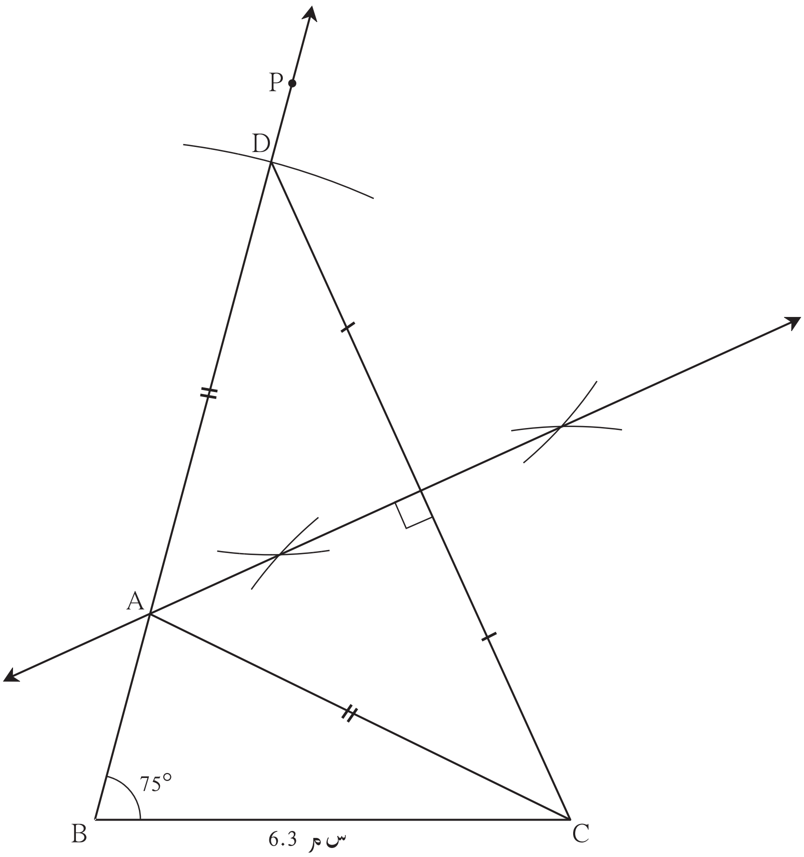


ڪچي شڪل 4.3

$$BA + AD = BA + AC = 9$$

$$\therefore\ AD = AC$$

ٽپڪو A ٽڪر CD جي عمودي اَڌڪ مٿان آهي. ڪرڻو BD ۽ ٽڪر CD جو عمودي اَڌڪ پاڻ ۾ A ٽپڪي وٽ ملن ٿا.



پڪي شڪل 4.4

جوڙجڪ جا ڏاڪا

(1) ٽڪر BC اِهو 6.3س م ڪيو.

(2) ٽپڪي B وٽان 75° ڪنڊ لهو اِهو ڪرڻو BP ڪيو.

(3) ڪرڻو BP مٿان D ٽپڪو ڪٽو جيئن BD= 9س م هجي.

(4) DC ٽڪر ملايو.

(5) ٽڪر DC جو عمودي اَڌڪ ڪيو.

(6) ٽڪر DC جو عمودي اَڌڪ ۽ ڪرڻو BP پاڻ ۾ A ٽپڪي وٽ ملايو.

(7) ٽڪر AC ڪيو $\triangle ABC$ اِهو گهربل ٽڪنڊو آهي.

اَپياس 4.1

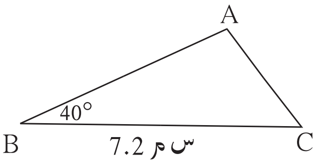
1. Δ PQR ڪيو جنهن ۾ QR = 4.2 س.م، m∠Q = 40° ۽ PQ + PR = 8.5
2. Δ XYZ ڪيو جنهن ۾ YZ = 6 س.م، XY + XZ = 9 س.م، m∠XYZ = 50°
3. Δ ABC ڪيو جنهن ۾ BC = 6.2 س.م، m∠ACB = 50°، AB + AC = 9.8
4. Δ ABC ڪيو جنهن ۾ BC = 3.2 س.م، ∠ACB = 45° ۽ Δ ABC گرد ماپ 10 س.م

جوڙجڪ II

ٽڪنڊي جو پايو، پرواري هڪ ڪنڊ ۽ باقي ٻچيل پاسن جو فرق مليل موجب ٽڪنڊو ڪيڻ

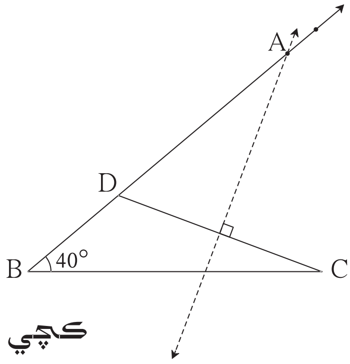
مثال (1) Δ ABC ۾ BC = 7.2 س م ، m∠ABC = 40°، AB − AC = 3 س م Δ ABC ڪيو.

حل : پهريائين ڪچي شڪل ڪڍبي .

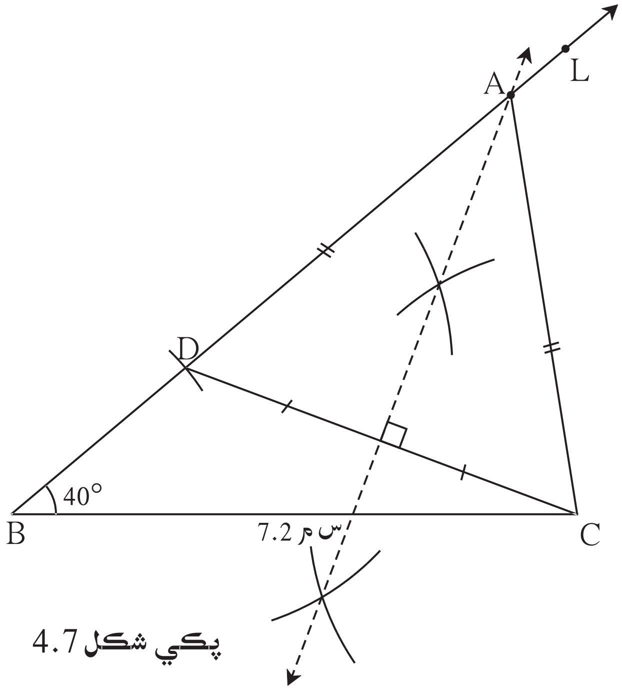


ڪچي شڪل 4.5

سمجهاڻي : 3س م=AB-AC مطلب AB-AC
BC اِهو ٽڪر ڪيدبو B وٽ ڪرڙو BL 40°
تي ڪيدبو ان تي A ٽپڪو ڳولهڻو آهي
3س م=BD اَهڙو ٽپڪو D ڪٽبو
جئين B-D-A ۽ BD=AB=AC=3
AB-AC=3 مليل آهي.
∴ AD = AC
مطلب A اِهو DC جي عمودي اَڌڪ مٿان آهي .
ٽپڪو A اِهو ڪرڙو BL ۽ ٽڪر DC جو
ڇيد ٽپڪو آهي.



ڪچي شڪل 4.6



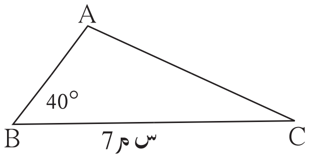
پڪي شڪل 4.7

جوڙجڪ جا ڏاڪا :

(1) ٽڪر 7.2 س م=BC ڪيو
(2) B وٽ ڪرڙو BL 40° تي ڪيو
(3) ڪرڙو BL مٿان ٽپڪو BL اَهڙي ريت ڪٽو
جئين 3س م=BD
(4) ٽڪر CD ڪيڍي، اُنجو عمودي اَڌڪ لهو.
(5) ٽڪر CD جو عمودي اَڌڪ ۽ ڪرڙو
BL جتي ملن، اُن کي A نالو ڏيو .
(6) ٽڪر AC ڪيو
$\triangle$ABC اِهو گهربل ٽڪنڊو آهي.

مثال 2 . ΔABC ڪيو جئن BC = 7 س م، $\angle B = 40^\circ$ ۽ AC - AB = 3 س م ته ΔABC ڪيو

حل : ڪچي شڪل ڪيڏبي



ڪچي شڪل 4.8

BC=7 آهي AB < AC اِن ليڪ ٽڪرتي

ڪرڙو BT تي 40° ڪيڏبو ڪرڙو BT اِن جي

مخالف ڪرڙي مٿان ٽپڪو D ڪٽو جئن

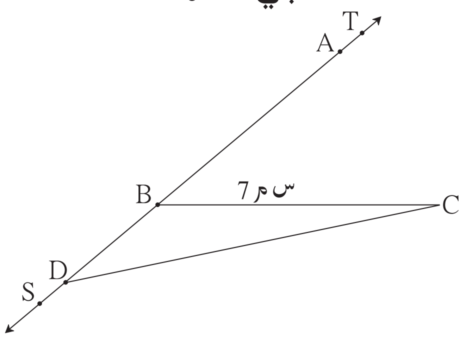
BD=3 س م هاڻي

$$AD = AB + BD = AB + 3 = AC$$

(چو ته AC-AB=3 مليل آهي.)

$$\therefore AD = AC$$

∴ اِهو ٽپڪو A ٽڪر CD جي عمودي اڌڪ مٿان آهي.



ڪچي شڪل 4.9

جوڙجڪ جا ڏاڪا

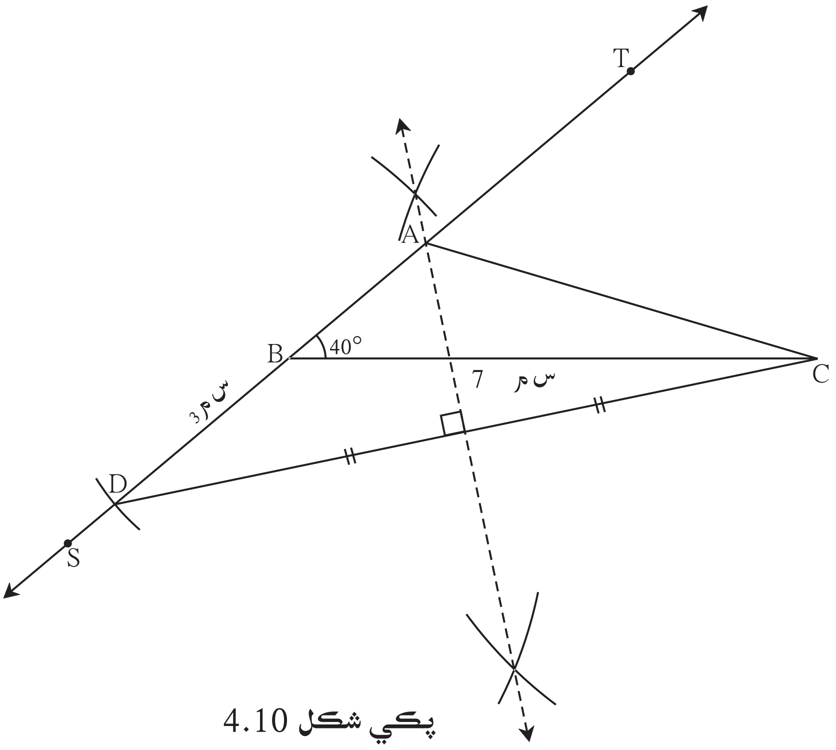
(1) ٽڪر BC اِهو 7 س م ڪيو

(2) ٽپڪي B وٽ 40° تي ڪرڙو BT ڪيو.

(3) ڪرڙو BT جي مخالف ڪرڙي تي D ٽپڪو ڪٽو جئن 3 س م =BD

(4) ٽڪر DC جو عمودي اڌڪ ڪيو

(5) ٽڪر DC جو عمودي اڌڪ ۽ ڪرڙو BT جتي ملن، اُن کي A نالو ڏيو $\triangle ABC$ اِهو گهربل ٽڪندو آهي.



پڪي شڪل 4.10

اَيياس 2 4

1. $\triangle XYZ$ ڪيو جنهن ۾ YZ=7.4 س م، $m\angle XYZ=45^\circ$ ۽ XY-XZ=2.7 س م

2. $\triangle PQR$ ڪيو جنهن ۾ QR=6.5 س م $m\angle PQR=40^\circ$ ۽ PQ-PR=2.5 س م

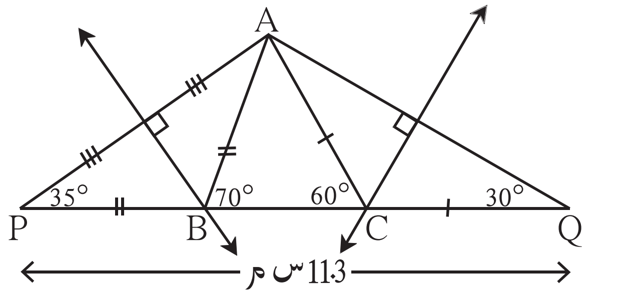
3. $\triangle ABC$ ڪيو جنهن ۾ BC=6 س م، $m\angle ABC=10$ ۽ AC-AB=2.5 س م

جوڙجڪ III

ٽڪنڊي جي گرد ماپ ۽ پايي جو پرواريون ڪندون ملڻ موجب ٽڪنڊو ڪيڙهڻ.

مثال ΔABC ڪيو جنهن ۾ $AB + BC + CA = 11.3$ س م، $\angle B = 70^\circ$ ۽ $\angle C = 60^\circ$ جي ΔABC ڪيو

حل : ڪچي شڪل ڪيندا سين.



ڪچي شڪل 4.11

سمجهاڻي : اِن شڪل ۾ ٽڪر BC مٿان ٽپڪا P ۽ Q اَهڙي نموني ڪنيا جئن

$PB = AB, CQ = AC$

$\therefore\ PQ = PB + BC + CQ = AB + BC + AC = 10$ س م

هاڻي ΔPBA ۾ $PB = BA$

$\therefore\ \angle PAB = \angle APB$ ۾ $\angle PAB + \angle APB = 70^\circ = ABC \ldots.$

(پاهرين اَندرين ڪندن جو سڌيان)

$\therefore\ \angle PAB = \angle APB = 35^\circ$ ساڳئي نموني $\angle CQA = \angle CAQ = 30^\circ$

هاڻي $\triangle PQR$ اِهو ٽڪنڊو ڪيڙهو پوندو اُن جون ٻہ ڪندون ۽ سمائيندڙ پاسو اِنهن جي ڄاڻ آهي پر $BA=BP$ مطلب ٽپڪو B اهو AP جي عمودي اَڌڪ مٿان آهي ۽ $CA=CQ$ مطلب ٽپڪو C اِهو ٽڪر AQ جي عمودي اَڌڪ مٿان آهي مطلب AP ۽ AQ جا عمودي اَڌڪ ڪيڙهڻ سان B ۽ C ٽپڪا ملندا.

جوڙجڪ جا ڏاڪا

(1) ٽڪر 11.3 س م = PQ ڪيو

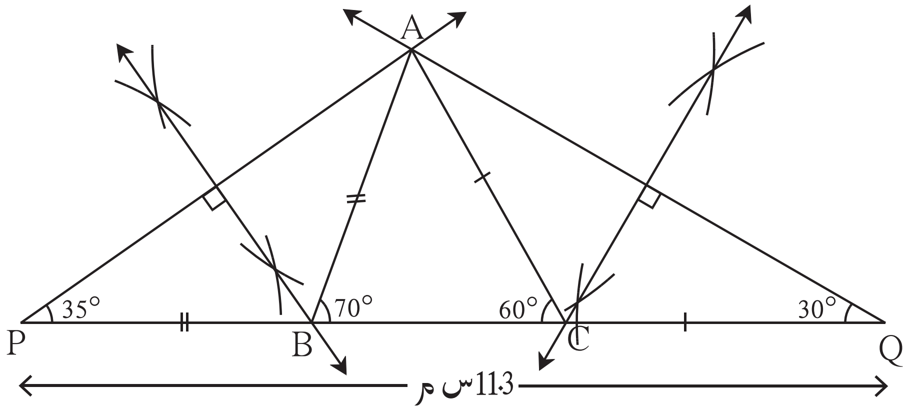
(2) ٽپڪي P وٽ 35° جي ڪنڊ وارو ڪرڻو ڪيو

(3) ٽپڪي Q وٽ 30° جي ڪنڊ وارو ڪرڻو ڪيو

(4) ٻنهي ڪرڻن جو عام ڇيدي ٽپڪو ، اُنکي A نالو ڏيو.

(5) ٽڪر AP ۽ AQ ٽڪر جا عمودي اَڌڪ ڪيو اِهي نمبروار ٽڪر PQ مٿان B ۽ C ٽپڪن وٽ ملندا.

(6) ٽڪر AB ۽ ٽڪر AC ملايو $\triangle ABC$ اِهو گهربل ٽڪنڊو آهي.



پڪي شڪل 4.12

اَڀياس 4.3

1. Δ PQR ڪيو جنھن ۾ $\angle Q = 70^\circ$، $\angle R = 80^\circ$ ۽ PQ + QR + PR = 9.5 س م
2. Δ XYZ ڪيو جنھن ۾ $\angle Y = 58^\circ$، $\angle X = 46^\circ$ ٽڪنڊي جي گرد ماپ 10.5 س م آهي
3. Δ LMN ڪيو جنھن ۾ $\angle M = 60^\circ$، $\angle N = 80^\circ$ ۽ LM + MN + NL = 11 س م

گڏيل اَڀياس 4

1. Δ XYZ ڪيو جنھن ۾ XY + XZ = 10.3 س م، YZ = 4.9 س م، $\angle XYZ = 45^\circ$
2. Δ ABC ڪيو جنھن ۾ AB + BC + AC = $\angle C = 60^\circ$, $\angle B = 70^\circ$ = 11.2 س م
3. هڪ ٽڪنڊو ڪيو جنھن ۾ گرد ماپ 14.4 س م ۽ پاسا 4 : 3 : 2 ۾ هجن.
4. ΔPQR ڪيو جنھن ۾ 2.4 س م = PQ-PR، 6.4 س م = QR ۽ $\angle PQR=55^\circ$

ICT Tools or Links

ڪمپيوٽر جي مدد سان يا جيئو جبرا اِن سافٽ ويئر جي مدد سان ٽڪنڊي جي رچنا ڪيو جوڙجڪ III اِهو جُدا جُدا طريقن رستي ڪيو ۽ اَڀياس ڪري آنند وٺو.

5 چوڪنڊا

اَچو تہ سکون

- پوروچوٽ پاسو چوڪنڊو
- پورو چوٽ پاسي چوڪنڊي جون آزمائشون
- پور - پاسو چوڪنڊو
- مستطيل
- چورس
- پور عمودي چوڪنڊو
- ٽڪنڊي جي ٻن پاسن جي مڌيہ ٽپڪن جو سڌيان

ذرا ياد ڪريو

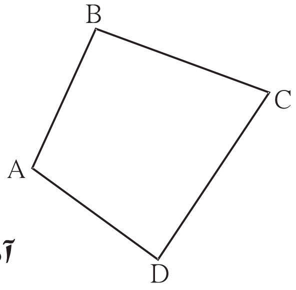
1. ABCD□ اِن چوڪنڊي حوالي هيٺ جوڙا لکو

پروارن پاسن جا جوڙا :
(1) ... ، ... (2) ... ، ...
(3) ... ، ... (4) ... ، ...

پرواريِن ڪندن جا جوڙا
(1) ... ، ... (2) ... ، ...
(3) ... ، ... (4) ... ، ...

آمهون سامهون پاسن جا جوڙا (1) ..... ، ..... (2) ..... ، .....

آمهون سامهون ڪندن جا جوڙا (1) ..... ، ..... (2) ..... ، .....



شڪل 5.1

هاڻي منهنجو قسم ۽ خاصيتون ڏسو

مان چوڪنڊو آهيان

- منهنجي آمهون سامهون پاسي جا جوڙا پوروچوٽ
  - منهنجون خاصيتون
  - آمهون سامهون پاسا نهڪندڙ
  - آمهون سامهون ڪندون
  - اُريب . . . .
- منهنجون سڀ ڪندون ڳوني
  - منهنجون خاصيتون
  - آمهون سامهون پاسا . . .
  - اُريب. . . . .
- منهنجا سڀ پاسا برابر
  - منهنجون خاصيتون
  - آمهون سامهون ڪندون. . . .
  - اُريب. . . . .
- منهنجا سڀ پاسا ۽ ڪندون برابر
  - منهنجون خاصيتون
  - اُريب. . . . . .

مان پورو عمودي چوڪنڊو آهيان

توهان کي چوڪندن جا قسم ۽ اُنهن جون خاصيتون خبر آهن پاسا ۽ ڪندون ماپڻ، موڙي ڪري ماپڻ جهڙيون مشغوليون ۾ اُهي سڀ سمجهيا آهن. اِهي خاصيتون دليلن رستي ڪيئن ثابت ڪجن اِهو اَسان اڀياس ڪنداسين.

اِهي خاصيتون دليلن رستي ثابت ڪرڻ کي انهن خاصيتن جا سڌيان چئبو آهي.
مستطيل، پورپاسو چوڪندو ۽ چورس اِهي سڀ پوروچوٽ پاسي چوڪندا آهن. ڪيئن ، اِهو هن پاٺ ۾توهان سمجهندا اِن ڪري اَڀياس جي شروعات ۾توهان سمجهندا اِن ڪري اَڀياس جي شروعات پوروچوٽ پاسي چوڪندي کان ڪنداسين.

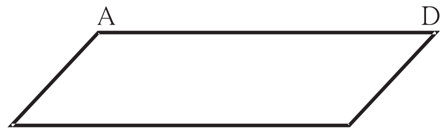
چاڪي وٺون

پوروچوٽ پاسو چوڪندو (Parallelogram)

جنهن چوڪندي ۾آمهون سامهون پاسا پوروچوٽ هجن ، اُن کي پوروچوٽ پاسو چوڪندو چئبوآهي. سڌيان ثابت ڪرڻ لاءِ ، مثال حل ڪرڻ لاءِ اَسان کي اِن چوڪندي جي شڪل هرگهڙي ڪيڏڻي پوي ٿي اِن ڪري اِها شڪل ڪيئن ڪيجي ، اِهو ڏسون

طريقو I :

- پهرياڻين AB ۽ BC ٽڪر اِهي پوروچوٽ هئڻ گهرجن اِنڪري ٽبڪي A وٽان BC جي پوروچوٽ ٽڪر ڪيو.
- ٽڪر AD ۽ ٽڪر BC اِهي پوروچوٽ هئا گهرجن اِن ڪري ٽبڪي A وٽان BC جي پوروچوٽ ٽڪر ڪيو.

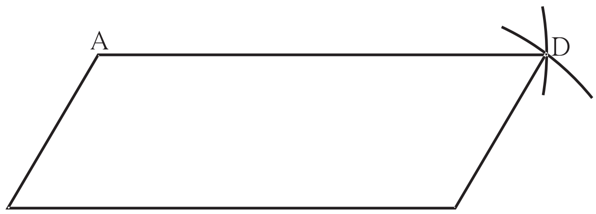


شڪل 5.2

- ساڳئي نموني ٽڪر DC || AB هجي C وٽان AB جي پوروچوٽ ٽڪر ڪيو بئي ٽڪر C وٽ ملن، اَهڙي نموني چوڪندو ABCD پوروچوٽ پاسو چوڪندو ٿيندو.

طريقو II :

- AB ۽ BC ڪهڙي ڊيگهه جا، ڪهڙي ٻه ڪنڊ تي هجن، اِهي ٽڪر ڪيو
- ڪمپاس ۾ BC مفاصلو ڪٽي ۽ A مرڪز ڪٽي هڪ ڪمان ڪيو.
- ڪمپاس ۾ AB مفاصلو ڪٽي ۽ C مرڪز ڪٽي پهرين ڪمان کي ڪپيندڙ هڪ ڪمان ڪيو اُنکي نالو D ڏبو
- اَهڙي نموني □ABCD پوروچوٽ پاسو چوڪندو آهي.



شڪل 5.3

ٻئين طريقي ۾ڪڍيل چوڪنڊي ۾اَسان آمهون سامهون پاسا برابر هجن، اَهڙو چوڪنڊو ڪڍيو آهي. اِن ۾آمهون سامهون پاسا برابرهوندا آهن اِهو سڌيان جي ثابتيءَڪان پوءِ توهان سمجهندا.

مشغولي I پيروارا پاسا جدا جدا ڏيگهه ۽ اُنهن وچ۾جُدا جُدا ڪندن جون ماپون ڪٽي پنج جدا جدا پوروچوت پاسا چوڪنڊا ڪڍو

پوروچوت پاسي چوڪنڊي جا سڌيان ثابت ڪرڻ لاءِ ٽڪندن جو نهڪڻ اِستعمال ڪجي ٿو. اِن لاءِ هيٺ ڏنل مشغولي ڪريو.

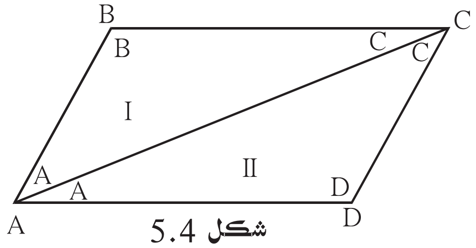
مشغولي II

- هڪ ٿلهي ڪاغذ مٿان پوروچوت پاسو چوڪنڊو شڪل 5.4 ABCD□ڪڍو شڪل موجب نوڪي ٽپڪن جا نالا چوڪنڊي جي اَندرلکو.
- اُريب AC وٽ موڙيΔADC ۽ΔCBA اِهي هڪ ٻئي سان پوري طرح نهڪي اَچن ٿا چا؟
- ABCD□ ۾اُريبAC وٽ ڪپيΔADC ۽ΔCBA الڳ ڪريو. ΔCBA کي گُهمائي ΔADC مٿان رکي اِهو نهڪي اَچي ٿو چا؟

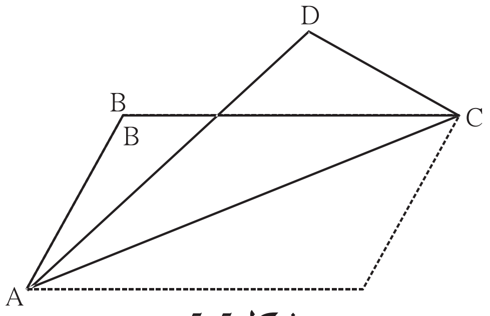
چا ٿو ياد اَچي؟

ΔCBA جوڪهڙو پاسوΔADC جي ڪهڙي پاسي سان نهڪي اَچي ٿو ؟ ΔCBAجي ڪهڙي ڪنڊΔCBAجي ڪهڙي ڪنڊ سان نهڪي اَچي ٿي؟

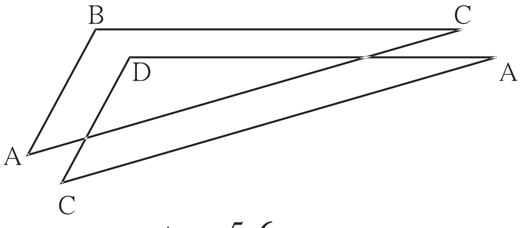
پاسو DC اِهو پاسو AB سان ۽ پاسو AD اِهو پاسو CBسان نهڪي اَچي ٿو ساڳئي نمونيB∠ اِها D∠ سان نهڪي اَچي ٿي.



شڪل 5.4



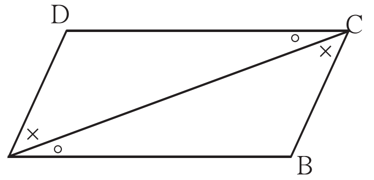
شڪل 5.5



5.6 شڪل

مطلب پوروچوت پاسي چوڪنڊي ۾آمهون سامهون پاسا ۽ آمهون سامهون ڪندون نهڪندڙ هونديون آهن اِها خاصيت اَسان ثابت ڪنداسين.

سڏيان 1. پوروچوٽ چوڪنڊي ۾ مخالف پاسا (آمهون سامهون پاسا) ٺهڪندڙ هوندا آهن ۽ مخالف ڪنڊون ٺهڪندڙ هونديون آهن.



شڪل 5.7

ڏنل : $\square ABCD$ پوروچوٽ پاسو چوڪنڊو آهي

مطلب $AB \parallel DC$ پاسو، پاسو $AD \parallel BC$ پاسو.

ثابت ڪرڻ ته : ٽڪر $AD \cong$ ٽڪر BC؛ ٽڪر $DC \cong$ ٽڪر AB

$\angle ADC \cong \angle CBA$، ۽ $\angle DAB \cong \angle BCD$.

جوڙجڪ : اُريب AC ڪيو

ثابتي : ٽڪر $DC \parallel$ ٽڪر AB ۽ اُريب AC اِها چيدڪي آهي.

$\therefore \angle BAC \cong \angle DCA$ .... (1) ⎫ ..... متبدل ڪنڊون

۽ $\angle BCA \cong \angle DAC$ .... (2) ⎭

هاڻي، ΔADC ۽ ΔCBA

$\angle BCA \cong \angle DAC$ .... مساوت (2) مان

$\angle BAC \cong \angle DCA$ .... مساوت (1) مان

پاسو $AC \cong$ پاسو CA .... عام پاسو

$\therefore \Delta CBA \cong \Delta ADC$ ...... آزمائش

$\therefore$ پاسو $AD \cong$ پاسو CB .... ملهڪندڙ ٽڪنڊن جا نسبتي پاسا

پاسو $DC \cong$ پاسو AB .... ملهڪندڙ ٽڪنڊن جا نسبتي پاسا

ساڳئي نموني ، $\angle ADC \cong \angle CBA$ .... ٺهڪندڙ ٽڪنڊن جو نسبتي ڪنڊون

$\angle DAB \cong \angle BCD$

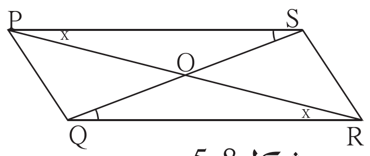
ويچار ڪريو

متئين سڏيان ۾ $\angle DAB \cong \angle BCD$ اِهو ثابت ڪرڻ لاءِ جوڙجڪ ۾ ڪا بدل ڪري سگهجي؟ اِهو ڪيئن ڪنداسين؟

هاڻي هڪ ٻي خاصيت سمجهڻ لاءِ مشغولي ڪنداسين.

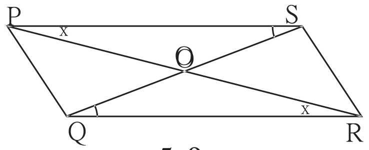
مشغولي:

هڪ $\square PQRS$ پوروچوٽ پاسو چوڪنڊو ڪيو. اُريب PR ۽ QS اُريب ڪيدي، اُن جي چيد ٽٻڪي کي O نالو ڏيو. هرهڪ اُريب جي ڪپل ٻن ڀاڱن کي ماپيو؟ ڇا تو سمجهه ۾ آچي؟



شڪل 5.8

سڌيان : پورچوٽ پاسي چوڪنڊي ۾ اُريب هڪ ٻئي کي اڌن ٿا .



شڪل 5.9

ڏنل : $\square PQRS$ پوروچوٽ پاسو چوڪنڊو آهي اُريب PR ۽ اُريب QS اِهي ٽيڪي O وٽ ملن ٿا.

ثابت ڪرڻ : ٽڪر $RO \cong$ ٽڪر PO ۽ ٽڪر $QO \cong$ ٽڪر SO

ثابتي : ΔPOS ۽ ΔROQ ۾

$\angle ORQ \cong \angle OPS$ .... متبدل ڪنڊون

پاسو $PS \cong$ پاسو RQ ..... پوروچوٽ پاسي چوڪنڊ جا مخالف پاسو

$\angle RQO \cong \angle PSO$ .... (متبدل ڪنڊون)

$\therefore \Delta POS \cong \Delta ROQ$ .... ASA (آزمائش)

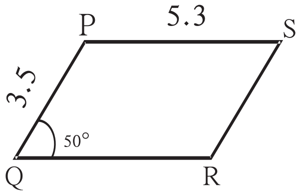
$\therefore$ ٽڪر $PO \cong$ ٽڪر RO .... }
ٽڪر $SO \cong$ ٽڪر QO .... } ......ٺهڪندڙ ٽڪنڊن جا نسبتي پاسا

اِهو ڌيان ۾ رکو

- پوروچوٽ پاسي چوڪنڊي جا مخالف پاسا ٺهڪندڙ هوندا آهن.
- پوروچوٽ پاسي چوڪنڊي جون مخالف ڪنڊون ٺهڪندڙ هونديون آهن.
- پوروچوٽ پاسي چوڪنڊي ۾ اُريب هڪ ٻئي کي اڌن ٿا .

حل ڪيل مثال

مثال (1) $\square PQRS$ ۾ $\angle Q = 50°$ $PS = 5.3$ $PQ = 3.5,$ ته $\square PQRS$ پاسي چوڪنڊي جا باقي پاسا ۽ ڪنڊون لکو.



شڪل 5.10

حل : $\square PQRS$ پوروچوٽ چوڪنڊو آهي .

$\therefore \angle Q + \angle P = 180°$ .... اَندريون ڪنڊون

$\therefore\ 50° + \angle P = 180°$

$\therefore\ \angle P = 180° - 50° = 130°$

هاڻي، $\angle P = \angle R$ ۽ $\angle Q = \angle S$ .... مخالف ڪنڊون

$\therefore\ \angle R = 130°$ ۽ $\angle S = 50°$

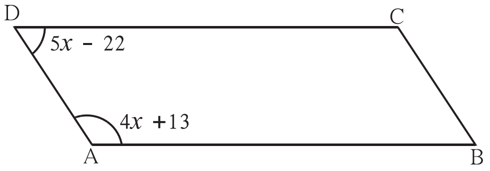
هاڻي، $PS = QR$ ۽ $PQ = SR$ .... مخالف پاسا

ساڳئي نموني $\therefore$ $QR = 5.3$ ۽ $SR = 3.5$

مثال (2) □ABCD پوروچوٽ پاسي چوڪنڊي ۾ □ABCD ۾ $\angle A = (4x+13)^\circ$ ۽ $\angle D = (5x-22)^\circ$ تہ $\angle B$ ۽ $\angle C$ ماپون لکو

حل : پوروچوٽ پاسي چوڪنڊي ۾ پرواريون ڪنڊون تتمهہ هونديون آهن.

$\angle A$ ۽ $\angle D$ پرواريون ڪنڊون آهن.



شڪل 5.11

$\therefore\ (4x+13)^\circ + (5x-22)^\circ = 180$

$\therefore\ 9x - 9 = 180$

$\therefore\ 9x = 189$

$\therefore\ x = 21$

$\therefore\ \angle A = 4x+13 = 4\times 21 + 13 = 84+13 = 97^\circ \quad \therefore\ \angle C = 97^\circ$

$\angle D = 5x - 22 = 5\times 21 - 22 = 105 - 22 = 83^\circ \quad \therefore\ \angle B = 83^\circ$

اڀياس 5.1

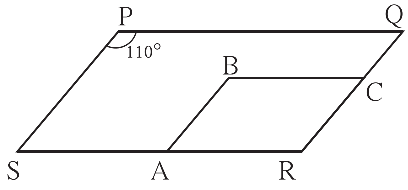
1. پوروچوٽ پاسي □WXYZ ۾ اُريب O وٽ ملن ٿا. $\angle XYZ = 135^\circ$ تہ $\angle XWZ = ?$، $\angle YZW = ?$ جيڪڏهن $l(OY) = 5$ س م $l(WY) = ?$

2. پوروچوٽ پاسي چوڪنڊي ABCD ۾ $\angle A = (3x+12)^\circ$, $\angle B = (2x-32)^\circ$ تہ $\angle C$ ۽ $\angle D$ جون ماپون لکو.

3. هڪ پوروچوٽ پاسي چوڪنڊي جي گرد ماپ 150 س م آهي ۽ هڪ پاسو ٻئي کان 25 س م وڏو آهي تہ سيني پاسن جي ڊيگهہ لکو.

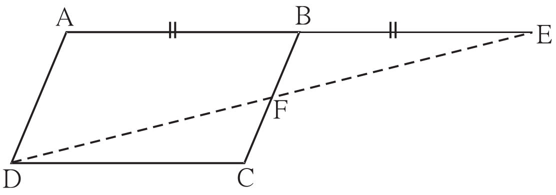
4. هڪ پوروچوٽ پاسي چوڪنڊي ۾ پرواريون ڪنڊون 1:2 ۾ آهن تہ سيني ڪنڊن جون ماپون لکو.

*5. پوروچوٽ پاسي چوڪنڊي ۾ □ABCD جا اُريب O وٽ ملن ٿا. $AO = 5,\ BO = 12$ ۽ $AB = 13$ تہ ڇا □ABCD اِهو پورو پاسو چوڪنڊو آهي ڇا؟



شڪل 5.12

6. شڪل 5.12 ۾ □PQRS ۽ □ABCR اِهي ٻئي پوروچوٽ پاسي چوڪنڊا آهن. $\angle P = 110^\circ$ تہ □ABCR سڀ ڪنڊون لکو.



شڪل 5.13

7. شڪل 5.13 ۾ □ABCD هڪ پوروچوٽ پاسو چوڪنڊو آهي. ڪرڙو AB مٿان E ڪٽو جيئن BE = AB هجي تہ ثابت ڪريو ليڪ ED اِهي ٽڪر BC کي F وٽ اڌ ڪري ٿي.

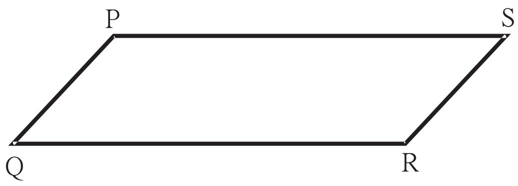
ذرا ياد ڪريو

پوروچوت ليڪن جون آزمائشون

1. ٻن ليڪن ۾ اُنهن جي چيدڪي وسيلي ٺهيل نسبتي ڪنڊن جو هڪ جوڙو ٺهڪندڙ هوندو تہ اُهي ٻئي ليڪون هڪ ٻئي جي پوروچوت هونديون آهن.
2. ٻن ليڪن ۾ اُنهن جي چيدڪي وسيلي ٺهيل متبدل ڪنڊن جو هڪ جوڙو ٺهڪندڙ هوندو تہ اُهي ٻئي ليڪون هڪ ٻئي جي پوروچوت هونديون آهن.
3. ٻن ليڪن ۾ اُنهن جي چيدڪي وسيلي ٺهيل اَندرين ڪنڊن جو هڪ جوڙو تتمھ هوندو تہ اُهي ٻئي ليڪون هڪ ٻئي جي پوروچوت هونديون آهن.

چاڙهي وٺون

پوروچوت پاسي چوڪنڊي جون آزمائشون (Tests for parallelogram)



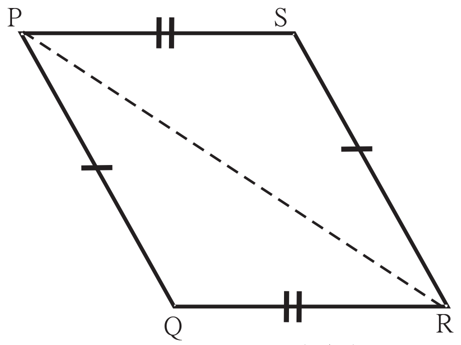
شڪل 5.14

سمجهو □PQRS ۾ PS=QR ۽ PQ=SR آهي □PQRS اهو هڪ پوروچوت پاسو چوڪنڊو آهي اِهو ثابت ڪرڻو آهي اِن لاءِ چوڪنڊي جي پاسي جا ڪهڙا جوڙا پوروچوت هجن، اِهو ٻڌائڻو پوندو؟

اُن لاءِ پوروچوت ليڪن جي ڪهڙي آزمائش اِستعمال ڪبي؟

اُن آزمائش لاءِ ضروري ڪنڊن کي حاصل ڪرڻ لاءِ ڪهڙي ليڪ چيدڪي ڪري ڪم آڻبي!

سِڌيان : ڪنهن چوڪنڊي جا مخالف پاسا ٺهڪندڙ هوندا تہ پوروچوت پاسي چوڪنڊو هوندو آهي .



شڪل 5.15

ڏنل : □PQRS ۾

پاسو PS ≅ پاسو QR

پاسو PQ ≅ پاسو SR

ثابت ڪرڻ تہ : □PQRS هڪ پوروچوت پاسي چوڪنڊو آهي .

جوڙجڪ : اُريب PR ڪڍو.

ثابتي : Δ SPR ۽ Δ QRP ۾ ,

پاسو SP ≅ پاسو QR .... ڏنل

پاسو SR ≅ پاسو QP .... ڏنل

پاسو PR ≅ پاسو RP .... عام پاسو

$\therefore \Delta SPR \cong \Delta QRP$ ...... آزمائش

$\therefore \angle SPR \cong \angle QRP$ .... ٺهڪندڙ ٽڪنڊن جون نسبتي ڪنڊون .

تيئن $\angle PRS \cong \angle RPQ$ ..... اهي چيدڪي تي ٺهيل متبدل ڪنڊون آهن.

$\angle SPR$ ۽ $\angle QRP$ اهي چيدڪي PR تي ٺهيل متبدل ڪنڊون آهن.

∴ پاسو PS || پاسو QR ......(I) متبدل ڪندون آزمائش

ساڳئي نموني $\angle$PRS ۽ $\angle$RPQ اهي چيدئي .

PR وسيلي ٺهيل متبدل ڪندون آهن.

∴ پاسو PQ || پاسو SR ......(II) متبدل ڪندون پاسو.

∴ (I) ۽ (II) مان □PQRS هڪ پوروچوٽ پاسي آهي

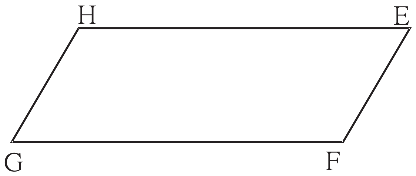
شروعات ۾ پوروچوٽ پاسي چوڪندي ڪيڏڻ جا ٻه طريقا ڏنل آهن ٻئين طريقي ۾ عملي ڪم ۾ مخالف پاسا برابر هوندڙ چوڪندو آهي اِن ڪي پوروچوٽ پاسو چوڪندو چئبو. اِهو ڌيان ۾ آيو ڇا ؟

سڌيان : **جيڪڏهن ڪنهن چوڪندي ۾ مخالف ڪندون ٺهڪندڙ هونديون ته اُهو چوڪندو پوروچوٽ پاسو چوڪندو آهي. 'ڏنل'، 'ثابت ڪرڻ ته' ۽ 'ثابتي' توهان خال پري پورا ڪريو.**

ڏنل : □EFGH ۾ $\angle E \cong \angle G$

$\angle$.......... $\cong$ $\angle$..........

ثابت ڪرڻ ته : □EFGH ۽ ....



شڪل 5.16

ثابتي : سمجهو ته $\angle E = \angle G = x$ ۽ $\angle H = \angle F = y$

چوڪندي جي ڪندن جي ماپ جو جوڙ ..... هوندو آهي.

∴ $\angle E + \angle G + \angle H + \angle F =$ ....

∴ $x + y +$ .... $+$ .... $=$ ....

∴ $\Box x + \Box y =$ .....

∴ $x + y = 180^\circ$

∴ $\angle G + \angle H =$ ....

تڪرHE ۽ تڪرGF اِنهن جي چيدئي ڪري ٺهيل $\angle$G ۽ $\angle$H اِهي اندريون ڪندون تيارٿيون آهن.

∴ پاسو HE || پاسو GF .... (I) اندريون ڪندون آزمائش

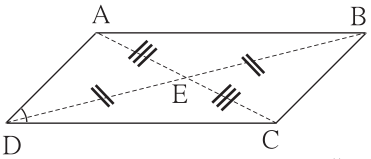
ساڳئي نموني $\angle G + \angle F =$ ....

∴ پاسو .... || پاسو .... (II) اَندريون ڪندون آزمائش

∴ (I) ۽ (II) ۾ □EFGH .... آهي

سڌيان : جيڪڏهن ڪنهن چوڪنڊي ۾ اُريب هڪ ٻئي کي اڌن ۾ ٽڪرين ٿا ته اُهو چوڪنڊو پورو چوٽ پاسو چوڪنڊو آهي .

ڏنل : ABCD□ اُريب هڪ ٻئي کي E وٽ هڪ ٻئي اڌن ٿا مطلب ٽڪر CE ≅ ٽڪر AE ۽ ٽڪر DE ≅ ٽڪر BE ثابت ڪرڻ ته : ABCD□ هڪ پورو چوٽ پاسو چوڪنڊو آهي.



شڪل 5.17

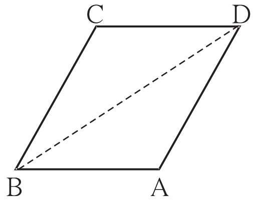
ثابت ڪرڻ ته : ABCD□ هڪ پورو چوٽ پاسو چوڪنڊو آهي.

ثابتي : هيٺ ڏنل سوالن جا جواب ڳولهي، ثابتي پاڻ لکو

1. ٽڪر DC || ٽڪر AB اِهو ثابت ڪرڻ لاءِ متبدل ڪنڊن جي ڪهڙي جوڙو ٺهڪندڙ هئڻ گهرجي؟ اِهو جوڙو ڪهڙي چيڏٽي ۽ سبب ملندو؟
2. متبدل ڪنڊن جو چونڊيل جوڙو اِهي ڪهڙن ٽڪنڊن جون ڪنڊون آهن؟
3. اِنهن مان ڪهڙا ٽڪنڊا ڪهڙي آزمائش موجب ٺهڪندڙ هوندا؟
4. ساڳئي نموني اِهو ويچار ڪري ٽڪر BC || ٽڪر AD اِهو ثابت ڪري سگهجي ٿو ڇا؟

ڪو چوڪنڊو پورو چوٽ پاسو چوڪنڊو آهي ته مٿيان سڌيان اُن ۾ ڪماِئتا هوندا آهن اِنهن سڌيانن کي پورو چوٽ پاسي چوڪنڊي جون آزمائشون سڌيان پورو چوٽ پاسي چوڪنڊي جي آزمائش ڪري واپرائبي آهي.

سڌيان : جيڪڏهن ڪنهن چوڪنڊي ۾ مخالفت پاسن جو هڪ جوڙو ٺهڪندڙ ۽ پورو چوٽ هوندو ته اُهو چوڪنڊو پورو چوٽ پاسو چوڪنڊو آهي.



شڪل 5.18

ڏنل : ABCD□ ۾ ٽڪر DA ≅ ٽڪر CB ۽ ٽڪر DA || ٽڪر CB

ثابت ڪرڻ ته : ABCD□ هڪ پورو چوٽ پاسو چوڪنڊو آهي .

جوڙجڪ : اُريب BD ڪڍيو

ثابتي : هيٺ ٿوري ۾ ڏنل ثابتي توهان وستار ۾ لکي پوري ڪريو.

$\Delta\ ADB \cong \Delta\ CBD$ .... آزمائش

$\therefore\ \angle ABD \cong \angle CDB$ ..... ٺهڪندڙ ٽڪنڊن جون نسبتي ڪنڊون

$\therefore$ ٽڪر CD || ٽڪر BA ..... متبدل ڪنڊون آزماش

اِهو ڌيان ۾ رکو

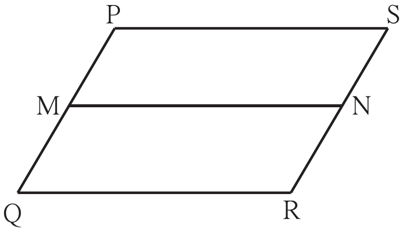
- جنهن چوڪنڊي ۾ مخالف ڪنڊن جا جوڙا ٺهڪندڙ هوندا آهن اُهو چوڪنڊو پورو چوٽ پاسو چوڪنڊو هوندو آهي
- جنهن چوڪنڊي ۾ مخالف پاسن جا جوڙا ٺهڪندڙ هوندا آهن، اُهو چوڪنڊو پوريچوٽ پاسو چوڪنڊو هوندو آهي.
- جنهن چوڪنڊي ۾ اُريب هڪ ٻئي کي اڌن ٿا اُهو چوڪنڊو پوروچوٽ پاسو چوڪنڊو هوندو آهي.
- جنهن چوڪنڊي ۾ مخالف پاسن جو هڪ جوڙو ٺهڪندڙ ۽ پوروچوٽ هوندو آهي، اُهو چوڪنڊو پورو چوٽ پاسو چوڪنڊو هوندو آهي.

ويچار ڪريو :

ڪاپي ۾ ڇپيل ليڪون هڪ ٻئي جي پوروچوٽ هونديون آهن اِنهن ليڪن جو اِستعمال ڪري پوروچوٽ پاسو چوڪنڊو ڪيئن ڪڍي سگهجي ٿو؟

حل ڪيل مثال –

مثال (1) □PQRS هڪ پوروچوٽ پاسو چوڪندو آهي. ٽپڪو M اِهو پاسو PQ جو مڌيہ ٽپڪو ۽ ٽپڪو N اهو پاسو RS جو مڌيہ ٽپڪو آهي. ثابت ڪريو تہ □PMNS ۽ □MQRN پوروچوٽ پاسو چوڪندا آهن.



شڪل 5.19

ڏنل : □PQRS پوروچوٽ پاسو آهي. PQ ۽ پاسو RS ۾ M، ۽ N آهي. اِهي مڌيہ ٽپڪا آهن.

ثابت ڪرڻ تہ : □PMNS پوروچوٽ پاسو آهي. □MQRN پوروچوٽ پاسو آهي.

ثابتي : پاسو PQ || پاسو SR

∴ پاسو PM || پاسو SN ...... $(\because P\text{-}M\text{-}Q;\ S\text{-}N\text{-}R)$ ......(I)

ساڳئي نموني PQ = پاسو SR.

∴ $\frac{1}{2}$ پاسو PQ = $\frac{1}{2}$ پاسو SR

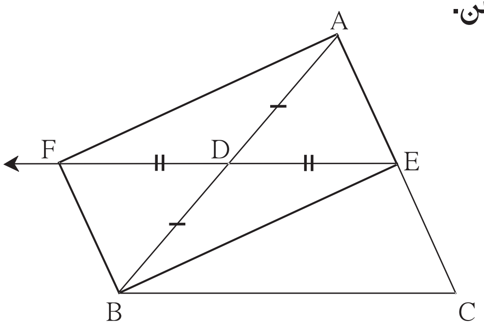
∴ پاسو PM = پاسو SN ..... (∵ M ۽ N اِهي مڌيہ ٽپڪا آهن.)......(II)

∴ (I) ۽ (II) ۾ □PMNQ پوروچوٽ پاسو چوڪندو آهي. ساڳئي نموني آسن ثابت ڪري سگهون ٿا □MQRN هڪ پوروچوٽ پاسي چوڪندو آهي.

مثال (2) △ABC ۾ پاسن AB ۽ AC جا نمبروار مڌيہ ٽپڪا D ۽ E آهن. ڪرڻو ED مٿان ٽپڪو F اٿين آهي تہ ED-DF تہ ثابت ڪريو □AFBE اِهو پوروچوٽ پاسو چوڪندو آهي.

ڏنل : ----------------------

ثابت ڪرڻ تہ : ------------------------



شڪل 5.20

ثابتي : ٽڪر AB ۽ ٽڪر EF اِهي □AFBE جا ______ آهن.

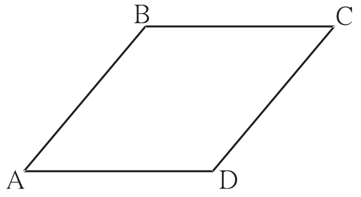
ٽڪر AD ≅ ٽڪر DB...... ______

جوڙجڪ ______ ≅ ٽڪر ______ .... آهن.

∴ □AFBE جا اُريب ______

∴ ______ آزمائش موجوب □AFBE پوروچوٽ پاسو چوڪندو آهي.

مثال (3) هرهڪ پورو پاسو چوڪندو پوروچوٽ پاسو چوڪندو آهي.



شڪل 5.21

ڏنل : □ABCD پورپاسو چوڪندو آهي.

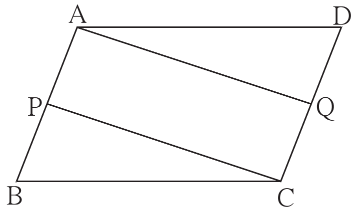
ثابت ڪرڻ تہ : □ABCD پوروچوٽ پاسو چوڪندو آهي.

ثابتي : پاسو AB = پاسو BC = پاسو CD = پاسو DA ڏنل

∴ پاسو AB = پاسو CD ۽ پاسو BC = پاسو AD

□ABCD پوروچوٽ پاسو چوڪندو آهي. (پوروچوٽ پاسي چوڪندي جي مخالف پاسا آزمائش).

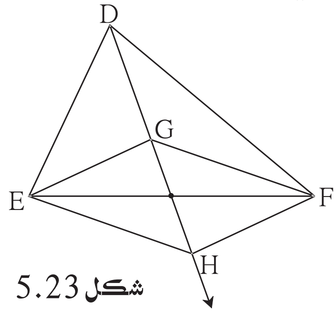
اَڀياس 5.2



شڪل 5.22

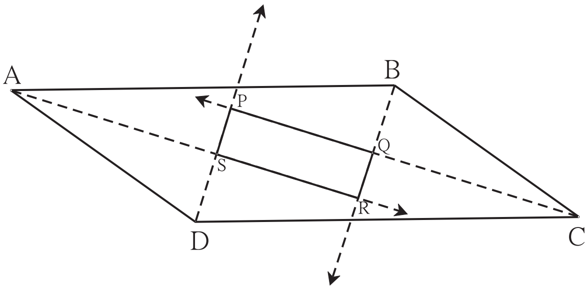
1. شڪل 5.22 ۾ هڪ ☐ABCD پوروچوٽ پاسو چوڪنڊو آهي. ٽِڪو P ۽ ٽِڪو Q اِهي سلسلي ۾ پاسن AB ۽ DC جا مذيہ ٽِڪا آهن. ثابت ڪريو ☐APCQ هڪ پوروچوٽ پاسو چوڪنڊو آهي.

2. هرهڪ مستطيل پوروچوٽ پاسو چوڪنڊو هوندو آهي. اِهو پوروچوٽ پاسي چوڪنڊي جي مخالف ڪنڊن جي آزمائش موجب ثابت ڪري.



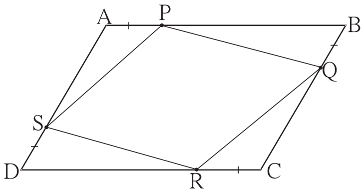
شڪل 5.23

3. شڪل 5.23 ۾ △DEF ٽِڪو G اِهو مذيانن جو عام چيدي ٽِڪو آهي. ڪرڻي DG مٿان H ڪٽو جئين G-H-D ۽ DG=GH هجي. ثابت ڪريو ☐GEHF اِهو پوروچوٽ پاسو چوڪنڊو آهي.



شڪل 5.24

4.* پوروچوٽ پاسي چوڪنڊي جي چئني ڪنڊن جي اڌڪن مان تيار ٿيل چوڪنڊو پوروچوٽ پاسو چوڪنڊو هوندو آهي. اِهو ثابت ڪريو. (شڪل 5.24)



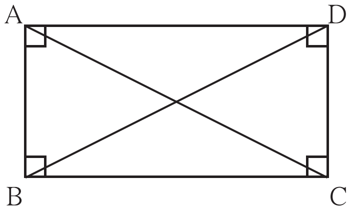
شڪل 5.25

5. پر واري شڪل 5.25 ۾ ☐ABCD هڪ پوروچوٽ پاسي چوڪنڊي ۾ پاسن مٿان ٽِڪا P,Q,R,S اَهڙي ۽ طرح ڪنيل آهن جئين AP=BQ=CR=DS ثابت ڪريو ☐PQRS هڪ پوروچوٽ پاسو چوڪنڊو آهي.

چاڪي وٺون

مستطيل، پورپاسو چوڪنڊو ۽ چورس جون خاصيتون
(Properties of rectangle, rhombus and square)

مستطيل، پورپاسو چوڪنڊو ۽ چورس اِهي سڀ پوروچوٽ پاسا چوڪنڊا آهن. اِنهن ۾ مخالف پاسا برابر هوندا آهن. مخالف ڪنڊون برابر هونديون آهن ۽ اُريب هڪ ٻئي کي اڌن ٿا. اِهي خاصيتون اِنهن چوڪنڊن ۾ هونديون آهن. وڌيڪ خاصيتون اِنهن چوڪنڊن ۾ هونديون آهن اِنهن ڪانسواءِ وڌيڪ خاصيتون اَسان ڏسنداسين اِنهن خاصيتن جي ثابتي ٿورو اَڳيان ڏنل آهي وچڙاڪن جو توهان ويچارڪري توهان اُهي ثابتيون وستارسان لکو.



شڪل 5.26

سڏيان : مستطيل جا اُريب ٺهڪندڙ هوندا آهن.

ڏنل : □ABCD هڪ مستطيل آهي

ثابت ڪرڻ تہ : اُريب AC ≅ اُريب BD

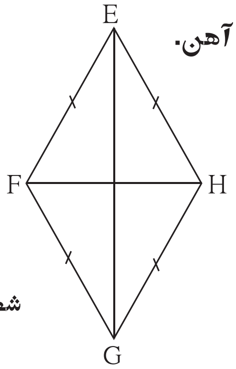
ثابتي : ڏنل ثابتي کي پورو ڪيو. آزمائش

Δ ADC ≅ Δ DAB ...... ٺهڪندڙ ٽڪنڊن جا نسبتي

اُريب AC ≅ اُريب BD.....

سڏيان : چورس جا اُريب ٺهڪندڙ هوندا آهن

’ڏنل‘ ’ثابت ڪرڻ تہ‘ ۽ ’ثابتي‘ توهان لکو.



شڪل 5.27

سڏيان : پورپاسي چوڪنڊي جا اُريب هڪ ٻئي جا عمودي اَڌڪ هوندا آهن.

ڏنل : □EFGH هڪ پورپاسو چوڪنڊو آهي.

ثابت ڪرڻ تہ : (i) اُريب EG اِهو اُريب HF جو عمودي اَڌڪ آهي.

(ii) اُريب HF اِهو اُريب EG جو عمودي اَڌڪ آهي.

ثابتي : (i) ٽڪر EF ≅ ٽڪر EH } ڏنل

ٽڪر GF ≅ ٽڪر GH

ليڪ ٽڪر جي پڇڙ ٽِڪن کان ساڳئي مفاصلي هرهڪ ٽِڪو، اُن ليڪ ٽڪر جي عمودي اَڌڪ مٿان هوندو آهي. مطلب ٽِڪا E۽G اِهي ٽڪر HF جي عمودي اَڌڪ مٿان آهن. بہ جُدا جُدا ٽِڪا هڪ ليڪ ٺاهين ٿا ليڪ EG اِهو اُريب FH جو عمودي اَڌڪ آهي. اَهڙي نموني اُريب HF اِهو اُريب EG جو عمودي اَڌڪ آهي.

هيٺيان سڏيان توهان ثابت ڪريو.

- چورس جا اُريب هڪ ٻئي جا عمودي اَڌڪ هوندا آهن.
- پورپاسي چوڪنڊي جا اُريب اُنهن جي مخالف ڪندن کي اَڌن ٿا.
- چورس جا اُريب اُنهن جي مخالف ڪندن کي اَڌن ٿا.

اِهو ڌيان ۾رکو

- مستطيل جا اُريب ٺهڪندڙ هوندا آهن.
- چورس جا اُريب ٺهڪندڙ هوندا آهن.
- چؤرس جا اريب هڪ ٻئي جا عمودي اڌڪ هوندا آهن.
- چورس ۽ پورپاسي چوڪنڊي جا اُريب هڪ ٻئي جا عمودي اَڌڪ هوندا آهن.
- چورس ۽ پورپاسي چوڪنڊي جا اُريب مخالف ڪندن کي اَڌن ٿا.

اَڀياس 5.3

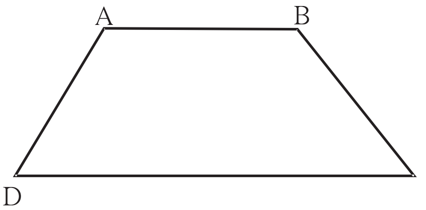
1. ABCD□ اِن مستطيل جا اُريب O وٽ ملن ٿا. جيڪڏهن AC = 8 س م، تہ BO = ؟ لکو. $\angle CAD = 35°$ جيڪڏهن $\angle ACB = ?$ ماپون لکو.
2. PQRS□ هڪ پورپاسو چوڪنڊو آهي $PQ = 7.5$ س م، تہ QR = ؟ لکو. $\angle QPS = 75°$ تہ $\angle PQR = ?$، $\angle SRQ = ?$ ماپون لکو.
3. IJKL □ اِن چورس جا اُريب پاڻ ۾ M وٽ ملن ٿا. $\angle JIK$، $\angle IMJ$ ۽ $\angle LJK$ ماپون لکو.
4. هڪ پورپاسي چوڪنڊي جا اُريب نمبرواري 20س م ۽ 21س م آهن. اُن چوڪنڊي جو پاسو ۽ گرد ماپ لکو.
5. هيٺيان بيان صحيح آهن يا غلط (سبب لکو)
   (i) هرهڪ پوروچوٽ پاسو چوڪنڊو پورو پاسو چوڪنڊو هوندو آهي.
   (ii) هرهڪ پورپاسو چوڪنڊو مستطيل هوندو آهي.
   (iii) هرهڪ مستطيل پوروچوٽ پاسو چوڪنڊو هوندو آهي.
   (iv) هرهڪ چورس مستطيل هوندو آهي.
   (v) هرهڪ چورس پورپاسو چوڪنڊو هوندو آهي.
   (vi) هرهڪ پوروچوٽ پاسو چوڪنڊو مستطيل هوندو آهي.

چاڻي وٺون

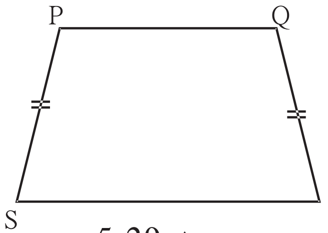
پور عمودي چوڪنڊو (Trapezium)

جنهن چوڪنڊي ۾ مخالف پاسن جو هڪ ئي جوڙ پوروچوٽ هوندو آهي اُن کي پور عمودي چوڪنڊي چئبو آهي. پرواري شڪل ABCD□ ۾ فقط AB ۽ DC اِهي پاسا پاڻ ۾ پوروچوٽ آهن. مطلب اِهو پور عمودي چوڪنڊو آهي. پوروچوٽ ليڪن جي خاصيت موجب $\angle A$ ۽ $\angle D$ تتمهہ ڪندون آهن $\angle B$ ۽ $\angle D$ اِهي بہ تتمهہ ڪندون آهن

جيڪڏهن پور عمودي چوڪنڊي ۾ اَڻ پوروچوٽ پاسا نهڪندڙ هوندا آهن تہ اُنکي ٻيور پاسو پور عمودي چوڪنڊو (Isosceles trapezium) چئبو آهي.



شڪل 5.28

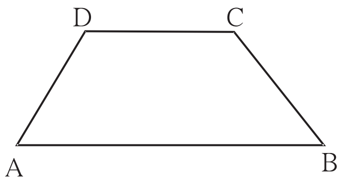


شڪل 5.29

ڪنهن بہ پور عمودي چوڪنڊي ۾ اَڻ پوروچوٽ پاسن جي مذيہ ٽٻڪن مان لنگهندڙ ليڪ ٽڪرکي، اُن چوڪنڊي جو مذيان چئبو آهي.

حل ڪيل مثال :

مثال (1) $\square ABCD$ ۾ ڪُنڊن جون ماپون سلسلي ۾ $8 : 7 : 5 : 4$ ۾ آهن تہ ثابت ڪريو $\square ABCD$ اِهو پورعمودي چوڪنڊو آهي.



شڪل 5.30

حل : سمجھو، $\angle A, \angle B, \angle C, \angle D$ ۽ جون نمبروار ماپون $(4x)^\circ, (5x)^\circ, (7x)^\circ, (8x)^\circ$ ٿينديون چوڪنڊي جي سڀني ڪنڊن جي ماپن جو جوڙ 360° هوندو آهي.

$\therefore\ 4x + 5x + 7x + 8x = 360$

$\therefore\ 24x = 360 \qquad \therefore\ x = 15$

$\angle A = 4 \times 15 = 60^\circ, \quad \angle B = 5 \times 15 = 75^\circ, \quad \angle C = 7 \times 15 = 105^\circ$

۽ $\angle D = 8 \times 15 = 120^\circ$

۽ $\angle B + \angle C = 75^\circ + 105^\circ = 180^\circ$

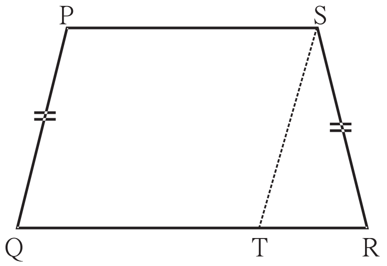
$\therefore$ پاسو $CD \parallel$ پاسو BA ......(I)

$\angle B + \angle A = 75^\circ + 60^\circ = 135^\circ \neq 180^\circ$

$\therefore$ پاسو BC هاڻي پاسو AD صرف پاڙ ۾ پوروچوٽ آهن. ....(II)

$\therefore$ $\square ABCD$ اِهو عمودي ٽڪنڊو آهي. ....(I) ۽ (II)

مثال (2) $\square PQRS$ ۾ پاسو $PS \parallel$ پاسو QR ۽ پاسو $PQ \cong$ پاسو SR،
پاسو $QR >$ پاسو PS ثابت ڪريو $\angle PQR \cong \angle SRQ$



شڪل 5.31

ڏنل : $\square PQRS$ پاسو $PS \parallel$ پاسو QR
۽ پاسو $PQ \cong$ پاسو SR

ثابت ڪرڻ تہ : $\angle PQR \cong \angle SRQ$

جوڙجڪ : ٽُبڪي S وٽان پاسو PQ وٽ ڪپيندڙ ليڪ ٽڪر ڪڍو
پاسو QR ۽ پاسو T ۾

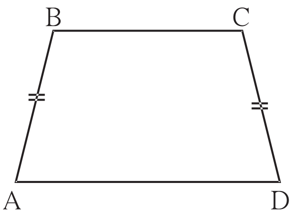
ثابتي : $\square PQRS$ ۾ ،
ٽڪر $PS \parallel$ ٽڪر QT .... ڏنل ۽ $Q-T-R$
ٽڪر $PQ \parallel$ ٽڪر ST .... جوڙجڪ
$\therefore$ $\square PQTS$ اهو پوروچوٽ پاسو چوڪندو آهي.
$\therefore\ \angle PQT \cong \angle STR$ ..... (نسبتي) (I)
ٽڪر $PQ \cong$ ٽڪر ST هاڻي
ٽڪر $PQ \cong$ ٽڪر SR ...... ڏنل
$\therefore$ ٽڪر $ST \cong$ ٽڪر SR
$\therefore\ \angle STR \cong \angle SRT$ ..... ٻپورپاسو ٽڪنڊو سڏيان (II)
$\therefore\ \angle PQT \cong \angle SRT$ .... (I) ۽ (II)
$\therefore\ \angle PQR \cong \angle SRQ$ .... $Q-T-R$.

اِن مان ثابت ٿئي ٿو تہ ٻپورپاسو پورعمودي چوڪنڊي ۾ پايي جون ڪنڊون ٺهڪندڙ هونديون آهن.

اَڀياس 5.4

.1 □IJKL ۾ پاسو IJ || پاسو KL ته ∠J ته ∠K = 53° ته ∠I = 108° ۽ ∠L جون ماپون لهو.

.2 □ABCD ۾ پاسو BC || پاسو AD ته پاسو AB ≅ پاسو DC ته ∠A = 72° ته ∠B ۽ ∠D جون ماپون لهو.



شڪل 5.32

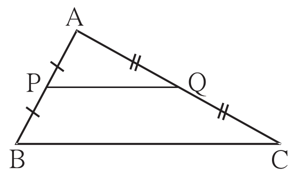
.3 شڪل 5.32 ۾ □ABCD ۾ پاسو BC < پاسو AD
پاسو BC || پاسو AD جون ماپون لهو.
پاسو BA ≅ پاسو CD
ته ∠ABC ≅ ∠DCB ثابت ڪريو .

چاڙهي وٺون

ٽڪنڊي جي ٻن پاسن جي مڊيءَ ٽپڪن جو سڌيان (Theorem of midpoints of two sides of a triangle)

سڌيان : ٽڪنڊي جي ڪهڙن به ٻن پاسن جي مڊيءَ ٽپڪن کي ملائيندڙ ٽڪر ٽئين پاسي پوروچوٽ هوندو آهي ۽ اُنجو اڌ هوندو آهي.

ڏنل : △ABC ۾ P ۽ Q نمبروار پاسن AB ۽ AC جا مڊيءَ ٽپڪا آهن.

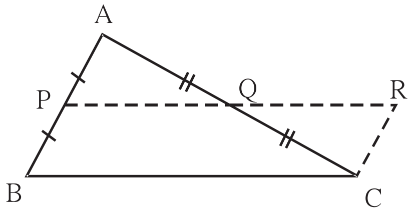


شڪل 5.33

ثابت ڪرڻ ته : ٽڪر PQ || ٽڪر BC

۽ $PQ = \frac{1}{2}$ BC

جوڙجڪ : ٽڪر PQ اِهو ٽپڪي R تائين وڌايو.
جئن QR = PQ هجي ٽڪر RC ملايو.



شڪل 5.34

ثابتي : Δ AQP ۽ Δ CQR ۾
ٽڪر PQ ≅ ٽڪر QR ...... جوڙجڪ
ٽڪر AQ ≅ ٽڪر QC ...... ڏنل
∠AQP ≅ ∠CQR ..... نوڪي ڪندون
∴ Δ AQP ≅ Δ CQR .... آزمائش
∠PAQ ≅ ∠RCQ ..... (1)ٺهڪندڙ ٽڪنڊن جون نسبتي ڪندون
∴ ٽڪر AP ≅ ٽڪر CR ......(2) ٺهڪندڙ ٽڪنڊن جا نسبتي پاسا
مساوات (1) مان ليڪ AB || ليڪ CR.........متبدل ڪندون آزمائش
مساوات (2) مان ليڪ AP ٽڪر CR
AP ≅ ليڪ PB ≅ ليڪ CR ۽ ٽڪر PB || ٽڪر CR
∴ □PBCR پورو چوٽ پاسي چوڪندو آهي.
∴ ليڪ PQ اليڪ BC ۽ BC = PR (مخالف پاسا ٺهڪندڙ هوندا آهن)

$PQ = \frac{1}{2}\ PR$ ...... رچنا

$\therefore\ PQ = \frac{1}{2}\ BC \qquad \because\ PR = BC$

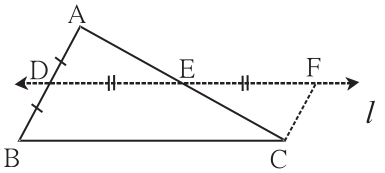
ٽڪنڊي جي ٻن پاسن جي مڌيہ ٽپڪن جو اُبتڙ سڌيان

سڌيان : ٽڪنڊي جي هڪ پاسي جي مڌيہ ٽپڪي مان لنگهندڙ ۽ ٻئي پاسي جي پوروچوٽ ٽڪرٽئين پاسي کي اڌ ڪري ٿو.

اِن سڌيان لاءِ شڪل، ڏنل، ثابت ڪرڻ تہ ۽ جوڙجڪ ڏنل آهن.

اُنهن جي آڌارتي اِهو سڌيان ثابت ڪريو.

ڏنل : ΔABC ۾ ٽپڪو D اهو پاسو AB جو مڌيہ ٽپڪو آهي. D مان لنگهندڙ ليڪ l BC جي پوروچوٽ اِها AC کي E ٽپڪي وٽ ڪپي ٿي.



شڪل 5.35

ثابت ڪرڻ تہ : $AE = EC$

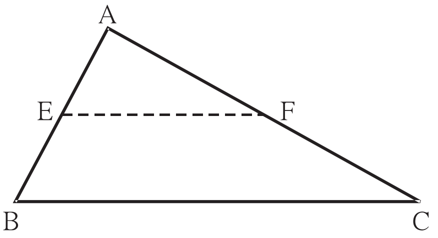
جوڙجڪ : ٽپڪي C مان ليڪ AB جي پوروچوٽ ليڪ ڪڍو . هي l ليڪ تي جتي ملي اُن ٽپڪي کي F نالو ڏيو.

ثابتي : ٽڪرا $l \parallel$ ليڪ BC (ڏنل) ۽ جوڙجڪ واپرايو $\square BCFD$

$\Delta\ ADE \cong \Delta\ CFE$ اِهو ثابت ڪريو پوءِ سڌيان ڪريو.

حل ڪيل مثال

مثال (1) $\Delta\ ABC$ ۾ ٽپڪا AB ۽ AC اِهي نمبروار پاسن E ۽ F جا مڌيہ ٽپڪا آهن $EF = 5.6$ تہ BC لهو .



شڪل 5.36

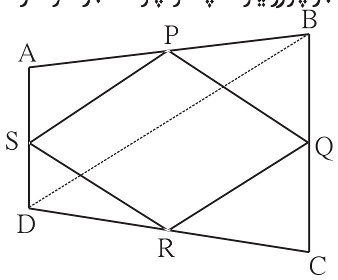
حل : $\Delta\ ABC$ ۾ ٽپڪا E ۽ F ۾ پاسو AB ۽ پاسن AC مڌيہ ٽپڪا آهن.

$EF = \frac{1}{2}\ BC$ .... مڌيہ ٽپڪا سڌيان

$5.6 = \frac{1}{2}\ BC \qquad \therefore\ BC = 5.6 \times 2 = 11.2$

مثال (2) ڪنهن بہ چوڪندي پاسن جي مڌيہ ٽپڪن کي سلسلي ۾ جوڙڻ کان پوءِ ٺهندڙ چوڪندو پوروچوٽ پاسو چوڪندو هوندو آهي.

ڏنل : $\square ABCD$ ۾ AB, BC, CD ۽ AD اهي نمبروار پاسن P, Q, R, S جا مڌيہ ٽپڪا آهن.



شڪل 5.37

ثابت ڪرڻ تہ : $\square PQRS$ هڪ پوروچوٽ پاسو چوڪندو آهي

جوڙجڪ : اُريب BD ڪڍو.

ثابتي : $\triangle ABD$ ۾ S ۽ P نمبروار AD ۽ AB جا مڌيہ ٽپڪا آهن.

∴ مڌيہ ٽپڪا سڌيان ، $PS \parallel DB$ ۽ $PS = \frac{1}{2} BD$ .... (1)

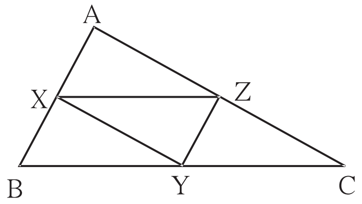
ساڳئي نموني ΔDBC ۾ Q ۽ R نمبروار BC ۽ DC جا مڌيہ ٽپڪا آهن.

$\therefore QR = \frac{1}{2} BD,\ QR \parallel BD$ .... (2)

$\therefore PS \parallel QR,\ PS = QR$ .... مساوت (1) ۽ (2) مان

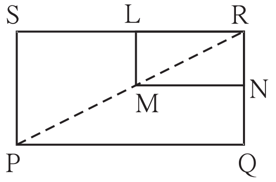
∴ □PQRS هڪ پوروچوٽ پاسو چوڪندو آهي.

اَيپياس 5.5



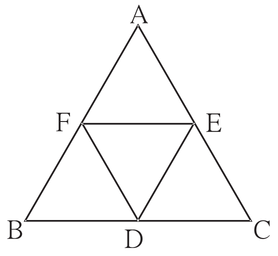
شڪل 5.38

1. شڪل 5.38 ۾ ΔABC جي پاسن AB، پاسو BC ۽ پاسو AC جا مڌيہ ٽپڪا X, Y, Z آهن. $AB = 5$ س م، $AC = 9$ س م ۽ $BC = 11$ س م، XY, YZ, XZ جي ديگھہ لھو.



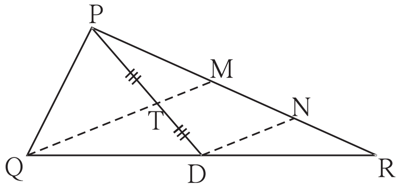
شڪل 5.39

2. شڪل 5.39 ۾ □PQRS ۽ □MNRL اِهي مستطيل آهن ٽپڪو M اِهو PR جو مڌيہ ٽپڪو آهي.
ثابت ڪرڻو (i) $SL = LR$, (ii) $LN = \frac{1}{2} SQ$



شڪل 5.40

3. شڪل 5.40 ۾ ΔABC هڪ ٽپورپاسو ٽڪندو آهي. ٽپڪو F, D, E نمبروارپاسن AB، پاسو BC، پاسو AC جا مڌيہ ٽپڪا آهن ΔFED هڪ ٽپورپاسو ٽڪندو آهي.



شڪل 5.41

4. شڪل 5.41 ۾ٽڪر PD اِها ΔPQR جي مڌيان آهي. ٽپڪو T اِهو PD جو مڌيہ ٽپڪو آهي QT PR جو M ثابت ڪريو $\frac{PM}{PR} = \frac{1}{3}$.
[ٽپ : $QM \parallel DN$ ڪڍو]

گڏيل اَيپياس 5

1. هيٺ ڀھو چونڊ سوالن جا جواب مليل آهن مناسب جواب چونڊيو.

(i) جنهن چوڪنڊي ۾ پروارن پاسن جا سڀ جوڙا ٺهڪندڙ هوندا آهن . اُهو چوڪندو ڪهڙو؟

(A) مستطيل (B) پوروچوٽ پاسي چوڪندو (C) پورعمودي چوڪندو (D) چورس

(ii) هڪ چورس جي اُريب جي ڊيگهہ $12\sqrt{2}$ س م آهي تہ اُن جي گردماپ ڪيتري؟

(A) 24 س م (B) $24\sqrt{2}$ س م (C) 48 س م (D) $48\sqrt{2}$ س م

(iii) هڪ پورپاسي چوڪنڊي ۾ مخالف ڪنڊون $(2x)^\circ$ ۽ $(3x - 40)^\circ$ آهن تہ $x =$ ؟

(A) 100° (B) 80° (C) 160° (D) 40°

2. هڪ مستطيل ۾ پرواري پاسن جي ڊيگهہ 7 س م ۽ 24 س م آهي تہ اُن مستطيل جي اُريب جي ڊيگهہ لهو.

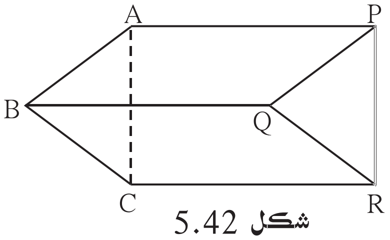
3. چورس جي اُريب جي ڊيگهہ 13 س م آهي تہ چورس جو پاسو لهو.

4. هڪ پوروچوٽ پاسي چوڪنڊي ۾ ٻين پرواري پاسن جو ريشو 3:4 آهي ۽ اُن جي گرد ماپ 112 س م آهي تہ سيني پاسن جي ڊيگهہ لهو.

5. □PQRS هڪ پورپاسو چوڪنڊو آهي اُريب PR ۽ اُريب QS جي نمبروار ڊيگهہ 20س م ۽ 48 س م آهي تہ پاسو PQ لهو.

6. □PQRS مستطيل آهي اِن جا اُريب ٽڪي M وٽ ملن ٿا جيڪڏهن $\angle MPS$ تہ $\angle QMR = 50^\circ$ جي ماپ لهو.

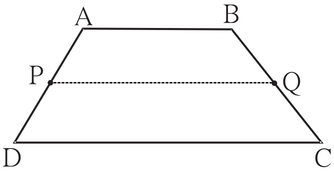
7. پرواري شڪل 5.42 ۾



شڪل 5.42

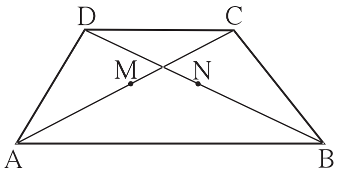
تڪر AB || تڪر PQ، تڪر AB ≅ تڪر PQ،
تڪر AC || تڪر PR، تڪر AC ≅ تڪر PR
ثابت ڪريو
تڪر BC || تڪر QR ۽ تڪر BC ≅ تڪر QR.

*8. پرواري شڪل 5.43 ۾ □ABCD
هڪ پورعمودي چوڪنڊو آهي AB || DC
P ۽ Q اِهي نمبروار پاسن AD ۽ تڪر BC
جا مڌيہ ٽڪا آهن تہ ثابت ڪريو
PQ || AB ۽ $PQ = \frac{1}{2}(AB + DC)$



شڪل 5.43

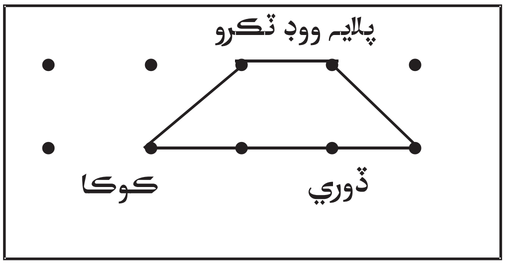
9. پرواري شڪل ۾ 5.44 ۾ □ABCD هي پورعمودي
چوڪنڊو آهي. AB || DC. M ۽
N اِهي نمبروار اُريب AC اُريب DB جا مڌيہ ٽڪا
آهن تہ ثابت ڪريو MN || AB.



شڪل 5.44

مشغولي :

چوڪنڊن جا جدا جدا سڏيان جاچڻ گهربل سامان: 15x10 (س م) هڪ پلايءِ ووڊ ٽڪرو 12 ڪان 15 ٽوڪا، ٿلهي ڏوري جهونو نينڊ ڪارڊ، ڪئنچي.

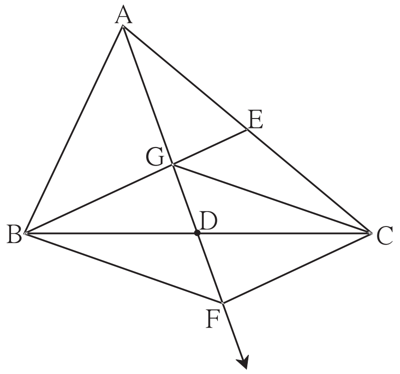


شڪل 5.45

ريت : 15x10 (س م) پلايءِ ووڊ ٽڪري مٿان هڪ سڌي ليڪ ۾ 2 س م جي مفاصلي 5 ڪوڪا ٺوڪيو. اُن جي هيٺ سڌائي ۾ليڪ تي 5 ٻيا ڪوڪا ٺوڪيو. ٻنهي ليڪن ۾ مفاصلو 2س م هجي. ڏوريءَ جي مدد سان جدا جدا چوڪنڊا تيار ڪريو. پاسن حوالي خاصيتون جاچيو ڪنڊن وٽ اخبار جا ٽڪرا چيڪايو. اِن مان ڪنڊن حوالي خاصيتون جاچيو. اهڙي نموني چوڪنڊي جي سڏيانن کي چڪاسيو.

وڌيڪ ڄاڻ لاءِ

ٽڪنڊي ۾مڌيانن جو چيڊ ٽڪو هرهڪ مڌيان کي 2:1 اِن ريشي ۾ورهائي ٿو اِها خاصيت توهان کي خبر آهي اُن جي ثابتي هاڻي اَيِياس ڪريو.



شڪل 5.46

ڏنل : $\triangle ABC$ ۾مڌيان AD ۽ مڌيان BE اِهي وٽ ملن ٿا.

ثابت ڪرڻ ته : $AG : GD = 2 : 1$

جوڙجڪ : ليڪ AD ۾ٽڪو F

G-D-F ۽ $GD = DF$ آڏن ٿا.

ثابتي : □BGCF جا اُريب هڪ ٻئي کي آڏن ٿا (ڏنل ۽ جوڙجڪ)

∴ □BGCF

∴ ليڪ BE || ليڪ FC

هاڻي Δ AFC ۾ٽڪو AC اِهو E جو مڌيہ ٽڪو آهي..........(ڏنل)

ٽڪر EB || ٽڪر FC

ٽڪنڊي جي هڪ پاسي جي مڌيہ ٽڪي مان ٻئي پاسي جي پوروچوٽ هوندڙ ليڪ ٽئين پاسي اڌي ٿي.

∴ ٽڪو AF اِهو G جو مڌيہ ٽڪو آهي.

مڌيہ ٽڪا اُبتڙ سڏيان

∴ $AG = GF$

پر $AG = 2\ GD$

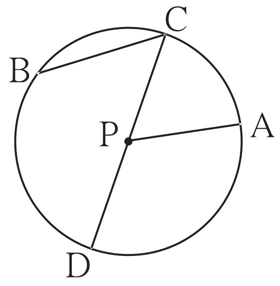
$\frac{AG}{GD} = \frac{2}{1}$ مطلب $AG : GD = 2 : 1$

گول

اَچو تہ سکون

- گول
- گول جي زهہ جون خاصيتون
- اِرد گول
- گرد گول

ذرا ياد ڪريو



شڪل 6.1

پرواري شڪل ۾گول جو مرڪز P آهي.

شڪل چڪاسي هيٺ ڏنل تختو پورو ڪريو.

---	تڪر PA	---	---	---	---	∠CPA
زهہ	---	قطر	نيم قطر	مرڪز	مرڪزي ڪنڊ	---

چاڪي وٺون

گول (Circle)

ٽپڪن جي سيٽ روپ ۾گول جو ورڻن ڪنداسين.

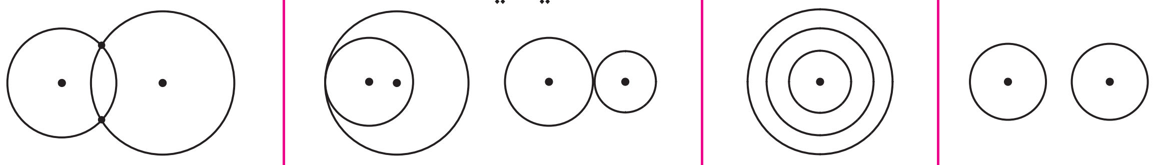
- سطح ۾ هڪ مقرر ٽپڪي کان هم مفاصلي سيني ٽپڪن جي سيٽ کي گول (Circle) چئبو آهي اُن مقرر ٽپڪي کي گول جو مرڪز (Centre of a circle) چئبو آهي.

گول بابت ڪجهہ وصفون

- گول جي مرڪز ۽ گول مٿان ڪنهن بہ ٽپڪي کي ملائيندڙ ليڪ ٽڪري کي گول جو نيم قطر (radius) چئبو آهي.
- گول جي ڪهڙن بہ ٻن ٽپڪن کي ملائيندڙ ليڪ ٽڪري کي گول جو زهہ (Chord) چئبو آهي.
- گول جي مرڪز مان لنگهندڙ زهہ کي گول جو قطر (Diameter) چئبو آهي. قطر گول جو وڏي ۾ وڏو زهہ هوندو آهي.

هڪ ئي سطح ۾ گول

ٺهڪندڙ گول | هم مرڪز گول | هڪ ٽپڪي تي ڇهندڙ گول | ٻن ٽپڪن کي ڪپيندڙ گول

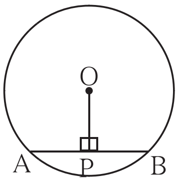


- نيم قطر برابر
- مرڪز هڪ پر نيم قطر جدا
- مرڪز جدا، نيم قطر جدا ۽ عام ٽپڪو هڪ
- مرڪز جدا، نيم قطر جُدا جا عام ٽپڪا بہ

شڪل 6.2

مشغولي I:

گروپ جي هرهڪ شاگرد کي ڏنل مشغولي ڪرڻي آهي پنهنجي ڪاپيءَ ۾هڪ گول ڪيو ۽ اُن ۾هڪ زهه ڪيو مرڪز کان زهه تائين عمود ڪيو. زهه جا ٻه حصا ٿيا اُهي ماپيو گروپ ليڊر هيٺ ڏنل تختو تيار ڪري. اِن ۾سڀني شاگردن جون حاصل ڪيل ماپون درج ڪري.



شڪل 6.3

شاگرد / ديگهه	1	2	3	4	5	6
l (AP)	...... س م					
l (PB)	...... س م					

ان چڪاس ڪان پوءِ حاصل ڪيل خاصيت ثابت ڪنداسين.

سڌيان : گول جي مرڪز کان زهه تي نڪتل عمود زهه کي اڌ ڪري ٿو

ڏنل : مرڪز P واري گول ۾ تڪر AB زهه آهي.

زهه AB ⊥ تڪر

ثابت ڪرڻ تہ : تڪر AP ≅ تڪر BP

ثابتي : تڪر OA ۽ تڪر OB ڪيو.

Δ OPA ۽ Δ OPB ۾

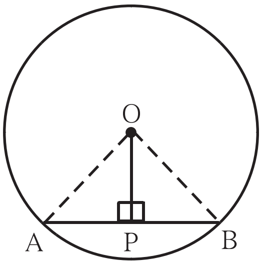
∠OPA ≅ ∠OPB .... (هرهڪ ڪوني ڪند)

تڪر OP ≅ تڪر OP .... (عام پاسو)

OA ≅ تڪر OB .... (ساڳئي گول جا نيم قطر)

∴ Δ OPA ≅ Δ OPB .... (هئپائيٽنيوز پاسو آزمائش)

تڪر PA ≅ تڪر PB .... (ٺهڪندڙ ٽڪنڊن جا نسبتي پاسا)



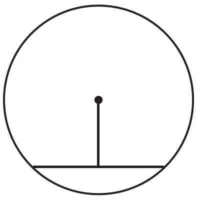
شڪل 6.4

مشغولي : II :

گروپ جي هرهڪ شاگرد کي اِها مشغولي ڪرڻي آهي پنهنجي ڪاپي ۾هڪ گول ڪيو اُن ۾هڪ زهه ڪيو اُن زهه جو مڌيہ ٽپڪو لهو. اُن مڌيہ ٽپڪي کي گول جي مرڪز سان ملايو. اِن ٽڪرکي قطرسان ٺهندڙ ڪند ماپيو

ڇا تو سمجهه ۾ آيو؟

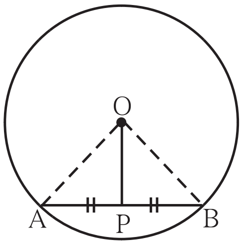
پنهنجي طرفان ماپيل ڪند، هڪ ٻئي کي ٻڌايو اِن مان ڪهڙي خاصيت حاصل ٿئي ٿي؟ اُها ٻڌايو.


شڪل 6.5

سڏيان : گول جي مرڪز ۽ زھہ جي مڌيہ ٽپڪي کي ملائيندڙ ليڪ ٽڪرزھہ تي عمود ٿئي ٿو.

ڏنل : گول جي مرڪز O آھي. AB ھڪ زھہ آھي P زھہ جو مڌيہ ٽپڪو آھي يعني ٽڪر PB ≅ ٽڪر AB

ثابت ڪرڻ تہ : ٽڪر OP ⊥ زھہ AB



شڪل 6.6

ثابتي : ٽڪر OA ۽ ٽڪر OB ڪڍو.

Δ AOP ۽ Δ BOP ۾

ٽڪر OA ≅ ٽڪر OB . . . . (ساڳئي گول جا نيم قطر)

ٽڪر OP ≅ ٽڪر OP . . . . (عام پاسو)

ٽڪر AP ≅ ٽڪر BP . . . . (ڏنل)

$\therefore \Delta AOP \cong \Delta BOP$ . . . . (آزمائش)

$\therefore \angle OPA \cong \angle OPB$ . . . . (ٺھڪندڙ ٽڪنڊي جو نسبتي ڪنڊون) (I)

$\angle OPA + \angle OPB = 180^\circ$ . . . ليڪي جوڙو

$\angle OPB + \angle OPB = 180^\circ$ . . . . . . (I)

$2\angle OPB = 180^\circ$

$\angle OPB = 90^\circ$

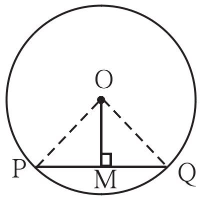
∴ ٽڪر OP ⊥ زھہ AB

حل ڪيل مثال

مثال (1) ھڪ گول جو نيم قطر 5 س م آھي اُن گول جي ھڪ زھہ جي ڊيگھہ 8 س م آھي تہ اُن زھہ ۽ گول مرڪز وچ ۾ مفاصلو لھو.

حل : پھريائين ڏنل ڄاڻ موجب شڪل ڪيڏداسين سمجھو O مرڪز آھي ۽ PQ زھہ آھي ٽڪر OM اِھو ٽڪر PQ مٿان عمود ڪيڏو.

ٽڪر OM ⊥ زھہ PQ ڪيڏو.



شڪل 6.7

اَسان کي ڄاڻ آھي تہ مرڪز مان نڪتل عمود زھہ کي اڌي ٿو .

∴ PM = MQ = 4 س م

نيم قطر 5 س م آھي ھاڻي گوني ڪنڊ ٽڪنڊي ΔOMQ ۾ پائٿاگورس سڏيان موجب

$$OM^2 + MQ^2 = OQ^2$$

$$OM^2 + 4^2 = 5^2$$

$$\therefore \; OM^2 = 5^2 - 4^2 = 25 - 16 = 9 = 3^2$$

$$\therefore \; OM = 3$$

مطلب گول مرڪز کان زھہ جو مفاصلو 3 س م آھي.

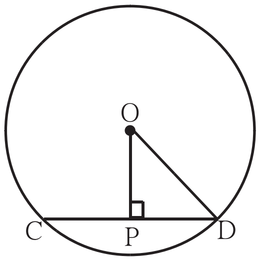
مثال (2) هڪ گول جو نيم قطر 20 س م آهي اُن گول جو هڪ زهہ گول جي مرڪز کان 12 س م آهي تہ زهہ جي ڊيگهہ لهو

حل : سمجهو تہ گول جو مرڪز آهي O نيم قطر = OD = 20 س م زهہ = CD ٽڪر O جو 12 س م آهي.

$CD \perp OP$ ٽڪر

$\therefore OP = 12$ س م

$\therefore CP = PD$ ...... (مرڪز وٽان زهہ تي نڪتل عمود)



شڪل 6.8

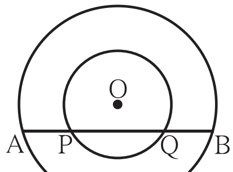
گوني ڪنڊو ٽڪنڊو ΔOPD پائٿاگورس سڏيان موجب ۾

$$OP^2 + PD^2 = OD^2$$
$$(12)^2 + PD^2 = 20^2$$
$$PD^2 = 20^2 - 12^2$$
$$PD^2 = (20+12)(20-12)$$
$$= 32 \times 8 = 256$$
$$\therefore CP = 16 \qquad \therefore PD = 16$$
$$CD = CP + PD = 16 + 16 = 32$$

$\therefore$ زهہ جي ڊيگهہ 32 س م

اَڀياس 6.1

1. O مرڪز واري گول ۾ زهہ AB ۽ O وچ ۾ مفاصلو 8 س م آهي. زهہ AB جي ڊيگهہ 12 س م آهي تہ گول جو قطر لهو.
2. هڪ گول ۾ قطر = 26 س م زهہ = 24 س م تہ گول جي مرڪز ۽ زهہ وچ ۾ مفاصلو لهو.
3. گول جي مرڪز کان زهہ تائين مفاصلو 30 آهي. نيم قطر 34 آهي تہ زهہ جي ڊيگهہ لهو.
4. گول جو نيم قطر 41 آهي. زهہ جي ڊيگهہ 80 آهي تہ زهہ ۽ مرڪز وچ ۾ مفاصلو لهو.
5. شڪل 6.9 ۾ O مرڪز وارا بہ گول آهن وڏي گول جو زهہ AB اِهو ننڍي گول کي P ۽ Q وٽ ڪپي ٿو ثابت ڪريو AP=BQ



شڪل 6.9

6. ثابت ڪريو گول جو قطر جيڪڏهن ٻن زهن کي اڌي ٿو تہ اُهي ٻئي زهہ هڪ ٻئي جي پورو ڇوٽ آهن.

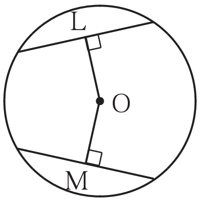
مشغولي :I

1. مناسب نيم قطر وارا گول ڪڍو
2. هرهڪ گول ۾ ساڳئي ڊيگهہ جا بہ زهہ ڪڍو.
3. گول جي مرڪز کان هرهڪ زهہ تي عمود ڪڍو.
4. گول جي مرڪز کان هرهڪ زهہ وچ ۾ مفاصلو ماپيو.

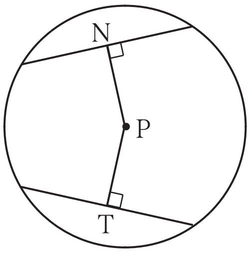
چاڪي وٺون

گول جي ٺهڪندڙ زهن اُنهن جو مرڪز وچ ۾ مفاصلي بابت خاصيتون

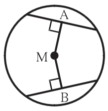
مشغولي II



شڪل (i)



شڪل (ii)



شڪل (iii)

شڪل (i) ۾ $OL = OM$، شڪل (ii) ۾ $PN = PT$، شڪل (iii) ۾ $MA = MB$

ائين ٿيو ڇا؟ اِن مشغوليءَ مان حاصل ڪيل خاصيت پنهنجي لفظن لکو.

چاڪي وٺون

ٺهڪندڙ زهن جون خاصيتون (Properties of congruent chords)

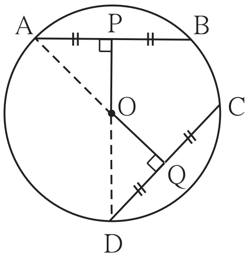
سڌيان : گول جا ٺهڪندڙ زهه مرڪزکان هم مفاصلي هوندا آهن.

ڏنل : گول جو مرڪز O آهي

زهه $AB \cong$ زهه CD

$OP \perp AB, OQ \perp CD$

ثابت ڪرڻ نه : $OP = OQ$



شڪل 6.10

جوڙجڪ : ٽڪر OA ۽ ٽڪر OD جوڙيو

ثابتي : $DQ = \frac{1}{2}\ CD$ ، $AP = \frac{1}{2}\ AB$ . . . (مرڪزکان زهه جو عمود)

$AB = CD$ . . . . ڏنل

$\therefore\ AP = DQ$

$\therefore$ ٽڪر $AP \cong$ ٽڪر DQ . . . . (I) . . .

ڪنڊ ΔAPO ۽ ڪنڊ ΔDQO ۾

ٽڪر $AP \cong$ ٽڪر DQ . . . . (I)

هئپاٽينيوز $OA \cong$ هئپاٽينيوز OD . . . . (هئپاٽينيوز پاسو آزمائش)

$\therefore\ \Delta APO \cong \Delta DQO$ . . . . ٺهڪندڙ ٽڪنڊن جا نسبتي پاسا

ٽڪر $OP \cong$ ٽڪر OQ . . . . ٺهڪندڙ ٽڪنڊن جا نسبتي پاسا

$\therefore\ OP \cong OQ$ . . . . ٺهڪندڙ ٽڪنڊن جا نسبتي پاسا

گول جا ٺهڪندڙ زهه گول جي مرڪزکان هم مفاصلي هوندا آهن.

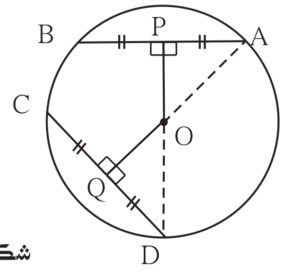
سڏيان : گول جي مرڪزي ڪان هم مفاصلي زهه ٺهڪندڙ هوندا آهن.

ڏنل : گول جو مرڪز O آهي.

ٽڪر $OP \perp$ زهه AB

ٽڪر $OQ \perp$ زهه CD

۽ $OP = OQ$



شڪل 6.11

ثابت ڪرڻ تہ : زهه $AB \cong$ زهه CD

جوڙجڪ : ٽڪر OA ۽ ٽڪر OD ڪديو.

ثابتي : هيٺ ڏنل بيانن ۾ خال ڀري ثابتي پوري ڪريو .

گوني ڪنڊ ٽڪنڊن $\triangle DPA$ ۽ $\triangle OQD$ ۾

هئپاٽينيوز $AO \cong$ هئپاٽينيوز OD . . . . [ ]

ٽڪر $OP \cong$ ٽڪر OQ . . . . ڏنل

$\therefore \Delta OPA \cong \Delta OQD$ . . . . [ ]

$\therefore$ ٽڪر $AP \cong$ ٽڪر QD . . . . ٺهڪندڙ ٽڪنڊن جا نسبتي پاسا

$\therefore AP = QD$ . . . . (I)

پر $OQ = \frac{1}{2}$ CD, $AP = \frac{1}{2}$ AB . . . . . [ ]

$\therefore AP = QD$ . . . .

$\therefore AB = CD$

$\therefore$ ٽڪر $AB \cong$ ٽڪر CD

مٿيان ٻہ سڏيان هڪ ٻئي جي اُبتڙ آهن اِهو سمجهي وٺون

اهو ڌيان ۾ رکو

گول جا ٺهڪندڙ زهہ گول جي مرڪز کان هم مفاصلي هوندا آهن.

مشغولي

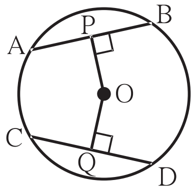
مٿيان ٻئي سڏيان هڪ گول بدران ٺهڪندڙ گول ڪٽي ثابت ڪري سگهبا.

1. ٺهڪندڙ گولن ۾ ٺهڪندڙ زهہ مرڪزن کان هم مفاصلي هوندا آهن.

2. ٺهڪندڙ گولن ۾ اُنهن جي مرڪزن کان هم مفاصلي زهہ ٺهڪندڙ هوندا آهن.

حل ڪيل مثال

مثال : شڪل 6.12 ۾ ٽيڪو O گول جو مرڪز آهي AB=CD جيڪڏهن 4 س م
=OP تہ OQ جي ڊيگهہ لهو.



شڪل 6.12

حل : گول جو مرڪز O آهي زهہ $CD \cong$ زهہ AB
مليل آهي.

شڪل ۾ ڏيکاريل آهن OP ⊥ AB, OQ ⊥ CD
4 س م =OP مطلب ڌهه AB اِهو O کان 4 س م مفاصلي تي آهي. اَسان کي ڄاڻ آهي تہ هڪ گول ۾ نهڪندڙ ڌهہ مرڪزکان هم مفاصلي هوندا آهن.

∴ OQ = 4 س م

اَڀياس 6.2

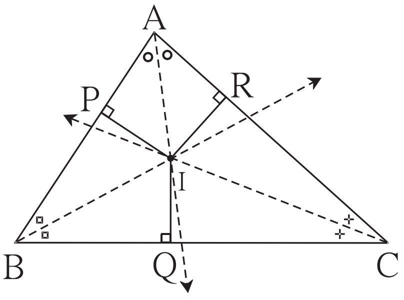
1. هڪ گول جو نيم قطر 10 س م آهي اُن گول ۾ هرهڪ 16 س م اَهڙا 2 ڌهہ آهن تہ اُهي ڌهہ گول جي مرڪز کان ڪيتري مفاصلي تي آهن؟
2. هڪ گول ۾ ہہ ساڳئي ڊيگهہ جا ڌهہ آهن مرڪز کان اُهي 5 س م مفاصلي آهن گول جو نيم قطر 13 س م آهي تہ اُنهن ڌهن جي ڊيگهہ لهو.
3. C مرڪزواري گول ۾ ٽڪر PM ۽ ٽڪر PN نهڪندڙ ڌهہ آهن ثابت ڪريو ڪرڙو PC اِهو ∠NPM جو اَڌڪ آهي.

ذرا ياد ڪريو

گذريل درجي ۾ جدا جدا ٽڪنڊا ڪيئي، اُنهن جا ڪنڊ اَڌڪ هم ڌاري هوندا آهن اِها خاصيت ڄاڃي آهي.
اِنهن ڪنڊ اَڌڪن جو هم چيدي ٽپڪو I اَکروسيلي ڏيکاربو آهي. اِها اَسان کي ڄاڻ آهي .

ڄاڻي وٺون

ٽڪنڊي جو اِرد گول (Incircle of a triangle)



شڪل 6.13

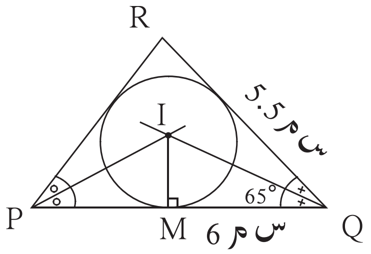
△ABC ۾ سڀ ڪنڊ اَڌڪ I وٽ ملن ٿا. I مان ٽنهي پاسن تي عمود ڪڍيل آهن
IP ⊥ AB, IQ ⊥ BC, IR ⊥ AC
ڪنڊ اَڌڪ تي هرهڪ ٽپڪو ڪنڊ جي پاسن کان هم مفاصلي هوندو آهي. اِنڪري
IP = IQ ۽ IQ = IR
IP = IQ= IR

ٽپڪو I ٽڪنڊي جي ٽنهي پاسن IC, BC, AB کان هم مفاصلي آهي. ٽپڪو I اِهو مرڪز ڪٽي ۽ IP اِهو نيم قطرڪٽي، ڪڍيل گول پاس BC, AB ۽ IC کي اَندريان ڇهي ٿو. اِن گول کي ٽڪنڊي جو اِرد گول چئبو آهي.

جاڻي وٺون

ٽڪنڊي جو اِرد گول ڪيڙهڻ (To construct incircle of a triangle)

مثال Δ PQR ڪيو جنهن ۾، PQ = 6 س م، ∠Q = 35°،
QR = 5.5 س م Δ PQR جو اِرد گول ڪيو پهريائين ڪچي
شڪل ڪيو ۽ ڏنل چاڪ ڏيکاريو



ڪچي شڪل 6.14

جوڙجڪ جا ڏاڪا :

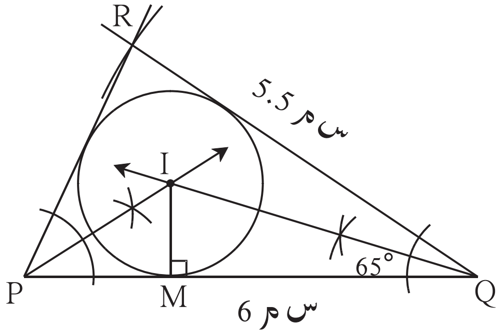
(1) ڏنل ماپن موجب ΔPQR ڪيو.

(2) کهڙين ٻہ ٻن ڪنڊن جا اَڌڪ ڪيو.

(3) ڪنڊ - اَڌڪن جي چيد ٽبڪي کي I نالو ڏيو.

(4) ٽبڪي I وٽان ٽڪر PQ مٿان IM عمود ڪيو.

(5) IM نيم قطر ۽ I مرڪز کڻي گول ڪيو.



شڪل 6.15

اِهو ڌيان ۾ رکو

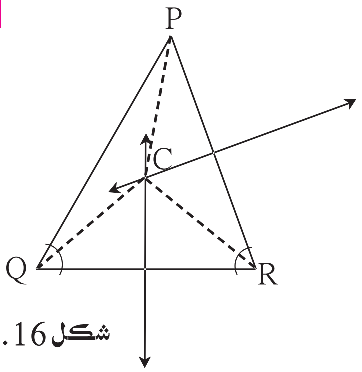
ٽڪنڊي جي ٽنهي پاسن کي ڇهندڙ گول کي ٽڪنڊي جو اِرد گول چئبو آهي
۽ اُن گول جي مرڪز کي اِرد مرڪز چئبو آهي.

ذرا ياد ڪريو

گذريل درجي ۾ اَسان ٽڪنڊي جي پاسن جا عمودي اَڌڪ، همذاري هوندا آهن اِها خاصيت جدا جدا ٽڪنڊا ڪڍي جاچي آهي. ٽڪنڊي جي پاسن جي عمودي اَڌڪن جي چيد ٽبڪي کي 'C' اکر سان ڏيکاريو آهي.

جاڻي وٺون

ΔPQR ۾ پاسن جا عمودي اَڌڪ C وٽ ملن ٿا
مطلب C اِهو ٽبڪو عمودي اَڌڪن جو عام چيدي
ٽبڪو آهي.



شڪل 6.16

ٽڪنڊي جو گرد گول (Circumcircle)

ٽپڪو C اِهو ٽڪنڊي جي ٽنهي پاسن جي عمودي اَڌڪن مٿان آهي PC، QC ۽ RC ملايو. اَسان کي ڄاڻ آهي تہ ليڪ ٽڪر جي عمودي اَڌڪ مٿان هرهڪ ٽپڪو ليڪ ٽڪر جي پڇڙ ٽپڪن کان هم مفاصلي هوندو آهي.

$\therefore PC = QC \; \ldots\ldots\ldots \; I$

$\therefore QC = RC \; \ldots\ldots\ldots \; II$

$\therefore PC = QC = RC \; \ldots\ldots$ (مساوت I ۽ II مان)

$\therefore$ C ٽپڪو مرڪز ۽ PC نيم قطرڪٽي ڪيڏيل گول ٽڪنڊي جي ٽنهي نوڪن وٽان لنگهندو.

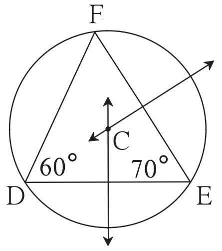
اِهو ڌيان ۾ رکو

ٽڪنڊي جي ٽنهي نوڪن مان لنگهندڙ گول کي اُن ٽڪنڊي جو گرد گول چئبو آهي ۽ اُن جي مرڪز کي گرد مرڪز چئبو آهي.

ڄاڻي وٺون

ٽڪنڊي جو گرد گول ڪيڏڻ

مثال ΔDEF ۾ $DE = 4.2$ س م ، $\angle D = 60^\circ$ ، $\angle E = 70^\circ$ تہ ΔDEF جو گرد گول ڪيڏو پهريائين ڪچي شڪل ڪيڏو ۽ اُن ۾ مليل ڄاڻ ڏيکاريو.



شڪل 6.17

جوڙجڪ جا ڏاڪا

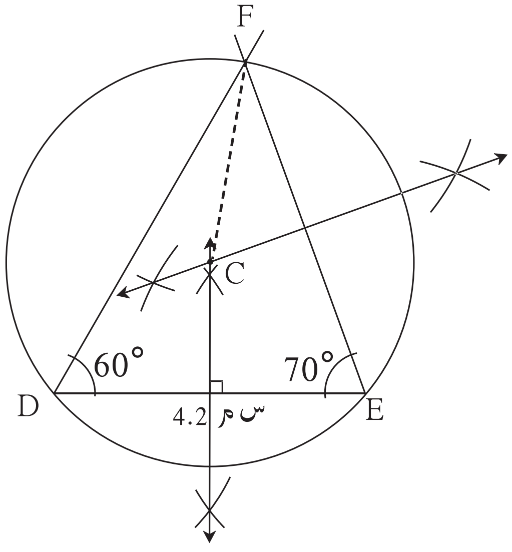
(1) ڏنل ماپن موجب ΔDEF ڪيڏو.

(2) ڪنهن بہ ٻن پاسن جا عمودي اَڌڪ ڪيڏيو

(3) عمودي اَڌڪ جتي ملن، اُنکي C نالو ڏيو.

(4) ٽڪر CF ڪيڏو.

(5) C مرڪز ۽ CF نيم قطرڪٽي گول ڪيڏو.



شڪل 6.18

مشغولي

جدا جدا ماپن ۾ جدا جدا قسمن جا ٽڪنڊا ڪڍي اُنهن جا اِرد گول ۽ گرد گول ڪڍو.
پنهنجا نتيجا هيٺ ڏنل تختي ۾ لکو ۽ چرچا ڪريو.

ٽڪنڊي جو قسم	ٽپورپاسو ٽڪنڊو	ٻپورپاسو ٽڪنڊو	اَڻپورپاسو ٽڪنڊو
اِرد مرڪز جي جڳهه	ٽڪنڊي جي اَندر	ٽڪنڊي جي اَندر	ٽڪنڊي جي اَندر
گرد مرڪز جي جڳهه	ٽڪنڊي جي اَندر	ٽڪنڊي جي اَندريا ٻاهر ٽڪنڊي تي	

ٽڪنڊي جو قسم	سوڙهي ڪنڊ ٽڪنڊو	ڳوني ڪنڊ ٽڪنڊو	ويڪري ڪنڊ ٽڪنڊو.
اِرد مرڪز جي جڳهه			
گرد مرڪز جي جڳهه		هئپاٽينيوز جو مڌيہ - ٽِبڪو	

اِهو ڌيان ۾ رکو

- ٽڪنڊي جو اِرد گول ٽڪنڊي جي سڀني پاسن کي اَندران ڇُهي ٿو.
- ٽڪنڊي جو اِرد گول ڪڍڻ لاءِ کھڙين بہ ٻن ڪنڊن جا اَڌڪ ڪيڏڻا پوندا.
- ٽڪنڊي جو گرد گول ٽڪنڊي جي ٽنهي نوڪن مان لنگهي ٿو.
- ٽڪنڊي جو گرد گول ڪڍڻ لاءِ کھڙن بہ ٻن پاسن جا عمودي اَڌڪ ڪيڏڻا پوندا.
- سوڙهي ڪنڊ ٽڪنڊي جو گرد مرڪز ٽڪنڊي جي اَندرهوندو آهي.
- ڳوني ڪنڊ ٽڪنڊي جو گرد مرڪز هئپاٽينيوز جو مڌيہ ٽِبڪو هوندو آهي.
- ويڪري ڪنڊ ٽڪنڊي جو گرد مرڪز ٽڪنڊي کان ٻاهرهوندو اهي.
- ڪنهن بہ ٽڪنڊي جو اِرد مرڪز ٽڪنڊي جي اَندر هوندو آهي.

مشغولي ڪوبہ ٽپورپاسو ٽڪنڊو ڪڍي، اُن جو گرد گول ۽ اِرد گول ڪڍو.
اها مشغولي ڪندي توهان ڇا ڇا سمجھو؟

(1) ٽڪنڊي ۾ عمودي اَڌڪ ۽ ڪنڊ اَڌڪ ساڳيا آيا ڇا؟

(2) اِرد مرڪز ۽ گرد مرڪز ساڳيا آهن ڇا؟ اِن جو ڪارڻ ڪهڙو؟

(3) گرد گول ۽ اِرد گول جو نيم قطر ماپي اُنهن جو ريشو ڪڍو.

اِهو ڌيان ۾ رکو

- ٽيورپاسي ٽڪنڊي جا گرد گول ۽ اِرد گول ڪڏهن وقت اُنجا ڪنڊ اَڏ ڪ ۽ پاسن جا عمودي اَڌ ڪ ساڳيان هوندا آهن
- ٽيورپاسي ٽڪنڊي ۾ گرد گول ۽ اِرد گول جو مرڪز ساڳيو ئي هوندو آهي.
- ٽيورپاسي ٽڪنڊي جي گرد گول ۽ اِرد گول جا نيم قطر 2:1 ۾ هوندا آهن.

اَيپياس 6.3

1. ΔABC ائين ڪيو جو ، $\angle B = 100^\circ$ ، $BC = 6.4$ س م ، $\angle C = 50^\circ$ جو اِرد گول ڪيو.
2. ΔPQR ائين ڪيو جو ، $\angle P = 70^\circ$ ، $\angle R = 50^\circ$ ، $QR = 7.3$ س م. ۾ جو گرد گول ڪيو .
3. ΔXYZ ائين ڪيو جو ، $XY = 6.7$ س م، $YZ = 5.8$ س م، $XZ = 6.9$ س م ۾ اِن جو اِرد گول ڪيو
4. ΔLMN ۾ ، $LM = 7.2$ س م، $\angle M = 105^\circ$ ، $MN = 6.4$ س م. ۾ LMN جو گرد گول ڪيو .
5. ΔDEF ڪيو $DE = EF = 6$ س م ۽ $\angle F = 45^\circ$. جو گرد گول ڪيو.

گڏيل اَيپياس 6

1. هيٺ ڀهو چونڊ سوال ڏنل آهن. اُنهن جي جوابن مان مناسب متبدل جواب چونڊيو.

(i) هڪ گول جو نيم قطر 10 س م آهي اُن ۾ هڪ زهه مرڪزکان 6 س م مفاصلي تي آهي ته زهه جي ڊيگهه ڪيتري؟

(A) 16 س م (B) 8 س م (C) 12 س م (D) 32 س م

(ii) ٽڪنڊي جي ٽنهي ڪندن جي اَڌڪن جي چيد ٽبڪي کي ڇا چئبو آهي؟

(A) اِرد مرڪز (B) گرد مرڪز (C) مرڪزڪ (D) ....

(iii) ٽڪنڊي جي سيني نوڪن مان لنگهندڙ گول کي ڇا چئبو آهي؟

(A) مرڪزي گول (B) نهڪندڙ گول (C) اِرد گول (D) گرد گول

(iv) هڪ گول زهه 24 س م آهي اِهو مرڪزکان 5 س م مفاصلي تي آهي ته گول جو نيم قطر لهو.

(A) 12 س م (B) 13 س م (C) 14 س م (D) 15 س م

(v) 2.9 س م نيم قطر واري گول ۾ وڏي زهه جي ڊيگهه ڪيتري؟

(A) 3.5 س م (B) 7 س م (C) 10 س م (D) 5.8 س م

(vi) هڪ گول جو نيم قطر 4 س م آهي O گول جو مرڪز آهي 4.2 س م = $l(OP)$ ته P ڪٿي آهي؟

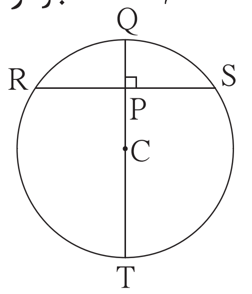
(A) گول تي (B) گول جي ٻاهر (C) گول جي اَندر (D) مرڪز وٽ

(vii) هڪ گول ۾پورو چوٽ زهن جي ديگهه 6 س م ۽ 8 س م آهي. گول جو نيم قطر 5 س م آهي زهه مرڪز جي مخالف پاسن کان آهن ته زهن جي وچ ۾ مفاصلو ڪيترو؟

(A) 2 س م (B) 1 س م (C) 8 س م (D) 7 س م

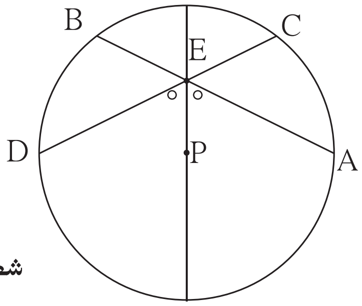
.2 $\triangle NTS$ ٽيپورپاسي ٽڪنڊي ۾ DS = 7.5 س م ته اِن ٽڪنڊي جو گرد گول ۽ اِرد گول ڪيو، گرد گول ۽ اِرد گول جي نيم قطرن جو ريشو لهو.

.3 $\triangle NTS$ ڪيو جنهن ۾ NT = 5.7 س م ۽ TS = 7.5 س م ۽ $\angle NTS=110°$ ته $\triangle NTS$ جو گرد گول ۽ اِرد گول ڪيو.



شڪل 6.19

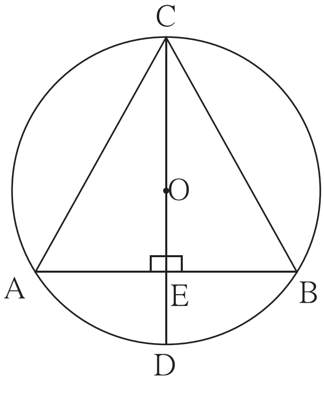
.4 شڪل 6.19 ۾ گول جو مرڪز C آهي. ٽڪر QT قطر آهي CP=5 , CT=13 ته زهه RS لهو.



شڪل 6.20

.5 شڪل 6.20 ۾ P گول جو مرڪز آهي. زهه AB ۽ زهه CD اِهي هڪ ٻئي کي قطر مٿان E وٽ هڪ ٻئي کي ڪپن ٿا.

جيڪڏهن $\angle AEP \cong \angle DEP$ ته ثابت ڪريو AB = CD.



شڪل 6.21

.6 شڪل 6.21 ۾ گول جو مرڪز O آهي قطر CD آهي ۽ زهه AB قطر CD آهي اِهو زهه AB ڏانهن E وٽ عمود آهي. ثابت ڪريو $\triangle ABC$ ٻيپورپاسو ٽڪنڊو آهي.

ICT Tools or Links

Geogebra software جي مدد سان علحدا گول ڪيو، اُنهن ۾ زهه جون خاصيتون عملي ڪم ڪري جاچي آزمودو وٺو. الڳ الڳ ٽڪنڊن جا گرد گول ۽ اِرد گول ڪيو Move option اِستعمال ڪري اصلوڪو آڪار بدلائي ڏسو ته اِرد مرڪز ۽ گرد مرڪز ڪيئن جڳهه مٽائيندا رهن ٿا. اِهو آزمودو وٺو.

7 مساوي جاميٽري

RH92LP

اَچو تہ سکون

- محور، منڊ، چوٿ
- ٽپڪي جا سطحي مساوا
- ٽپڪي جي بيھڪ مقرر ڪرڻ
- X محور جي پوروچوٽ ليڪ
- Y محور جي پوروچوٽ ليڪ
- ليڪ جون مساواتون

هڪ عمارت سامھون ميدان تي چنٽو ۽ سندس ساٿي ڪرڪيٽ راند ڪري رهيا هئا هڪ بزرگ اُتي آيو.

بزرگ : او چنٽو، ڏنراجمل هن سوسائٽيءَ ۾رهندو آهي ڇا؟

چنٽو : ها ها ... ٽئين ماڙي تي هن جو گھر آهي هتان تہ اُها دري بہ نظراَچي ٿي.

بزرگ : اڙي، ٽئين ماڙي تي مونکي پنج دريون نظر اَچن ٿيون پڪو گھرڪھڙو آهي ؟

چنٽو : ٽئين ماڙي تي، کابي پاسي ٽيون نمبر دري

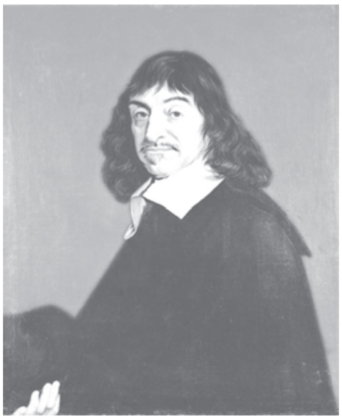
چنٽوءَ جو ڏنراجمل جي گھر بڌائڻ جو بيان حقيقت ۾مساوي جاميٽريءَ جي بنيادي ويچار ڌارا آهي. ڪنھن جو گھر فقط ماڙو نمبر بڌائڻ سان ڪافي نہ آهي پر ساڄو پاسو يا کابو پاسو بڌائڻ لازمي آهي. اِن لاءِ عدد واپرايا ويا. زمين کان مٿي ٻيون ماڙو ۽ کابي پاسي ٽين دري اِهي سلسلي ۾عدد ڪم آندا ويا.

ڄاڻي وٺون

محور، منڊ، چوٿ (Axes, origin, quadrants)

ڏنراجمل جو گھر بڌائڻ لاءِ بہ عدد ڪم آندا ويا. اُنھن جڳھين مان هڪ ٻئي تي عمود ڪيڏي هڪ خاص ٽپڪو حاصل ڪري بڌائي سگھجي ٿو. هڪ خاص ٽپڪي جي سطحي جڳھہ بڌائڻ لاءِ آڌو عدد ليڪ ڪيڏبي آهي. اِن عدد ليڪ کي X - محور چئبو آهي.

ريني ڊيڪارٽ (1596–1650)

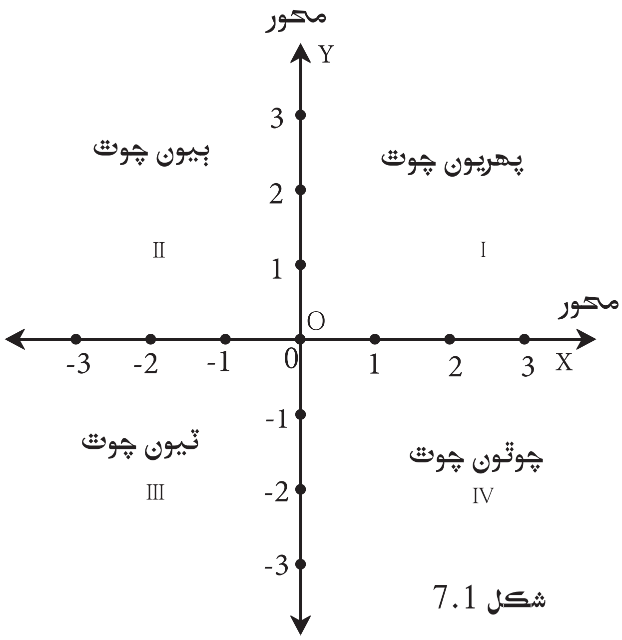


سترهين صديءَ ڌاري فرانس جو رياضدان اِسٽان ڏيکارڻ لاءِ مساوي سرشتو، ٻڌايو اِن طريقي کي ڪ'ڪارٽيزين مساوي سرشتو' چئبو آهي. ڊيڪارٽ سڀ کان پهريائين جاميٽري ۽ آلجبرا وچم لاڳاپو برپا ڪيو جنهن سبب علم رياض ۾ چڻ هڪ آندولن اَچي ويو.

ڪارٽيزين مساوي سرشتو اِهو هڪ چندچاڻ جاميٽري (Analytical Geometry) جو هڪ ڏاڪو آهي. ڊيڪارٽ جي پهرين ڪتاب 'لا جاميٽرڪ' ۾ هن جاميٽريءَ جو اَڀياس ڪرڻ لاءِ آلجبرا جو اُپيوگ ڪيو هو. سطحي ٽٻڪو حقيقي عددن جي سلسلي ۾ جوڙي وسيلي ڏيکاري سگهجي ٿي.

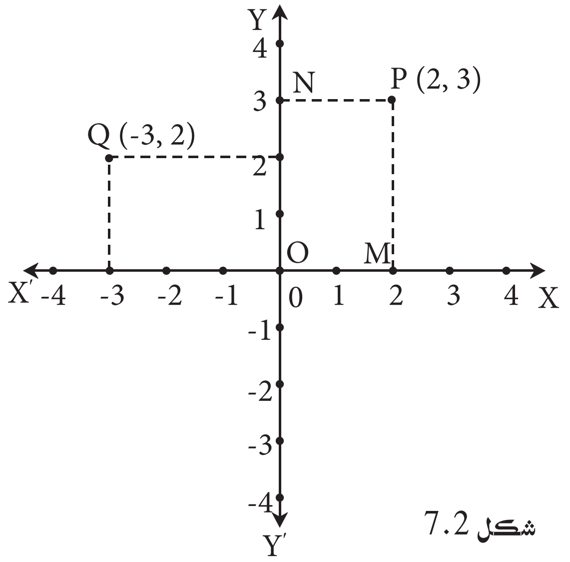
اِهو ڊيڪارٽ ڪتاب ۾ ٻڌايو آهي. اِن سلسلي واري جوڙي کي '' ڪارٽيزين مساوا'' چئبو آهي مساوي جاميٽري جو علم طبعي، اِنجنيئرنگ، علم - ڀوڪمپ علم نوڪانين ۽ ڪلا اَهڙي علحدن ڪيترن ۾ اِستعمال ٿيندو آهي. ٽڪنيڪ جي ترقيءَ ۾ اِها جاميٽري ڏاڍي اَهميت واري آهي. جيئو جيبرا ۾ جاميٽري ۽ آلجبرا جو پاڻ ۾ لاڳاپو چٽيءَ طرح ظاهر ٿئي ٿو. Geometry ۽ Algebra اِنهن لفظن کي ملائي ٿي Geogebra نالو ڏنو ويو آهي.

X محور تي .. ٽٻڪي مان نڪتل عمودي ليڪ کي ... محور چئبو آهي. عام طرح ٻنهي عددي ليڪن تي .. اِهو عدد هڪ ٻئي ٽٻڪي وسيلي ڏيکاريو آهي. اِن کي منڊ (Origin) چئبو آهي اِهو ..... 'O' انگريزي اکر وسيلي ڏيکاربو آهي. X محور جي ساڄي پاسي واڌ عدد ۽ کاٻي پاسي ڪاٽو عدد ڏيکاربا آهن. Y محور جي مٿئين پاسي واڌو عدد ۽ هيٺين پاسي ڪاٽو عدد ڏيکاربا آهن X ۽ Y محورن ڪري سطح جا چار ڀاڱا ٿيندا آهن. هرهڪ ڀاڱي کي ''چوٽ'' چئبو آهي شڪل ۾ چوٽ گهڙيال جي ڪانٽن جي اُبتي طرف ۾ ڏنل آهن.



شڪل 7.1

هڪ سطح جي ٽِبڪي جا مساوا (Co-ordinates of a point in a plane)



شڪل 7.2

X محور ۽ Y محور طرفان مقرر ڪيل سطح ۾ ٽبڪو P ڏيکاريل آهي. اِن جي جڳهه ٻنهي محورن کان مفاصلي کي مدار رکي ٿي. اِن لاءِ X محور⊥PM ۽ Y محور⊥PN ڪڍيا.

M جو X تي مساوو 2 ۽ N جو Y جو محورتي مساوو 3 آهي. ان ڪري P جو X مساوو 2 ۽ Y مساوو 3 آهي.

ٽبڪي جي بيهڪ ٻڌائڻ وقت پهريون انجو X مساوو ٻڌائجي اهو نيم آهي.

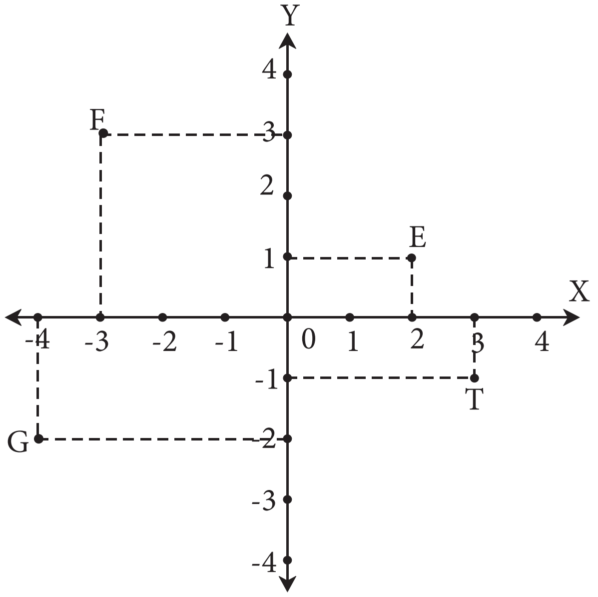
ان نيم موجب P جي مساون جو 2.3 اهو سلسلو طيءِ ٿيو ۽ P جي جڳهه عددن (2,3) ان جوڙيءِ وسيلي ٻڌائجي ٿي.

ٽبڪي Q کان X- محورتي QS عموُد ڪڍيو ۽ Y محورتي QR عموُد ڪڍيو Q جو X محورتي مساوو 3- ۽ Y محورتي مساوو 2 آهي انڪري Q ٽبڪي جا مساووا آهن (-3,2)

مثال پرواري شڪل ۾ ٽبڪن E, F, G, T مساوا لکو.

حل :

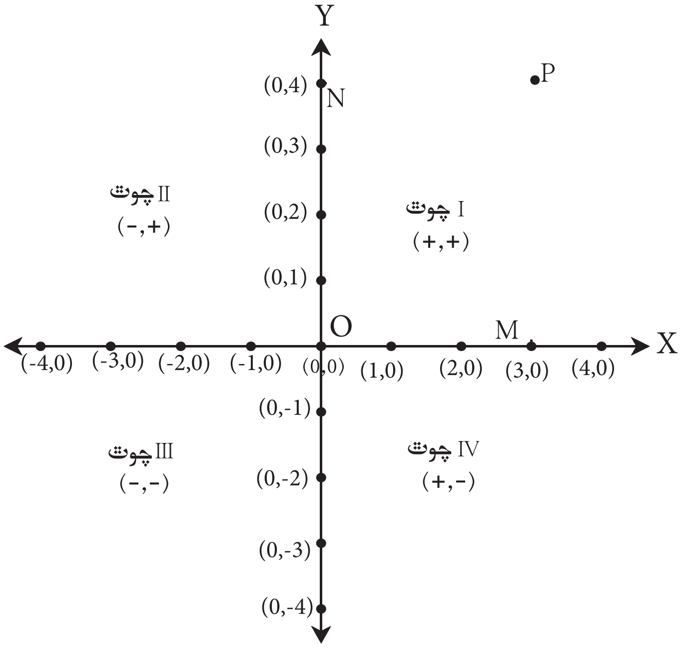
- ٽبڪي E جا مساوا (2,1) آهن.
- ٽبڪي F جا مساوا (−3,3) آهن.
- ٽبڪي G جا مساوا (−4,−2) آهن.
- ٽبڪي T جا مساوا (3,−1) آهن.



شڪل 7.3

چاڪي وٺون

ٽپڪي جي جڳهہ ٻڌائڻ (Co-ordinates of points on the axes)



شڪل 7.4

ٽپڪي M جو X- مساوو مطلب M جو Y- محورڪان مفاصلو هوندو آهي. اِن ٽپڪي جو X- محورڪان مفاصلو ٻڙي آهي مطلب M جوY-مساوو O آهي. اِنڪري X-محورمٿان M جا مساوا آهن (3,0) Y محور تيٽپڪي Nجو Y- مساوو 4 آهي چوتہ اِهو ٽپڪو X- محور ڪان 4 ريڪن جي مفاصلي تي آهي پر ٽپڪي N جو Y محورڪان مفاصلو ٻڙي آهي .

اِن ڪري Y مساوا تي N جا مساوا آهن (0,4) هاڻي 'O' اِهو منڊ ٻنهي X محورءِ Y محورمٿان آهي. اِنڪري اِنجا مساوا ٿيندا (0,0)

مطلب سطحي ٽپڪن ۾هرهڪ ٽپڪي جا مساوا فقط هڪ ئي جوڙي ۾ٺهندا آهن.

اِهو ڌيان ۾رکو

- X-محورمٿان هرهڪ ٽپڪي جو Y-مساوو 0 ٿيندو آهي .
- Y- محورمٿان هرهڪ ٽپڪي جوX- مساوو 0 ٿيندو آهي.
- منڊ ٽپڪي جا مساوا آهن (0,0)

مثال : هيٺ ڏنل ٽپڪا ڪهڙن چوٿن يا محور مٿان آهن؟

$A(5,7),\ B(-6,4),\ C(4,-7),\ D(-8,-9),\ P(-3,0),\ Q(0,8)$

حل : $A(5,7)$ ۾ x مساوو واڌو ءِ y مساوو واڌو آهي . مطلب ٽپڪوAپهرين چوٿ ۾آهي.

$B(-6,4)$ ۾ x مساوو ڪاٽو ءِ y مساوو واڌو آهي. مطلب ٽپڪو B ٻئين چوٿ ۾ آهي.

$C(4,-7)$ ۾ x ٽپڪي جو مساوو واڌو y مساوو ڪاٽو آهن.مطلب ٽپڪوC چوٿين چوٿ ۾ آهي.

$D(-8,-9)$ ۾ x جو مساوو ڪاٽو ءِ y مساوو ڪاٽو آهي. مطلب ٽپڪو D ٽئين چوٿ ۾ آهي.

P(−3,0) جو y مساوو ٻڙي آهي. ∴ ٽپڪو P تي X محور آهي.

Q(0,8) جو x مساوو ٻڙي آهي. ∴ ٽپڪو Q تي Y محور آهي.

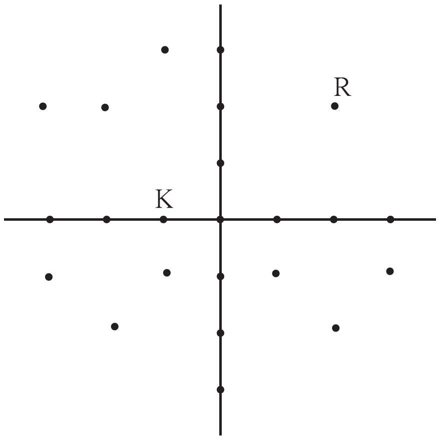
مشغولي

اِسڪول جي ميدان تي پرواري شڪل موجب هڪ قطار ۾ ويندل شاگردن ڪري X محور ۽ Y محور تيار ٿين ٿا.

- جدا جدا قطارن ۾ ڏيکاريل ٽپڪن تي چئني چوٿن ۾ شاگرد وهاريو
- جدا جدا شاگردن جا شروعاتي نالا پڪار اُنهن کي ٽپڪن مٿان بيهاريو ۽ اُنهن جا مساوا ٻڌايو.

مثال راجيندر (2, 2) ۽ ڪيرتي (-1,0)

- اَهڙي نموني ميدان جي مشغوليءَ مان ٽپڪي جي جڳهه مزي سان ظاهر ٿئي ٿي.



شڪل 7.5

ڄاڻي وٺون

ڏنل مساوِن وسيلي ٽپڪي جي جڳهه طيءِ ڪرڻ (To plot the points of given co-ordinates)

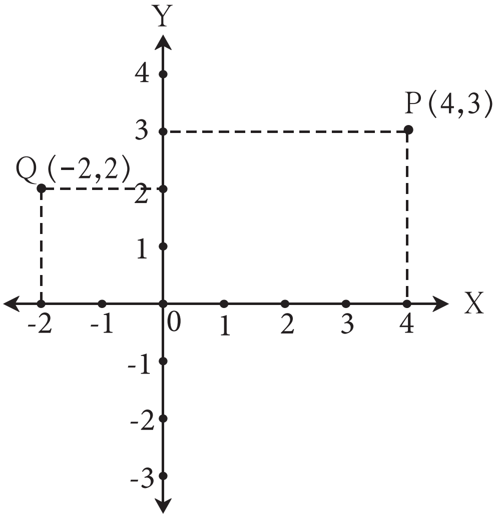
سمجهو ته P (4,3) ۽ Q (−2,2) اهي ٽپڪا مقرر جاءِ تي ٻڌائڻ آهن.

ٽپڪي جي جڳهه مقرر ڪرڻ لاءِ

(i) سطح ۾ X- محور ۽ Y- محور ڪڍو.

(ii) P (4,3) اهو ٽپڪو ڏيکارڻ لاءِ X 4 عدد ڏيکاريندڙ ٽپڪي مان Y محور تي پوروچوٽ ليڪ ڪڍو.

Y محور تي 3 عدد ڏيکاريندڙ ٽپڪي مان X محور جي پوروچوٽ ليڪ ڪڍو.



شڪل 7.6

(iii) اِهي ٻئي پوروچوٽ ليڪون جنهن ٽبڪي تي هڪ ٻئي کي ڪپين، اُن چيد ٽبڪو P(4,3) آهي. اِهو ٽبڪو ڪهڙي چوٽ ۾ آهي؟ چڪاس ڪريو.

(iv) ساڳئي نموني Q(-2,2) اِهو ٽبڪو مقرر جاءِ تي ڏيکاريو.
اِن سرشتي موجب R(-3 ,-4) ۽ S(3 ,-1) ٽبڪا مقرر ڪريو.

مثال : هيٺ ڏنل ٽبڪا ڪهڙي چوٽ يا محور تي آهن اُهي لکو.

(i) (5,3) (ii) (−2,4) (iii) (2,−5) (iv) (0,4)
(v) (−3,0) (vi) (−2,2.5) (vii) (5,3.5) (viii) (−3.5,1.5)
(ix) (0, −4) (x) (2,−4)

حل :

	مساوا	چوٽ / محور
(i)	(5,3)	چوٽ I
(ii)	(−2,4)	چوٽ II
(iii)	(2,−5)	چوٽ IV
(iv)	(0,4)	Y محور
(v)	(−3,0)	X محور

	مساوا	چوٽ / محور
(vi)	(−2, −2.5)	چوٽ III
(vii)	(5,3.5)	چوٽ I
(viii)	(−3.5,1.5)	چوٽ II
(ix)	(0, −4)	Y محور
(x)	(2,−4)	IV محور

اَڀياس 7.1

1. هيٺ ڏنل ٽبڪن جا مساوا مليل آهن اُهي ڪهڙي چوٽ ۾ يا ڪهڙي محور تي آهن اُهي لکو.
   - A(−3,2), • B(−5,−2), • K(3.5,1.5), • D(2,10),
   - E(37,35), • F(15,−18), • G(3,−7), • H(0,−5),
   - M(12,0), • N(0,9), • P(0,2.5), • Q(−7,−3)

2. هينيان ٽبڪا ڪهڙي چوٽ ۾ آهن؟
   (i) ٻئي مساوا واڌو آهن
   (ii) X- مساوو واڌو ۽ Y- مساوو ڪاٽو آهن
   (iii) ٻئي مساوا ڪاٽو آهن.
   (iv) X مساوو ڪاٽو ۽ Y- واڌو آهن.

3. مساون جي آڌار تي ٽبڪا ڪيدو.

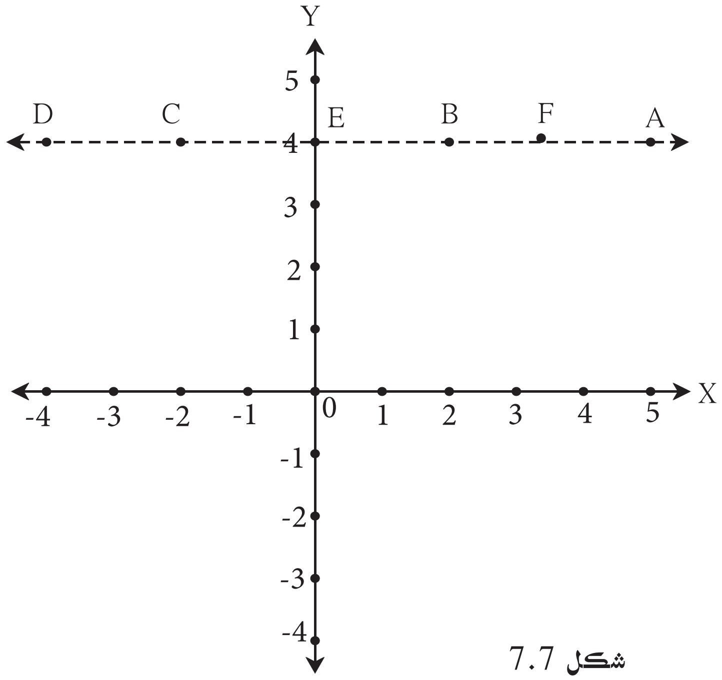
L(−2,4), M(5,6), N(−3,−4), P(2,−3), Q(6,−5), S(7,0), T(0,−5)

چاڪي وٺون

X – محور جي پوروچوٽ ليڪوُن (Lines parallel to X-axis)

- گراف پني تي هيٺيان ٽبڪا ڪيو.

A(5,4), B(2,4), C(−2,4), D(−4,4), E(0,4), F(3,4)



شڪل 7.7

- ٽبڪن جا مساوا جاچيو
- سيني ٽبڪن جا Y- مساوا ساڳيا آهن؟ ڌيان ڙآيو ڇا؟
- سڀ ٽبڪا هڪئي ليڪ ڙآهن.
- اِها ليڪ ڪهڙي محور جي پوروچوٽ آهي؟
- ليڪ DA تي هرهڪ ٽبڪي جو Y- مساوو ساڳيو مطلب 4 آهي. اُهو مقرر آهي اِنڪري ليڪ DA جو بيان Y=4 اِن مساوت وسيلي ڪبو آهي. ڪنهن بہ ٽبڪي جو Y- مساوو هوندو تہ اُهو ليڪ DA مٿان ئي هوندو. X محور کان 4 ايڪن جي مفاصلي پوروچوٽ ليڪ جي مساوت Y=4 آهي.

اَچو تہ چرچا ڪريون

- X محور کان 6 ايڪا مفاصلي تي ، اُن جي هيٺيان پوروچوٽ ليڪ ڪيڏي سگهجي ڇا؟
- $(-3,-6), (10,-6), (\frac{1}{2}, -6)$ اهي ٽبڪا اُن ليڪ تي هوندا ڇا؟
- ان ليڪ جي مساوت ڪهڙي ٿيندي؟

اِهو ڌيان ڙرکو

جيڪڏهن b<0 ۽ y=b اِها X محور جي پوروچوٽ ليڪ (O,b) ٽبڪي مان لنگهندڙ ليڪ ڪيڏبي تہ اُها X محور جي مٿان هوندي ۽ b<0 هوندي تہ اُها ليڪ X محور جي هيٺيان هوندي.

X محور جي پوروچوٽ ليڪ جي مساوت Y=b هوندي آهي.

چاڪي وٺون

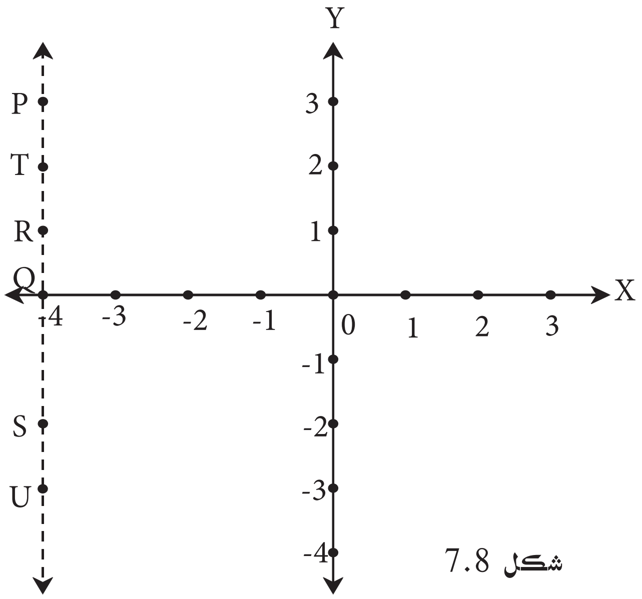
Y– محور جي پورو چوٽ ليڪون (Lines parallel to –Y axis)

- گراف پني تي هيٺيان ٽپڪا ڪڍو

P(-4,3),   Q(-4,0),   R(-4,1),   S(-4,-2),   T(-4,2),   U(-4,-3)

- ٽپڪن جا مساوا چڪاس ڪريو.
- سيني ٽپڪن جا X- مساوا ساڳيا آهن؟ ڌيان ڏيو ڇا؟
- سڀ ٽپڪا هڪ ئي ليڪ ۾ آهن ڇا ؟
- اها ليڪ ڪهڙي محور جي پورو چوٽ آهي؟
- ليڪ PS مٿان هرهڪ ٽپڪي جو X-مساوو ساڳيو مطلب 4- آهي. اِهو مقرر آهي اِنڪري ليڪ PS جو بيان 4- =X اِن مساوت ذريعي ڪبو آهي. جنهن ٽپڪي جو X- مساوو (4-) هوندو اُهو ليڪ PS مٿان ئي هوندو.

Y محور جي کاٻي پاسي 4 ايڪن جي مفاصلي پوروچوٽ ليڪ جي مساوت X = -4 آهي.



شڪل 7.8

اَچو تہ چرچا ڪريون

- Y محورکان 2 ايڪن جي مفاصلي ساڄي پاسي پوروچوٽ ليڪ ڪيئن سگهجي ٿي ڇا؟
- $(2,10), (2,8), (2, -\frac{1}{2})$ اِهي سڀ ٽپڪا اُن ليڪ تي هوندا ڇا؟
- اِن ليڪ جي مساوت ڪهڙي؟

اِهو ڌيان ۾رکو

جيڪڏهن x=a اِها y محور جي پوروچوٽ ليڪ (9,0) ٽپڪي مان ڪيئي ۽ $a>0$ تہ اِها y محور جي ساڄي پاسي هوندي ۽ جيڪڏهن $a<0$ تہ اِها ليڪ y محور جي کاٻي پاسي هوندي.
y محور جي پوروچوٽ ليڪ جي مساوت x=0 هوندي آهي.

اِهو ڌيان ۾رکو

(1) X- محورتي هرهڪ ٽٻڪي جو y- مساوو 0 هوندو آهي ۽ اُن جي اُبتڙ y- محورتي هرهڪ ٽٻڪي جو X- مساوو. هوندو آهي. X محورجي مساوت y=0 لکبي آهي ۽ y محورجي مساوت x=0 ائين لکبي.

(2) جيڪڏهن ڪنهن ٽٻڪي جو y- مساوو 0 آهي تہ اُهو X محورتي هوندو ۽ جيڪڏهن ڪنهن ٽٻڪي جو x- مساوو 0 آهي تہ اُهو ٽٻڪو y محورتي هوندو.

چاڪي وٺون

ليڪي مساوت جو گراف (Graph of linear equations)

مثال $x = 2$ ۽ $y = -3$ اِنهن ليڪن جو گراف ڪڍو.

حل: (i) گراف پني تي X ۽ Y محور ڪڍو.

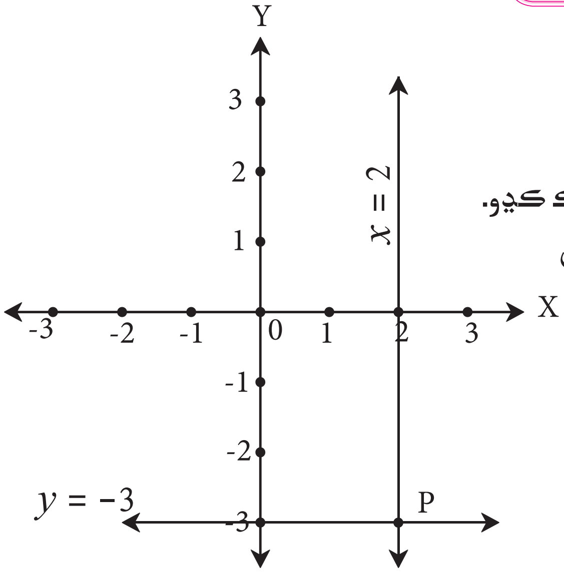
(ii) $x = 2$ اِنڪري Y محورجي ساڄي پاسي 2 ليڪن جي مفاصلي Y محور جي پوروچوت ليڪ ڪڍو.

(iii) $y = -3$ مليل آهي اِن ڪري X محورجي هيٺيان 3 ايڪن جي مفاصلي محورجي پوروچوت ليڪ ڪڍو.

(iv) محورن جي پوروچوت نڪتل اِهي لڪون ڏنل مساوتن جاگراف آهن.

(v) اِهي ٻئي ليڪون P وٽ ملن ٿيون اُنجا مساوا لهو.

(vi) P جا مساوا (3,2) آهن. اِها جاچ ڪريو.

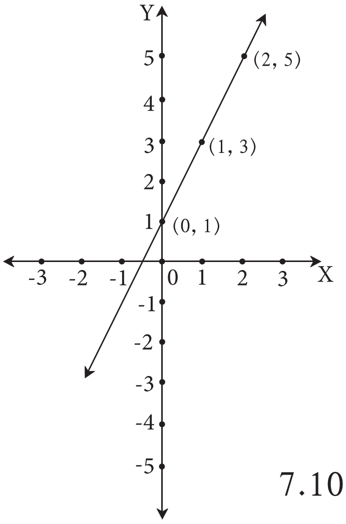


شڪل 7.9

عام طورليڪي مساوت جو گراف ڪيڻ

مشغولي: گراف پني تي (0,1) (1,3)(2,5) ٽٻڪا ڪڍو. اُنهي هم ليڪي ٽٻڪا آهن ڇا؟ هم ليڪي ٽٻڪا هجن تہ اُنهن مان لنگهندڙ ليڪ ڪڍو.

- اها ليڪ ڪهڙن چوٿن مان لنگهي ٿي؟
- اِها ليڪ .. محورتي جنهن ٽٻڪي وٽ ڪپي تي اُن ٽٻڪي جا مساوا لکو.
- اُن ليڪ مٿان ٽئين چوٿ جي ڪنهن بہ هڪ ٽٻڪي جا مساوا لکو.



شڪل 7.10

مثال : $2x - y + 1 = 0$ اها ٻن ڦيرائتن واري مساوت آهي اِن جو گراف ڪيو.

حل : $2x - y + 1 = 0$ مطلب $y = 2x + 1$

xجو ڪوبہ ملهہ ڪٿيyجو نسبتي ملهہ لهنداسين مثال x=0 تہ y=1 ملندي اهڙي نموني x جا $0, 1, 2, \frac{1}{2}, -2$ اِهي مُلهہ ڪٿي y جا ملهہ لهنداسين اِهي ملهہ هيٺ تختي ۾جوڙن جي روپ ۾لکنداسين.

x	0	1	2	$\frac{1}{2}$	-2
y	1	3	5	2	-3
(x, y)	(0,1)	(1,3)	(2,5)	$(\frac{1}{2}, 2)$	(−2,−3)

ٽپڪا ڪيل ڏسنداسين تہ اُهي هم ليڪي آهن.

اُنهن ٽپڪن مان لنگهندڙ ليڪ مطلب $2x - y + 1 = 0$ جو گراف

ICT Tools or Links

Geogebra Software جي مدد سان X محور ۽ Yمحور ڪيو جدا جدا ٽپڪا ڪيو. Algebric View ۾ٽپڪن جا مساوا ڏسو ۽ اَڀياس ڪريو. محورن جي پوروچوٽ ليڪن جون مساوتون ڏسو. Move Option اِستعمال ڪري ليڪن جون جڳهيون بدلايو X ۽ y محورن جون مساوتون ڪهڙيون ملن ٿيون.

اَڀياس 7.2

1. گراف پني تي A (3,0), B(3,3), C(0,3) اِهي ٽپڪا لهو. AB ۽ BC پاڻ ۾ملايو. ڪهڙي شڪل ملي ٿي؟ اُها لکو.
2. Y محورجي پوروچوٽ ۽ ڪاٻي پاسي 7 ايڪن جي مفاصلي ليڪ جي مساوت لکو.
3. X- محورجي پوروچوٽ ۽ هيٺيان 5 ايڪن ۾مفاصلي ليڪ جي مساوت لکو.
4. Q(-3,-2) اِهو ٽپڪو .. محور جي پوروچوٽ هڪ ليڪ مٿان آهي اُن ليڪ جي مساوت لکو ۽ اُن ليڪ جو گراف ڪيو.

6. هيٺ ڏنل مساوتن جا ڪهڙا گراف X محورجي پوروچوٽ آهن ۽ ڪهڙا Y- محورجي پوروچوٽ آهن.

(i) $x = 3$ (ii) $y - 2 = 0$ (iii) $x + 6 = 0$ (iv) $y = -5$

7. گراف پني تي $A(2,3), B(6,-1)$ ۽ $C(0,5)$ اِهي ٽپڪا ڪيو. جيڪڏهن اِهي ٽپڪا هم ليڪي هجن، تہ اُنهن مان لنگهندڙ ليڪ ڪيو. اِها ليڪ X محور ۽ Y محورتي جن ٽپڪن وٽ ڪپي ٿي، اُنهن ٽپڪن جا مساوا لکو.

8. هڪ ئي مساوو سرشتي ۾ هيٺ ڏنل مساوتن جا گراف ڪيو اُنهن جي عام چيدي ٽپڪن جا مساوا لکو.

$x + 4 = 0,\ y - 1 = 0,\ 2x + 3 = 0,\ 3y - 15 = 0$

9. هيٺ ڏنل مساوتن جا گراف ڪيو .

(i) $x + y = 2$ (ii) $3x - y = 0$ (iii) $2x + y = 1$

گڏيل اَڀياس 7

1. هيٺ ڀهو - چونڊ سوالن جي جوابن مان مناسب متبدل چونڊيو .

(i) X محورتي ڪهڙو بہ ٽپڪو هيٺ ڏنل روپن مان هوندو آهي؟

(A) (b, b) (B) $(0, b)$ (C) $(a, 0)$ (D) (a, a)

(ii) ليڪ y=x تي هرهڪ ٽپڪو هيٺ ڏنل روپن مان هوندو؟

(A) (a, a) (B) $(0, a)$ (C) $(a, 0)$ (D) $(a, -a)$

(iii) X محورجي مساوت ڪهڙي؟

(A) $x = 0$ (B) $y = 0$ (C) $x + y = 0$ (D) $x = y$

(iv) $(-4, -3)$ اِهو ٽپڪو ڪهڙي چوٿ ۾ آهي؟

(A) پهريون (B) ٻيون (C) ٽيون (D) چوٿون

(v) $(-5,5), (6,5), (-3,5), (0,5)$ اِنهن ٽپڪن مان لنگهندڙ ليڪ جو ڪهڙو روپ؟

(A) مَنبُ مان لنگهندڙ (B) Y محورجي پوروچوٽ

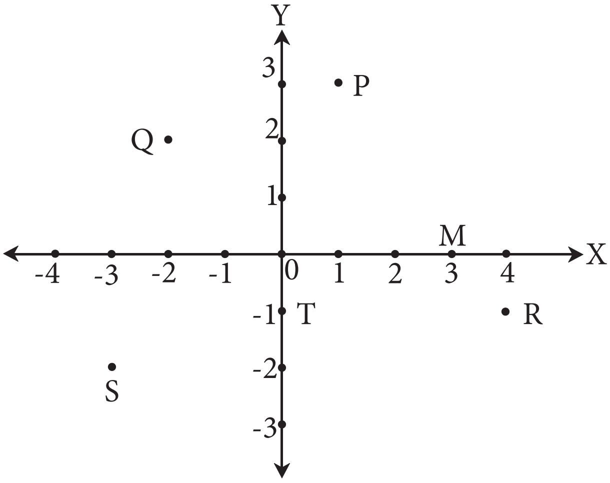
(C) X محورجي پوروچوٽ (D) اِنهن مان ڪوبہ نہ

(vi) $P(-1,1), Q(3,-4), R(1,-1), S(-2,-3), T(-4,4)$

اِنهن مان ڪهڙو - ڪهڙا ٽپڪا چوٿين چوٿ ۾ آهن؟

(A) P ۽ T (B) Q ۽ R (C) صرف S (D) P ۽ R

2. پرواري شڪل ۾ ڪجهہ ٽِپڪا ڏيکاريل آهن.
هيٺ ڏنل سوالن جا جواب لکو.
(i) Q ۽ R مساوا لکو
(ii) T ۽ M جا مساوا لکو.
(iii) ٽئين چوٿ ۾ ڪهڙا ٽپڪا آهن.
(iv) ڪهڙي ٽپڪي جو x مساوو ۽ y مساوو ساڳيا آهن؟



شڪل 7.11

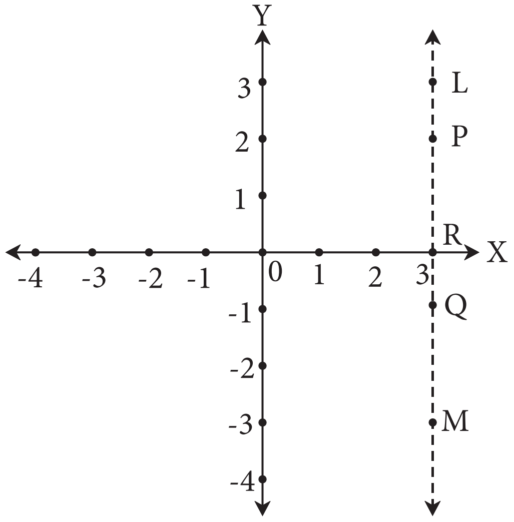
3. هيٺيان ٽپڪا گراف پني تي بنا ڪيڏڻ جي ٻڌايو تہ اُهي ڪهڙي چوٿ ۾ يا ڪهڙي محور تي آهن.

(i) (5, -3) (ii) (-7, -12) (iii) (-23, 4)
(iv) (-9, 5) (v) (0, -3) (vi) (-6, 0)

4. هيٺيان ٽپڪا مساوو سرشتي موجب ڪيڏو

A(1,3), B(-3,-1), C(1,-4), D(-2,3), E(0,-8), F(1,0)

5. پر واري شڪل ۾ ليڪ LM اِها Y محور جي پوروچوٽ آهي. سوالن جا جواب ڏيو.
(i) ليڪ LM جو Y- محور کان ڪيترو مفاصلو آهي؟
(ii) P,Q,R جا مساوا لکو.
(iii) ٽپڪي L ۽ ٽپڪي M اِنهن جي x مساوَن ۾ ڪيترو فرق آهي؟



شڪل 7.12

6. X- محورجي پوروچوٽ ۽ ان کان 5 ايڪا مفاصلي تي ڪيترين ليڪون آهن؟ انهن جون مساواتون لکو.

7. ڪوبہ حقيقي عدد a ڪٽي Y- محور ۽ x=a ان ليڪ ۾ مفاصلو لهو.

8 علم مثلث

اَچو تہ سکون

- علم مثلث جي سڃاڻپ
- ٽڪنڊي ۾ مثلاتي ريشو
- مثلاتي ريشن وچ ۾ لاڳاپو
- خاص ڪنڊن جا مثلاتي ريشو.

علم مثلث جي سڃاڻپ (Introduction to trigonometry)

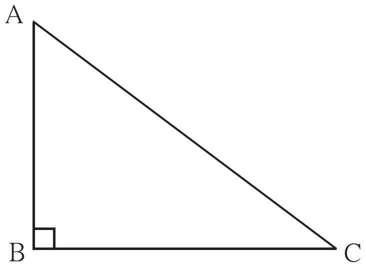
اَسان زمين تي مفاصلا، هلي ڪري ڏوريءَ وسيلي ماپي سگهندا آهيون پر سمنڊ ۾ جهاز جو لائيٽ هائوس کان مفاصلو ڪيئن ماپيون؟ وڻ جي اوچائي ڪيئن ماپيون؟

مٿيان چترڊسو چترجي سوالن جا جواب حسابن وسيلي لهبا. اِنهن سوالن جو جواب حاصل ڪرڻ ۾ علم مثلث اُپيوڳي آهي. علم مثلث جو اِستعمال اِنجنيئرنگ، کگول شاستر، جهاز راني وشين ۾ ڪيو ويندو آهي.

علم مثلث (Trigonometry) اِهو لفظ گريڪ لفظن مان تيار ٿيو آهي Tri معنيٰ ٽي ۽ gona مطلب پاسا، metron مطلب ماپ.

ذرا ياد ڪريو

اَسان ٽڪنڊن جو اَڀياس ڪيو آهي پائٿاگورس جو سڌيان ۽ نهڪندڙ ٽڪنڊن جي خاصيتن جي آڌار تي ئي علم مثلث شروع ٿئي ٿي. اُنهن جو دورڪريون.

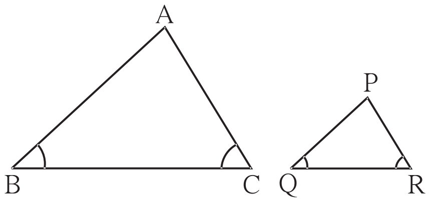


شڪل 8.1

- $\triangle ABC$ ۾ $\angle B$ گوني ڪنڊ آهي. $\angle B$ جو سامهون وارو پاسو AC اِهو هئپاٽينيوز آهي $\angle A$ جي سامهون پاسو BC ۽ $\angle C$ جي سامهون پاسو AB آهي. اِن ٽڪنڊي ۾ پائٿاگورس سڌيان موجب

$$(AB)^2 + (BC)^2 = (AC)^2$$

• جيڪڏهن $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ تہ اُنجا لاڳيتا پاسا پورپورشن ۾ هوندا آهن يعني، $\frac{AB}{PQ}=\frac{BC}{QR}=\frac{AC}{PR}$



شڪل 8.2

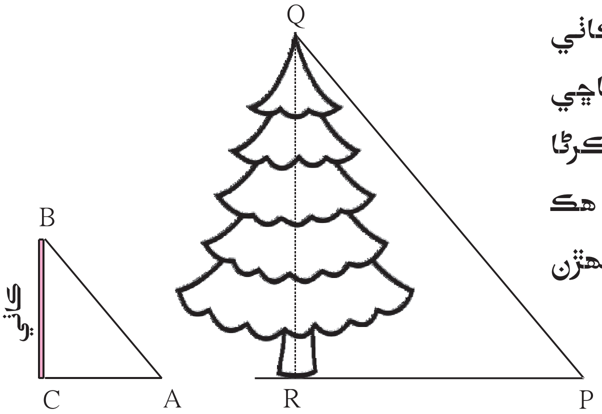
ڪنهن وڏي وڻ جي اوچائي لهڻ لاءِ هڪ جهڙن ٽڪنڊن جو اِستعمال ڪيئن ٿيندو آهي اُهو ڏسنداسين.

مشغولي : اِهو پريوڳہ ڏينهن جي روشنيءَ ۾ ڪرڻ گهرجي ير واري شڪل ڏسو. QR اِها وڻ جي اوچائي آهي. BCاِها لڪڙين جي اوچائي آهي. ننڍي ڪاٺي زمين تي اُڀي رکي، اُن جي اوچائي ۽ اُنجي پاڇي جي ديگهہ ماپيو. وڻ جو پاڇو ماپيو. سج جا ڪرڻا پوروچوت هئڻ ڪري ΔABC ۽ ΔPQR اِهي هڪ جهڙا ٽڪنڊا آهن اِهو سمجهي وٺو. هڪ جهڙن ٽڪنڊن جا پاسا پرپورشن ۾ هوندا آهن. مطلب

$$\frac{QR}{PR}=\frac{BC}{AC}$$

مطلب وڻ جي اوچائي QR ملندي.

$QR = \frac{BC}{AC}\times PR$ اِها مساوات ملندي



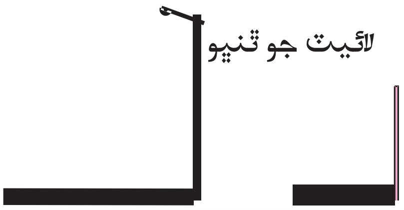
شڪل 8.3

PR، BC ۽ AC اِنهن جي ڄاڻ آهي. اِنهن جا ملهہ مساوات ۾ رکڻ QR جي ديگهہ مطلب وڻ جي اوچائي ملندي.

ويچار ڪريو

اِهو پريوڳہ صبح جو 8 بجي نہ ڪري 11:30 يا 1:30 بجي ڪرڻ گهرجي ڇا؟

مشغولي : متين مشغولي ڪرڻ لاءِ توهان پسگردائيءَ جي هڪ وڏي وڻ جي اوچائي لهو. وڻ نہ هجڻ حالت ۾ ڪنهن وڏي ٿنڀي جي اوچائي لهو.

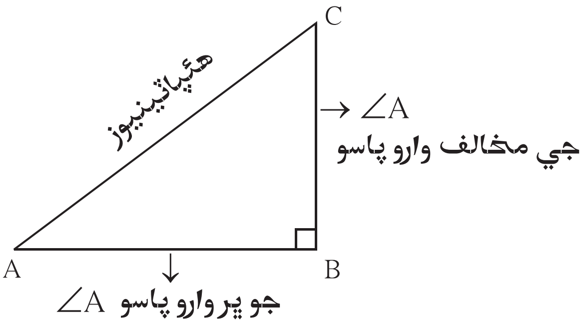


شڪل 8.4

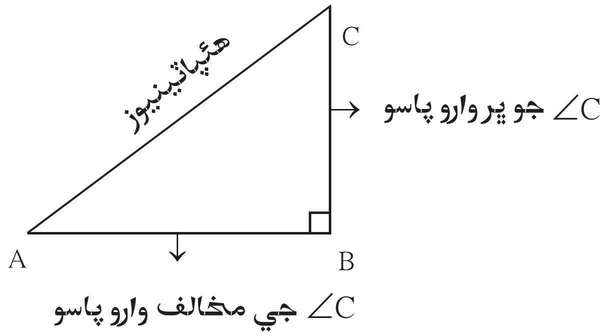
جاچي وٺون

ٽڪنڊي حوالي ڪجھ خاصيتون (Terms related to triangle)

گوني ڪنڊ ٽڪنڊي $\triangle ABC$ ۾ $\angle B = 90^\circ$ ۽ $\angle A$ ۽ $\angle C$ سوڙهيون ڪنڊون آهن.

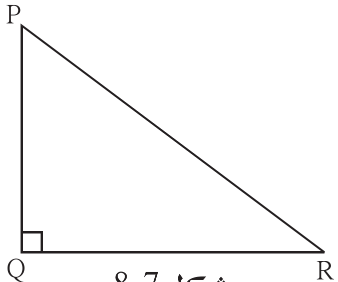


شڪل 8.5



شڪل 8.6

مثال : گوني ڪنڊ ٽڪنڊي ΔPQR ۾



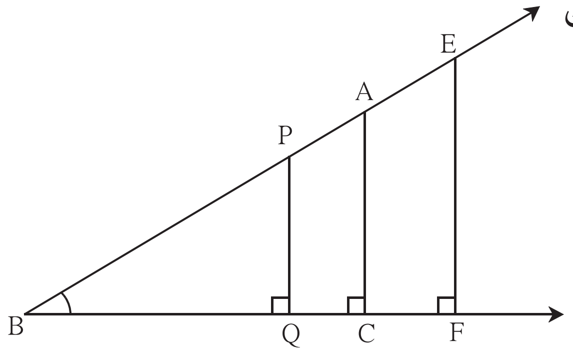
شڪل 8.7

$\angle P$ جو مخالف پاسو = . . . $\angle P$ جو مخالف پاسو = ...

$\angle R$ جو پرواڙو پاسو = . . . $\angle R$ جو پرواڙو پاسو = ...

ٽڪنڊي ۾ مثلاثي ريشو (Trigonometic ratios)

پرواري شڪل 8.8 ۾ ڪجھ گوني ڪنڊ ٽڪنڊا مليل آهن. انُهن ۾ $\angle B$ عام ڪنڊ آهي. اِهي سڀ ٽڪنڊا هڪ جهڙا آهن. هتي



شڪل 8.8

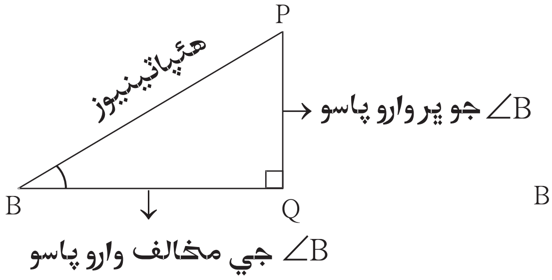
$$\Delta PQB \sim \Delta ACB$$

$$\therefore \frac{PB}{AB} = \frac{PQ}{AC} = \frac{BQ}{BC}$$

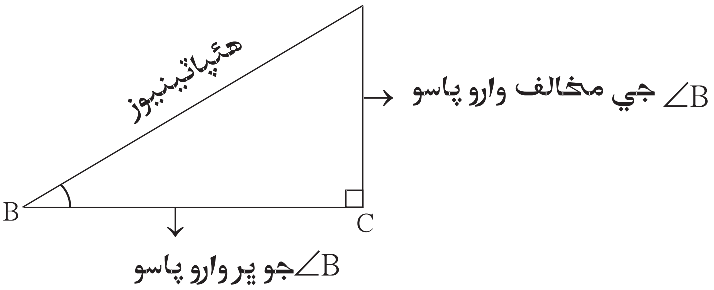
الٽرنيندو ڪريا . . . . . . $\dfrac{PQ}{PB} = \dfrac{AC}{AB}$ $\therefore$ $\dfrac{PQ}{AC} = \dfrac{PB}{AB}$

الٽرنيندو ڪريا . . . . . . $\dfrac{QB}{PB} = \dfrac{BC}{AB}$ $\therefore$ $\dfrac{QB}{BC} = \dfrac{PB}{AB}$

هيٺ شڪل 8.9 ۽ 8.10 جا ٽڪنڊا الڳ ڪيا ويا آهن. 8.8 جو مخالف پاسو



شڪل 8.9



شڪل 8.10

(i) Δ PQB ۾ ، Δ ACB ۾ ،

$$\frac{PQ}{PB} = \frac{\angle B \text{ جو مخالف پاسو}}{\text{هئپاٽينيوز}} \qquad \frac{AC}{AB} = \frac{\angle B \text{ جو مخالف پاسو}}{\text{هئپاٽينيوز}}$$

$\frac{PQ}{PB}$ ۽ $\frac{AC}{AB}$ پر

$$\frac{AC}{AB} = \frac{PQ}{PB} = \frac{\angle B \text{ جو مخالف پاسو}}{\text{هئپاٽينيوز}}$$

اِن ريشي کي ∠B اِن ڪنڊ جو (sine) ريشو چئبو آهي اِهو تُوري ۾ **sinB** لکبو آهي.

(ii) Δ PQB ۽ Δ ACB ۾

$$\frac{BQ}{PB} = \frac{\angle B \text{ جو پروارو پاسو}}{\text{هئپاٽينيوز}} \quad ۽ \quad \frac{BC}{AB} = \frac{\angle B \text{ جو پروارو پاسو}}{\text{هئپاٽينيوز}}$$

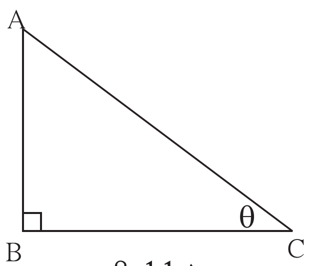
$$\frac{BC}{AB} = \frac{BQ}{PB} = \frac{\angle B \text{ جو پروارو پاسو}}{\text{هئپاٽينيوز}}$$

اِن ريشي کي B جو (cosine) ريشو چئبو آهي. اِهو تُوري ۾ **cosB** ڪري لکبو آهي.

(iii) $$\frac{AC}{BC} = \frac{PQ}{BQ} = \frac{\angle B \text{ جو مخالف پاسو}}{\angle B \text{ جو پروارو پاسو}}$$

اِن ريشي کي B جو (tangent) ريشو چئبو آهي. اِهو تُوري ۾ **tanB** ڪري لکبو آهي.

مثال :



شڪل 8.11

ڪيترائي دفعا ڳوڻي ڪنڊ ٽڪنڊي ۾ سوڙهيون ڪنڊون اِنهن جون ماپون (ٿيٽا) θ (آلفا) α (بيٽا) β وغيره گريڪ لفظن وسيلي ڏيکاريون آهن. ΔABC ۾ C جي ماپ θ آهي. اَهڙي وقت sinC, cosC, tanC جي بدران سلسلي ۾ sinθ, cosθ, tan θ ائين لکبو آهي.

$$\sin C = \sin\theta = \frac{AB}{AC}, \quad \cos C = \cos\theta = \frac{BC}{AC}, \quad \tan C = \tan\theta = \frac{AB}{BC}$$

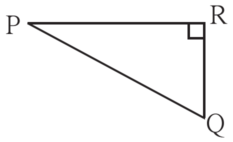
اِهو ڌيان ۾ رکو

- sin ريشو = $\dfrac{\text{ڪنڊ جو مخالف پاسو}}{\text{هئپاٽينيوز}}$
- cos ريشو = $\dfrac{\text{ڪنڊ جو پروارو پاسو}}{\text{هئپاٽينيوز}}$
- tan ريشو = $\dfrac{\text{ڪنڊ جو مخالف پاسو}}{\text{ڪنڊ جو پروارو پاسو}}$

اَڀياس 8.1

1. پرواري شڪل $\triangle PQR$ ۾ $\angle R$ ڳوني ڪنڊ آهي تہ هيٺ ڏنل ريشا لهو.

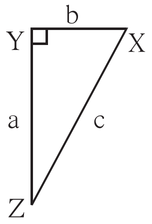
(i) sin P (ii) cos Q (iii) tan P (iv) tan Q



شڪل 8.12

2. شڪل ۾ $\triangle ABC$ ڳوني ٽڪنڊ آهي $\angle XYZ = 90^\circ$ پاسن جي ڊيگهہ a,b,c ڏنل آهي هيٺيان ريشا لهو.

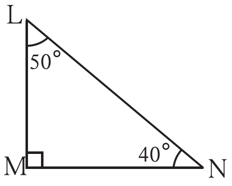
(i) sin X (ii) tan Z (iii) cos X (iv) tan X



شڪل 8.13

3. ڳوني ڪنڊ ٽڪنڊو $\triangle LMN$ ۾ $\angle LMN = 90^\circ$، $\angle L = 50^\circ$ ۽ $\angle N = 40^\circ$ تہ هيٺ ڏنل ريشا لهو.

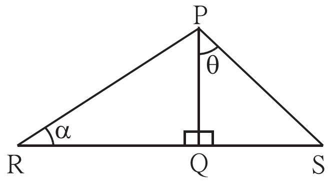
(i) $\sin 50^\circ$ (ii) $\cos 50^\circ$
(iii) $\tan 40^\circ$ (iv) $\cos 40^\circ$



شڪل 8.14

4. ڏنل شڪل ۾ $\angle PQR = 90^\circ$،
$\angle PQS = 90^\circ$، $\angle PRQ = \alpha$ ۽ $\angle QPS = \theta$
آهن تہ هيٺ ڏنل ريشا لهو.

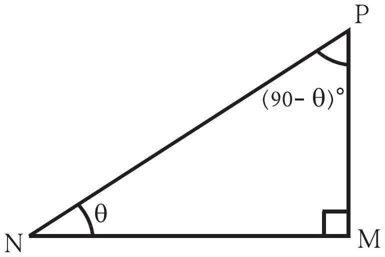
(i) $\sin\alpha, \cos\alpha, \tan\alpha$
(ii) $\sin\theta, \cos\theta, \tan\theta$



شڪل 8.15

چاڪي وٺون

مثلث ريشن جو پاڻ ۾ لاڳاپو (Relation between trigonometric ratios)



شڪل 8.16

شڪل 8.16 ۾،

Δ PMN ڪوني ڪنڊ ٽڪنڊو آهي.

$m\angle M = 90^\circ$، $\angle P$ ۽ $\angle N$

اِهي هڪ ٻئي جون پورڪ ڪنڊون آهن جيڪڏهن

$m\angle N = \theta$ تہ $m\angle P = 90 - \theta$

$$\sin\theta = \frac{PM}{PN} \quad \text{........(1)}$$

$$\cos\theta = \frac{NM}{PN} \quad \text{.......(2)}$$

$$\tan\theta = \frac{PM}{NM} \quad \text{........(3)}$$

$$\sin(90-\theta) = \frac{NM}{PN} \quad \text{........(4)}$$

$$\cos(90-\theta) = \frac{PM}{PN} \quad \text{.......(5)}$$

$$\tan(90-\theta) = \frac{NM}{PM} \quad \text{........(6)}$$

$\therefore \sin\theta = \cos(90-\theta)$ .... (1) ۽ (5) مان

$\cos\theta = \sin(90-\theta)$ .... (2) ۽ (4) مان

هاڻي ڌيان ڏيو : $\tan\theta \times \tan(90-\theta) = \frac{PM}{NM} \times \frac{NM}{PM}$ .... (3) ۽ (6) مان

$$\therefore \tan\theta \times \tan(90-\theta) = 1$$

ساڳئي نموني $\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\frac{PM}{PN}}{\frac{NM}{PN}} = \frac{PM}{PN} \times \frac{PN}{NM} = \frac{PM}{NM} = \tan\theta$

اهو ڌيان ۾ رکو

$\sin(90-\theta) = \cos\theta$, $\cos(90-\theta) = \sin\theta$,

$\tan\theta \times \tan(90-\theta) = 1$, $\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta$,

* وڌيڪ ڄاڻ لاءِ

$$\frac{1}{\sin\theta} = \operatorname{cosec}\theta, \quad \frac{1}{\cos\theta} = \sec\theta, \quad \frac{1}{\tan\theta} = \cot\theta$$

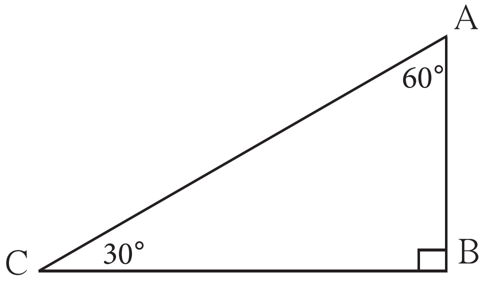
مطلب $\operatorname{cosec}\theta$، $\sec\theta$ ۽ $\cot\theta$ اهي نمبروار $\sin\theta$، $\cos\theta$ ۽ $\tan\theta$ جا ضرب اُبتڙ آهن.

- $\operatorname{cosec}\theta = \sec(90-\theta)$
- $\sec\theta = \operatorname{cosec}(90-\theta)$
- $\cot\theta = \tan(90-\theta)$
- $\tan\theta = \cot(90-\theta)$

ذرا ياد ڪريو

$90°-60°-30°$ ماپن واري ٽڪنڊي جي خاصيت

جيڪڏهن ڪنهن ٽڪنڊي جي ڪندن جون ماپون $90°, 60°, 30°$ آهي ته اَسان کي خبر آهي ته $30°$ ڪند جو مخالف پاسو هئپاٽينيوز جو اڌ ۽ $60°$ ڪند جو مخالف پاسو $\frac{\sqrt{3}}{2}$ هئپاٽينيوز جو ٿيندو آهي.



شڪل 8.17

پرواري شڪل ۾ $\Delta\, ABC$ ۾

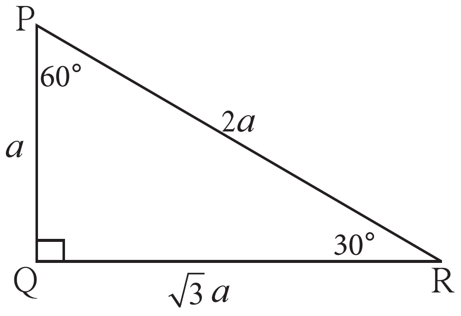
$\angle C = 30°, \angle A = 60°, \angle B = 90°$ آهي

$\therefore AB = \frac{1}{2}AC$ ۽ $BC = \frac{\sqrt{3}}{2}AC$

ڄاڻي وٺو

$30°$ ۽ $60°$ ڪندن جا مثلاثي ريشو (Trignometric ratios of 30° and 60°)

ڪندن $\Delta\, PQR$ ۾ جيڪڏهن $\angle R = 30°$، $\angle P = 60°$، $\angle Q = 90°$ ۽ $PQ = a$ سمجهو



شڪل 8.18

جيڪڏهن $PQ = \frac{1}{2}\,PR$

$a = \frac{1}{2}\,PR$

$\therefore PR = 2a$

$QR = \frac{\sqrt{3}}{2}PR$

$QR = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2a$

$QR = \sqrt{3}\,a$

$\therefore$ جيڪڏهن $PQ = a$ ته $PR = 2a$ ۽ $QR = \sqrt{3}\,a$

(I) 30° ماپ واري ڪنڊ جا ريشا .

$$\sin 30^\circ = \frac{PQ}{PR} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{QR}{PR} = \frac{\sqrt{3}a}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{PQ}{QR} = \frac{a}{\sqrt{3}a} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

(II) 60° ماپ واري ڪنڊ جا ريشا .

$$\sin 60^\circ = \frac{QR}{PR} = \frac{\sqrt{3}\,a}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{PQ}{PR} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$$

$$\tan 60^\circ = \frac{QR}{PQ} = \frac{\sqrt{3}\,a}{a} = \sqrt{3}$$

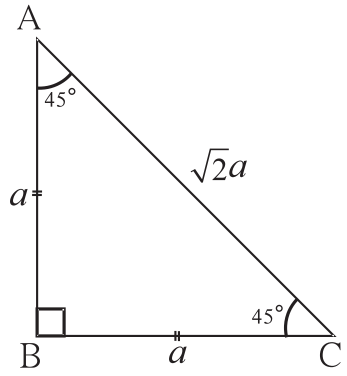
$\triangle PQR$ ۾ $\angle Q = 90^\circ$ اُهي $\angle P$ ۽ $\angle R$ اِهي پورڪ ڪنڊون آهن پورڪ ڪنڊن جا Sine ۽ Cosine اِنهن جو پاڻ ۾ لاڳاپو ڏسو.

$\cos\theta = \sin(90-\theta)$ $\cos 30^\circ = \sin(90^\circ - 30^\circ) = \sin 60^\circ$ $\cos 30^\circ = \sin 60^\circ$	$\sin\theta = \cos(90-\theta)$ $\sin 30^\circ = \cos(90^\circ - 30^\circ) = \cos 60^\circ$ $\sin 30^\circ = \cos 60^\circ$

اِهو ڌيان ۾ رکو

$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$	$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$
$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$	$\tan 60^\circ = \sqrt{3}$

(III) 45° ماپن واري ٽڪنڊي جا ريشا



شڪل 8.19

ڪنڊون ΔABC ۾ $\angle B = 90^\circ$، $\angle A = 45^\circ$،

$\therefore \angle C = 45^\circ$ اِهو ٻيورپاسو ٽڪنڊو آهي

سمجهو، $AB = a$ تہ $BC = a$

پائٿاگورس سڌانت موجب AC

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

$$= a^2 + a^2$$

$$AC^2 = 2a^2$$

$$\therefore AC = \sqrt{2}\,a$$

شڪل 8.19 ۾ $\angle C = 45^\circ$ آهي.

$$\sin 45^\circ = \frac{AB}{AC} = \frac{a}{\sqrt{2}\,a} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

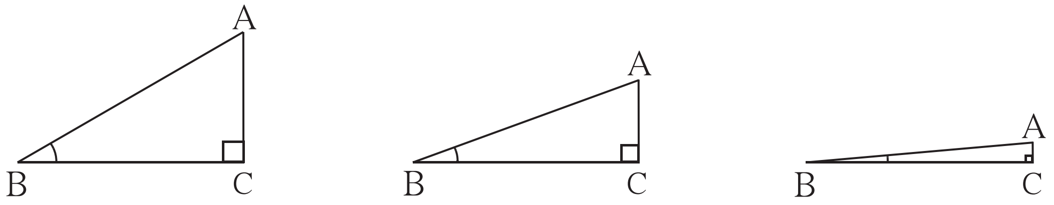
$$\cos 45^\circ = \frac{BC}{AC} = \frac{a}{\sqrt{2}\,a} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\tan 45^\circ = \frac{AB}{BC} = \frac{a}{a} = 1$$

اِهو ڌيان ۾ رکو

$\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\tan 45^\circ = 1$

(IV) 0° ۽ 90° ماپن جا ريشا .

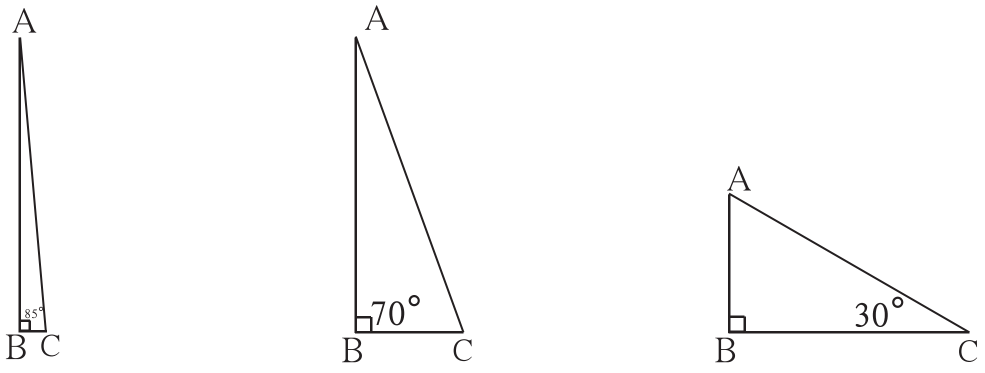


شڪل 8.20

ڳوني ڪنڊ ٽڪنڊي ۾ ABC $\angle C = 90^\circ$ ۽ $\angle B = 30^\circ$ آهي ته $\sin 30^\circ = \frac{AC}{AB}$ اِها اِسان کي ڄاڻ آهي AB جي ڊيگهه مقرر رکي $\angle B$ جي ماپ جيئن ننڍي ٿيندي ٿيئن $\angle B$ جو سامهون وارو پاسو AC اِن جي ڊيگهه به گهٽجندي ويندي مطلب $\angle B$ جي ماپ گهٽائڻ سان $\sin \theta$ به گهٽجندي.

$\therefore$ $\angle B$ جي ماپ 0° ته AC جي ڊيگهه به 0 ٿيندي.

$$\therefore \sin 0^\circ = \frac{AC}{AB} = \frac{0}{AB} \qquad \therefore \sin 0^\circ = 0$$



شڪل 8.21

هاڻي شڪل 8.21 ڏسو اِن ڳوني ڪنڊ ٽڪنڊي ۾ $\angle B$ جي ماپ جيئن جيئن وڌندڙ وڃي ٿي AC جي ڊيگهه به وڌندي وڃي ٿي جيڪڏهن $\angle B = 90^\circ$ ته AC به AB جيترو ٿيندو.

$$\therefore \sin 90^\circ = \frac{AC}{AB} \qquad \therefore \sin 90^\circ = 1$$

اَسان پورڪ ڪنڊن جا ريشا سمجها آهن.

$$\sin\theta = \cos(90-\theta) \quad ۽ \quad \cos\theta = \sin(90-\theta)$$

$$\therefore \cos 0^\circ = \sin(90-0)^\circ = \sin 90^\circ = 1$$

$$۽ \quad \cos 90^\circ = \sin(90-90)^\circ = \sin 0^\circ = 0$$

اِهو ڌيان ۾رکو

$\sin 0^\circ = 0,\quad \sin 90^\circ = 1,\quad \cos 0^\circ = 1,\quad \cos 90^\circ = 0$

اَسان کي ڄاڻ آهي،

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \qquad \therefore \tan 0 = \frac{\sin 0}{\cos 0} = \frac{0}{1} = 0$$

$$پر \quad \tan 90^\circ = \frac{\sin 90^\circ}{\cos 90^\circ} = \frac{1}{0}$$

پر $\frac{1}{0}$ اِها ونڊ نٿي ڪري سگهجي. θ سوڙهي ڪنڊ جيڪڏهن وڏي ڪنڊ ڪندي اُها 90° جي ويجهو پهچندي ته $\tan\theta$ به وڌو ٿيندو ويندو پر $\tan 90$ جو ملهه ٻڌائي نه سگهبو.

اِهو ڌيان ۾رکو

خاص ماپن وارن ڪنڊن جا ريشا .

ريشو / ماپ	0°	30°	45°	60°	90°
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
tan	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	اَڻ وصفيل

حل ڪيل مثال

مثال(1) ملهه لهو : $2\tan 45^\circ + \cos 30^\circ - \sin 60^\circ$

حل : $2\tan 45^\circ + \cos 30^\circ - \sin 60^\circ$

$$= 2 \times 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= 2 + 0$$

$$= 2$$

مثال(2) ملهه لهو $\frac{\cos 56^\circ}{\sin 34^\circ}$

حل : $56^\circ + 34^\circ = 90^\circ$ مطلب 56 ۽ 34 اهي ڪنڊون پورڪ ڪنڊون آهن.

$$\sin\theta = \cos(90 - \theta)$$

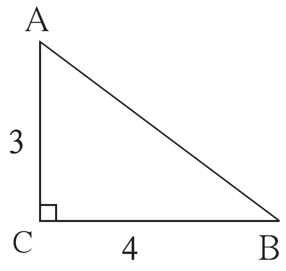
$$\therefore \quad \sin 34^\circ = \cos(90 - 34)^\circ = \cos 56^\circ$$

$$\therefore \quad \frac{\cos 56^\circ}{\sin 34^\circ} = \frac{\cos 56^\circ}{\cos 56^\circ} = 1$$

مثال (3) ڪنڊون ΔACB ۾ $\angle C = 90^\circ, AC = 3, BC = 4$

تہ ريشا لهو

$\sin A, \sin B, \cos A, \tan B$



شڪل 8.22

حل :

$AB^2 = AC^2 + BC^2$ (پائٿاگورس سڌيان)

$= 3^2 + 4^2$

$= 5^2$

$AB = 5$

$$\sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{4}{5} \qquad \cos A = \frac{AC}{AB} = \frac{3}{5}$$

$$\sin B = \frac{AC}{AB} = \frac{3}{5} \qquad \tan B = \frac{AC}{BC} = \frac{3}{4}$$

مثال (4) ڪنڊون ΔPQR ۾ $\angle Q = 90^\circ$ ، $\angle R = \theta$ گوني ڪنڊ ٽڪنڊي ۾ لهو.

$\sin\theta = \frac{5}{13}$ تہ $\cos\theta, \tan\theta$

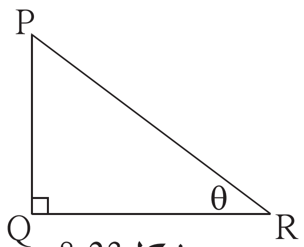
حل :

گوني ڪنڊ ٽڪنڊي ΔPQR ۾

$$\angle R = \theta$$

$$\sin\theta = \frac{5}{13}$$

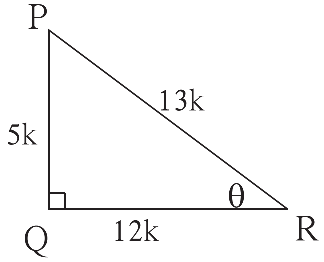
$$\therefore \quad \frac{PQ}{PR} = \frac{5}{13}$$



شڪل 8.23

سمجهو تہ ∴ $PQ = 5k$ ۽ $PR = 13k$

پائٿاگورس سڏيان موجب



شڪل 8.24

$$PQ^2 + QR^2 = PR^2$$
$$(5k)^2 + QR^2 = (13k)^2$$
$$25k^2 + QR^2 = 169\,k^2$$
$$QR^2 = 169\,k^2 - 25k^2$$
$$QR^2 = 144\,k^2$$
$$QR = 12k$$

هاڻي ΔPQR ۾ $PQ = 5k$ ۽ $PR = 13k$, $QR = 12k$

$$\cos\theta = \frac{QR}{PR} = \frac{12k}{13k} = \frac{12}{13}\ , \ \tan\theta = \frac{PQ}{QR} = \frac{5k}{12k} = \frac{5}{12}$$

ويچار ڪريو

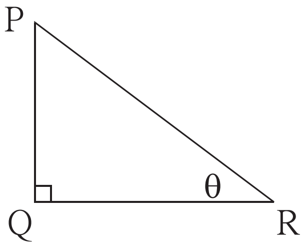
(1) متي ڏنل مثال ڪرڻ وقت PQ ۽ PR اِهي 5k ۽ 12k چوڪنيا ويا.

(2) PQ ۽ PR جي نمبروار ديگهہ 5 ۽ 13 ڪٽي سگهجي ٿي ڇا؟ اِئين ڪٽنڌي لکڻ ۾ ڪا بدل سدل ڪرڻي پوندي ڇا؟

علم مثلث ۾ ڪجهہ اَهم مساواتون

ΔPQR ۾ اِئين سمجهو

$\angle PQR = 90°$, $\angle R = \theta$



شڪل 8.25

$$\sin\theta = \frac{PQ}{PR} \quad ....(1)$$
$$\cos\theta = \frac{QR}{PR} \quad ....(2)$$

پائٿاگورس سڏيان موجب

$$PQ^2 + QR^2 = PR^2$$

سيني کي PR^2 سان ونڊ

$$\therefore \frac{PQ^2}{PR^2} + \frac{QR^2}{PR^2} = \frac{PR^2}{PR^2} ....$$

$$\therefore \left(\frac{PQ}{PR}\right)^2 + \left(\frac{QR}{PR}\right)^2 = 1$$

$\therefore (\sin\theta)^2 + (\cos\theta)^2 = 1$ .... (1) ۽ (2) مان

اِهو ڌيان ۾ رکو

$(\sin\theta)^2$ اِهو $\sin\theta$ جي ٻي سگهہ آهي اِها $\sin^2\theta$ ائين لکبي آهي.

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ اِها مساوت اَسان پائٿاگورس سڌيان واپرائي θ هڪ سوڙهي ڪنڊ ۾ ثابت ڪيو $\theta = 0°$ يا $\theta = 90°$ اِنهن حالتن ۾ اِهو سوتر صحيح آهي اِنجي چڪاس ڪنداسين.

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ اِها مساوت ڪهڙي بہ ماپ واري ڪنڊ لاءِ صحيح هئڻ ڪري اِنکي بنيادي سوتر ڪري مڃبو .

(i) $0 \le \sin\theta \le 1,\ 0 \le \sin^2\theta \le 1$

(ii) $0 \le \cos\theta \le 1,\ 0 \le \cos^2\theta \le 1$

اَڀياس 8.2

1. هيٺ ڏنل خاڪي ۾ هرهڪ ڪالم ۾ هڪ ريشو مليل آهي. اُن مان ٻيا بہ ريشا لهي خال ڀريو.

$\sin\theta$		$\frac{11}{61}$		$\frac{1}{2}$				$\frac{3}{5}$	
$\cos\theta$	$\frac{35}{37}$				$\frac{1}{\sqrt{3}}$				
$\tan\theta$			1			$\frac{21}{20}$	$\frac{8}{15}$		$\frac{1}{2\sqrt{2}}$

2. ملهہ لهو

(i) $5\sin 30° + 3\tan 45°$

(ii) $\frac{4}{5}\tan^2 60° + 3\sin^2 60°$

(iii) $2\sin 30° + \cos 0° + 3\sin 90°$

(iv) $\frac{\tan 60}{\sin 60 + \cos 60}$

(v) $\cos^2 45° + \sin^2 30°$

(vi) $\cos 60° \times \cos 30° + \sin 60° \times \sin 30°$

3. جيڪڏهن $\sin\theta = \frac{4}{5}$ تہ $\cos\theta$ ڪيو.

4. جيڪڏهن $\cos\theta = \frac{15}{17}$ تہ $\sin\theta$ ڪيو.

1. هيٺ ڀهو چونڊ سوالن جي جوابن مان مناسب متبادل چونڊيو.

(i) هيٺ ڪهڙو بيان صحيح آهي.

(A) $\sin\theta = \cos(90-\theta)$ (B) $\cos\theta = \tan(90-\theta)$

(C) $\sin\theta = \tan(90-\theta)$ (D) $\tan\theta = \tan(90-\theta)$

(ii) $\sin 90°$ جو ملهه ڪهڙو؟

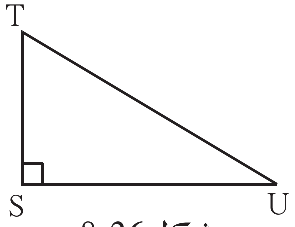
(A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (B) 0 (C) $\frac{1}{2}$ (D) 1

(iii) $2\tan 45° + \cos 45° - \sin 45° =$ جو ملهه ڪيترو؟

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

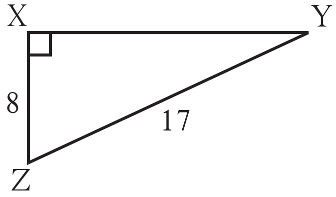
(iv) $\frac{\cos 28°}{\sin 62°} =$ جو ملهه ؟

(A) 2 (B) −1 (C) 0 (D) 1



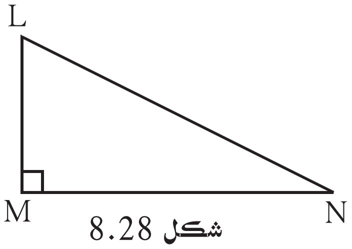
شڪل 8.26

2. گوني ڪنڊ ٽڪنڊي $\Delta\, TSU$ ۾
$TS = 5, \angle S = 90°,$
$SU = 12$ ته $\sin T$، $\cos T$، $\tan T$ جا ملهه لهو.
$\sin U, \cos U, \tan U$



شڪل 8.27

3. گوني ڪنڊ ٽڪنڊي $\Delta\, YXZ$ ۾
$\angle X = 90°$، $XZ =$ 8 س م، $YZ =$ 17 س م
ته ملهه لهو.
$\sin Y, \cos Y, \tan Y, \sin Z, \cos Z, \tan Z$



شڪل 8.28

4. گوني ڪنڊ ٽڪنڊي ΔLMN ۾ $\angle N = \theta$ ، $\angle M = 90°$،
$\cos\theta = \frac{24}{25}$ ته $\sin\theta$ ۽ $\tan\theta$ جا ملهه لهو.
۽ $(\sin^2\theta)$ ۽ $(\cos^2\theta)$ جو ملهه لهو.

5. خال ڀريو

(i) $\sin 20° = \cos \square°$

(ii) $\tan 30° \times \tan \square° = 1$

(iii) $\cos 40° = \sin \square°$

مٿاڇرو ايراضي ۽ مقدار

RHRTPZ

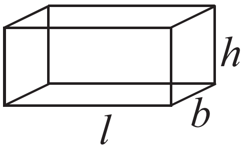
اَچو تہ سکون

- ڪون (مخروُط) جي مٿاڇرو ايراضي
- گولي جي مٿاڇرو ايراضي
- ڪون جو مقدار
- گولي جو مقدار

ذرا ياد ڪريو

اَسان گذريل درجي ۾ مستطيل بلاڪ،ڪعب سلينڊر اِنهن ٽ - ماپي جسمن جي مٿاڇرو ايراضي ۽ مقدار ڪيئن لهبو آهي اِهو سکيا آهيون.

مستطيل بلاڪ



شڪل 9.1

- مستطيل بلاڪ جي ڊيگهہ، ويڪر ۽ اوچائي مستطيل بلاڪ سلسليوار l , b, h آهن تہ

(i) مستطيل بلاڪ جي اُڀي مٿاڇرن جي ايراضي

$$= 2(l + b) \times h$$

هتي اُڀا چار مٿاڇرا ڌيان ۾رکيل آهن.

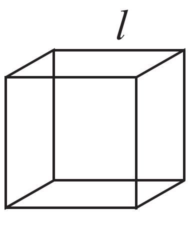
(ii) مستطيل بلاڪ جي ڪل مٿاڇرو ايراضي

$$= 2(lb + bh + lh)$$

هتي 6 مٿاڇرا ڌيان ۾رکيل آهن.

(iii) مستطيل بلاڪ جو مقدار $= l \times b \times h$

ڪعب



شڪل 9.2

عحب جي ڪل مٿاڇرو ايراضي

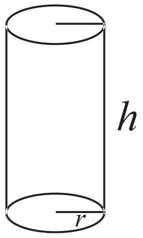
- ڪعب جي ڪنار (edge) l آهي تہ

(i) ڪعب جي ڪل مٿاڇرو ايراضي $= 6l^2$

(ii) ڪعب جي اُڀي مٿاڇرن جي ايراضي $= 4l^2$

(iii) ڪعب جو مقدار $= l^3$

سلينڊر



شڪل 9.3

- سلينڊر جي پايي جو نيم قطر r اوچائي h آهي تہ

(i) سلينڊر جي وريل مٿاڇرو ايراضي $= 2\pi rh$

(ii) سلينڊر جي ڪل مٿاڇرو ايراضي $= 2\pi r(r + h)$

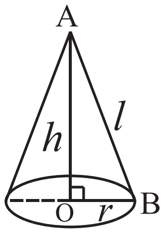
(iii) سلينڊر جو مقدار $= \pi r^2 h$

اَڀياس 9.1

1. هڪ مستطيل بلاڪ آڪار جو دوا جو ڪوڪو، اُنجي ڊيگهه، ويڪر ۽ اوچائي نمبروار 20 س م، 12 س م، 10 س م آهي ته اُن ڪوڪي جي اُپي متاچڙو ايراضي ۽ ڪل متاچڙو ايراضي لهو.
2. هڪ مستطيل بلاڪ آڪار جي ڪوڪي جي ڪل متاچڙو ايراضي 500 چورس ايڪا آهي اُنجي ويڪر ۽ اوچائي نمبروار 6 ۽ 5 ايڪا آهي ته اُن ڪوڪي جي ڊيگهه لهو.
3. هڪ ڪعب جو پاسو س م آهي ته اُنجي اُپي متاچڙو ايراضي ۽ ڪل متاچڙو ايراضي لهو.
4. هڪ ڪعب جي ڪل متاچڙو 5400 چ س م ته اُن ڪعب جي اُپي متاچڙو ايراضي لهو.
5. هڪ مستطيل بلاڪ جو مقدار 34.50 ڪعب م آهي اُنجي ويڪر ۽ اوچائي نمبروار 1.5 م ۽ 1.15م آهي ته مستطيل بلاڪ جي ويڪر لهو.
6. 7.5 س م پاسي واري ڪعب جو مقدار ڪيترو؟
7. هڪ سلينڊر جي پايي جو نيم قطر 20 س م آهي ۽ اوچائي 13 س م آهي ته اِن سلينڊر جي وريل متاچڙو ايراضي ۽ ڪل متاچڙو ايراضي لهو ($\pi = 3.14$ ڪٽو)
8. هڪ سلينڊر جي وريل متاچڙو ايراضي 1980 چ س م آهي ته اِن سلينڊر جي اوچائي لهو.
($\pi = \frac{22}{7}$ ڪٽو)

چاڱي وڻون

ڪون (مخروط) بابت ڪجهه پد ۽ اُنهن جو لاڳاپو (Terms related with a cone and their relation)



شڪل 9.4

پر واري شڪل 9.4 ۾ ڪون جي شڪل ڏنل آهي ڪون جي پايي جو مرڪز ٽپڪو O ۽ نوڪي ٽپڪو A آهي OA اِهو نيم قطر OB مٿان عمود آهي مطلب

AO اِها ڪون جي عمود اوچائي (h) آهي

AB اِها ڪون جي آڏي اوچائي (l) آهي

Δ AOB گوني ڪند ٽڪندو آهي

$\therefore$ پائٿاگورس سڏيان موجب

$$AB^2 = AO^2 + OB^2$$

$$\therefore l^2 = h^2 + r^2$$

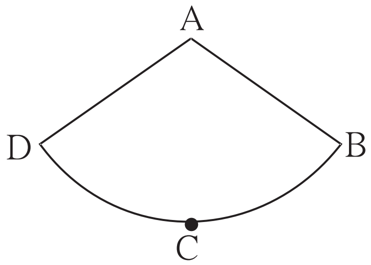
مطلب، $($آڏي اوچائي$)^2 = ($عمودي اوچائي$)^2 + ($نيم قطر$)^2$

ڪون (مخروط) جي متاچڙو ايراضي (Surface area of a cone)

ڪون کي ٻہ متاچڙا هوندا آهن (i) وريل متاچڙو (ii) پايو متاچڙو. اِن ڪري گول جي ايراضي ۽ وارو سوتر ڪم آڻي پايي جي ايراضي ڪڍبي. وريل متاچڙي جي ايراضي ڪيئن لهبي.

اِن لاءِ ڪون جي وريل مٿاڇري جي ڪولبو

شڪل 9.4 ۾ڪون جي آڏي اوچائي AB ڪپي ڪري کولي اُهو آڪار شڪل 9.5 وانگر ملي ٿو. اِن شڪل کي گول جو قطاع دائرهہ نالو آهي شڪل9.4 ۽ شڪل 9.5 جي ڀيٽ ڪريو ۽ هيٺ ڏنل مُدا سمجهي سگهندا ڇا؟



شڪل 9.5

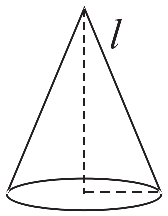
(i) قطاع دائرهہ جو نيم قطرAB اِهو ڪون جي آڏي اوچائي آهي.

(ii) قطاع دائرهہ جي ڪمان BCD اِهو ڪون جي پايي جي گهيرو آهي.

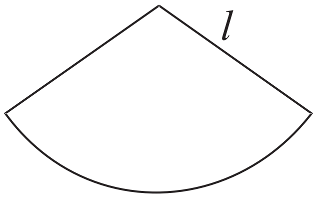
(iii) ڪون جي وريل مٿاڇرو ايراضي = قطاع دائرهہ A−BCD جي ايراضي

اِن مان توهان ڪون جي وريل مٿاڇرو ايراضي هيٺ ڏنل مشغولي مان سمجهو.

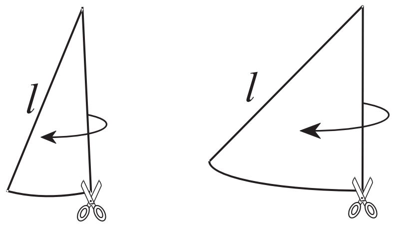
مشغولي ڪون جي موڙ جو ويچار ڪريو



شڪل 9.6



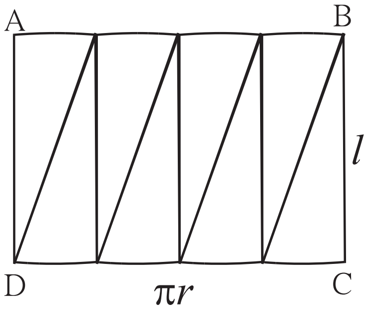
شڪل 9.7



شڪل 9.8

پايي جو گهيرو = $2\pi r$

هڪ وريل مٿاڇري جي شڪل 9.8 موجب ڏيکاريل نموني، جيترو ممڪن ٿئي، ننڍا ٽڪرا ڪريو، اُهي هڪ ٻئي سان ملايو. ائين هڪ ٻئي سان ملائڻ سان ABCD□ مستطيل ملندو.



شڪل 9.9

AB ۽ CD جي ڪل ڊيگهہ $2\pi r$ آهي

$\therefore$ ABCD ۾ AB جي ڊيگهہ πr ۽ CD جي ڊيگهہ πr آهي.

مستطيل ۾ BC جي ڊيگهہ = ڪون جي اوچائي l آهي.

تہ ڪون جي وريل مٿاڇرو ايراضي مطلب ABCD□ جي ايراضي =

$\therefore$ ڪون جي مٿاڇرو ايراضي = $AB \times BC = \pi r \times l = \pi rl$

هاڻي ڪون جي ڪل مٿاڇرو ايراضي سوتر لهندا سين.

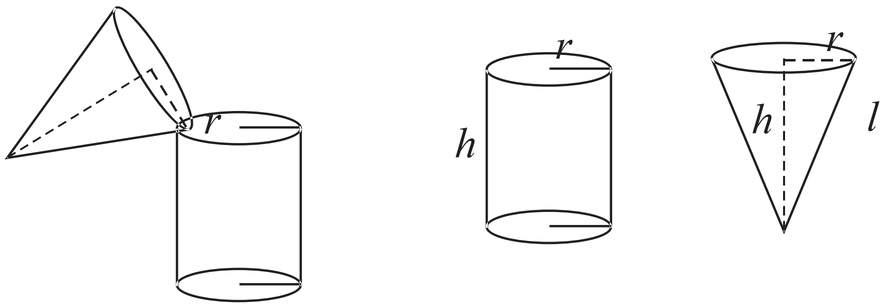
پايي جي مٿاڇري ايراضي + ورڇل مٿاڇرو ايراضي = ڪون جي ڪل مٿاڇرو ايراضي

$$= \pi rl + \pi r^2$$

$$= \pi r(l + r)$$

هتي هڪ اهميت واري ڳالهه تي توهان کي ڌيان ۾ آئي ڇا؟ ڪون بند نه هوندو ته يعني (جادوگر - جنم ڏينهن جي ٽوپي) وانگر هوندو ته هنجو فقط مڙيل مٿاڇرو اهو هڪ مٿاڇرو ئي ٿيندو. اهو مٿاڇرو πrl فارمولي سان ملندو.

مشغولي : هڪ ڪارڊ بورڊ ڪٽو اُن مان هڪ بند سلينڊر تيار ڪريو مطلب پايي جو نيم قطر ۽ اوچائي ساڳيو رکي هڪ ڪون ۽ هڪ پاسي بند اهڙو سلينڊر تيار ڪريو. پنهي ڪون جي عمودي اوچائي ۽ سلينڊر جي اوچائي ساڳيو رکي هڪ ڪون ۽ سلينڊر ڪٽو. ڪون ۾ باريڪ سنهي ريتي پريو اُها اُن سمينڊر ۾ اوتيو. سلينڊر کي سڄو ريتي ۽ سان ڀرجي وڃي تيستائين اِها مشغولي ڪندا رهو. سلينڊر ريتي ۽ سان سڄو ڀرڻ لاءِ ڪيترا ڪون ريتي ۽ جا لڳندا؟



شڪل 9.10

سلينڊر سڄو ريتي ۽ سان ڀرڻ لاءِ ٽي ڪون لڳن ٿا.

جاڻي وٺون

ڪون جو مقدار (Volume of a cone)

$3 \times$ ڪون جو مقدار = سلينڊر جو مقدار

$\therefore 3 \times$ ڪون جو مقدار $= \pi r^2 h$

$\therefore$ ڪون جو مقدار $= \frac{1}{3} \times \pi r^2 h$

اِهو ڌيان ۾ رکو

(i) ڪون جي پايي جي ايراضي $= \pi r^2$

(ii) ڪون جي ورڇل مٿاڇرو ايراضي $= \pi rl$

(iii) ڪون جي ڪل مٿاڇرو ايراضي $= \pi r(l + r)$

(iv) ڪون جو مقدار $= \frac{1}{3} \times \pi r^2 h$

حل ڪيل مثال

مثال :(1) ڪون جي پايي جو نيم قطر (r) ۽ عمودي اوچائي (h) ڪٽي اُنجي آڏي اوچائي (l) لهو.

(i) $r = 6$ س م، $h = 8$ س م

$$l^2 = r^2 + h^2$$
$$\therefore l^2 = (6)^2 + (8)^2$$
$$\therefore l^2 = 36 + 64$$
$$\therefore l^2 = 100$$
$\therefore l = 10$ س م

(ii) $r = 9$ س م، $h = 12$ س م

$$l^2 = r^2 + h^2$$
$$\therefore l^2 = (9)^2 + (12)^2$$
$$\therefore l^2 = 81 + 144$$
$$\therefore l^2 = 225$$
$\therefore l = 15$ س م

مثال (2) هڪ ڪون جي پايي جو نيم قطر 12 س م ۽ عمودي اوچائي 16 س م آهي تہ ڪون جي آڏي اوچائي، وريل متاچڙو ايراضي، ڪل متاچڙو ايراضي لهو. $(\pi = 3.14)$

(i) $r = 12$ س م، $h = 16$ س م

$$l^2 = r^2 + h^2$$
$$\therefore l^2 = (12)^2 + (16)^2$$
$$\therefore l^2 = 144 + 256$$
$$\therefore l^2 = 400$$
$\therefore l = 20$ س م

(ii) ڪون جي وريل متاچڙو ايراضي $= \pi r l$

$= 3.14 \times 12 \times 20$

$= 753.6$ چ س م

(iii) ڪون جي وريل متاچڙو ايراضي $= \pi r(l + r)$

$= 3.14 \times 12(20+12)$

$= 3.14 \times 12 \times 32$

$= 1205.76$ چ س م

مثال (3) هڪ ڪون جي ڪل متاچڙو ايراضي 704 چ س م ۽ پايي جو نيم قطر 7 س م آهي تہ ڪون جي آڏي اوچائي لهو $\left(\pi = \frac{22}{7}\right)$

ڪون جي ڪل متاچڙو ايراضي $= \pi r(l + r)$

$$\therefore \quad 704 = \frac{22}{7} \times 7\,(l + 7)$$
$$\therefore \quad \frac{704}{22} = l + 7$$
$$\therefore \quad 32 = l + 7$$
$$\therefore \quad 32 - 7 = l$$
$\therefore \quad l = 25$ س م

مثال (4) هڪ ڪون جي پايي جي ايراضي 1386 چ س م ۽ اُنجي اوچائي 28س م آهي تہ ڪون جي ورڪل متاچڙو ايراضي لهو $(\pi = \frac{22}{7})$

ڪون جي پايي جي ايراضي $= \pi r^2$

$\therefore \quad 1386 = \frac{22}{7} \times r^2$

$\therefore \quad \frac{1386 \times 7}{22} = r^2$

$\therefore \quad 63 \times 7 = r^2$

$\therefore \quad 441 = r^2$

$\therefore r =$ 21 س م

$l^2 = r^2 + h^2$

$\therefore l^2 = (21)^2 + (28)^2$

$\therefore l^2 = 441 + 784$

$\therefore l^2 = 1225$

$\therefore l =$ 35 س م

ڪون جي ورڪل متاچڙو ايراضي $= \pi r l$

$= \frac{22}{7} \times 21 \times 35$

$= 22 \times 21 \times 5$

= 2310 چ س م

اڀياس 9.2

1. ڪون جي عمودي اوچائي 12 س م ۽ آڏي اوچائي 13س م آهي تہ پايي جو نيم قطر لهو.
2. هڪ ڪون جي ڪل متاچڙو ايراضي 7128 چ س م ۽ پايي جو نيم قطر 28س م آهي تہ ڪون جو مقدار لهو $(\pi = \frac{22}{7})$
3. هڪ ڪون جي ورڪل متاچڙو ايراضي 251.2 (س م)^2 آهي ۽ پايي جو نيم قطر 8 س م آهي. تہ اُن جي عمودي اوچائي ۽ آڏي اوچائي لهو $(\pi = 3.14)$
4. 6م نيم قطر ۽ 8 م آڏي اوچائي واري پتري جو بند ڪون ٺاهڻ لاءِ 10 رفپي چورس ميٽر اگهہ سان ڪيترو خرچ ايندو $(\pi = \frac{22}{7})$
5. ڪون جو مقدار 6280 ڪعب س م آهي پايي جو نيم قطر 20 س م آهي تہ اُنجي عمودي اوچائي لهو $(\pi = 3.14)$
6. ڪون جي ورڪل متاچڙو ايراضي 188.4 چ س م ۽ آڏي اوچائي 10 س م آهي تہ ڪون جي عمودي اوچائي لهو $(\pi = 3.14)$
7. هڪ ڪون جو مقدار $1232 cm^3$ ۽ اوچائي 24 س م آهي تہ اُن ڪون جي ورڪل متاچڙو ايراضي لهو $(\pi = \frac{22}{7})$
8. هڪ ڪون جي ورڪل متاچڙو ايراضي 2200 چ س م آهي ۽ آڏي اوچائي 50 س م آهي تہ ڪون جي ڪل متاچڙو ايراضي ۽ مقدار لهو $(\pi = \frac{22}{7})$
9. هڪ ڪون شڪل تنبوءِ ۾ 25 ماڻهوءَ رهيل آهن هرهڪ کي زمين تي 4 چ م جڳهہ لڳي ٿي جيڪڏهن تنبوءَ جي اوچائي 18 م آهي تہ تنبوءَ جو مقدار ڪيترو؟

10. هڪ کيت ۾ ڪون شڪل جي ٻُڙ مخروط ۾ ٻُڙ راس ٿيڻ لاءِ رکيو ويو. اِن اَنداز جي اوچائي 2.1 م آهي ۽ پايي جو قطر 7.2 م آهي ته اِن اَنداز جو مقدار لهو. برسات جي اِمڪان ڪري هاڻي اِن ٻُڙ مخروط کي پلاسٽڪ سان ڍڪڻو آهي ٻڌايو ته ڪيترا چورس م پلاسٽڪ لڳندي. $\left(\pi = \frac{22}{7}\right.$ ۽ $\left.\sqrt{17.37} = 4.17\right)$

ڄاڻي وٺون

گولي جي مٿاڇرو ايراضي (Surface area of sphere)

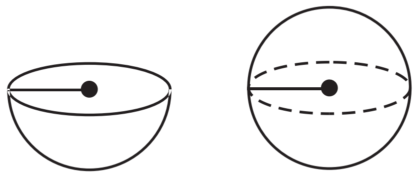
گولي جي وريل مٿاڇرو ايراضي $= 4\pi r^2$

$\therefore$ اَڌ گولي جي وريل مٿاڇرو ايراضي $= 2\pi r^2$

نهري اَڌ گولي جي ڪل مٿاڇرو ايراضي

$= 2\pi r^2 + \pi r^2$

$= 3\pi r^2$



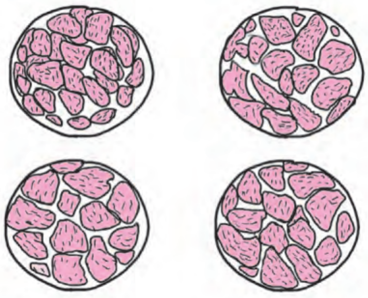
شڪل 9.11

مشغولي :

هڪ موسمبي ڪٽو اُنجا ٻه اَڌ ڪريو

هڪ اَڌ گولو تراڪڙي ڪاغذ مٿان رکي اُن ۾ موسمبي جي ڪل ڪٽو اُن جا باريڪ ٽڪرا ڪريو.

اُهي گولن مٿان رکو. چارئي گول برابر پرجندا.
گولي جي وريل مٿاڇرو ايراضي سوتر ڏسو.



گولي جي وريل مٿاڇرو ايراضي. $= 4\pi r^2$

حل ڪيل مثال

(1) هڪ گولي جو نيم قطر 7س م آهي ته اُن جي وريل مٿاچڙو ايراضي لهو $\left(\pi = \frac{22}{7}\right)$

گولي جي وريل مٿاچڙو ايراضي $= 4\pi r^2$

$= 4 \times \frac{22}{7} \times (7)^2$

$= 4 \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7$

$= 88 \times 7$

$= 616$

گولي جي وريل مٿاچڙو ايراضي = 616 چ س م

(2) هڪ گولي جي مٿاچڙو ايراضي 1256چ س م آهي ته انُجي نيم قطرلهو $(\pi = 3.14)$

گولي جي مٿاچڙو $= 4\pi r^2$

$\therefore\ 1256 = 4 \times 3.14 \times r^2$

$\therefore\ \frac{1256}{4 \times 3.14} = r^2$

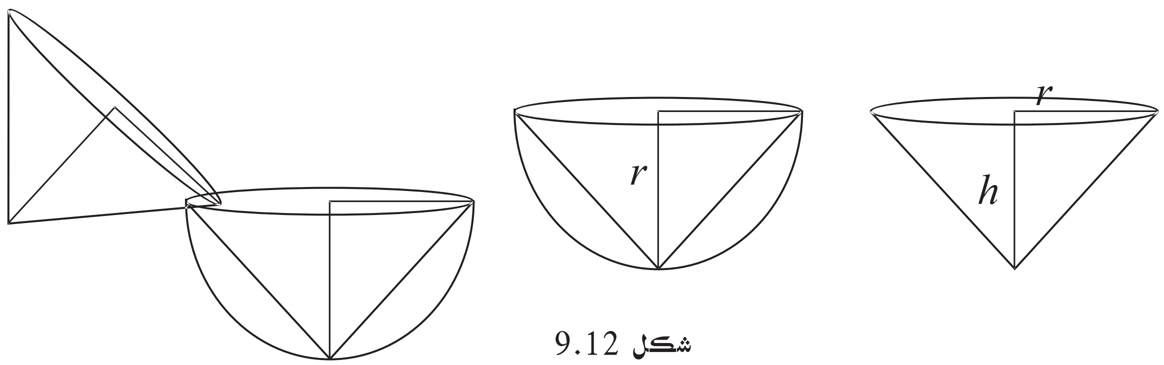
$\therefore\ \frac{31400}{314} = r^2$

$\therefore\ 100 = r^2$

$\therefore\ 10 = r$

$\therefore\ r =$ 10س م

مشغولي: هڪ ڪون ۽ هڪ اَڌ گولو اَهڙي ريت کڻو جئن اَڌ گولي جو نيم قطر ۽ ڪون جي اوچائي برابر هجن مطلب ڪون جي پايي جو نيم قطر ۽ اَڌ گولي جو نيم قطر ساڳيا آهن. ڪون کي ريتي ۽ سان سڄو ڀريو اُها اَڌ گولي ۾ اوتيو اَڌ گولي کي سڄو ريتي ۽ سان ڀرڻ لاءِ ڪيترا ڪون لڳندا, اُهو ڏسو.



شڪل 9.12

هڪ اَڌ گولي کي سڄو ريتي ۽ سان ڀرڻ لاءِ به ڪون لڳن ٿا.

$\therefore$ اَڌ گولي جو مقدار= ڪون جو مقدار $\times 2$

$\therefore$

ڪون جو مقدار $= 2 \times \frac{1}{3} \times \pi r^2 h$

$= 2 \times \frac{1}{3} \times \pi r^2 \times r$

$= \frac{2}{3}\ \pi r^3$

$\therefore$ گولي جو مقدا $= 2 \times$ اڌ گولي جو مقدار

$= \frac{4}{3}\pi r^3$

$\therefore$ گولي جو مقدار $= \frac{4}{3}\pi r^3$

اِهو ڌيان ۾ رکو

- اڌ گولي جو مقدار = $\frac{2}{3}\pi r^3$
- اِهو ۽ اڌ گولي جي ڪل متاچڙو ايراضي = $2\pi r^2 + \pi r^2 = 3\pi r^2$

حل ڪيل مثال

مثال (1) هڪ گولي جو نيم قطر 21 س م ته اُنجو مقدار لهو $(\pi = \frac{22}{7})$

حل: گولي جو مقدار

$$= \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$= \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times (21)^3$$

$$= \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times 21 \times 21 \times 21$$

$$= 88 \times 441$$

∴ گولي جو مقدار = 38808 ڪعب س م

مثال (2) 113040 ڪعب س م مقدار واري گولي جو نيم قطر لهو $(\pi = 3.14)$

حل : گولي جو مقدار = $\frac{4}{3}\pi r^3$

$$113040 = \frac{4}{3} \times 3.14 \times r^3$$

$$\frac{113040 \times 3}{4 \times 3.14} = r^3$$

$$\frac{28260 \times 3}{3.14} = r^3$$

$$\therefore 9000 \times 3 = r^3$$

$$\therefore r^3 = 27000$$

∴ r = 30 س م

گولي جو نيم قطر 30 س م آهي

مثال (3) 314 چ س م وريل متاچڙو ايراضيءَ واري گولي جو مقدار ڪيترو؟ $(\pi = 3.14)$

گولي جي وريل متاچڙو ايراضي = $4\pi r^2$

$$314 = 4 \times 3.14 \times r^2$$

$$\frac{314}{4 \times 3.14} = r^2$$

$$\frac{31400}{4 \times 314} = r^2$$

$$\therefore \frac{100}{4} = r^2$$

$$\therefore 25 = r^2$$

∴ r = 5 س م

گولي جو مقدار

$$= \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$= \frac{4}{3} \times 3.14 \times 5^3$$

$$= \frac{4}{3} \times 3.14 \times 125$$

= 523.33 ڪعب س م

اَڀياس 9.3

.1 هيٺ ڏنل عدد گولن جا نيم قطر آهن

(i) 4 س م (ii) 9 س م (iii) 3.5 س م

ته هرهڪ گولي جي ورپل متاچڙو ايراضي ۽ مقدار لکو. $(\pi = 3.14)$

.2 5 س م نيم قطر واري نهري اَڌ گولي جي ورپل متاچڙو ايراضي ۽ ڪل متاچڙو ايراضي لکو $(\pi = 3.14)$

.3 2826 چ س م ورپل متاچڙو ايراضيءَ واري گولي جو مقدار لکو. $(\pi = 3.14)$

.4 38808 ڪعب س م مقدار واري گولي جي ورپل متاچڙو ايراضي لکو. $(\pi = \frac{22}{7})$

.5 هڪ اَڌ گولي جو مقدار $18000\ \pi$ ڪعب س م اُهي ته ان گولي جو قطر لکو.

گڏيل اَڀياس 9

1. 0.9 قطرءِ 1.4 م اوچائي وارو روڊ رولر 500 چڪرن ۾ ڪيتري زمين دٻائيندو؟ $(\pi = \frac{22}{7})$

2. هڪ مستطيل شڪل جي مڇلي ٽئنڪ ناهڻ لاءِ 2 س م ٿلهو شيشو واپرايو ويو. مڇلي ٽئنڪ جون ٻاهريون ماپو ديگهه ، ويڪر اوچائي، نمبروار س م (60.4 x 40.4 x 40.2) آهن ته اُن مڇليءَ ٽئنڪ ۾ وڌ ۾ وڌ ڪيترو پاڻي ماپندو؟

3. هڪ ڪون جي پايي جو نيم قطرءِ عمودي اوچائيءَ جو ريشو 5:3 آهي ڪون جو مقدار 314 ڪعب م آهي ته اُنجي عمودي اوچائي ۽ آڏي اوچائي لکو. $(\pi = 3.14)$

4. هڪ گولي جو مقدار 904.32 ڪعب س م آهي ته اُنجو نيم قطر لکو $(\pi = 3.14)$

5. هڪ ڪعب جي ڪل متاچڙو ايراضي 864 چ س م آهي ته اُن ڪعب جو مقدار لکو.

6. هڪ گولي جي متاچڙو ايراضي 154 چ س م آهي ته اُنجو مقدار لکو.

7. هڪ ڪون جي ڪل متاچڙو ايراضي 616 چ س م آهي. اُنجي آڏي اوچائي پايي جي نيم قطر کان ٽيڻي آهي ته اُنجي آڏي اوچائي لکو.

8. هڪ گولاڪار کوهه جو اندريون قطر 4.20 م آهي اُنجي اونهائي 10 م آهي ته اُنجي اَندرين ورپل متاچڙو ايراضي ڪيتري؟ اَندرين ورپل متاچڙي کي رنگ لڳائڻ ۾ 52 ر في چورس م اَگهه سان ڪيترو خرچ ايندو؟

9. هڪ روڊ رولر جي ديگهه 2.1 م ۽ اُنجو قطر 1.4 ميٽر آهي. هڪ ميدان کي لسو ڪرڻ لاءِ روڊ رولر جا 500 پورا ڦيرا ڏيڻ ٿا. ٻڌايو ته رولر ڪيترا چ م ميدان لسو ڪيو؟ لسي ڪرڻ ۾ 7 رفي چورس ميٽر اَگهه سان ڪيترو خرچ ايندو؟

جواب

1. جاميٽري جون بنيادي ويچار ڌارائون

اڀياس 1.1

1. (i) 3 (ii) 3 (iii) 7 (iv) 1
   (v) 3 (vi) 5 (vii) 2 (viii) 7
2. (i) 6 (ii) 8 (iii) 10 (iv) 1 (v) 3 (vi) 12
3. (i) P–R–Q (ii) هم ليڪي نہ آهن (iii) A–C–B (iv) هم ليڪي نہ آهن
   (v) X–Y–Z (vi) هم ليڪي نہ آهن
4. 18 ۽ 2 5. 25 ۽ 9 6. (i) 4.5 (ii) 6.2 (iii) $2\sqrt{7}$ 7. ٽڪندو

اڀياس 1.2

1. (i) نہ آهن (ii) نہ آهن (iii) آهن 2. 4 3. 5 4. BP < AP < AB
5. (i) RT ڪرڻو يا RS ڪرڻو (ii) PQ ڪرڻو (iii) QR ٽڪر (iv) RQ ڪرڻو يا ۽ QR ڪرڻو
   (v) RT ڪرڻو يا RQ ڪرڻو (vi) ST ڪرڻو , SR ڪرڻو (vii) S ٽٻڪو
6. (i) P ٽٻڪو يا D ٽٻڪو, C ٽٻڪو يا A ٽٻڪو (ii) R ٽٻڪو P ٽٻڪو, U ٽٻڪو يا L ٽٻڪو
   (iii) $d(U,V) = 10$,$d(P,C) = 6$, $d(V,B) = 3$, $d(U,L) = 2$

اڀياس 1.3

1. (i) جيڪڏهن چوڪنڊي جا آمهون سامهون پاسا پوروچوٽ هوندا تہ اُن جون آمهون سامهون ڪنڊون ٺهڪندڙ هونديون. (ii) جيڪڏهن چوڪنڊو مستطيل آهي تہ اُن جا اُريب ٺهڪندڙ هوندا.
(iii) جيڪڏهن ٽڪنڊو ٻپورپاسو هوندو تہ اُن ٽڪنڊي جي نوڪي ٽٻڪي ۽ پايي جي مڌيہ ٽٻڪي کي جوڙيندڙ ليڪ ٽڪراُن پايي تي اُمود هوندو.
2. (i) جيڪڏهن ٻہ ليڪون ۽ اُن جي ڇيدڪي پاران ٺهيل متبدل ڪنڊون ٺهڪندڙ هونديون تہ اُهي ٻہ ليڪون پاڙ ﭬٺهڪندڙ هونديون آهن.
(ii) ٻن پوروچوٽ ليڪن ۽ اُنهن جي ڇيدڪي پاران ٺهندڙ اندرين ڪنڊن جو جوڙ سمهہ هوندو آهي.
(iii) جيڪڏهن ڪنهن چوڪنڊي جا اُريب ٺهڪندڙ هوندا تہ اُهو چوڪنڊو مستطيل آهي.

گڏيل اڀياس 1

1. (i) A (ii) C (iii) C (iv) C (v) B
2. (i) غلط (ii) غلط (iii) صحيح (iv) غلط
3. (i) 3 (ii) 8 (iii) 9 (iv) 2 (v) 6 (vi) 22 (vii) 165
4. −15 يا 1 (5) (i) 10.5 (ii) 9.1 (6) −6 يا 8

2. پوروچوت لیکون

اپیاس 2.1

1. (i) $95°$ (ii) $95°$ (iii) $85°$ (iv) $85°$
2. $\angle a = 70°, \angle b = 70°, \angle c = 115°, \angle d = 65°$
3. $\angle a = 135°, \angle b = 135°, \angle c = 135°$
5. (i) $75°$ (ii) $75°$ (iii) $105°$ (iv) $75°$

اپیاس 2.2

1. نہ　　4. $\angle ABC = 130°$

گڈیل اپیاس 2

1. (i) C (ii) C (iii) A (iv) B (v) C　　4. $x = 130°$　$y = 50°$
5. $x = 126^{0°}$　　6. $f = 100°$　$g = 80°$

3. تکندو

اپیاس 3.1

1. $110°$　　2. $45°$　　3. $80°, 60°, 40°$　　4. $30°, 60°, 90°$
5. $60°, 80°, 40°$　　6. $\angle DRE = 70°, \angle ARE = 110°$
7. $\angle AOB = 125°$　　9. $30°, 70°, 80°$

اپیاس 3.2

1. (i) SSS (ii) SAS (iii) ASA (iv) ھئپاتیوزم پاسو
2. (i) ASA , $\angle BAC \cong \angle QPR$, تکر AB $\cong$ تکر PQ, تکر AC $\cong$ تکر PR
   (ii) SAS , $\angle TPQ \cong \angle TSR$, $\angle TQP \cong \angle TRS$, تکر PQ $\cong$ تکر SR
3. ھئپاتیوزم, $\angle ACB \cong \angle QRP$, $\angle ABC \cong \angle QPR$, تکر AC $\cong$ تکر QR
4. SSS , $\angle MLN \cong \angle MPN$, $\angle LMN \cong \angle MNP$, $\angle LNM \cong \angle PMN$

اپیاس 3.3

1. $x = 50°$, $y = 60°$, $m\angle ABD = 110°$, $m\angle ACD = 110°$.
2. 7.5 ایکا　　3. 6.5 ایکا　　4. $l(PG) =$ 5 س م, $l(PT) =$ 7.5 س م

اپیاس 3.4

1. 2 س م　　2. $28°$　　3. $\angle QPR, \angle PQR$　　4. پاسو NA, پاسو FN

اپیاس 3.5

1. $\dfrac{XY}{LM} = \dfrac{YZ}{MN} = \dfrac{XZ}{LN}$, $\angle X \cong \angle L$, $\angle Y \cong \angle M$, $\angle Z \cong \angle N$
2. $l(QR) =$ 12 س م, $l(PR) =$ 10 س م

گڏيل اڀياس 3

1. (i) D (ii) B (iii) B

5. چوڪنڊا

اڀياس 5.1

1. $m\angle XWZ = 135^\circ$, $m\angle YZW = 45^\circ$, l (WY) = 10 س م
2. $x = 40^\circ$, $\angle C = 132^\circ$, $\angle D = 48^\circ$
3. 50 س م, 25 س م, 50 س م, 25 س م
4. $60^\circ, 120^\circ, 60^\circ, 120^\circ$
6. $\angle A = 70^\circ$, $\angle B = 110^\circ$, $\angle C = 70^\circ$, $\angle R = 110^\circ$

اڀياس 5.3

1. BO = 4 س م, $\angle ACB = 35^\circ$
2. QR = 7.5 س م, $\angle PQR = 105^\circ$, $\angle SRQ = 75^\circ$
3. $\angle IMJ = 90^\circ$, $\angle JIK = 45^\circ$, $\angle LJK = 45^\circ$
4. پاسو = 14.5 س م, گرد ماپ = 58 س م
5. (i) غلط (ii) غلط (iii) صحيح (iv) صحيح (v) صحيح (vi) غلط

اڀياس 5.4

1. $\angle J = 127^\circ$, $\angle L = 72^\circ$ 2. $\angle B = 108^\circ$, $\angle D = 72^\circ$

اڀياس 5.5

1. XY = 4.5 س م , YZ = 2.5 س م, XZ = 5.5 س م

گڏيل اڀياس 5

1. (i) D (ii) C (iii) D 2. 25 س م, 3. $6.5\sqrt{2}$ س م
4. 24 س م, 32 س م, 24 س م, 32 5. PQ = 26 س م 6. $\angle MPS = 65^\circ$

6 گول

اڀياس 6.1

1. 20 س م 2. 5 س م 3. 32 ايڪا 4. 9 ايڪا

اڀياس 6.2

1. 12 س م 2. 24 س م

گڏيل اڀياس 6

1. (i) A (ii) C (iii) A (iv) B (v) D (vi) C (vii) D ۽ B 2. 2:1 4. 24 ايڪا

7. مساوي جاميٽري

اڀياس 7.1

1. تبڪو A : چوٿ II, تبڪو B : چوٿ III, تبڪو K : چوٿ I, تبڪو D : چوٿ I
تبڪو E : چوٿ I, تبڪو F : چوٿ IV, تبڪو G : چوٿ IV, تبڪو H : Y-محور
تبڪو M : X-محور, تبڪو N : Y-محور, تبڪو P : Y-محور, تبڪو Q : چوٿ III

2. (i) چوٿ I (ii) چوٿ III (iii) چوٿ IV (iv) چوٿ II

اڀياس 7.2

1. چ س م 2. $x = -7$ 3. $y = -5$ 4. $x = -3$ 5. 4 ايڪا

6. (i) Y- محور (ii) X-محور (iii) Y-محور (iv) X- محور

7. X محورتي (5,0) , Y محورتي (0,5)

8. (−4,1), (−1.5, 1), (−1.5,5), (−4,5)

گڏيل اڀياس 7

1. (i) C (ii) A (iii) B (iv) C (v) C (vi) B 2. (i) Q (2,2), R(4,−1)
(ii) T(0,−1), M(3,0) (iii) تبڪو S (iv) تبڪو O 3. (i) چوٿ IV (ii) چوٿ III
(iii) چوٿ II (iv) چوٿ II (v) Y محور (vi) X محور 5. (i) 3
(ii) P(3,2), Q(3,−1), R (3,0) (iii) 0 6. ليڪون پر $y = 5, y = -5$ 7. $|a|$

8. علم مثلث

اڀياس 8.1

1. (i) $\frac{QR}{PQ}$ (ii) $\frac{QR}{PQ}$ (iii) $\frac{QR}{PR}$ (iv) $\frac{PR}{QR}$

2. (i) $\frac{a}{c}$ (ii) $\frac{b}{a}$ (iii) $\frac{b}{c}$ (iv) $\frac{a}{b}$

3. (i) $\frac{MN}{LN}$ (ii) $\frac{LM}{LN}$ (iii) $\frac{LM}{MN}$ (iv) $\frac{MN}{LN}$

4. (i) $\frac{PQ}{PR}, \frac{RQ}{PR}, \frac{PQ}{RQ}$ (ii) $\frac{QS}{PS}, \frac{PQ}{PS}, \frac{QS}{PQ}$

اڀياس 8.2

1. $\sin\theta : \frac{12}{37}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \frac{21}{29}, \frac{8}{17}, \frac{1}{3}$; $\cos\theta : \frac{60}{61}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{20}{29}, \frac{15}{17}, \frac{4}{5}, \frac{2\sqrt{2}}{3}$

$\tan\theta : \frac{12}{35}, \frac{11}{60}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{2}, \frac{3}{4}$

2. (i) $\frac{11}{2}$ (ii) $\frac{93}{20}$ (iii) 5 (iv) $\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}$ (v) $\frac{3}{4}$ (vi) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 3. $\frac{3}{5}$ 4. $\frac{8}{17}$

گڏيل اڀياس 8

1. (i) A (ii) D (iii) C (iv) D
2. $\sin T = \frac{12}{13}, \cos T = \frac{5}{13}, \tan T = \frac{12}{5}, \sin U = \frac{5}{13}, \cos U = \frac{12}{13}, \tan U = \frac{5}{12}$
3. $\sin Y = \frac{8}{17}, \cos Y = \frac{15}{17}, \tan Y = \frac{8}{15}, \sin Z = \frac{15}{17}, \cos Z = \frac{8}{17}, \tan Z = \frac{15}{8}$
4. $\sin \theta = \frac{7}{25}, \tan \theta = \frac{7}{24}, \sin^2 \theta = \frac{49}{625}, \cos^2 \theta = \frac{576}{625}$
5. (i) 70 (ii) 60 (iii) 50

9. مٿاڇرو ايراضي ۽ مقدار

اڀياس 9.1

1. 640 ڇ س م, 1120 ڇ س م
2. 20 ايڪا
3. 81 ڇ س م 121.50 ڇ س م
4. 3600 ڇ س م
5. 20 م
6. 421.88 ڪعب س م
7. 1632.80 ڇ س م, 4144.80 ڇ س م
8. 21 س م

اڀياس 9.2

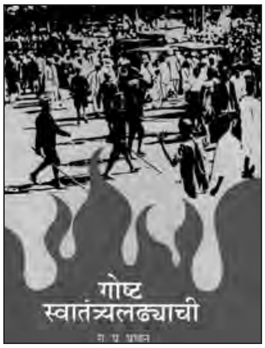
1. 5 س م
2. 36960 ڪعب س م
3. 10 س م, 6 س م
4. ₹ 2640
5. 15 س م
6. 8 س م
7. 550 ڇ س م
8. 2816 ڇ س م, 9856 ڪعب س م
9. 600 ڪعب س م
10. 28.51 ڪعب س م, 47.18 ڇ س م

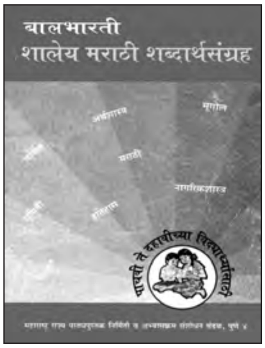
اڀياس 9.3

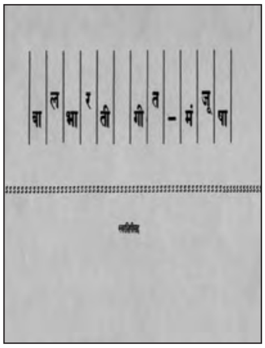
1. (i) 200.96 ڇ س م, 267.95 ڪعب س م (ii) 1017.36 ڇ س م, 3052.08 ڪعب س م
 (iii) 153.86 ڇ س م, 179.50 ڪعب س م
2. 157 ڇ س م, 235.5 ڇ س م
3. 14130 ڪعب س م
4. 5544 ڇ س م
5. 60 س م

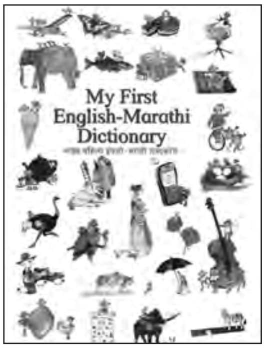
گڏيل اڀياس 9

1. 1980 ڇ س م
2. 96801.6 ڪعب س م
3. 12 م, 13 م
4. 6 س م
5. 1728 ڪعب س م
6. 179.67 ڪعب س م
7. 21 س م
8. 132 ڇ س م, ₹ 6864
9. 4620 ڇ س م, ₹ 32340









- पाठ्यपुस्तक मंडळाची वैशिष्ट्यपूर्ण पाठ्येत्तर प्रकाशने.
- नामवंत लेखक, कवी, विचारवंत यांच्या साहित्याचा समावेश.
- शालेय स्तरावर पूरक वाचनासाठी उपयुक्त.

पुस्तक मागणीसाठी www.ebalbharati.in, www.balbharati.in संकेत स्थळावर भेट द्या.

साहित्य पाठ्यपुस्तक मंडळाच्या विभागीय भांडारांमध्ये विक्रीसाठी उपलब्ध आहे.

ebalbharati

विभागीय भांडारे संपर्क क्रमांक : पुणे - ☎ २५६५९४६५, कोल्हापूर- ☎ २४६८५७६, मुंबई (गोरेगाव) - ☎ २८७७१८४२, पनवेल - ☎ २७४६२६४६५, नाशिक - ☎ २३९१५११, औरंगाबाद - ☎ २३३२१७१, नागपूर - ☎ २५४७७१६/२५२३०७८, लातूर - ☎ २२०९३०, अमरावती - ☎ २५३०९६५

مهاراشٽر راجيه پاٺيه پُستڪ نرمتي ۽ اڀياسڪرم سنشوڌن منڊل، پوڻي

सिंधी (अरे.) गणित इ.९वी भाग-२

₹ 61.00