حساب پاڱو-I

درجو نائون

ڀارتيہ سنوڌان

باب - چوٿون الف

ٻنيادي فرض

قلم 51A

ٻُنيادي فرض : ڀارت جي هرهڪ ناگرڪ جو فرض آهي تہ :

(الف) هوُ ڀارت جي سنوڌان کي مڃيندو، اُن جي قومي جهنڊي، قومي تراني، آدرش ۽ سنستا جي عزت ڪندو.

(ب) آدرش ويچارن، جن آزاديءَ جي لڙائيءَ لاءِ همٿايو ۽ اُتساهہ ڦوڪيو، اُنهن جي سنڀال ۽ پوئواري ڪندو.

(ٻ) ڀارت جي ايڪتا، اکنڊتا ۽ سمپورڻتا جي رکشا ڪندو.

(پ) ديش جي حفاظت ڪندو ۽ وقت پوڻ تي ديش سيوا ۾ ٽپي پوندو.

(ڀ) سڀني ماڻهن ۾ هڪ ايڪتا جي ڀاونا پئدا ڪندو، جيڪا ڌرم، ڀاشا، ڪيترواد جي ڀيدڀاءُ کان پري هوندي. اَهڙيون رسمون جيڪي عورت ذات خلاف هونديون، اُنهن جو بهشڪار ڪندو.

(ت) ڀارت جي جامع سنسڪرتي ۽ شاندار ورثي جي حفاظت ڪندو ۽ مُلهہ سمجهندو.

(ٿ) قدرتي ماحول جهڙوڪ جهنگل، ڍنڍون، نديون، جهنگلي-زندگي اِنهن جو بچاءُ ڪندو ۽ سڀني پراڻين لاءِ دردمندي رکندو.

(ٽ) وگيانڪ درشٽي، اِنساني مُلهہ، جاچ جوُچ ۽ سڌاري جي ڀاونا کي اَهميت ڏيندو.

(ٺ) عام ملڪيت کي سلامت رکندو ۽ هنسا کان پري رهندو.

(ٺ) شخصي ۽ گڏيل مشغولين جي سڀني کيترن ۾ اَڳتي وڌڻ جي لڳاتار ڪوشش ڪندو جئن ملڪ اَڳتي وڌندو رهي ۽ ڪاميابيءَ جي اوچاين کي ڇُهي.

(ڪ) ماءُ يا پيءُ يا پالڪ آهي تہ اُهو ضرور ڏسي تہ پنهنجي ٻار کي تعليم حاصل ڪرڻ جو موقعو ڏيندو. جنهن جي عمر ڇهن ۽ چوڏهن سالن وچ ۾ هجي.

سرڪاري فيصلو نمبر : ايياس ٢١١٦ (پر.ڪر ١٦/۴٣) ايس. ڊي. ۴ تاريخ ١٦-٠۴-٢٥ موجب اسٽاپٽ ڪيل ڪو آرڊينيٽنگ ڪاميٽيءَ جي تا. ٣-٣-١٧ جي ميٽنگ ۾ هي درسي ڪتاب طيءِ ڪرڻ لاءِ مختصر منظوري ڏني ويئي.

حساب

پاڱو - I

درجو نائون

مهاراشٽر راجيہ پاٺيہ پُستڪ نرمتي وَ اڀياسڪرم سنشوڌن منڊل، پُڻي

پنهنجي سمارٽ فون ۾ DIKSHA APP ذريعي درسي ڪتاب جي پهرين صفحي واري Q.R. Code ذريعي Digital درسي ڪتاب ۽ هرهڪ سبق ۾ آيل Q.R. Code ذريعي ان سبق بابت پڙهڻ / پڙهائڻ لاءِ ڪارائتيون لنڪس ملنديون.

RQV5A1

چاپو پهريون : 2017
سڌ اريل چاپو: 2022

© مهاراشٽرراجيه پاٺيه پُستڪ نرمتي وَ اڀياس ڪرم سنشوڌن منڊل، پُڻي - ۴۱۱۰۰۴.
مهاراشٽر راجيه پاٺيه پُستڪ نرمتي وَ اڀياس ڪرم سنشوڌن منڊل، هن ڪتاب جا سڀ حق واسطا محفوظ ٿو رکي. منڊل جي ڊائريڪٽر جي لکيل اجازت کانسواءِ هن ڪتاب جو ڪوبه ٽڪر، ڇپائي نٿو سگهجي.

حساب وشيه ماهر ڪاميٽي

ڊاڪٽر منگلا نارڙيڪر (اَڌيڪش)
ڊاڪٽر جئشري اَترِي (ميمبر)
شري رماڪانت سرودي (ميمبر)
شري داداسو سرڙي (ميمبر)
شري سنديپ پنڇ ڀائي (ميمبر)
شريمتي لتا ٽڙيڪر (ميمبر)
شريمتي اُجولا گوڙبولي (ميمبر - سيڪريٽري)

حساب وشيه ڪاريه گٽ ميمبر

شري اُميش ريڙي
شري چندن ڪلڪرني
شريمتي انيتا جاوي
شري ڀاگيشوري چوهاڻ
شريمتي پوجا جاڌو
شري اَڪپا پريٽ
شري ڪلياڻ ڪڙيڪر
شري سنديش سوناوڻي
شري سجيت شنڊي
شري هنومنت جگتاپ
شري شريپاد ديشپانڊي
شري پرتاپ ڪاشد
شري ڪاشيرام بوساني
شري پپو گاڙي
شري انسار شيخ
شري راما وهنياڙڪر
شري پرمود ٺومبري
شري پرڪاش جهينڊي

شري ساگر سڪڙي
شري شريڪانت رتنپارکي
شري سوريڪانت شهاڻي
شري سريش داتي
شريمتي سوُرنا ديشپانڊي
شري پرڪاش ڪاپسي
شري سليم هاشمي
شريمتي آريا ڀڙي
شري ملند ڀاڪري
شري گيانيشور ماهاڙڪر
شري لڪشمڻ داوڻڪر
شري سڌير پاٽيل
شري گڻيش ڪولتي
شري راجارام ٻنڊگر
شريمتي روهڻي شِرڪي
شري بنسي هوالي
شري پرديپ گوڊسي
شري رويندر کنداري
شري راجيندر چوڌري

شري وِ. ڊِ. گوڙبولي (نيند ڊَنل ميمبر)
شريمتي تروبين پوپٽ (نيند ڊَنل ميمبر)
شريمتي پراجڪتا گوکلي (نيند ڊَنل ميمبر)

مُکيه سنيوجڪ: شريمتي اُجولا شريڪانت گوڙبولي
انچارج آفيسر حساب،
پاٺيه پُستڪ منڊل پُڻي
ٻاهريون صفحو ۽ سجاوٽ: ڏنشوري موڪاشي، پُڻي
ڪمپيوٽر آريکن: شري سنديپ ڪوڙي ممبئي
چٽرڪار: ڏنشوري موڪاشي

نرمتي: شري سچيتانند آڦڙي، مکيه نرمتي اڌڪاري
شري سنجيه ڪامبلي، نرمتي اڌڪاري
شري پرشانت هرڻي، نرمتي سهايڪ اڌڪاري
ترجمو ڪندڙ: شري وجيه منگلاڻي
چڪاس ڪندڙ: اشوڪ مُڪتا
ڪاغذ: 70 جي. ايس. ايم ڪريم وو.

ٽائيپ سيٽنگ: شريمتي شوڀا لعلچنداڻي
سنيوجڪ: شريمتي ڪيتڪي جاني
انچارج آفيسر سنڌي
سنيوجن سهايه: شريمتي گيتا گٽيش ٺاڪر
ڪاپي رائيٽر سنڌي
ڇاپيندڙ: ATHARVA PRINT CREATION, PUNE
پرنٽنگ آرڊر: N/PB/2017-18/1,000

پرڪاشڪ

وويڪ اُتم گوساوي، ڪنٽرولر
پاٺيه پُستڪ نرمتي منڊل،
پرڀاديوي، ممبئي - ۲۵.

ڀارت جو سنوڌان

ديباچو

اسين ڀارت جا لوڪ، ڀارت کي هڪُ مڪمل طور خودمُختيار سماجوادي سَرو ڌرم ۽ سم-ڀاوَ وارو لوڪشاهي گڏراجيہ بڻائڻ لاءِ گنڀيرتا سان فيصلو ڪري ۽ انهيءَ جي سڀني ناگرڪن کي :

سماجڪ، آرٿڪ ۽ راڄنيتڪ نياءُ، ويچار، اظهار، وشواس، شرڌا ۽ اُپاسنا جي آزادي؛ درجي ۽ موقعي جي سمانتا؛ خاطريءَ سان حاصل ڪرائڻ ۽ اُنهن سڀني ۾ شخصي سؤمان ۽ راشٽر جي ايڪتا توڙي اکنڊتا جي خاطري ڏيندڙ ڀائيچارو وڌائڻ لاءِ.

اسان جي هن سنوڌان سڀا ۾ اڄ تاريخ ڇويهين نومبر، ١٩٤٩ جيِ ڏينهن، هن ذريعي هيءُ سنوڌان سويڪار ڪري، اُن کي قانون جي روپ ۾ پاڻ کي ارپڻ ڪريون ٿا.

راشٽر گيت

جَن گَڻَ مَن اَڌينايَڪ جَيَہ هي،
ڀارَت ڀاڳيہ وڌاتا
پَنجاب، سِنڌ، گُجرات، مَراٺا،
دراوڙ، اُتڪَل، بَنگ،
وِنڌيَہ، هماچَل، يَمُنا، گَنگا،
اُچَڇل، جل ڌِ تَرَنگ،
تَوَ شُڀ نامي جاڳي،
تَوَ شُڀ آشيس ماڳي،
گاهي تَوَ جَيَہ - گاٿا،
جَن گَڻَ - مَنگَل دايَڪ جَيَہ هي
ڀارت ڀاڳِيَہ وِڌاتا،
جَيَہ هي، جَيَہ هي، جَيَہ هي،
جَيَہ جَيَہ جَيَہ جَيَہ هي،

پرتگيا

’ڀارت منهنجو ديش آهي. سڀ ڀارتواسي منهنجا ڀائر ۽ ڀينر آهن.

مونکي پنهنجي ديش لاءِ پيار آهي ۽ مونکي ان جي شاندار ۽ طرح طرح جي ورثي تي گؤرو آهي. مان سدائين ان جي لائق ٿيڻ جو جتن ڪندو رهندس.

مان پنهنجن متن مائٽن، اُستادن ۽ سيني بزرگن جو سنمان ڪندس ۽ هر ڪنهن سان فضيلت ڀريو ورتاءُ ڪندس .

مان پرتگيا ٿو ڪريان تہ مان پنهنجي ديش ۽ ديشواسين سان سچو ٿي رهندس. انهن جي ڪلياڻ ۽ آسودگيءَ ۾ ئي منهنجو سک سمايل آهي.‘

پرستاونا

شاگرد دوستو،

درجي نائين جي ڪلاس ۾ توهان سڀني جو سواگت!

پرائمري تعليم جي اَڀياسڪرم پورو ڪري توهان سيڪنڊري تعليم جي شروعات ڪري رهيا آهيو. درجي اَنين تائين حسابن جي اڀياس لاءِ هڪ ئي درسي ڪتاب هو. هاڻي حساب ڀاڱو - I ۽ حساب ڀاڱو -II انهن ٻن ڪتابن جو اڀياس ڪرڻو آهي.

حساب ڀاڱو I ڪتاب ۾ عدد گيان الجبرا ، وهنواري حساب، مالي رٿائون ۽ ڄاڻ جو بندوبست انهن ڪيترن جي گيان جي ڄاڻ توهانکي ٿيندي. اهو ڀاڱو سڀني شاگردن کي انيڪ ڪيترن ۾ اُپيوگي ثابت ٿيندو الجبرا ۽ عدد شاستر جو اڀياس اوُچ تعليم جي اڀياس لاءِ ضروري آهي.

هن درسي ڪتاب ۾ ويچار سمجهڻ لاءِ انيڪ مشغوليون ڏنل آهن. دؤر لاءِ ۽ اڀياسن ۾ ٻـ مشغوليون ڏنل اهن اهي مشغوليون توهان ڪريو. انٽرنيٽ جي مدد سان ڪتاب ۾ ڏنل ويچار ڌارائن بابت وڌيڪ ڄاڻ حاصل ڪريو. مشغولي ڪندي، مثال حل ڪندي، نتيجا ڪڍندي توهانکي دوستن / ساهيڙين سان چرچا ڪرڻي آهي. درسي ڪتاب جو اونهو اڀياس، مشغولي ڪندي سکڻ ۽ اڀياس ڪرڻ انهن ٽن سوترن سان توهانجي حسابن جو سفر ڪلندي خوش ٿيندي پارپئجي ويندو.

اچو هاڻي ماسترن، مائٽن ، دوستن، انٽرنيٽ سڀني جي مدد سان اڀياس ڪريون.

ان اڀياس لاءِ توهانکي خوب شڀ ڪامنائون !

(ڊا. سُنيل مگر)
سنچالڪ
مهاراشٽر راجيہ پاٺيہ پُستڪ
نرمتي و اڀياسڪرم سنشوڌن منڊل پڻي.

پڻي
تاريخ ٢٨ اَپريل ٢٠١٧ ، اکڻ ٿيج،
ڀارتيہ سوريہ : ٨ ويساکہ ١٩٣٩

درجي 9 ۾ حساب پاڙو : I اڀياس ڪرم مان هيٺ ڏنل لياقتون ٻار حاصل ڪندا.

ڪيتر	پاڙو	لياقتي بيان
1. عدد گيان	1.1 سيٽ 1.2 حقيقي عدد ۽ ٻسگهي غيرناطف	• عددي سرشتي جا سيٽ ۽ اپ سيٽ طيءِ ڪري سگهڻ • محدود ۽ لاحد سيٽ سڃاڻي سگهڻ • سيٽ ڏيکارڻ لاءِ وين شڪل جو اپيوگ ڪري سگهڻ • سيٽن جا مثال تيارڪري سگهڻ • عددي ليڪ جي هرهڪ ٽبڪي سان واسطيدار هڪ عدد آهي اهو سمجهڻ. • ٻسگهي غيرناطق سڃاڻي انتي ڪارروايون ڪرڻ.
2. الجبرا	2.1 گهٽپدا 2.2 ٻن ڦيرائتن واريون ليڪي مساوتون	• گهٽپدو سڃاڻڻ ۽ انتي ڪاروايون ڪري سگهڻ . • ٻن ڦيرائتن جو اپيوگ ڪري لفظي مثال حل ڪري سگهڻ .
3. وهنواري حساب	3.1 مالي رٿائون ناهڻ 3.2 ريشو ۽ پروپورشن	• الڳ الڳ ٽئڪسون سمجهڻ ۽ ٽئڪسن جي ڪٽ ڪري سگهڻ . • پگهاردارن جي انڪم ٽئڪس ڪٽي سگهڻ. • برابرريشوز جي سڏيان واپرائي سگهڻ . • سڌي ڦيرءِ ۽ اڻ سڌي ڦيرتي آڌارت لفظي بيان حل ڪري سگهڻ .
4. ڄاڻ جو بندوبست (عدد شاستر)	4.1 جهجائي چجرو 4.2	• گروهيل ۽ اڻ گروهيل جهجائي چجرو تيار ڪري سگهڻ • گڏيل جهجائي چجرو ناهي سگهڻ • ڏنل ڄاڻ جو مرڪزي رخ سڃاڻي انهن جي ماپون واپرائي سگهڻ.

ماسترن لاءِ هدايتون

درجي نائين حساب ڀاڱو - I ڪتاب ۾ آيل بنيادي ويچار، ڄاتل ڪان اڻ ڄاتل نموني ٺاهيل ويچار، ارٿ شاستر جي حسابن سان واسطيدار ويچار، عدد شاستر ڪيتر جو وڪاس، اهي سڀ ڳالهيون ماستر سوڪيم نموني پڙهندا. ڪلاس ۾ سيڪاريندي مشغوليون، چرچا، سوال جواب، گڏيل مشغوليون وغيره. الڳ الڳ طريقن جو اپيوڳ ڪرڻ ضروري آهي. ماستر ڪتاب ۾ ڏنل مشغولين جو گهرو اڀياس ڪندا ۽ اهي شاگردن ڪان ڪرائيندا اهڙيون ٻيون به ڪيتريون ئي مشغوليون پاڻ ٺاهي ڪرائيندا.

حسابن ۾ ڪٽ ڪرڻ ڪان مول ويچار سمجهڻ ڪي وڏيڪ اهميت آهي. شاگردن جي ترڪ شڪتيءَ ڪي وڌائڻ لاءِ انيڪ مثال درسي ڪتاب ۾ ڏنا ويا آهن. اهڙا ٻيا مثال ماستر ۽ شاگردن ڪي گڏجي ٺاهڻا آهن. ڪتاب ۾ للڪار ڏيندڙ سوالن ڪي تاري جا نشان ڏنل آهن. شاگردن ڪو حساب الڳ طريقي ترڪ ٻُڌيءَ سان حل ڪيو هجي ته ڪين همٿائجي.

ملهه ماپڻ ڪرڻ وقت آزاد سوال ۽ عملي پرچي بابت به ماستر ويچار ڪن. اهڙو ملهه ماپڻ طريقو ٺاهڻ بابت ماستر ويچار ڪن.

درسي ڪتاب ۾ نمونا عملي ڪم جي يادداشت ڏنل آهي. ان ڪانسواءِ به توهان ٻيا عملي ڪم ڪرايو. درسي ڪتاب جون مشغوليون اُنهن عملي ڪمن ۾ شامل ڪيل آهن. ان تي آڌارت ملهه ماپڻ طريقي جو اپيوڳ شاگردن جي ايندڙ درجن ۾ لياقت ضرور وڌائيندو اهڙي اميد اسانکي آهي.

نموني عملي ڪم

1. پنهنجي ڪلاس جي سيني شاگردن ڪي عالمي سيٽ مڃي ڪوڪو، ڪبڊي وغيره ڪي به به رانديون ڪندڙ شاگردن جا سيٽ وين شڪل وسيلي ڏيکاريو.
2. عددي ليڪ تي $5-\sqrt{2}$, $2+\sqrt{3}$ عدد ڏيکارڻ
3. ڊگري (پدوي) ٽي يا چار هوندڙ گهٽپدن ڪي ليڪي گهٽپدن سان الڳ الڳ طريقي ونڊڻ ۽ جواب ساڳيو اچي ٿو ڇا اهو جاچڻ.
4. اِنڪم ٽئڪس پريندڙ شخص جو تفصيل پٽر (ساليانِي اپت، سيڙپ وغيره) ڏنل هجي ته انکي لڳندڙ ٽئڪس انڪم ٽئڪس ڇڄرن وسيلي حل ڪرڻ.
5. ڏنل ڄاڻ وسيلي گروهيل جهجائي ورهاست ڇجرو ٺاهڻ.
6. دوائن جي ڪوڪي يا ڪور تي ڏنل خبرن جو سيڪڙو ڪيڍڻ
7. ڪو للڪار ڏيندڙ لفظي مثال به ڦيرائتا استعمال ڪري حل ڪرڻ.

فهرست

باب	صفحو
1. سيٽ	1 کان 18
2. حقيقي عدد	19 کان 35
3. گهڻپدا	36 کان 56
4. ريشو ۽ پروپورشن	57 کان 79
5. ٻن ڦيرائتن واريون ليکي مساوتون	80 کان 92
6. مالي رٿا ناهڻ	93 کان 107
7. عدد شاستر	108 کان 128
• جوابي ياداشت	129 کان 136

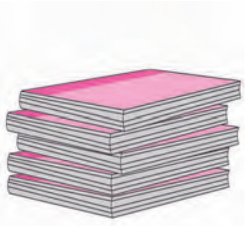
1 سيٽ

اچو تہ سکون

- سيٽ سُڃاڻپ
- سيٽن جا قسم
- وين شڪليون
- برابر سيٽ، اپ سيٽ
- عاملي سيٽ، پورڪ سيٽ
- ڪاٽ سيٽ، سنجوڳ سيٽ
- سيٽ جي جُزن جو عدد

ذرا ياد ڪريوُن

هيٺ ڪجھ شڪليون ڏنل آهن اُنهن ۾ توهانجا سُڃاتل شين جا ميڙ آهن.

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, ...				
عددن جو گروھ	ڪتابن جو ڍڳ	پکين جو ولر	چاٻين جو چلو	گلن جو گُڇو

مٿئين هرهڪ ميڙ لاءِ اسان هڪ خاص لفظ واپرايون ٿا. اُنهن سڀني مثالن ۾ ميڙن جا جُزا اسان تز نموني ٻڌائي سگھون ٿا. شين جي اهڙي ميڙ کي سيٽ چئجي ٿو.

هاڻي هينيان ميڙ ڏسو، ’ڳوٺ جا خوش ٻار‘، ’ڪلاس جا هوشيار ٻار‘ ميڙن جي انهن مثالن ۾ ’خوش‘ ۽ ’هوشيار‘ انهن ٻنهي لفظن جي معنيا ڀين جي نسبت ۾ آهن. يعني ’خوشي‘ ۽ ’هوشياري‘ ٻنهي لفظن جي معنيا تز نموني نٿي ٻڌائي سگھجي، ان ڪري انهن ميڙن کي سيٽ نٿو چئي سگھجي.

هاڻي هينين مثالن ۾ ڪهڙن ميڙن کي سيٽ چئي سگھبو، اهو ٻڌايو.

(1) هفتي جا ست ڏينهن

(2) هڪ سال جا مهنا

(3) ڪلاس جا هوشيار ٻار

(4) پهريان ڏھ قدرتي عدد

(5) مهاراشٽر جا مضبوط قلعا

(6) اسانجي سوريہ مالها جا گرھ

چاڪي وٺون

سيٽ (Sets)

جنهن ميڙ جا جُزا صحيح ۽ تز نموني پڌائي سگهجن، انهن ميڙن کي سيٽ چئجي ٿو. سيٽ کي نالو ڏيڻ لاءِ عام طور $A, B, C, \ldots, Z$ مان انگريزي آئيوويتا جا ڪئپيٽل اکر واپرائيندا آهن.
سيٽ جا جُزا ڏيکارڻ لاءِ $a, b, c, \ldots$ اهي ننڍا اکر واپرائبا آهن. جُزن کي تنتو يا ياتي چئجي ٿو.
'a' اهو سيٽ A جو تنتو آهي اهو '$a \in A$' ائين لکبو آهي ۽ 'a' اهو سيٽ A جو تنتو نہ آهي، اهو '$a \notin A$' ائين لکبو آهي.

اچو تہ هاڻي عددن جا سيٽ ڏسون.

$N = \{1, 2, 3, \ldots\}$ اهو قدرتي عددن جو سيٽ (Set of natural numbers) آهي.

$W = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ اهو سڄن عددن جو سيٽ (Set of whole numbers) آهي.

$I = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ اهو سڄن انگي عددن جو سيٽ (Set of integers) آهي.

Q سيني منطق عددن جو سيٽ (Set of rational numbers) آهي.

R اهو حقيقي عددن جو سيٽ (Set of real numbers) آهي.

سيٽ لکڻ جا طريقا

سيٽ لکڻ جا بہ طريقا آهن.

(1) فردوار يا فهرست طريقو (Listing method or roster method)

اِن طريقي ۾ سيٽ جا سڀ تنتوَ وراڪيل برئڪيٽ ۾ لکبا آهن ۽ هرهڪ تنتو کي الڳ ڪرڻ لاءِ اڌ دم ڏيندا آهن. ان ۾ تنتون جو سلسلو اهميت وارو نہ آهي پرسڀ تنتو ڏيکارڻ ضروري آهن.

مثال 1 کان 10 درميان اڪي عددن جو سيٽ، فردوار طريقي هيٺيئن نموني ڏيکاري سگهجي ٿو.

جيئن، $A = \{3, 5, 7, 9\}$ يا $A = \{7, 3, 5, 9\}$

ڪو تنتو هڪ کان وڌيڪ دفعا اچي تہ بہ اهو هڪ دفعو ئي لکجي اهڙو نيم آهي جيئن September لفظ ۾ اکر e تي دفعا آيل آهي پر ان لفظ جي اکرن جو سيٽ {S,e,p,t,e,m,b,e,r} ائين لکبو.

(2) قاعدي وارو طريقو/سيٽ ٺاهيندڙ طريقو : (Rule method or set builder form)

هن طريقي ۾ تنتون جي فهرست نہ ٺاهيندي، تنتو ڦيرائتي وسيلي ڏيکاري پوءِ هڪ اُڀي ليڪ ڏبي آهي. ان ليڪ کان پوءِ انجي خاصيت لکبي آهي.

مثال : $A = \{x \mid x \in N, 1 < x < 10\}$ انکي هيٺين نموني پڑهبو آهي. سيٽ A جو x جو تنتو آهي اهڙي ۽ طرح جو x ، 1 کان 10 وچ ۾ هڪ قدرتي عدد آهي.

مثال. {1 کان 10 وچ هڪ مفرد عدد آهي $B=\{x|x$ ان ۾ 1 کان 10 وچوارا سڀ مفرد عدد شامل ٿيندا ان ڪري
سيٽ B {2,3,5,7} ائين فردوار طريقي پڻ لکي سگهجي ٿو.

Q منطقي انگن جو سيٽ قاعدي واري طريقي اڳتي ڏيکاريل نموني لکي سگهبو.

$$Q = \left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \in I, q \neq 0 \right\}$$

پڙهڻ $\frac{p}{q}$ اهڙو عدد آهي جو p ڪو به سڄو انگي عدد ۽ q ٻڙي کي ڇڏي سڄو انگي عدد آهي.

هيٺين مثالن ۾ هڪ سيٽ ٻنهي طريقن سان ڏيکاريل آهي.

قاعدي وارو طريقو	فردوار طريقو
$A = \{x \mid$ لفظ ۾ DIVISION هڪ اکر آهي $x\}$	A = {D, I, V, S, O, N}
$B = \{ y \mid y^2 = 9\}$	B = { −3, 3}
$C = \{z \mid z$ 5 جو 30 کان ننڍو سمائيندڙ انگ آهي$\}$	C = { 5, 10, 15, 20, 25}

مثال هيٺين خاڪي ۾ خالي جڳهيون ڀري خاڪو پورو ڪريو

قاعدي وارو طريقو	فردوار طريقو
A = {x|x 15 کان ننڍو ٻڏي قدرتي عدد آهي}	A = { 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14}
B = { x|x 1 جو 1 کان 20 وچ پوري ڀي سگهه وارو عدد آهي }	....
....	C = { a, e, i, o, u}
D = { y| y انڊلٺ جو هڪ رنگ آهي }	....
P = {x| x سڄو انگي عدد آهي ائين جو , $-3 < x < 3$}	....
....	M = {1, 8, 27, 64, 125.......}

اڀياس 1.1

(1) هيٺيان سيٽ فردوار طريقي سان لکو
(i) ٻڏي قدرتي عددن جو سيٽ (ii) 1 کان 50 وچ ٻڏي مفردي عددن جو سيٽ
(iii) سيني ڪاٿو سچن انگي عددن جو سيٽ (iv) سنگيت جي ستن سُرن جو سيٽ

(2) هيٺ ڏنل بيان لفظن ۾ لکو
(i) $\frac{4}{3} \in Q$ (ii) $-2 \notin N$ (iii) $P = \{p \mid p$ اڪي عدد آهي$\}$

(3) ڪي بہ ٻہ سيٽ فردوار ۽ قاعدي واري طريقي لکو

(4) هيٺيان سيٽ فردوار طريقي لکو

(i) پارٽي سال جي مهنن جو سيٽ

(ii) ‘COMPLEMENT’ لفظ جي اکرن جو سيٽ

(iii) اِنسان جي حواسن جو سيٽ

(iv) 1 کان 20 وچ ۾ مفرد عددن جو سيٽ

(v) ڌرتيءَ تي کنڊن جو سيٽ

(5) هيٺيان سيٽ قاعدي واري طريقي لکو

(i) A = { 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100}

(ii) B = { 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48}

(iii) C = {S, M, I, L, E}

(iv) D = { سومر، منگل، ٻڌر، وسپت، جمع ، ڇنڇر، آرتوار }

(v) X = {a, e, t}

جاچ وٺون

سيٽن جا قسم (Types of sets)

سيٽ جو قسم	وصف	مثال
يگانو سيٽ (Singleton Set)	جنهن سيٽ ۾ فقط هڪ تتو هوندو آهي اُن کي يگانو سيٽ چئجي ٿو.	A = {2} A ٻڏ مفرد عددن جو سيٽ آهي
خالي سيٽ (Null Set) (Empty Set)	جنهن سيٽ ۾ ڏنل خاصيت موجب هڪ بہ تتو نہ هوندو آهي انکي ’خالي سيٽ‘ چوندا آهن. اهو سيٽ { } يا ϕ (فاءِ) انهن نشانين وسيلي ڏيکاربو آهي.	B = {x|x 2 ۽ 3 وچ ۾ قدرتي عدد آهي } ∴ B = { } يا ϕ
محدود سيٽ (Finite Set)	جنهن سيٽ جي تتون جو عدد محدود هجي ۽ کين ڳڻي سگهجي ٿو يا خالي سيٽ آهي اُن کي محدود سيٽ چئجي ٿو.	C = {p| p 1 ۽ 22 وچ ۾ 4 جو ونڊ جندڙ عدد آهي} C = {4, 8, 12, 16, 20}
لاحد سيٽ (Infinite Set)	جنهن سيٽ جي تتون جو عدد غير محدود هجي ۽ کين ڳڻي نہ سگهجي انکي ’لاحد سيٽ‘ چئجي ٿو.	N = {1, 2, 3, . . . }

مثال : هيٺيان سيٽ فردوار طريقي لکي انهن کي محدود ۽ لاحد سيٽن ۾ ورهايو

(i) $A = \{x \mid x \in N$ ۽ x اکي عدد آهي$\}$ (ii) $B = \{x \mid x \in N$ ۽ $3x - 1 = 0\}$

(iii) $C = \{x \mid x \in N$ ۽ x 7 جو ونڊجندڙ عدد آهي$\}$

(iv) $D = \{(a, b) \mid a, b \in W, a + b = 9\}$ (v) $E = \{x \mid x \in I, x^2 = 100\}$

(vi) $F = \{(a, b) \mid a, b \in Q, a + b = 11\}$

حل : (i) $A = \{x \mid x \in N$ x اکي عدد آهي$\}$

$A = \{1, 3, 5, 7, \ldots\ldots\}$ اهو لاحد سيٽ آهي

(ii) $B = \{x \mid x \in N$ ۽ $3x - 1 = 0\}$

$3x - 1 = 0 \quad \therefore 3x = 1 \quad x = \frac{1}{3}$

$\therefore B = \{\ \}$ $\quad \frac{1}{3} \notin N$ پر $\therefore B$ محدود سيٽ آهي

(iii) $C = \{x \mid x \in N$ x جو 7 ونڊجندڙ عدد آهي.$\}$

$C = \{7, 14, 21, \ldots\}$ اهو لاحد سيٽ آهي.

(iv) $D = \{(a, b) \mid a, b \in W, a + b = 9\}$

اسان کي a ۽ b جا اهڙا ملهہ ڳولهڻا پوندا جيئن a, b سچا عدد هجن ۽ $a + b = 9$ هجي پهرين a جو پوءِ b جو ملهہ اهو سلسلو رکي D سيٽ فردوار طريقي هيٺين نموني لکي سگهبو.

$D = \{(0, 9), (1, 8), (2, 7), (3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3), (7, 2), (8, 1), (9, 0)\}$,

هن سيٽ جا تتو (جوڙا) ڳڻي سگهجن ٿا ۽ محدود آهن

$\therefore D$ محدود سيٽ آهي.

(v) $E = \{x \mid x \in I, x^2 = 100\}$

$E = \{-10, 10\}$. E ان کري محدود سيٽ آهي.

(vi) $\therefore F = \{(a, b) \mid a, b \in Q, a + b = 11\}$

$F = \{(6, 5), (3, 8), (3.5, 7.5), (-15, 26), \ldots\}$ اهڙا کيترائي جوڙا ملندا

F ان کري لاحد سيٽ آهي.

ياد رکو!

N, W, I, Q, R اهي سڀ لاحد سيٽ آهن.

چاڪي وتون

برابر سيٽ (Equal sets)

سيٽ A جو هرهڪ تتوَ سيٽ B ۾ ۽ سيٽ B جو هرهڪ تتو سيٽ A ۾ هوندو تہ اُهي برابر سيٽ آهن، ائين چئبو.

A ۽ B برابر سيٽ آهن' اهو نشانين وسيلي A=B ائين لکبو

مثال (1) $A = \{x \mid x$ لفظ جو اکر آهي 'listen' اهو$\}$ $\therefore A = \{l, i, s, t, e, n\}$

$B = \{y \mid y$ لفظ جو اکر آهي 'silent' اهو$\}$ $\therefore B = \{s, i, l, e, n, t\}$

A ۽ B جي تتون جو سلسلو پل الڳہ آهي پر اهي تتو ساڳيا آهن ان ڪري A ۽ B برابر سيٽ آهن يعني A=B

مثال (2) $A = \{x \mid x = 2n,\ n \in N,\ 0 < x \leq 10\}$، $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$

$B = \{y \mid y$ هڪ ٻڌي عدد آهي ، $1 \leq y \leq 10\}$، $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$

$\therefore$ A ۽ B برابر سيٽ آهن

هاڻي هينين سيٽن بابت ويچار ڪريون .

$D = \{2, 3, 5, 7\}$ $C = \{1, 3, 5, 7\}$

ڇا C ۽ D برابر سيٽ آهن؟ نہ.

ڇو تہ $1 \in C,\ 1 \notin D,\ 2 \in D,\ 2 \notin C$

انڪري C ۽ D برابر سيٽ نہ آهن يعني $C \neq D$

مثال (3) جيڪڏهن $A = \{1, 2, 3\}$ ۽ $B = \{1, 2, 3, 4\}$ $A \neq B$ تہ جاچي ڏسو

مثال (4) $A = \{x / 10 < x < 20$ ۽ x هڪ مفرد عدد$\}$ ۽ $B = \{11, 13, 17, 19\}$

$A = B$ تہ جاچي ڏسو

اڀياس 1.2

(1) هينين مان ڪهڙا سيٽ برابر آهن ۽ ڪهڙا نہ اهو سبب ڏيئي ٻڌايو

$A = \{x \mid 3x - 1 = 2\}$

$B = \{x \mid x$ هڪ قدرتي عدد آهي پر مفرد ۽ مرڪب آهي.$\}$

$C = \{x \mid x \in N,\ x < 2\}$

(2) A ۽ B برابر سيٽ آهن ڇا؟ سبب ڏيئي لکو .

A = ٻڌي مفرد عدد $B = \{x \mid 7x - 1 = 13\}$

(3) هينين مان ڪهڙا سيٽ خالي آهن اهو سبب ڏيئي لکو .

(i) $A = \{a \mid a$ ڪان ننڍو قدرتي عدد آهي .$\}$

(ii) $C = \{x \mid 5x - 2 = 0,\ x \in N\}$ (iii) $B = \{x \mid x^2 = 0\}$

(4) هيٺين مان ڪهڙا سيٽ محدود ۽ ڪهڙا سيٽ لاحد آهن سبب ڏيئي لکو.

(i) $A = \{ x \mid x < 10$، x هڪ قدرتي عدد آهي$\}$

(ii) $B = \{y \mid y < -1$، y سڄو انگي عدد آهي$\}$

(iii) توهان جي اسڪول جي درجي 9 جي شاگردن جو سيٽ= C

(iv) توهان جي شهر جي شاگردن جو سيٽ

(v) تجربي خالي جي اوزارن جو سيٽ

(vi) سچا عدد سيٽ

(vii) منطقي عددن جو سيٽ

ڄاڻي وٺون

وين شڪليون (Venn diagrams)

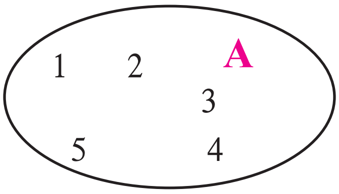
سيٽ لکڻ لاءِ پن شڪلين جو پهريون اِستعمال برٽش ترڪ شاستري جان وين ڪيو. ان ڪري اهڙين شڪلين کي 'وين شڪليون' چئجي ٿو. الجبرا سيٽن جو لاڳاپو سمجهڻ لاءِ ۽ سيٽن جا مثال حل ڪرڻ لاءِ انهن شڪلين جو اپيوگ ٿيندو آهي وين شڪلين وسيلي سيٽ ڪيئن ڏيکاريا آهن، اهو هيٺين مثالن وسيلي سمجهو.

1834-1923

ترڪ شاستر ۾ امڪان انهن وشين کي حسابي روپ ڏيڻ جو ڪم پهريون جان وين ڪيو.
'لاجڪ آف چانس' هي سندس مشهور ڪتاب آهي.

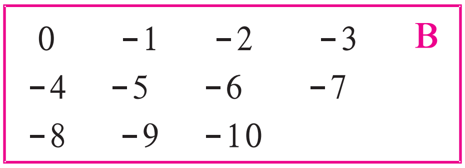
مثال $A = \{ 1, 2, 3, 4, 5\}$

وين شڪل وسيلي اهو سيٽ هيٺ ڏيکاريل آهي



$B = \{x \mid -10 \leq x \leq 0$, سڄو انگي عدد آهي $x\}$

پرواري وين شڪل سيٽ B ڏيکاري ٿي.



اُپ سيٽ (Subset)

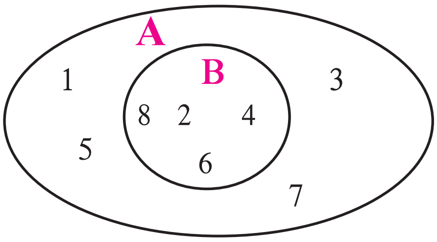
جيڪڏهن A ۽ B به سيٽ آهن ۽ سيٽ B جو هرهڪ تتوَ، سيٽ A جو به تتو هجي ته سيٽ B کي سيٽ A جو اپ سيٽ چوندا آهن اهو $A \subseteq B$ ائين ڏيکارجي ٿو ۽ 'انکي B اپ سيٽ A' يا 'A,B جو اپ سيٽ آهي' ائين پڙهبو آهي.

مثال (1) $A = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

$B = \{2, 4, 6, 8\}$

B جو هر تتو A جو به تتوَ آهي

ان ڪري $B \subseteq A$.



اها ڄاڻ وين شڪل وسيلي ڏيکاريل آهي.

مشغولي : ڪلاس جي شاگرد جو سيٽ ۽ انهن شاگردن مان تري سگهندڙ شاگردن جو سيٽ وين شڪل وسيلي ڏيکاريل آهي.

هاڻي هيٺين اُپ سيٽن جون وين شڪليون ڏيکاريو .

(1) (i) ڪلاس جي شاگردن جو سيٽ

(ii) انهن مان سائيڪل هلائي سگهندڙ شاگردن جو سيٽ

(2) هيٺ ڪجهه ميون جو سيٽ ڏنل آهي

{زيتوُن ، مؤسمبي ، انب، ڪتهڙو، چڪوُ، جموُ، سيتاڦل، پپيتو }

انجا هينيان اپ سيٽ ڏيکاريو (i) هڪ ٻج هوندڙ ڦل (ii) هڪ کان وڌيڪ ٻج هوندڙ ڦل

هاڻي ٻيا ڪجهه اپ سيٽ ڏسون

مثال (2) قدرتي عددن جو سيٽ = N   سڄن انگن جو سيٽ = I

هتي $I \subseteq N$ (چو ته سڀ قدرتي عدد ، سچا انگي عدد به هوندا آهن)

مثال (3) P = { x | x 25 جو ٻيو مول آهي } $S = \{ y \mid y \in I, -5 \le y \le 5\}$

فردوار طريقي وسيلي سيٽ p $P = \{-5, 5\}$

سآئي طريقي وسيلي سيٽ S $S = \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

هتي p جو هرهڪ تتو S جو به تتو آهي.

$\therefore\ P \subseteq S$

ياد رکو

(i) هرهڪ سيٽ پنهنجو اپ سيٽ هوندو آهي يعني $A \subseteq A$

(ii) خالي سيٽ هرهڪ سيٽ جو اپ سيٽ هوندو آهي يعني $\phi \subseteq A$

(iii) جيڪڏهن $A = B$ ته $A \subseteq B$ ۽ $B \subseteq A$

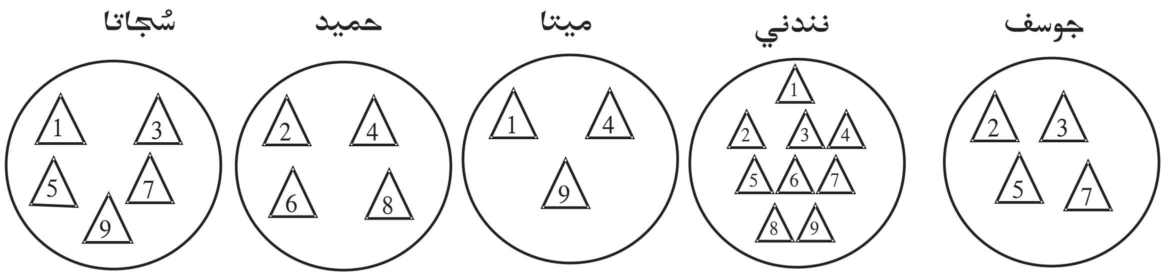
(iv) جيڪڏهن $A \subseteq B$ ۽ $B \subseteq A$ ته $A = B$

مثال $A = \{ 1, 3, 4, 7, 8\}$ انجا سڀ اپ سيٽ لکو

جيئن $P = \{ 1, 3\}$, $V = \{1, 4, 8\}$, $T = \{4, 7, 8\}$, $S = \{1, 4, 7, 8\}$

اهڙا اجا ٻيا پنج اپ سيٽ لکو

مشغولي : هرهڪ شاگرد ڪاغذ جا ساڳئي آڪار جا 9 ٽڪنڊا ۽ هڪ ٿالهي ڪٽي ٽڪنڊن تي 1 کان 9 عدد لکي. هرهڪ شاگرد پنهنجي ٿالهيءَ ۾هيٺ ڏيکاريل ٽڪنڊا ڪٽي. ان سان هرهڪ وٽ ١ کان ٩ عددن جي سيٽ جو اپ سيٽ ٿيندو.



سُجاتا، حميد، ميتا، نندني ۽ جوسف جي ٿالهين جا عدد ڏسو هرهڪ کي ٽڪنڊا ڏيڻ وقت ڪهڙو ويچار ڪيل آهي؟ هرهڪ سيٽ قاعدي واري طريقي لکو.

اچو چرچا ڪريون

مثال : هيٺ ڪجهه سيٽ ڏنل آهن .

$A = \{ \ldots, -4, -2, 0, 2, 4, 6, \ldots\}$ $B = \{1, 2, 3, \ldots\}$

$C = \{\ldots, -12, -6, 0, 6, 12, 18 \ldots\}$ $D = \{\ldots, -8, -4, 0, 4, 8, \ldots\}$

$I = \{ \ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$

هاڻي ٻڌايو ته هينين مان ڪهڙا بيان صحيح آهن؟

(i) A اهو D,C,B مان هرهڪ جو اُپ سيٽ آهي . (ii) B مٿين سڀني سيٽن جو اُپسيٽ آهي.

چاڻي وٺون

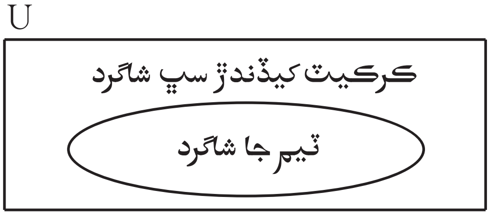
عالمي سيٽ (Universal set)

ويچار هيٺ هوندڙ سڀني سيٽن کي سمائيندڙ وڏي سيٽ کي عالمي سيٽ چئجي ٿو ويچار هيٺ هوندڙ هرهڪ سيٽ عالمي سيٽ جو اپ سيٽ هوندو آهي.

مثال (1) اسانکي درجي 9 جي هڪ ڪلاس جي شاگرد جي حاضريءَ جو اپياس ڪرڻو آهي. ان لاءِ 9 جي شاگردن جي سيٽن جو ويچار ڪرڻو پوندو هتي درجي 9 جي سڀني شاگردن جي سيٽ يا اسڪول جي سڀني شاگردن جي سيٽ کي عالمي سيٽ ڪٺي سگهجي.

هاڻي ٻيو مثال ڏسون

مثال (2) توهان جي اسڪول جي ڪرڪيٽ ڪيڏندڙ شاگردن مان 15 شاگردن جي ڪرڪيٽ ٽيم ناهڻي آهي.



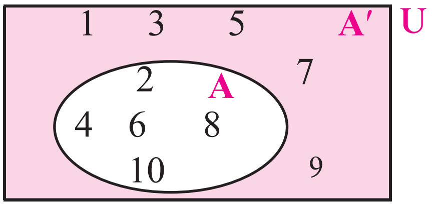
هتي ڪرڪيٽ ڪيڏندڙ سڀني شاگردن جو سيٽ عالمي سيٽ ٿيندو ۽ چونڊيل 15 شاگردن جو سيٽ اُن سيٽ جو اُپ سيٽ ٿيندو.

عالمي سيٽ عام طور 'U' اکر سان ڏيکاربو آهي وين شڪل ۾ عالمي سيٽ گھڻو ڪري مستطيل وسيلي ڏيکاربو آهي.

پوُرڪ سيٽ (Complement of a set)

سمجھيو تہ 'U' هڪ عالمي سيٽ آهي. جيڪڏهن $B \subseteq U$ تہ B ۾ نہ هوندڙ عالمي سيٽ U جي تتون جي سيٽ کي سيٽ B جو پورڪ سيٽ چئبو سيٽ B جو پورڪ سيٽ B' يا B^C وسيلي ڏيکاربو آهي.

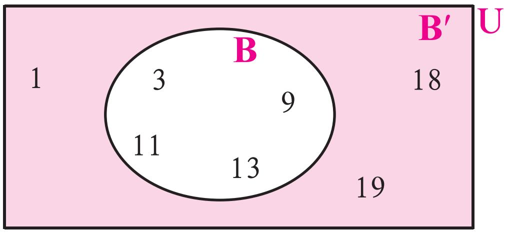
$\therefore B' = \{x \mid x \in U, x \notin B\}$ B' کي ائين بہ ڏيکاري سگھبو



مثال (1) $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

$A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$

$\therefore A' = \{1, 3, 5, 7, 9\}$



مثال (2) سمجھو $U = \{1, 3, 9, 11, 13, 18, 19\}$

$B = \{3, 9, 11, 13\}$

$\therefore B' = \{1, 18, 19\}$

هاڻي B جو سيٽ لھو

(B') يعني B' ۾ نہ هوندڙ U سيٽ جا تتوَ

ائين آهي ڇا؟ (B')=B

مٿين ڳالھہ وين شڪل وسيلي سمجھي وٺو.

پورڪ سيٽ جو پورڪ سيٽ، سيٽ پاڻ هوندو آهي.

هي ڌيان ۾ رکو

پورڪ سيٽ جون خاصيتون

(i) A ۽ A' ۾ عام تتو نہ هوندو آهي

(ii) $A \subseteq U$ ۽ $A' \subseteq U$

(iii) عالمي سيٽ جو پورڪ سيٽ، خالي سيٽ هوندو آهي. $U' = \phi$

(iv) خالي سيٽ جو پورڪ سيٽ عالمي سيٽ هوندو آهي. $\phi' = U$

اڀياس 1.3

(1) جيڪڏهن $A = \{a, b, c, d, e\}$, $B = \{c, d, e, f\}$, $C = \{b, d\}$, $D = \{a, e\}$
ته هيٺيان بيان صحيح آهن يا غلط لکو

(i) $C \subseteq B$ (ii) $A \subseteq D$ (iii) $D \subseteq B$ (iv) $D \subseteq A$ (v) $B \subseteq A$ (vi) $C \subseteq A$

(2) هيٺيان سيٽ وين شڪل وسيلي ڏيکاريو

(i) $X = \{x \mid x \in N$ ۽ $7 < x < 15\}$

(ii) $Y = \{y \mid y \in N,$ y 1 کان 20 وچ ۾ مفرد عدد$\}$

(3) $U = \{1, 2, 3, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$

$P = \{1, 3, 7, 10\}$

ته (i) U، P ۽ P' وين شڪلين وسيلي ڏيکاريو (ii) $(P')' = P$ جاچيو

(4) جيڪڏهن $A = \{1, 3, 2, 7\}$ ته A سيٽ جا ڪي به ٽي اپ سيٽ لکو

(5) هيٺين مان ڪھڙو سيٽ ٻين ڪھڙن سيٽن جو اُپ سيٽ آهي اُهو لکو.

(i) P پٽني جي رهواسين جو سيٽ آهي — M مڌيه پرديش جي رهواسين جو سيٽ آهي

I انڊور جي رهواسين جو سيٽ آهي — B ڀارت جي رهواسين جو سيٽ آهي

H مهاراشٽر جي رهواسين جو سيٽ آهي.

(ii) مٿين مان ڪھڙو سيٽ ٻين سيٽن جو عالمي سيٽ مقرر ڪري سگهبو؟

(*6) هيٺ ڪجهه سيٽ ڏنل آهن انهن مان ڪھڙو سيٽ ٻين سيٽن جو عالمي سيٽ مقرر ڪري سگهبو؟

(i) 5 جي سمائيندڙ عددن جو سيٽ = A — 7 جي سمائيندڙ عددن جو سيٽ = B

12 جي سمائيندڙ عددن جو سيٽ = C

(ii) 4 جي سمائيندڙ سڀني انگي عددن جو سيٽ = P — سڀني پوري سگهن وارن ٻڌي عددن جو سيٽ = T

(7) ڪلاس جي سڀني شاگردن جو سيٽ عالمي سيٽ سمجھو حسابن ۾ 50% يا ان کان وڌيڪ مارڪون ڪڍندڙ شاگردن جو سيٽ A آهي ته A جو پورڪ سيٽ لکو.

جاڳي وٺون

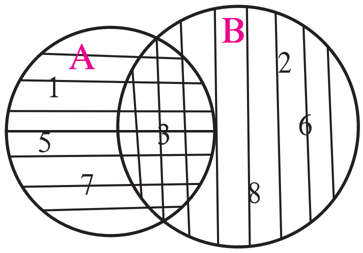
سيٽن تي ڪاروايون

سيٽن جو ڪاٽ (Intersection of two sets)

سمجھو A ۽ B ٻه سيٽ آهن A ۽ B جي عام تتون جي سيٽ کي انهن سيٽن جو ڪاٽ سيٽ چئجي ٿو. اهو $A \cap B$ ائين لکجي ٿو ۽ 'A ڪاٽ B' ائين پڙهجي ٿو.

$$\therefore \quad A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ ۽ } x \in B\}$$

مثال (1) $A = \{1, 3, 5, 7\}$ ، $B = \{2, 3, 6, 8\}$

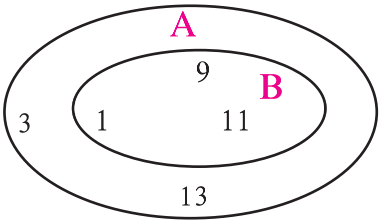


هاڻي وين شڪليون ڪڍون

A ۽ B ٻنهي سيٽن ۾ 3 عام تتو آهن.

$\therefore A \cap B = \{3\}$

مثال (2) $A = \{1, 3, 9, 11, 13\}$ $B = \{1, 9, 11\}$



A سيٽ B ۾ 1, 9, 11 عام تتو آهن.

$\therefore A \cap B = \{1, 9, 11\}$ پر $B = \{1, 9, 11\}$

$\therefore A \cap B = B$

ياد رکو هتي B , A جو اپ سيٽ آهي.

جيڪڏهن $B \subseteq A$ ته $A \cap B = B$ ۽ جيڪڏهن $B \cap A = B$ ته $B \subseteq A$

ياد رکو

ڪاٽ سيٽن جون خاصيتون

(1) $A \cap B = B \cap A$

(2) جيڪڏهن $A \subseteq B$ ته $A \cap B = A$

(3) جيڪڏهن $A \cap B = B$ ته $B \subseteq A$

(4) $A \cap B \subseteq A$ ۽ $A \cap B \subseteq B$

(5) $A \cap A' = \phi$

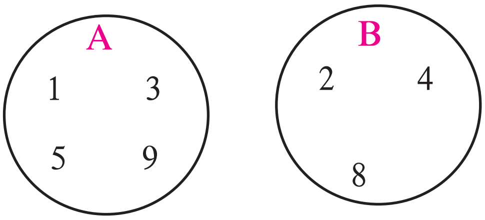
(6) $A \cap A = A$

(7) $A \cap \phi = \phi$

مشغولي : الڳ الڳ مثال ڪٽي مٿيون خاصيتون جاچيو .

ڄاڻي وٺون

علحدا سيٽ (Disjoint sets)



سمجهو ، $A = \{1, 3, 5, 9\}$

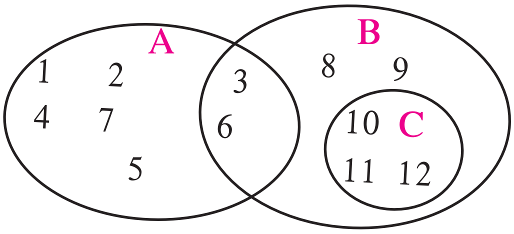
۽ $B = \{2, 4, 8\}$ اهي سيٽ ڏنل آهن

سيٽ A ۽ B ۾ ڪو به عام تتو نه آهي اهي ٻئي سيٽ پوري طرح الڳ يا علحدا آهن انڪري ڪين علحدا سيٽ چئجي ٿو. هنن سيٽن جي وين شڪل ڏسو.

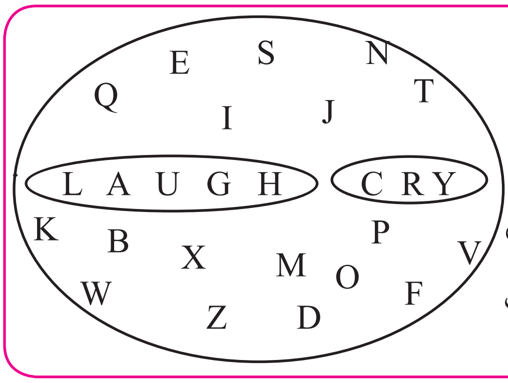
مشغولي I :

A,B,C سيٽ وين شڪل وسيلي ڏيکاريل آهن

انهن مان ڪهڙا به سيٽ علحدا سيٽ آهن اهو لکو



مشغوليون : II



سمجهو تہ انگريزي اکرن جو سيٽ عالمي سيٽ آهي سيٽ جا تتو انگريزي اکر آهن سمجهو LAUGH لفظ جي اکرن جو هڪ سيٽ آهي ۽ CRY لفظ جي اکرن جو ٻيو سيٽ آهي اهي ٻئي علحدا سيٽ آهن.ٻنهي سيٽن جو ڪاٽ، خالي سيٽ آهي اهو جاچيو

ٻن سيٽن جو سنجوڳہ (Union of two sets)

سمجهو A ۽ B سيٽ آهن انهن ٻنهي سيٽن جي تتون جي گڏي ٺهندڙ سيٽ کي B ۽ A سيٽن جو سنجوڳہ سيٽ چئبو آهي اهو $A \cup B$ ائين لکبو آهي ۽ A سنجوڳہ B ائين پڙهبو آهي.

$A \cup B = \{x \mid x \in A$ يا $x \in B\}$

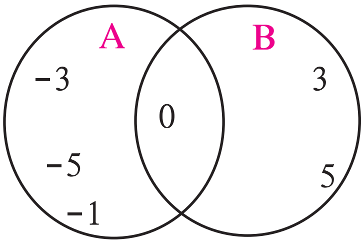
مثال (1)

$A = \{-1, -3, -5, 0\}$

$B = \{0, 3, 5\}$

$A \cup B = \{-3, -5, 0, -1, 3, 5\}$

ياد رکو ، $A \cup B = B \cup A$

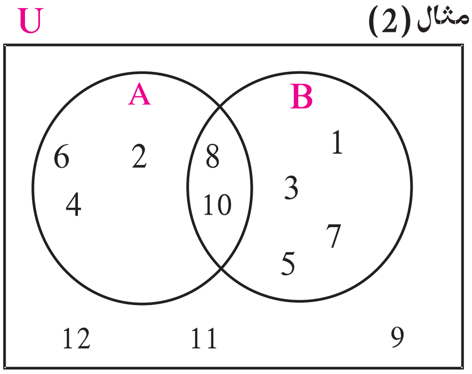


مثال (2)

پرواري وين شڪلين جن مدد سان هيٺيان سيٽ فردوار طريقي لکو.

(i) U (ii) A (iii) B (iv) $A \cup B$ (v) $A \cap B$

(vi) A' (vii) B' (viii) $(A \cup B)'$ (ix) $(A \cap B)'$



مثال :

$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$

$A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, $B = \{1, 3, 5, 7, 8, 10\}$

$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10\}$ $A \cap B = \{8, 10\}$

$A' = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 12\}$ $B' = \{2, 4, 6, 9, 11, 12\}$

$(A \cup B)' = \{9, 11, 12\}$ $(A \cap B)' = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 11, 12\}$

مثال (3)

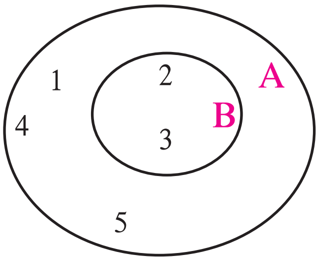
$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ $B = \{2, 3\}$

هاڻي انهن سيٽن جي وين شڪل ڪڍون

$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

سيٽ A ۽ $A \cup B$ ساڳيا تتو آهن

انڪري ، جيڪڏهن $B \subseteq A$ تہ $A \cup B = A$



ياد رکو

سنجوڳ سيٽن جون خاصيتون

(1) $A \cup B = B \cup A$

(2) جيڪڏهن $A \subseteq B$ $A \cup B = B$

(3) $A \subseteq A \cup B,\ B \subseteq A \cup B$

(4) $A \cup A' = U$

(5) $A \cup A = A$

(6) $A \cup \phi = A$

چاڙهي وٺون

سيٽ جي تتون جو عدد (Number of elements in a set)

سمجهو $A = \{3, 6, 9, 12, 15\}$ ان سيٽ ۾ 5 تتوَ آهن

سيٽ A جي تتون جو عدد، n(A) ائين ڏيکاربو آهي. $\therefore\ n(A) = 5$

سمجهو ته $B = \{6, 12, 18, 24, 30, 36\}$ $\quad \therefore\ n(B) = 6$

سنجوڳ سيٽ ۽ ڪاٽ سيٽ جي تتون جو عدد

مٿين سيٽن A ۽ B نسبت ۾

$n(A) + n(B) = 5 + 6 = 11$ ----(1)

$A \cup B = \{3, 6, 9, 12, 15, 18, 24, 30, 36\}$ $\therefore\ n(A \cup B) = 9$---------(2)

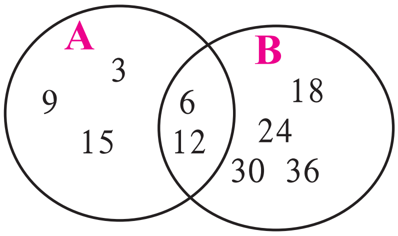
$A \cap B$ سيٽ لهون يعني سيٽ A ۽ B جا عام تتو ڏسون. ته

$A \cap B = \{6, 12\}$ $\quad \therefore\ n(A \cap B) = 2$---------(3)

ڌيان ۾ رکو، $n(A)$ ۽ $n(B)$ ڳڻڻ وقت $A \cap B$ جا تتو ٻه دفعا ڳڻيا

$n(A \cup B) = 9$ ته $n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 5 + 6 - 2 = 9$

سمجهو ته (1)، (2) ۽ (3)



$\therefore\ n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

مٿين نيمرڪي پرواري وين شڪل وسيلي جاچيو.

$n(A) = \square$, $\quad n(B) = \square$

$n(A \cup B) = \square$, $\ n(A \cap B) = \square$

$\therefore\ n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

ڌيان ۾ رکو

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

يعني $n(A) + n(B) = n(A \cup B) + n(A \cap B)$

هاڻي $B = \{1, 2, 4, 6, 8, 12, 13\}$ $\quad A = \{1, 2, 3, 5, 7, 9, 11, 13\}$

هي سيٽ ڪٺي مٿين نيمرڪي جاچيو

ڄاڻي وٺون

سيٽن تي آڌارت لفظي مثال

مثال : هڪ ڪلاس ۾ 70 شاگرد آهن انهن مان 45 شاگردن کي 45 ڪرڪيٽ راند وڻندي آهي 52 شاگردن کي ڪوڪو راند وڻندي آهي سڀني شاگردن کي ڪا نہ ڪا راند وڻندي آهي تہ ڪرڪيٽ ۽ ڪوڪو ٻئي رانديون وڻندڙ شاگردن جو عدد لهو.

حل : اهو مثال ٻن عددن ۾ ڏيو

طريقوا : ڪلاس ۾ڪل شاگرد = 70

ڪرڪيٽ راند وڻندڙ شاگردن جو سيٽ A مڃيندا سين ڪو-ڪو راند وڻندڙ شاگردن جو سيٽ B مڃيندا سين. هرهڪ شاگرد کي ڪرڪيٽ ۽ ڪوڪو مان گهٽ ۾گهٽ هڪ راند وڻي ٿي.

ڪرڪيٽ ۽ ڪوڪو وڻندڙ شاگردن جو عدد يعني $n(A \cup B)$

$$\therefore\ n(A \cup B) = 70$$

ڪرڪيٽ ۽ ڪوڪو ٻئي رانديون وڻندڙ شاگردن جو عدد = $n(A \cap B)$

$$n(A) = 45, \qquad n(B) = 52$$

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$\therefore\ n(A \cap B) = n(A) + n(B) - n(A \cup B)$$

$$= 45 + 52 - 70 = 27$$

ٻئي رانديون وڻندڙ شاگرد 27، ڪرڪيٽ وڻندڙ شاگرد فقط 45 آهن. ڪرڪيٽ وڻندڙ شاگرد $= 45 - 27 = 18$

$A \cap B$ سيٽ ٻئي رانديون وڻندڙ شاگردن جو سيٽ آهي $\therefore\ n(A \cap B) = 27$

طريقو II : ڏنل ڄاڻ وين شڪل وسيلي پڻ ڏيکاري ٻئي رانديون وڻندڙ شاگردن جو عدد لهي سگهجي ٿو.

$n(A \cap B) = x \qquad n(A) = 45,\ n(B) = 52,$

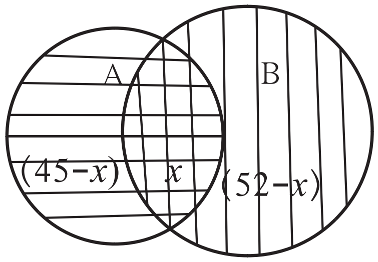
$n(A \cup B) = 70$

$$\therefore\ n(A \cap B) = x = n(A) + n(B) - n(A \cup B)$$

$$= 45 + 52 - 70 = 27$$

وين شڪل وسيلي ڪرڪيٽ وڻندڙ ٻار $= 45 - 27$

$= 18$



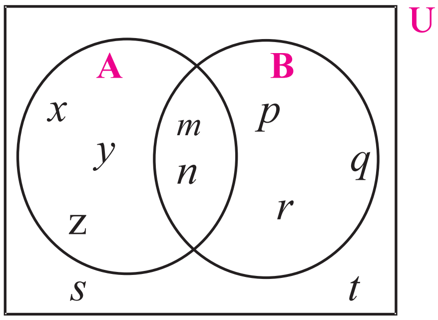
ايپياس 1.4

(1) جيڪڏهن $n(A) = 15,\ n(A \cup B) = 29,\ n(A \cap B) = 7$ ته $n(B) = ?$

(2) هڪ هاسٽل ۾125 شاگرد آهن انهن مان 80 شاگرد چانهه 60 شاگرد ڪافي ۽ 20 شاگرد چانهه ۽ ڪافي پيئندا آهن. چانهه يا ڪافي ڪجهه به نه پيئندڙ شاگردن جو عدد لهو.

(3) هڪ امتحان ۾ 50 شاگرد انگريزيءَ ۾ پاس ٿيا 60 شاگرد حسابن ۾ پاس ٿيا 40 شاگرد ٻنهي وشين ۾ پاس ٿيا. ڪوبه شاگرد ٻنهي وشين ۾ ناپاس نه ٿيو. ته ٻنهي وشين مان گهٽ ۾ گهٽ هڪ ۾ پاس ٿيندڙ شاگرد ڪيترا؟

(4*) هڪ اسڪول ۾ درجي نائين جي 220 شاگردن جي پسندگيءَ جو سروي ڪيو ويو. انهن 130 شاگردن جابلو چڙهائيءَ ۾ پسندگي ڏيکاري. 180 شاگردن اڪاش ايپياس ۾ پسندگي ڏيکاري. 110 شاگردن جابلو چڙهائي ۽ آڪاش ايپياس ٻنهي ۾ پسندگي ڏيکاري. ڪيترن شاگردن کي ٻنهي مان ڪجهه به پسند نه آهي ڪيترن شاگردن کي فقط جابلو چڙهائي وڻندي آهي؟ ڪيترن شاگردن کي فقط آڪاش ايپياس وڻندو آهي؟



(5) پرواري شڪل مان هيٺيان سيٽ لکو

(i) A (ii) B (iii) $A \cup B$ (iv) U

(v) A' (vi) B' (vii) $(A \cup B)'$

گڏيل ايپياس 1

(1) هيٺين سوالن ۾ صحيح جواب چونڊيو

(i) $M = \{1, 3, 5\},\ N = \{2, 4, 6\}$, ته $M \cap N = ?$

(A) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ (B) $\{1, 3, 5\}$ (C) ϕ (D) $\{2, 4, 6\}$

$P = \{x \mid x$ اڪي قدرتي عدد آهي $1 < x \le 5\}$

(ii) $P = \{x \mid x,\ 1 < x \le 5\}$ اهو سيٽ فردوار طريقي ڪيئن لکبو؟

(A) $\{1, 3, 5\}$ (B) $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ (C) $\{1, 3\}$ (D) $\{3, 5\}$

(iii) $P = \{1, 2, ...10\}$، ڪهڙي قسم جو سيٽ آهي؟

(A) خالي سيٽ (B) لامحدود سيٽ (C) محدود سيٽ (D) انهن مان نه

(vi) $M \cup N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ $M = \{1, 2, 4\}$ سيٽ N هيٺين ڪهڙو آهي

(A) $\{1, 2, 3\}$ (B) $\{3, 4, 5, 6\}$ (C) $\{2, 5, 6\}$ (D) $\{4, 5, 6\}$

(v) جيڪڏهن $M \subseteq P$، تہ هيٺين مان ڪهڙو سيٽ $P \cap (P \cup M)$ آهي؟

(A) P (B) M (C) $P \cup M$ (D) $P' \cap M$

(vi) هيٺين مان ڪهڙو سيٽ خالي سيٽ آهي؟

(A) پوروچوٽ ليڪن جي چيد ٽپڪن جو سيٽ (B) ٻڌي مفرد عددن جو سيٽ

(C) 30 کان گهٽ ڏينهن انگريزي مهنن جو سيٽ

(D) $P = \{x | x \in I, -1 < x < 1\}$

(2) هيٺين سوالن لاءِ صحيح جواب چونڊيو.

(i) هيٺين مان ڪهڙو ميڙ سيٽ آهي؟

(A) اسڪول ويجهو ڏٺا وڻ (B) انڌلن جا رنگ

(C) ڪتاب جا سؤلا سوال (D) ڳوٺ جا شاهوڪار ماڻهو

(ii) هيٺين مان $N \cap W$ سيٽ ڪهڙو آهي؟

(A) {1, 2, 3, ...} (B) {0, 1, 2, 3, ...} (C) {0} (D) { }

(iii) $P = \{x \mid x$ لفظ indian جو هڪ اکر آهي$\}$

هيٺين مان P سيٽ جو فردوار طريقو ڪهڙو آهي؟

(A) {i, n, d} (B) {i, n, d, a} (C) {i, n, a} (D) {n, d, a}

جا

(vi) جيڪڏهن $T = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ $M = \{3, 4, 7, 8\}$ $T \cup M = ?$

(A) {1, 2, 3, 4, 5, 7} (B) {1, 2, 3, 7, 8}

(C) {1, 2, 3, 4, 5, 7, 8} (D) {3, 4}

(3) هڪ گروهہ جي 100 ماڻهن مان 72 ماڻهو انگريزي ڳالهائيندا آهن ۽ 43 ماڻهو فرينچ ڳالهائيندا آهن : اهي 100 ماڻهو انگريزي يا فرينچ مان گهٽ ۾ گهٽ هڪ ٻولي ڳالهائيندا آهن تہ ڪيترا ماڻهو فقط انگريزي ڳالهائيندا آهن؟ ڪيترا ماڻهو فقط فرينچ ڳالهائيندا آهن؟ ڪيترا ماڻهو انگريزي ۽ فرينچ ٻئي ٻوليون ڳالهائيندا آهن؟

(4) وڻ وڌائڻ واري هفتي ۾ پارٿ 70 وڻ لڳايا ۽ پريا 90 وڻ لڳايا. اُنهن مان ٻنهي گڏجي 25 وڻ لڳايا. تہ پارٿ ۽ پريا ٻنهي ڪل ڪيترا وڻ لڳايا؟

(5) جيڪڏهن $n(A) = 20$, $n(B) = 28$ ۽ $n(A \cup B) = 36$ تہ $n(A \cap B) = ?$

(6) هڪ ڪلاس جي 28 شاگردن مان 8 جي گهرن ۾ فقط ڪتو پاليل آهي، 6 جي گهرن ۾ فقط ٻلي پاليل آهي. 10 شاگردن جي گهرن ۾ ڪتو ۽ ٻلي ٻئي پاليل آهن ڪيترن شاگردن جي گهرن ۾ ڪتي ۽ ٻليءَ مان ڪجهہ بہ پاليل نہ آهي؟

(7) هيٺين مثالن جي سيٽن جا سنجوڳہ سيٽ لکو

(i) A ={3, 4, 5, 7} B ={1, 4, 8}

(ii) P = {a, b, c, e, f} Q ={l, m, n , e, b}

(iii) $X = \{x \mid x$ 80 ۽ 100 وچ ۾ مفرد عدد آهي$\}$

$Y = \{y \mid y$ 90 ۽ 100 جي وچ ۾ اڪي عدد آهي$\}$

(8) هيٺين مان ڪهڙو سيٽ، ڪهڙي ٻئي سيٽ جو اپ سيٽ آهي؟

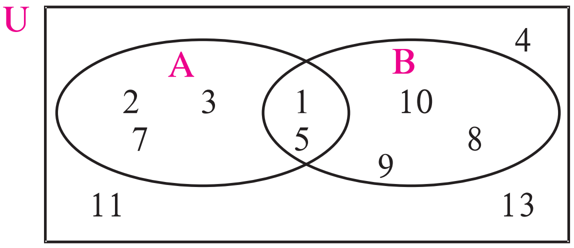
X = سيني چوڪنڊن جو سيٽ   Y = سيني رامبسن جو سيٽ

S = سيني چورس جو سيٽ   T = سيني پوروچوٽ پاسو چوڪنڊن جو سيٽ

V = سيني مستطيلن جو سيٽ

(9) جيڪڏهن M ڪو به هڪ سيٽ آهي ته $M \cup \phi$ ۽ $M \cap \phi$ لکو.

(10*)



پرواري وين شڪل وسيلي $U, A, B, A \cup B$ ۽ $A \cap B$ لکو.

(11) جيڪڏهن $n(A) = 7,\ n(B) = 13, n(A \cap B) = 4,$ جيڪڏهن $n(A \cup B\} = ?$

مشغولي I : خالن ۾ سيٽن جا تتو لکو

$U = \{1, 3, 5, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 15\}$

$A = \{1, 11, 13\}$ $B = \{8, 5, 10, 11, 15\}$ $A' = \{........\}$ $B' = \{........\}$

$A \cap B = \{...........\}$ $A' \cap B' = \{..............\}$

$A \cup B = \{...........\}$ $A' \cup B' = \{...........\}$

$(A \cap B)' = \{...........\}$ $(A \cup B)' = \{...........\}$

جاچيو : $(A \cup B)' = A' \cap B'$ ، $(A \cap B)' = A' \cup B'$

مشغولي II : توهانجي آس پاس جي 20 ڪٽنبن جي هيٺين چاڻ هٿ ڪريو.

(i) مراٺي اخبار گهرائيندڙ ڪٽنبن جو عدد

(ii) انگريزي اخبار گهرائيندڙ ڪٽنبن جو عدد

(iii) انگريزي ۽ مراٺي ٻئي اخبارون گهرائيندڙ ڪٽنبن جو عدد

مليل چاڻ وين شڪل وسيلي ڏيکاريو.

2 حقيقي عدد

اچو تہ سکون

- منطق عددن جون خاصيتون
- غير منطق عددن جون خاصيتون
- غير ناطق
- ٻسگهي غيرناطقن جي ڀيٽ
- ٻسگهي غيرناطق تي ڪاروايون
- ٻسگهي غيرناطقن جو منطقي ڪرڻ

ذرا ياد ڪريون

اڳئين درجن ۾ اسين قدرتي عدد، سچا انگي عدد ۽ حقيقي عددن جو اڀياس ڪيو آهي

N = قدرتي عدد سيٽ = $\{1, 2, 3, 4, \ldots\}$

W = سچا عدد سيٽ = $\{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$

I = سچا انگي عدد سيٽ = $\{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 \ldots\}$

Q = منطق عدد سيٽ = $\{\frac{p}{q}, | p, q \in I, q \neq 0\}$

R = حقيقي عدد سيٽ

$$N \subseteq W \subseteq I \subseteq Q \subseteq R.$$

منطق انگن ۾ سلسلو لاڳاپو : $\frac{p}{q}$ ۽ $\frac{r}{s}$ منطق عدد آهن ۽ $q > 0, s > 0$

(i) $\frac{p}{q} = \frac{r}{s}$ تہ $p \times s = q \times r$ جيڪڏهن (ii) $\frac{p}{q} > \frac{r}{s}$ تہ $p \times s > q \times r$ جيڪڏهن

(iii) $\frac{p}{q} < \frac{r}{s}$ تہ $p \times s < q \times r$ جيڪڏهن

جاڳي وٺون

منطق انگن جون خاصيتون (Properties of rational numbers)

جيڪڏهن a, b, c منطق عدد آهن تہ

خاصيت	جوڙ	ضرب
1. سلسلو	$a + b = b + a$	$a \times b = b \times a$
2. نرپيڪشتا	$(a + b) + c = a + (b + c)$	$a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$
3. لاڳاپو	$a + 0 = 0 + a = a$	$a \times 1 = 1 \times a = a$
4. ابتڙ	$a + (-a) = 0$	$a \times \frac{1}{a} = 1 \quad (a \neq 0)$

ذرا ياد ڪريون

ڪنهن بہ منطق عدد جو ڏهائي اڀپور روپ ختم ٿيندڙ يا ختم نہ ٿيندڙ ورائتو هوندو آهي.

ختم ٿيندڙ روپ

(1) $\frac{2}{5} = 0.4$

(2) $-\frac{7}{64} = -0.109375$

(3) $\frac{101}{8} = 12.625$

ختم نہ ٿيندڙ ورائتو روپ

(1) $\frac{17}{36} = 0.472222... = 0.47\dot{2}$

(2) $\frac{33}{26} = 1.2692307692307... = 1.2\overline{692307}$

(3) $\frac{56}{37} = 1.513513513... = 1.\overline{513}$

چاڪي وٺون

ختم نہ ٿيندڙ ورائتي ڏهائي اڀپور روپ واري منطق انگ کي $\frac{p}{q}$ روپ ۾ ڏيکارڻ

مثال (1) 0.777.... اهو ورائتو ڏهائي اڀپور $\frac{p}{q}$ روپ لکو.

حل : سمجهو $x = 0.777... = 0.\dot{7}$

$$\therefore\ 10x = 7.777... = 7.\dot{7}$$

$$\therefore\ 10x - x = 7.\dot{7} - 0.\dot{7}$$

$$\therefore\ 9x = 7$$

$$\therefore\ x = \frac{7}{9}$$

$$\therefore\ 0.777... = \frac{7}{9}$$

مثال (2) 7.529529529... ورائتو ڏهائي اڀپور $\frac{p}{q}$ روپ ۾ لکو

حل : سمجهو، $x = 7.529529... = 7.\overline{529}$

$$\therefore\ 1000x = 7529.529529... = 7529.\overline{529}$$

$$\therefore\ 1000x - x = 7529.\overline{529} - 7.\overline{529}$$

$$\therefore\ 999x = 7522.0 \qquad \therefore\ x = \frac{7522}{999}$$

$$\therefore\ 7.\overline{529} = \frac{7522}{999}$$

ويچار ڪريون

$2.4\dot{3}$ اهوعدد $\frac{p}{q}$ روپ ۾ لکڻ لاءِ ڇا ڪجي؟

ڌيان ۾رکو

(1) ڏنل عدد ۾ڏهائي پوائنٽ کانپوءِ ڪيترا انگ ورائتا آهن ان موجب 1000,100,10 وغيره مُناسب عدد سان ضرب ڪجي مثال 2.3 عدد ۾ هڪ انگ 3 ٿي ورائتو آهي. ان ڪري $2.\dot{3}$ کي $\frac{p}{q}$ روپ ۾ آڻڻ لاءِ 10 سان ضرب ڪجي. $1.\overline{24}$ ۾ 2,4 ٻئي انگ ورائتا آهن. ان ڪري $1.\overline{24}$ کي 100 ضرب ڪجي. $1.\overline{513}$ ۾ 3,1,5 ٽيئي انگ ورائتا آهن، انڪري $1.\overline{513}$ کي 1000 سان ضرب ڪجي.

(2) منطق انگ جا مفرد جُزا جاچيو. ان ۾ 2 ۽ 5 کانسواءِ مفرد جُزا نه هوندا اِن منطق انگ جو ڏهائي روپ ختم ٿيندڙ هوندو آهي. 2 ۽ 5 کانسواءِ به عدد جا مفرد جُزا هوندا ته ان عدد جو ڏهائي روپ ختم نه ٿيندڙ ورائتو هوندو آهي.

ايياس 2.1

1. هينين مان ڪهڙن منطق عددن جو ڏهائي روپ ختم ٿيندڙ ۽ ڪهڙن جو ختم نه ٿيندڙ ورائتو هوندو اهو لکو.

(i) $\frac{13}{5}$ (ii) $\frac{2}{11}$ (iii) $\frac{29}{16}$ (iv) $\frac{17}{125}$ (v) $\frac{11}{6}$

2. هينين منطق عددن جو ڏهائي روپ لکو.

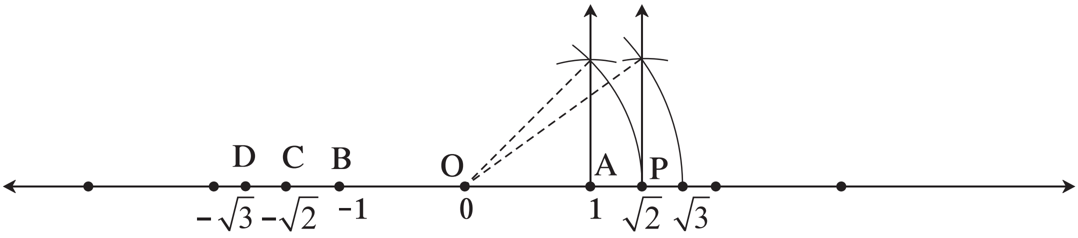
(i) $\frac{127}{200}$ (ii) $\frac{25}{99}$ (iii) $\frac{23}{7}$ (iv) $\frac{4}{5}$ (v) $\frac{17}{8}$

3. هينين منطق عددن کي $\frac{p}{q}$ روپ ۾ بدلايو.

(i) $0.\dot{6}$ (ii) $0.\overline{37}$ (iii) $3.\overline{17}$ (iv) $15.\overline{89}$ (v) $2.\overline{514}$

ذرا ياد ڪريون

هينين انگن واري ليڪ تي $\sqrt{2}$ ۽ $\sqrt{3}$ عدد منطق نه آهن يعني اهي غير منطق آهن.



ان عددن واري ليڪ تي OA =1 ايڪو مفاصلو آهي. O جي کاٻي پاسي B ٽٻڪو به هڪ ليڪ مفاصلي تي آهي. B ٽٻڪي جو مساوو 1- آهي P ٽٻڪي جو مساوو $\sqrt{2}$ آهي ۽ اُنجو اُبتڙ عدد C ٽٻڪي وسيلي ڏيکاريل آهي. C ٽٻڪي جو مساوو $-\sqrt{2}$ آهي. ساڳيءَ طرح $\sqrt{3}$ جو ابتڙ عدد ڏيکاريندڙ D ٽٻڪي جو مساوو $-\sqrt{3}$ آهي.

ڄاڻي وٺون

غير منطق عدد ۽ حقيقي عدد (Irrational and real numbers)

$\sqrt{2}$ اهو غيرمنطق عدد آهي اهو اڻ سڌي ثابتيءَ وسيلي ثابت ڪري سگهجي ٿو.

$\sqrt{2}$ سمجهو ته منطق عدد آهي سمجهو ته اهو $\frac{p}{q}$ آهي.

$\frac{p}{q}$ اِن عدد جو ننڍي ۾ ننڍيو روپ آهي يعني p ۽ q ۾ انڪاسواءِ عام جزو نه آهي.

$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ $\quad\therefore\quad 2 = \frac{P^2}{q^2}$ (ٻنهي پاسن جي ٻي سگهه)

$\therefore \quad 2q^2 = p^2$

$\therefore$ p^2 اهو ٻڌي عدد آهي.

$\therefore$ p پڻ ٻڌي عدد آهي ، يعني 2 ، p جو جُزو آهي. ....(I)

$\therefore$ $t \in I$ $\quad \therefore p^2 = 4t^2 \quad p = 2t$

$\therefore$ $q^2 = 2t^2$ $\therefore$ $2q^2 = 4t^2$ $(\because p^2 = 2q^2)$ $\therefore$

q^2 ٻڌي عدد آهي $\quad \therefore$ q پڻ ٻڌي عدد آهي.

$\therefore$ 2 ۽ q جو ٻه عدد هڪ جُزو آهي .... (II)

بيان I ۽ II مان 2 اهو p ۽ q جو عام جُزو آهي.

اها اڻبڻت آهي. ڇو ته $\frac{p}{q}$ ۾ p ۽ q جو 1 ڪانسواءِ ڪو ٻه عام جُزو نه آهي.

$\therefore$ $\sqrt{2}$ منطق عدد آهي اٿين سمجهڻ غلط آهي $\therefore$ $\sqrt{2}$ غيرمنطق عدد آهي.

ساڳئي طريقي $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ وغيره غير منطق عدد آهن. اهو ثابت ڪري سگهجي ٿو.

$\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ اهي عدد عددن واري ليڪ تي ڏيکاري سگهجي ٿو. اهو حقيقي عدد آهي اٿين چئجي ٿو.

ٿوري ۾ عددن واري ليڪ تي هرهڪ ٽٻڪي جو مساوو حقيقي عدد هوندو آهي ۽ هرهڪ حقيقي عدد سان واسطيدار ٽبڪو عددن واري ليڪ تي هوندو آهي.

اسان کي ڄاڻ آهي ته هرهڪ منطق عدد، حقيقي هوندو آهي. پر $\sqrt{3}$, $\sqrt{2}$, π, $3 + \sqrt{2} - \sqrt{2}$ اهڙا حقيقي عدد منطق نه آهن. يعني هرهڪ حقيقي عدد منطق نه هوندو آهي اهو سمجهو.

غير منطق عدد جي ڪي ڏهائي روپ ۾ لکڻ

اسين 2 ۽ 3 جا پيا مول ونڊ واري طريقي لهنداسين

2 جو پيو مول

```
             1.732....
      1 \ 3. 00 00 00 00 ....
     +1 \-1
     27  \ 200
     +7  \-189
    343   \ 1100
    + 3   \-1029
   3462    \007100
   +  2    \  -6924
   3464     \ 0176
```

$\therefore \sqrt{2} = 1.41421...$

3 جو پيو مول

```
              1.41421...
      1 \ 2. 00 00 00 00 ....
     +1 \-1
     24  \100
     +4  \-96
    281   \ 400
    + 1   \-281
   2824    \ 11900
   +  4    \-11296
  28282     \  60400
  +    2    \ - 56564
  282841     \ 0383600
```

$\therefore \sqrt{3} = 1.732...$

هتي ونڊ ۾ ڏهائي ۽ کانپوءِ انگ ختم نٿا ٿين يعني اهو ختم نہ ٿيندڙ روُپ آهي پيو تہ ڪوبہ انگ يا انگن جو گروهہ وري وري نٿو اچي. عدد جو ڏهائي ۽ روُپ ختم نہ ٿيندڙ غيرواراٿتو آهي.

$\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ غير منطق عدد آهن. يعني 1.4142... ۽ 1.732 ... پڻ غير منطقن عدد آهن.

ان مان سمجهو تہ ختم نہ ٿيندڙ غيرواراٿتي ڏهائي روُپ وارو عدد غير منطق هوندو آهي.

عدد π

مشغولي I

ٿلهن ڪارڊ بورڊس تي الڳہ الڳہ نيم قطروارا گول ڪٽيو، ٿي چار گولاڪار تختيون ڪپيو هرهڪ تختي ۽ جي ڪناري تي ڌاڳو گهمائي انجو قطر ۽ گهيرو ماپيو هيٺيون خاڪو پورو ڪريو.

نمبر	نيم قطر	قطر (d)	گهيرو (c)	ريشو $= \frac{c}{d}$
1	7 س م			
2	8 س م			
3	5.5 س م			

پر واري خاڪي ۾ $\frac{c}{d}$ ريشو هر وقت اٽڪل 3.1 اچي ٿو. يعني اهو استر آهي. اهو ريشو π وسيلي ڏيکارجي ٿو.

مشغولي II

π جي اندازن ملهه لهڻ لاءِ 11 س م، 22 س م ۽ 33 س م ڊيگهه وارا تارجا ٽڪرڪٽيو. هرهڪ تار جو گول ٺاهيو. اُنهن گولن جا قطر ماپي هيٺيون خاڪو پورو ڪريو.

گول - نمبر	گهيرو	قطر	گهيري ۽ قطر جو ريشو
1	11 س م		
2	22 س م		
3	33 س م		

گهيري ۽ قطر جو ريشو اهو اٽڪل $\frac{22}{7}$ آيو ڇا، اهو جاچيو.

گول جي گهيري ۽ قطر جو ريشو، مقرر عدد هوندو آهي ۽ اهو غير منطق هوندو آهي. اهو عدد π وسيلي ڏيکاربو آهي π جو اٽڪل ملهه $\frac{22}{7}$ يا 3.1428 ڪڍبو آهي.

مهان ڀارتي حسابدان آريہ ڀٽ سن 499 ۾ π جو ملهه $= 3.1416 \; \frac{62832}{20000}$ لڌو.

اسان کي ڄاڻ آهي تہ $\sqrt{3}$ غير منطق عدد آهي ڇو تہ انجو ڏهائي روپ ختم نہ ٿيندڙ غير وارائتو آهي.

هاڻي $\sqrt{3} + 2$ اهو عدد غير منطق آهي ڇا؟ اهو ڏسون.

سمجهو تہ، $\sqrt{3} + 2$ اهو غير منطق عدد نہ آهي يعني اهو منطق آهي.

جيڪڏهن $\sqrt{3} + 2$ منطق آهي تہ سمجهو $2 + \sqrt{3} = \frac{p}{q}$

$$\therefore \; \sqrt{3} = \frac{p}{q} - 2$$

هتي کاٻي پاسي غير منطق عدد ۽ ساڄي پاسي منطق عدد اهڙي اٽبٽت آهي. ان مان ثابت ٿئي ٿو تہ $2 + \sqrt{3}$ غير منطق عدد آهي.

ساڳئي نموني $2\sqrt{3}$ پڻ غير منطق آهي اهو ڏيکاري سگهجي ٿو الڳہ الڳہ عدد کڻي هيٺيون ڳالهيون جاچي ڏسو.

$(3 + \sqrt{5}) - (\sqrt{5}) = 3,\quad 4\sqrt{5} \div \sqrt{5} = 4,\quad 2 + \sqrt{3} + (-\sqrt{3}) = 2,$

$2\sqrt{5} - \sqrt{5} = \sqrt{5},\quad \sqrt{2} \times \sqrt{5} = \sqrt{10},\quad 2\sqrt{3} \times \sqrt{3} = 6$

هي ڌيان ۾ رکو

غير منطق جون خاصيتون

(1) منطق عدد ۽ غير منطق عدد جي جوڙاپت يا ڪٽ غير منطق عدد هوندو آهي.

(2) غير ٻڙڙي منطق عدد ۽ غير منطق عدد جي ضرب اپت يا ونڊاپت پڻ غير منطق عدد هوندو آهي.

(3) ٻن غير منطق عددن جي جوڙاپت، ڪٽ،، ضرب اپت ۽ ونڊاپت منطق يا غير منطق عدد ٿي سگهي ٿو.

جاڻي وٺون

حقيقي عددن تي سلسلي لاڳاپي جون خاصيتون

1. جيڪڏهن a ۽ b ٻه حقيقي عدد آهن ته انهن ۾ b=a يا a < b يا b < a مان ڪو ٻه هڪ لاڳاپو هوندو آهي.

2. جيڪڏهن $a < b$ ته $b < c$ $a < c$

3. جيڪڏهن $a < b$ ته $a + c < b + c$

4. جيڪڏهن a < b ۽ c > o ته ac < bc ۽ جيڪڏهن c < o ته ac > bc

منطق ۽ غيرمنطق عدد ڪٽي مٿيان نيم جاچي ڏسو.

(ڪاٽو عدد جو ٻيو مول)

جيڪڏهن $b^2 = a$ ته $\sqrt{a} = b$ اها اسانکي ڄاڻ آهي.

ان مان چئي سگهبو ته $x = \sqrt{5}$ جيڪڏهن $x^2 = 5$

اسانکي اها به ڄاڻ آهي ته ڪنهن به حقيقي عدد جي ٻي سگهه هميشه واڌو عدد هوندو آهي. يعني ڪنهن به حقيقي عدد جي ٻي سگهه ڪاٽو نه هوندي آهي پر $\sqrt{-5}$ ∴ $(\sqrt{-5})^2 = -5$ اهو حقيقي عدد نه آهي.

يعني ڪاٽو حقيقي عدد جو ٻيو مول حقيقي عدد نه هوندو آهي.

اڀياس 2.2

(1) ثابت ڪريو ته $4\sqrt{2}$ غير منطق عدد آهي.

(2) ثابت ڪريو ته $\sqrt{5} + 3$ غيرمنطق عدد آهي.

(3) $\sqrt{10}$, $\sqrt{5}$ عددن واري ليڪ تي ڏيکاريو.

(4) هيٺين عددن جي درميان ڪي به ٽي منطق عدد لکو.

(i) 0.3 ۽ −0.5 (ii) −2.3 ۽ −2.33

(iii) 5.2 ۽ 5.3 (iv) −4.5 ۽ −4.6

جاڻي وٺون

واڌو منطق عدد جو مول (Root of positive rational number)

جيڪڏهن $x^2 = 2$ ته $x = \sqrt{2}$ يا $x = -\sqrt{2}$ ، هوندو. $\sqrt{2}$ يا $-\sqrt{2}$ غيرمنطق عدد آهن اها اسانکي ڄاڻ آهي. $\sqrt[4]{8}$, $\sqrt[3]{7}$ ، اهڙا عدد به غير منطق هوندا آهن.

واڌو سڄو انگي عدد ۽ $x^n = a$ ته x اهو a جو nمول آهي ائين چئبو اهو مول منطق يا غير منطق هوندو آهي.

مثال ∴ $2^5 = 32$ اهو 2 اهو 32 جو 5 مول ، منطق اهي پر $x = \sqrt[5]{2}$ ته $x^5 = 2$ اهو غيرمنطق عدد آهي.

غير ناطق(Surds)

اسانکي چاڻ آهي تہ 5 منطق عدد آهي پر $\sqrt{5}$ منطق نہ آهي. جيئن حقيقي عدد جو ٻيون عمل يان ٽيون مول منطق يا غيرمنطق ٿي سگهي ٿو. تيئن n مُول بہ منطق يا غير منطق ٿي سگهي ٿو.

جيڪڏهن n کان 1 وڏو سچو انگي عدد آهي ۽ a واڌوُ حقيقي عدد جو n مُول x سان ڏيکاريو تہ a = x^n يا $\sqrt[n]{a} = x$ منطق عدد هوندو ۽ a جو nمول يعني x اهو غير منطق هوندو تہ x کي غيرناطق (غيرمنطق مول) چئبو آهي.

$\sqrt[n]{a}$ غير ناطق ۾ n کي مول جي نشاني (radical sign) چئجي ٿو. n کي غيرناطق جي سگهہ (order of the surd) ۽ a کي مولچندڙ عدد (radicand) چئجي ٿو.

(1) سمجھو تہ $\sqrt[3]{7}$ تہ $a = 7, n = 3,$ غيرناطق آهي ڇو تہ $\sqrt[3]{7}$ غيرمنطق آهي.

(2) سمجھو تہ $a = 27$ $n = 3$ $\sqrt[3]{27} = 3$ کھڙي عدد جو ععب آهي. $\sqrt[3]{27}$

(3) $\sqrt[3]{8}$ جو ععب آهي؟

سمجھو تہ $\sqrt[3]{8} = p$ $p^3 = 8$. کھڙي عدد جو ععب آهي.

2 , 8 جو ععب آهي.

$\sqrt[3]{8}$ ۾ $a = 8$ منطق عدد آهي. $n = 3$ واڌو سچو انگي عدد آهي پر $\sqrt[3]{8}$ غيرمنطق هاڻي ڇو تہ 8 جو ٽيون مول 2 آهي $\sqrt[3]{8}$ $\therefore$ غيرناطق نہ آهي

4) هاڻي $\sqrt[4]{8}$ بابت ويچار ڪريون.

هتي a=8، سگهہ a=4 ، پر 8 ڪنهن بہ عدد جي چو ٿي سگهہ نہ آهي.

$\sqrt[4]{8}$ غيرمنطق عدد آهي. $\sqrt[4]{8}$ $\therefore$ غيرناطق آهي.

هن سال اسان فقط سگهہ 2 هوندڙ غيرناطق $\sqrt{42}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{3}$ وغيره بابت سکنداسين. سگهہ 2 هوندڙ غيرناطقن کي پسگهي غيرناطق چئجي ٿو.

غيرناطق جو سادو روُپ

ڪن غيرناطقن کي سادو روُپ ڏيئي سگهجي ٿو جيئن

(i) $\sqrt{48} = \sqrt{16 \times 3} = \sqrt{16} \times \sqrt{3} = 4\sqrt{3}$

(ii) $\sqrt{98} = \sqrt{49 \times 2} = \sqrt{49} \times \sqrt{2} = 7\sqrt{2}$

$\sqrt{5}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{2}$... وغيره سادي روپ وارا غيرناطق آهن. انُهن کي وڌيڪ سادو روُپ نٿو ڏيئي سگهجي.

هڪجھڙا غيرناطق (Similar or like surds)

$\sqrt{2}$, $-3\sqrt{2}$, $\frac{4}{5}\sqrt{2}$ اهي ڪجھ هڪجھڙا غيرناطق آهن. جيڪڏهن p ۽ q منطق عدد آهن تہ $p\sqrt{a}$, $q\sqrt{a}$ کي هڪجھڙا غيرناطق چئجي ٿو. بہ غيرناطق هڪجھڙا ٿيڻ لاءِ سندن سگهہ ۽ مولچندڙ ساڳيا هئڻ گھرجن.

$\sqrt{80}$ ۽ $\sqrt{45}$ غير ناطقن جي سگهه 2 آهي يعني سندن سگهه ساڳي آهي پر سندس مولجندڙ عدد ساڳيا نه آهن انڪري اهي هڪجهڙا نه آهن ائين مڃي ٿو. انهن کي اسين سادي روپ ۾ بدلايون.

$\sqrt{80} = \sqrt{16\times5} = \sqrt{16} \times \sqrt{5} = 4\sqrt{5}$ ۽ $\sqrt{45} = \sqrt{9\times5} = \sqrt{9} \times \sqrt{5} = 3\sqrt{5}$

$3\sqrt{5}$ ۽ $4\sqrt{5}$ هڪجهڙا غير ناطق آهن.

$\sqrt{80}$ ۽ $\sqrt{45}$ انهن غير ناطقن جا سادا روپ هڪجهڙا غير ناطق آهن.

ڌيان ۾ رکو

سادي روپ ۾ غير ناطقن جي سگهه ۽ مولجندڙ عدد ساڳيا ٿيندا هجن ته انهن غير ناطقن کي هڪجهڙا غير ناطق چئجي ٿو.

چاڪي وٺون

(غير ناطقن جي ڀيٽ)(Comparison of surds)

سمجهو ته a, b, k واڌو حقيقي عدد آهن. جيڪڏهن

$a<b$ ته $ak<bk$ ساڳئي نموني $\therefore a^2<ab<b^2$ ممڪن آهي.

جيڪڏهن $a^2<b^2$ ته $a<b$ چو ته

جيڪڏهن $a^2<b^2$ ته $a=b, a>b$ ۽ $a<b$ هئڻ سبب اهو ممڪن نه آهي.

$a=b$ ته $a^2=b^2$, $a>b$ ته $a^2>b^2$ اهو ئي ممڪن آهي.

$\therefore a<b$ ته $a^2<b^2$ جيڪڏهن $a<b$

هتي a ۽ b حقيقي عدد هئڻ سبب اهي منطق يا غير ناطق ٿي سگهن ٿا.

انجو اُپيوگ ڪري غير ناطقن ۾ ننڍو وڏائي جاچيندا اسين.

(i) $6\sqrt{2}, 5\sqrt{5}$

$\sqrt{36}\times\sqrt{2}$ [?] $\sqrt{25}\times\sqrt{5}$

$\sqrt{72}$ [?] $\sqrt{125}$

72 [<] 125

$\therefore 6\sqrt{2}$ [<] $5\sqrt{5}$

$(6\sqrt{2})^2$ [ ] $(5\sqrt{5})^2$,

$72 < 125$

$\therefore 6\sqrt{2}$ [<] $5\sqrt{5}$

(ii) $8\sqrt{3}, \sqrt{192}$

$\sqrt{64}\times\sqrt{3}$ [?] $\sqrt{192}$

$\sqrt{192}$ [?] $\sqrt{192}$

192 [=] 192

$\therefore \sqrt{192}$ [=] $\sqrt{192}$

$\therefore 8\sqrt{3}$ [=] $\sqrt{192}$

(iii) $7\sqrt{2}, 5\sqrt{3}$

$\sqrt{49}\times\sqrt{2}$ [?] $\sqrt{25}\times\sqrt{3}$

$\sqrt{98}$ [?] $\sqrt{75}$

98 [>] 75

$\therefore 7\sqrt{2}$ [>] $5\sqrt{3}$

$(7\sqrt{2})^2$ [ ] $(5\sqrt{3})^2$,

$98 > 75$

$\therefore 7\sqrt{2}$ [>] $5\sqrt{3}$

هڪجهڙن غيرناطقن تي ڪاروايون (Operations on like surds)

هڪجهڙن غيرناطقن تي جوڙ ڪٽ. ضرب ۽ ونڊ اهي ڪاروايون ڪري سگهجن ٿيون.

$\sqrt{9+16} \stackrel{?}{=} \sqrt{9}+\sqrt{16}$

$\sqrt{100+36} \stackrel{?}{=} \sqrt{100}+\sqrt{36}$

مثال (1) ساهڙو روپ ڏيو: $7\sqrt{3} + 29\sqrt{3}$

حل : $7\sqrt{3} + 29\sqrt{3} = (7 + 29)\sqrt{3} = 36\sqrt{3}$

مثال (2) ساهڙو روپ ڏيو : $7\sqrt{3} - 29\sqrt{3}$

حل : $7\sqrt{3} - 29\sqrt{3} = (7 - 29)\sqrt{3} = -22\sqrt{3}$

مثال (3) سادو روپ ڏيو: $13\sqrt{8} + \frac{1}{2}\sqrt{8} - 5\sqrt{8}$

حل : $13\sqrt{8} + \frac{1}{2}\sqrt{8} - 5\sqrt{8} = \left(13 + \frac{1}{2} - 5\right)\sqrt{8} = \left(\frac{26+1-10}{2}\right)\sqrt{8}$

$= \frac{17}{2}\sqrt{8} = \frac{17}{2}\sqrt{4\times2}$

$= \frac{17}{2} \times 2\sqrt{2} = 17\sqrt{2}$

مثال (4) سادو روپ ڏيو : $8\sqrt{5} + \sqrt{20} - \sqrt{125}$

حل : $8\sqrt{5} + \sqrt{20} - \sqrt{125} = 8\sqrt{5} + \sqrt{4\times5} - \sqrt{25\times5}$

$= 8\sqrt{5} + 2\sqrt{5} - 5\sqrt{5}$

$= (8 + 2 - 5)\sqrt{5}$

$= 5\sqrt{5}$

مثال (5) غيرناطقن جي ضرب ڪريو : $\sqrt{7} \times \sqrt{42}$

حل : $\sqrt{7} \times \sqrt{42} = \sqrt{7\times42} = \sqrt{7\times7\times6} = 7\sqrt{6}$ ($7\sqrt{6}$ غيرمنطق عدد آهي)

مثال (6) غيرناطقن جي ونڊ ڪريو : $\sqrt{125} \div \sqrt{5}$ (5 منطق عدد آهي)

حل : $\frac{\sqrt{125}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{125}{5}} = \sqrt{25} = 5$

مثال (7) $\sqrt{50} \times \sqrt{18} = \sqrt{25\times2} \times \sqrt{9\times2} = 5\sqrt{2} \times 3\sqrt{2} = 15 \times 2 = 30$

ٻن غيرناطقن جي ونڊ اپت يا ضرب منطق عدد ٿي سگهي ٿو اهو مٿين مثالن مان سمجهو.

غيرناطقن جو منطقي ڪرڻ (Rationalization of surd)

ٻن غيرناطقن جي ضرب اُپت منطق عدد هوندي تہ انُهن مان هڪ غيرناطق کي ٻئي غيرناطق جو منطقي ڪندڙ (Rationalizing Factor) چئجي ٿو.

مثال (1) $\sqrt{2}$ غيرناطقن کي $\sqrt{2}$ سان ضربڻ سان $\sqrt{4} = \sqrt{2\times 2}$ يعني ملي ٿو $2 = \sqrt{4}$ اهو منطق عدد آهي.

$\therefore$ $\sqrt{2}$ جو منطقي ڪندڙ جُزو $\sqrt{2}$ آهي.

مثال (2) $\sqrt{8} \times \sqrt{2}$ ضرب ڪريو

$$\sqrt{2} \times \sqrt{8} = \sqrt{16} = 4$$ (4 منطق عدد آهي)

$\therefore$ $\sqrt{2}$ جو $\sqrt{8}$ جو منطقي ڪندڙ جُزو آهي.

$8\sqrt{2}$ جو $\sqrt{2}$ منطقي ڪندڙ جُزو آهي.

چو تہ $\sqrt{2} \times 8\sqrt{2} = 8\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 8 \times 2 = 16.$

$\sqrt{2}$ اهي $\sqrt{50}$ $\sqrt{16}$, $\sqrt{6}$ جا منطقي ڪندڙ جُزا آهن ڇا اهو جاچيو.

ڌيان ڏيو تہ

ڏنل غيرناطق جو منطقي ڪندڙ جُزو اڪيلو نہ هوندو آهي. ڪو غيرناطق ڏنل غيرناطق جو منطقي ڪندڙ جُزو هوندو تہ انُکي غير ٻڙي منطق عدد سان ضرب ڪري ملندڙ غيرناطق بہ ڏنل غيرناطق جو منطقي ڪندڙ جُزو هوندو آهي.

مثال (3) $\sqrt{27}$ جو منطقي ڪندڙ جُزو لکو

حل : $\sqrt{27} = \sqrt{9\times 3} = 3\sqrt{3}$ 9 منطق عدد آهي $\therefore 3\sqrt{3} \times \sqrt{3} = 3 \times 3 = 9$

$\therefore$ $\sqrt{27}$ جو $\sqrt{3}$ جو منطقي ڪندڙ جُزو آهي.

ڌيان ڏيو تہ ، $\sqrt{27} = 3\sqrt{3}$ $\quad 3\sqrt{3} \times 3\sqrt{3} = 9 \times 3 = 27.$

يعني ڏنل غيرناطق $\sqrt{27}$ جو $3\sqrt{3}$ پڻ منطقي ڪندڙ جُزو آهي. ان ڪانسواءِ $7\sqrt{3}$, $4\sqrt{3}$ وغيرهہ ٻيا بہ انيڪ جُزا ملندا. انهن مان $\sqrt{3}$ سادي روُپ وارو منطقي ڪندڙ جُزو آهي.

مثال (4) $\frac{1}{\sqrt{5}}$ جي ڇيد کي منطق بڻايو.

حل : $\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$ .... انس ۽ ڇيد کي $\sqrt{5}$ سان ضرب ڪرڻا

مثال (5) $\frac{3}{2\sqrt{7}}$ جي ڇيد کي منطق بڻايو.

حل : $\frac{3}{2\sqrt{7}} = \frac{3}{2\sqrt{7}} \times \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}} = \frac{3\sqrt{7}}{2\times 7} = \frac{3\sqrt{7}}{14}$ ($2\sqrt{7}$ کي $\sqrt{7}$ سان ضربڻ ڪافي آهي)

ڌيان ۾ رکو

ڇيد کي منطق بڻائڻ لاءِ منطقي ڪندڙ جُزو لهڻ جو اپيوگ ٿيندو آهي. ڪنهن به عدد جو ڇيد منطق عدد هئڻ سهوليت پريو هوندو اهي. انڪري ڇيد کي منطق بڻائبو آهي

اڀياس 2.3

(1) هيٺين غيرناطقن جي سگهه ٻڌايو

(i) $\sqrt[3]{7}$ (ii) $5\sqrt{12}$ (iii) $\sqrt[4]{10}$ (iv) $\sqrt{39}$ (v) $\sqrt[3]{18}$

(2) هيٺين مان ڪهڙا عدد غير ناطق آهن

(i) $\sqrt[3]{51}$ (ii) $\sqrt[4]{16}$ (iii) $\sqrt[5]{81}$ (iv) $\sqrt{256}$ (v) $\sqrt[3]{64}$ (vi) $\sqrt{\frac{22}{7}}$

(3) هيٺين غيرناطقن جي جوڙن مان ڪهڙا هڪجهڙا ۽ ڪهڙا علحدا آهن اهو سڃاڻو.

(i) $\sqrt{52}\,,\ 5\sqrt{13}$ (ii) $\sqrt{68}\,,\ 5\sqrt{3}$ (iii) $4\sqrt{18}\,,\ 7\sqrt{2}$

(iv) $19\sqrt{12}\,,\ 6\sqrt{3}$ (v) $5\sqrt{22}\,,\ 7\sqrt{33}$ (vi) $5\sqrt{5}\,,\ \sqrt{75}$

(4) هيٺين غيرناطقن کي سادي روپ ۾ بدلايو.

(i) $\sqrt{27}$ (ii) $\sqrt{50}$ (iii) $\sqrt{250}$ (iv) $\sqrt{112}$ (v) $\sqrt{168}$

(5) هيٺين عددن ۾ ننڍ وڏائي طيءِ ڪريو

(i) $7\sqrt{2}\,,\ 5\sqrt{3}$ (ii) $\sqrt{247}\,,\ \sqrt{274}$ (iii) $2\sqrt{7}\,,\ \sqrt{28}$

(iv) $5\sqrt{5}\,,\ 7\sqrt{2}$ (v) $4\sqrt{42}\,,\ 9\sqrt{2}$ (vi) $5\sqrt{3}\,,\ 9$ (vii) $7,\ 2\sqrt{5}$

(6) سادي صورت ۾ آڻيو.

(i) $5\sqrt{3} + 8\sqrt{3}$ (ii) $9\sqrt{5} - 4\sqrt{5} + \sqrt{125}$

(iii) $7\sqrt{48} - \sqrt{27} - \sqrt{3}$ (iv) $\sqrt{7} - \frac{3}{5}\sqrt{7} + 2\sqrt{7}$

(7) ضرب ڪري سادي صورت ۾ لکو

(i) $3\sqrt{12} \times \sqrt{18}$ (ii) $3\sqrt{12} \times 7\sqrt{15}$

(iii) $3\sqrt{8} \times \sqrt{5}$ (iv) $5\sqrt{8} \times 2\sqrt{8}$

(8) ونڊ ڪري سادي صورت ۾ لکو

(i) $\sqrt{98} \div \sqrt{2}$ (ii) $\sqrt{125} \div \sqrt{50}$ (iii) $\sqrt{54} \div \sqrt{27}$ (iv) $\sqrt{310} \div \sqrt{5}$

(9) ڇيد جو منطق بڻايو

(i) $\frac{3}{\sqrt{5}}$ (ii) $\frac{1}{\sqrt{14}}$ (iii) $\frac{5}{\sqrt{7}}$ (iv) $\frac{6}{9\sqrt{3}}$ (v) $\frac{11}{\sqrt{3}}$

ذرا ياد ڪريو

اسانکي ڄاڻ آهي تہ

$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$ تہ $a > 0, b > 0$ جيڪڏهن

$\sqrt{a^2} = a$; $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$; $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

ضرب ڪريو

مثال (1) $\sqrt{2}\,(\sqrt{8} + \sqrt{18})$

$$= \sqrt{2\times 8} + \sqrt{2\times 18}$$
$$= \sqrt{16} + \sqrt{36}$$
$$= 4 + 6$$
$$= 10$$

مثال (2) $(\sqrt{3} - \sqrt{2})(2\sqrt{3} - 3\sqrt{2})$

$$= \sqrt{3}\left(2\sqrt{3} - 3\sqrt{2}\right) - \sqrt{2}\left(2\sqrt{3} - 3\sqrt{2}\right)$$
$$= \sqrt{3}\times 2\sqrt{3} - \sqrt{3}\times 3\sqrt{2} - \sqrt{2}\times 2\sqrt{3} + \sqrt{2}\times 3\sqrt{2}$$
$$= 2\times 3 - 3\sqrt{6} - 2\sqrt{6} + 3\times 2$$
$$= 6 - 5\sqrt{6} + 6$$
$$= 12 - 5\sqrt{6}$$

ڄاڻي وٺون

ٻپدو ٻپسگهي غيرناطق (Binomial quadratic surd)

- $\frac{3}{4} + \sqrt{5}$; $\sqrt{5} + \sqrt{3}$ اهي ٻپدا ٻسگهي غيرناطق آهن ۽ $\frac{3}{4} - \sqrt{5}$; $\sqrt{5} - \sqrt{3}$ پڻ ٻپدا ٻسگهي غيرناطق آهن.

هيٺيان ضرب جا مثال ڏسو

- $(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = (\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b})^2 = a - b$
- $(\sqrt{5} + \sqrt{3})(\sqrt{5} - \sqrt{3}) = (\sqrt{5})^2 - (\sqrt{3})^2 = 5 - 3 = 2$
- $(\sqrt{3} + \sqrt{7})(\sqrt{3} - \sqrt{7}) = (\sqrt{3})^2 - (\sqrt{7})^2 = 3 - 7 = -4$
- $(\frac{3}{2} + \sqrt{5})(\frac{3}{2} - \sqrt{5}) = (\frac{3}{2})^2 - (\sqrt{5})^2 = \frac{9}{4} - 5 = \frac{9-20}{4} = -\frac{11}{4}$

$(\sqrt{5} + \sqrt{3})$ ۽ $(\sqrt{5} - \sqrt{3})$ اهي ٻپدي غير ناطقن جا ضرب اُبتڙ جوڙا آهن اهڙن ٻپدي غيرناطق جي جوڙي کي سنجوڳي جوڙو چئجي ٿو. ٻپدو غيرناطق ۽ سندس سنجوڳي جوڙو آهي.

هڪ ٻئي جا منطقي ڪندڙ جُزا هوندا آهن.

$\sqrt{5} - \sqrt{3}$ يا $\sqrt{5} - \sqrt{3}$ انهن مان هرهڪ ٻپدو غيرناطق $\sqrt{5} + \sqrt{3}$ يا غيرناطق جو سنجوڳي جوڙو آهي.

ساڳئي نموني $\sqrt{3} + 7$ جو سنجوڳي جوڙو $\sqrt{3} - 7$ آهي.

ڌيان ۾ رکو

ٻپدي غيرناطقن جي سنجوڳي جي ضرب اپت هميشهہ منطق عدد ايندو آهي.

چاڪي وٺون

چيد جو منطقي ڪرڻ (Rationalization of the denominator)

سنجوڳي ٻپدن غيرناطقن جي ضرب اپت منطق هوندي آهي انهيءَ خاصيت جو اُپيوگہ ڪري، عددن جي ٻپدي غيرناطق چيدڪي منطق بڻائي سگهجي ٿو.

مثال (1) $\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$ عدد جو چيد منطق بڻايو

حل : $\sqrt{5}-\sqrt{3}$ ان ٻپدي غير ناطق جو سنجوڳي جوڙو $\sqrt{5}+\sqrt{3}$ آهي

$$\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{3})^2}=\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{5-3}=\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2}$$

مثال (2) $\frac{8}{3\sqrt{2}+\sqrt{5}}$ عدد جو چيد منطق بڻايو

حل : $3\sqrt{2}+\sqrt{5}$ ان ٻپدي غير ناطق جو سنجوڳي جوڙو $3\sqrt{2}-\sqrt{5}$ آهي

$$\frac{8}{3\sqrt{2}+\sqrt{5}}=\frac{8}{3\sqrt{2}+\sqrt{5}}\times\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{5}}{3\sqrt{2}-\sqrt{5}}$$

$$=\frac{8\left(3\sqrt{2}-\sqrt{5}\right)}{\left(3\sqrt{2}\right)^2-\left(\sqrt{5}\right)^2}$$

$$=\frac{8\times3\sqrt{2}-8\sqrt{5}}{9\times2-5}=\frac{24\sqrt{2}-8\sqrt{5}}{18-5}=\frac{24\sqrt{2}-8\sqrt{5}}{13}$$

اڀياس 2.4

(1) ضرب ڪريو

(i) $\sqrt{3}(\sqrt{7}-\sqrt{3})$ (ii) $(\sqrt{5}-\sqrt{7})\sqrt{2}$ (iii) $(3\sqrt{2}-\sqrt{3})(4\sqrt{3}-\sqrt{2})$

(2) هيٺين عددن جي چيدن کي منطق بڻايو.

(i) $\frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{2}}$ (ii) $\frac{3}{2\sqrt{5}-3\sqrt{2}}$ (iii) $\frac{4}{7+4\sqrt{3}}$ (iv) $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$

چاڱي وٽون

سُتنتر مُلهہ (Absolute value)

xجيڪڏهن x هڪ حقيقي عدد آهي تہ x جو سُتنتر ملهہ يا عددن واري ليڪ تي r ڪان o انجو مفاصلو $|x|$ ائين لکبو آهي ۽ انکي 'x' جو سُتنتر ملهہ' (Absolute Value) ائين پڙهبو آهي.
سُتنتر ملهہ جي وصف هيٺين ۽ ريت ڪبي آهي.

جيڪڏهن $x > 0$ تہ $|x| = x$ (جيڪڏهن xواڌو آهي تہ xجو سُتنتر ملهہ x هوندو آهي)

جيڪڏهن $x = 0$ تہ $|x| = 0$ (جيڪڏهن x ٻڙي آهي تہ x جو سنتنر ملهہ x ٻڙي هوندو آهي)

جيڪڏهن $x < 0$ تہ $|x| = -x$ (جيڪڏهن x ڪاٽو آهي تہ x جو سنتنر ملهہ x اُن جي اُبتر عدد جيترو هوندو)

مثال (1) $|0| = 0$ $\quad |-3| = -(-3) = 3$ $\quad |3| = 3$

ڪنهن بہ حقيقي عدد جو سنتنر ملهہ ڪاٽو نہ هوندو آهي

مثال (2) هيٺين جا ملهہ لهو

(i) $|9-5| = |4| = 4$ $\quad$ (ii) $|8-13| = |-5| = 5$

(iii) $|8|-|-3| = 5$ $\quad$ (iv) $|8|\times|4| = 8 \times 4 = 32$

مثال (3) حل ڪريو: $|x-5| = 2$

$\therefore\ x - 5 = +2$ يا $x - 5 = -2$ ڇاڪاڻ

$\therefore\ x = 2 + 5$ يا $x = -2+5$

$\therefore\ x = 3$ يا $x = 7$

اڀياس 2.5

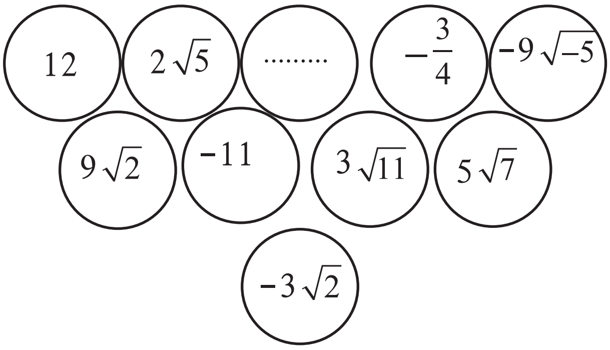
(1) ملهہ لهو

i) $|15 - 2|$ $\quad$ (ii) $|4 - 9|$ $\quad$ (iii) $|7|\times|-4|$

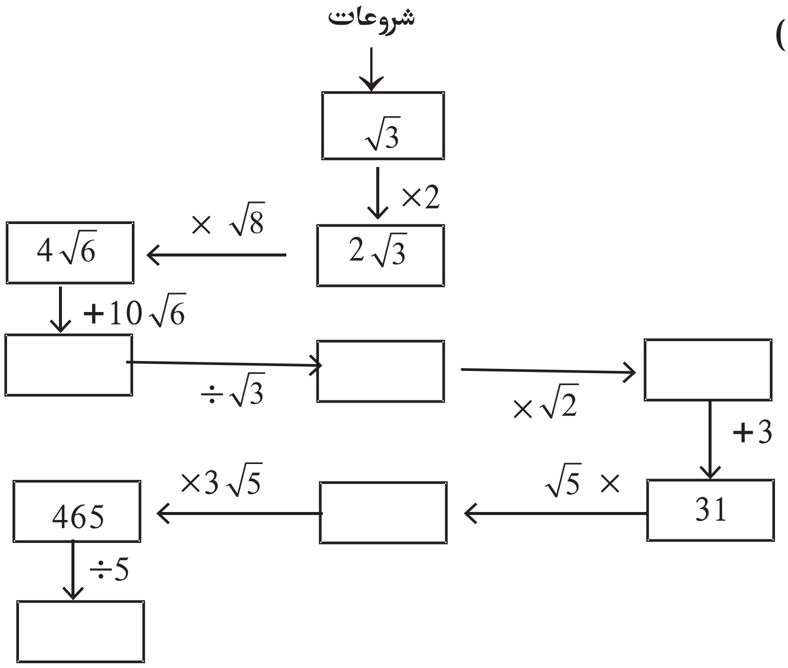
(2) حل ڪريو:

(i) $|3x-5| = 1$ $\quad$ (ii) $|7-2x| = 5$ $\quad$ (iii) $\left|\frac{8-x}{2}\right| = 5$ $\quad$ (iv) $\left|5+\frac{x}{4}\right| = 5$

مشغولي (I) : پروان ڪارڊن تي ڪجهه حقيقي عدد ڏنل آهن. اُنهن کي ڪم آڻي جوڙ ڪٽ، ضرب ۽ ونڊ جا ٻه ٻه مثال ڳاهيو ۽ حل ڪريو.



مشغولي (II)



گڏيل اڀياس 2

(1) هيٺين سوالن جا مناسب جواب چونڊيو

(i) هيٺين مان غير منطق عدد ڪهڙو آهي؟

(A) $\sqrt{\frac{16}{25}}$ (B) $\sqrt{5}$ (C) $\frac{3}{9}$ (D) $\sqrt{196}$

(ii) هيٺين مان غير منطق عدد ڪهڙو آهي؟

(A) 0.17 (B) $1.\overline{513}$ (C) $0.27\overline{46}$ (D) 0.101001000.....

(iii) هيٺين مان ڪهڙي عدد جو ڏهائي رُوپ ختم نه ٿيندڙ وارائتو ٿيندو؟

(A) $\frac{2}{5}$ (B) $\frac{3}{16}$ (C) $\frac{3}{11}$ (D) $\frac{137}{25}$

(iv) عددن واري ليڪ تي هرهڪ ٽپڪو ڇا ڏيکاريندو آهي؟

(A) قدرتي عدد (B) غير منطق عدد (C) منطق عدد (D) حقيقي عدد

(v) $0.\dot{4}$ عدد جو منطق روپ ڪهڙو آهي؟

(A) $\frac{4}{9}$ (B) $\frac{40}{9}$ (C) $\frac{3.6}{9}$ (D) $\frac{36}{9}$

(vi) جيڪڏهن n پوريءَ سگهه وارو عدد نہ آهي تہ $\sqrt{n}$ هينين مان ڪهڙو عدد هوندو؟

(A) قدرتي عدد (B) منطق عدد

(C) غيرمنطق عدد (D) A, B, C ٽيئي جواب ممڪن آهن

(vii) هينين مان ڪهڙو عدد غيرناطق نہ آهي؟

(A) $\sqrt{7}$ (B) $\sqrt[3]{17}$ (C) $\sqrt[3]{64}$ (D) $\sqrt{193}$

(viii) $\sqrt[3]{\sqrt{5}}$ غيرناطق جي سگهه ڪهڙي آهي؟

(A) 3 (B) 2 (C) 6 (D) 5

(ix) $2\sqrt{5}+\sqrt{3}$ ٻيڊي غيرناطق جو سنجوڳي جوڙو ڪهڙو آهي؟

(A) $-2\sqrt{5}+\sqrt{3}$ (B) $-2\sqrt{5}-\sqrt{3}$ (C) $2\sqrt{3}-\sqrt{5}$ (D) $\sqrt{3}+2\sqrt{5}$

(x) $|12-(13+7)\times 4|$ ملهہ ڪيترو آهي؟

(A) −68 (B) 68 (C) −32 (D) 32.

(2) هينيان عدد $\frac{p}{q}$ روُپ ۾ لکو

(i) 0.555 (ii) $29.\overline{568}$ (iii) 9.315 315 ..... (iv) 357.417417..... (v) $30.\overline{219}$

(3) هينيان عدد ڏهائي روپ ۾ بدلايو

(i) $\frac{-5}{7}$ (ii) $\frac{9}{11}$ (iii) $\sqrt{5}$ (iv) $\frac{121}{13}$ (v) $\frac{29}{8}$

(4) $\sqrt{7}+5$ ڏيکاريو تہ عدد غيرمنطق آهي

(5) هينيان غيرناطق سادي صورت ۾ بدلايو

(i) $\frac{3}{4}\sqrt{8}$ (ii) $-\frac{5}{9}\sqrt{45}$

(6) هينين غيرناطقن جو سادو منطقي ڪندڙ جُزو لکو

(i) $\sqrt{32}$ (ii) $\sqrt{50}$ (iii) $\sqrt{27}$ (iv) $\frac{3}{5}\sqrt{10}$ (v) $3\sqrt{72}$ (vi) $4\sqrt{11}$

(7) سادي روُپ ۾ بدلايو

(i) $\frac{4}{7}\sqrt{147}+\frac{3}{8}\sqrt{192}-\frac{1}{5}\sqrt{75}$ (ii) $5\sqrt{3}+2\sqrt{27}+\frac{1}{\sqrt{3}}$ (iii) $\sqrt{216}-5\sqrt{6}+\sqrt{294}-\frac{3}{\sqrt{6}}$

(iv) $4\sqrt{12}-\sqrt{75}-7\sqrt{48}$ (v*) $2\sqrt{48}-\sqrt{75}-\frac{1}{\sqrt{3}}$

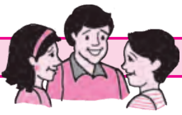
(8) ڇيد کي منطق بڻايو

(i) $\frac{1}{\sqrt{5}}$ (ii) $\frac{2}{3\sqrt{7}}$ (iii) $\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ (iv) $\frac{1}{3\sqrt{5}+2\sqrt{2}}$ (v) $\frac{12}{4\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

3 گھٽپدا

اچو تہ سکون

- گھٽپدن جي سڃاڻپ
- گھٽپدن تي ڪارروايون
- گھٽپدن جي پدوي
- سنشليٽڪ ونڊ
- گھٽپدن جو ملھ
- پاڇي سڏيان



اچو چرچا ڪريون

$p^3 - \frac{1}{2}p^2 + p$; $m^2 + 2n^3 - \sqrt{3}\, m^5$; 6 اهي آلجبرائي ڪالڪ آهن

ماستر : شاگرد دوستو، $p^3 - \frac{1}{2}p^2 + p$, $m^2 + 2n^3 - \sqrt{3}\, m^5$, 6 انهن ڪالڪن مان هرهڪ مان هڪ هڪ پد کڻو اُن پد جي ڦيرائتن جي سگھہ ٻڌايو

ماڌري : $p^3 - \frac{1}{2}p^2 + p$ ڪالڪ ۾ پدن جي ڦيرائتن جي سگھہ نمبروار 3، 2، 1 آهي.

وويڪ : سر $m^2 + 2n^3 - \sqrt{3}\, m^5$ ڪالڪ ۾ پدن جي ڦيرائتي جي سگھہ نمبروار 2،3،5 آهي.

روهت : سر 6 ان ڪالڪ ۾ ڦيرائتو نہ آهي. انکي $6 = 6 \times 1 = 6 \times x^0$ ائين لکي سگھجي ٿو. ان ڪري 6 ڪالڪ ۾ ڦيرائتي جي سگھہ 0 آهي.

ماستر : مٿين سڀني ڪالڪن ۾ ڦيرائتن جي سگھہ واڌو سچو عدد يا ٻڙي آهي.

جن آلجبرا جي ڪالڪن ۾ ڦيرائتن جي سگھہ سچو عدد هوندي آهي اُنهن کي آلجبرا جي ڪالڪن کي گھٽپدا (polynomial) چئجي ٿو. 6 پڻ گھٽپدو آهي $6, -7, \frac{1}{2}, 0, 3$ وغيرهہ اسٽرعددن کي اسٽرگھٽپدا (Constant polynomial) چئجي ٿو. .. پڻ اسٽرگھٽپدو آهي.

$\sqrt{y} + 5$ ۽ $\frac{1}{y} - 3$ گھٽپدا آهن ڇا ؟

سارا : سر $\sqrt{y} + 5$ گھٽپدو نہ آهي ڇو تہ $\sqrt{y} + 5 = y^{\frac{1}{2}} + 5$ ، $\sqrt{y}$ ان ۾ y جي سگھہ $\frac{1}{2}$ آهي جيڪا سچو عدد نہ آهي.

جان : سر $\frac{1}{y} - 3$ پڻ گھٽپدو نہ آهي ڇو تہ $\frac{1}{y} - 3 = y^{-1} - 3$ ، هتي y جي سگھہ -1 آهي جيڪا سچو عدد نہ آهي.

ماستر : گھٽپدو نہ هوندڙ ڪي بہ پنج ڪالڪ لکي اهي گھٽپدا ڇو نہ آهن اهو سمجھايو هيٺين سوالن جا جواب الڳ الڳ مثال کڻي ۽ اُنهن تي چرچا ڪري ڳولهيو

- هرهڪ آلجبرا جو ڪالڪ گھٽپدو هوندو آهي ڇا؟
- هرهڪ گھٽپدو، آلجبرا جو ڪالڪ هوندو آهي ڇا؟

گهٽپدن جا قسم (پدن جي عدد موجب)

$2x\ ,\ 5$	$x^4 + x\ ,\ m^2 - 3m$	$\frac{1}{2}y^2 - 2y + 5,\ x^3 - \sqrt{3}\ x^2 + 5x$
هرهڪ گهٽپدي ۾ فقط هڪ پد	هرهڪ گهٽپدي ۾ ٻه پد	هرهڪ گهٽپدي ۾ ٽي پد
هڪپدو	ٻپدو	ٽپدو

هڪ ڦيرائتي وارا گهٽپدا سندس ڦيرائتي موجب $p(x),\ q(m),\ r(y)$ اهڙيءَ ريت ڏيکاريا آهن.

$$p(x) = x^3 + 2x^2 + 5x - 3 \qquad q(m) = m^2 + \frac{1}{2}m - 7 \qquad r(y) = y^2 + 5$$

چاڪي ونون

هڪ ڦيرائتي واري گهٽپدي جي پدوي (Degree of a polynomial in one variable)

ماستر : $2x^7 - 5x + 9$ گهٽپدي جي ڦيرائتي جي سڀ کان وڏي سگهه ڪهڙي آهي؟

جيتوُ : سر سڀني کان وڏي سگهه 7 آهي.

ماستر : هڪ ڦيرائتي وارن گهٽپدن ۾ ڦيرائتي جي وڏي ۾ وڏي سگهه کي اُن گهٽپدي جي پدوي چوندا آهن.

اشوڪ : سر $2x^7 - 5x + 9$ گهٽپدي جي پدوي 7 آهي

ماستر : 10 گهٽپدي جي پدوي ڪيتري؟

راڌا : $10 = 10 \times 1 = 10 \times x^0$ انڪري 10، گهٽپدي جي پدوي 0 آهي.

ماستر : 10 وانگر ڪنهن به غيرٻڙي اِسٽر گهٽپدي جي پدوي 0 هوندي آهي.

ٻڙي گهٽپدي جي پدوي وصفيل نه آهي.

هڪ کان وڌيڪ ڦيرائتن واري گهٽپدي جي پدوي

گهٽپدي جي هرهڪ پد جي ڦيرائتن جي سگهن جي وڏي ۾ وڏي جوڙاپت کي ان گهٽپدي جي پدوي چئجي ٿو.

مثال $3m^3n^6 + 7m^2n^3 - mn$ ٻن ڦيرائتن وارو گهٽپدو آهي. ان گهٽپدي جي پدوي 9 آهي

(سگهن جي جوڙ اپت $3 + 6 = 9,\ 2 + 3 = 5,\ 1 + 1 = 2$)

مشغولي I : قيراڱنو x ۽ پدوي 5 هوندڙ هڪپدي ، ٻپدي ۽ ٽپدي جو هڪ هڪ مثال لکو

هڪپدو [ ] ٻپدو [ ] ٽپدو [ ]

مشغولي II : 5 پدوي هوندڙ ؛ ٻن قيراڱن واري ٻپدي جو مثال لکو . [ ]

گهٽپدن جا قسم (پدوي ۽ موجب)

هڪ قيراڱني واري گهٽپدي جي پدوي

$x^3 + x^2 + 2x + \sqrt{3}$, $m - m^3$	$2y^2 + y + 1,\ - 3x^2$	$3x - 1,\ 7y$
پدوي 3	پدوي 2	پدوي 1
ٽسگهي گهٽپدو	ٻسگهي گهٽپدو	ليڪ گهٽپدو
عام روپ $ax^3 + bx^2 + cx + d$ هتي a, b, c, d گڏڪ آهن $a \neq 0$	عام روپ $ax^2 + bx + c$ هتي a, b, c گڏڪ آهن $a \neq 0$	عام روپ $ax + b$ هتي a ۽ b گڏڪ آهن $a \neq 0$

گهٽپدو : $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ اهو x قيراڱني n پدوي هوندڙ گهٽپدو آهي هتي

$a_n, a_{n-1}, \ldots\ldots, a_2, a_1, a_0$ اهي گڏڪ آهن $a_n \neq 0$

گهٽپدي جو پرماڻڪ روپ ، گڏڪ روپ ۽ قوت نما روپ

(Standard form, co-efficient form and index form of a polynomial)

$p(x) = x - 3x^2 + 5 + x^4$ اهو گهٽپدو x جي سگهن جي گهٽجندڙ سلسلي ۾ $x^4 - 3x^2 + x + 5$ ائين لکبو. اهو پرماڻڪ روپ آهي. ان گهٽپدي ۾ x جي ٽي سگهه وارو پد نہ آهي. اهو $0x^3$ ائين ميڇي سگهجي ٿو. اهو پد ڪڍي گهٽپدو $p(x)$ $x^4 + 0x^3 - 3x^2 + x + 5$ ائين لکي سگهبو. اهڙيءَ ريت قوت نمائن (سگهن) جي گهٽجندڙ سلسلي ۾ لکيل ۽ قوت نما روپ جا سيئي پد خاص گهٽپدي کي قوت نما روپ چئجي ٿو.

ڪڏهن ڪڏهن قوت نما روپ واري گهٽپدي جا ڦيرائتا نه ڪٽي فقط گڏڪ سلسليوار لکيا آهن مثال :
$x^3 - 3x^2 + 0x - 8$ گهٽپدو $(1, -3, 0, -8)$ ائين لکبو آهي. انکي گهٽپدي جو گڏڪ روپ چئجي ٿو.
$(4, 0, -5, 0, 1)$ گهٽپدو y ڦيرائتو ڪم آڻي قوت نما روپ $4y^4 + 0y^3 - 5y^2 + 0y + 1$
ائين لکي سگهبو.

گهٽپدي جو گڏڪ ۽ قوت نما روپ

مثال $p(m) = 3m^5 - 7m + 5m^3 + 2$

گهٽپدو پرماڻڪ روپ ۾ لکو	$3m^5 + 5m^3 - 7m + 2$
گهٽپدي ۾ نه هوندڙ ٻڙي گڏڪ ڪٽي شامل ڪريو ۽ قوت نما روپ لکو.	$3m^5 + 0m^4 + 5m^3 + 0m^2 - 7m + 2$
ڏنل گهٽپدي جو گڏڪ روپ لکو	$(3, 0, 5, 0, -7, 2)$
گهٽپدي جي پدوي	5

مثال (1) $x^3 + 3x - 5$ گهٽپدو گڏڪ روپ ۾ لکو

حل : $x^3 + 3x - 5 = x^3 + 0x^2 + 3x - 5$

$\therefore$ ڏنل گهٽپدي جو گڏڪ روپ $(1, 0, 3, -5)$

مثال (2) $(2, -1, 0, 5, 6)$ اهو گڏڪ روپ وارو گهٽپدو قوت نما روپ ۾ لکو

حل : گهٽپدي جو گڏڪ روپ $(2, -1, 0, 5, 6)$

$\therefore$ قوت نما روپ ۾ گهٽپدو $= 2x^4 - x^3 + 0x^2 + 5x + 6$

يعني $2x^4 - x^3 + 5x + 6$

اڀياس 3.1

1. هيٺيان ڪالڪ گهٽپدا آهن ڇا؟ سمجهايو

(i) $y + \frac{1}{y}$ (ii) $2 - 5\sqrt{x}$ (iii) $x^2 + 7x + 9$

(iv) $2m^{-2} + 7m - 5$ (v) 10

2. هيٺين گهٽپدن ۾ m^3 جو گڏڪ لکو

(i) m^3 (ii) $\frac{-3}{2} + m - \sqrt{3}m^3$ (iii) $\frac{-2}{3}m^3 - 5m^2 + 7m - 1$

3. هيٺين ڄاڻ موجب x ڦيرائتو ڪم آڻي هرهڪ جو هڪ گهٽپدو لکو

(i) پدوي 7 وارو هڪپدو (ii) پدوي 35 وارو ٻپدو (iii) پدوي 8 وارو ٽپدو

4. گھٽپدن جي پدوي لکو.

(i) $\sqrt{5}$ (ii) x° (iii) x^2 (iv) $\sqrt{2}\,m^{10} - 7$ (v) $2p - \sqrt{7}$

(vi) $7y - y^3 + y^5$ (vii) $xyz + xy - z$ (viii) $m^3n^7 - 3m^5n + mn$

5. هيٺين گھٽپدن کي ليڪي، ٻسگھي ۽ ٽسگھي گھٽپدن ۾ ورهايو.

(i) $2x^2 + 3x + 1$ (ii) $5p$ (iii) $\sqrt{2}\ y - \frac{1}{2}$

(iv) $m^3 + 7m^2 + \frac{5}{2}m - \sqrt{7}$ (v) a^2 (vi) $3r^3$

6. هيٺيان گھٽپدا پرماڻڪ روپ ۾ لکو.

(i) $m^3 + 3 + 5m$ (ii) $-7y + y^5 + 3y^3 - \frac{1}{2} + 2y^4 - y^2$

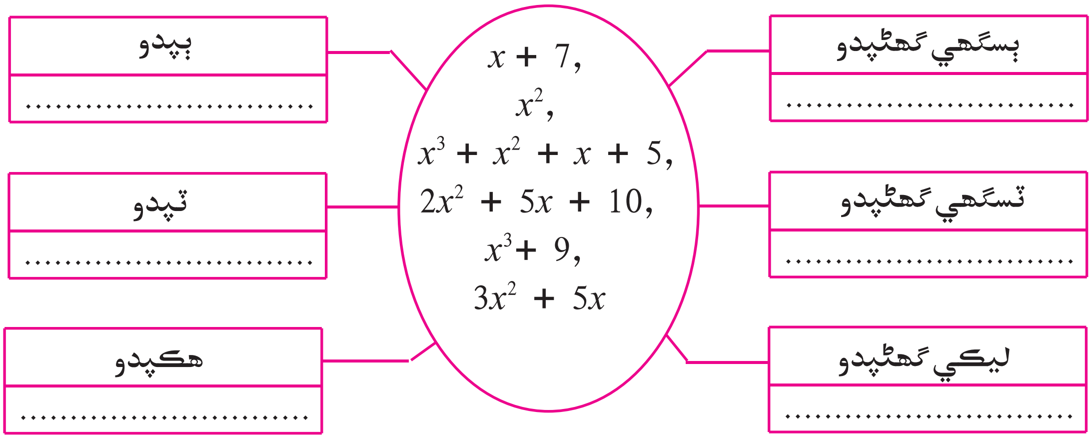
7. هيٺيان گھٽپدا ڳڻڪ روپ ۾ لکو.

(i) $x^3 - 2$ (ii) $5y$ (iii) $2m^4 - 3m^2 + 7$ (iv) $-\frac{2}{3}$

8. هيٺيان ڳڻڪ روپ وارا گھٽپدا ڦيرائيتو x واپرائي پرماڻڪ روپ ۾ لکو.

(i) (1, 2, 3) (ii) (5, 0, 0, 0, − 1) (iii) (− 2, 2, − 2, 2)

9. هيٺ ڪجھ گھٽپدا ڏنل آهن اهي مناسب چوڪندن ۾ لکو .



ذرا ياد ڪريون

(1) ٻن هڪجھڙن آلجبرائي پدن جو جوڙ يا ڪٽ ڪرڻ وقت سندن ڳُڻڪن جو جوڙ يا ڪٽ ڪبي آهي.

مثال، $5m^3 - 7m^3 = (5 - 7)m^3 = -2m^3$

(2) ٻن آلجبرائيپدن جي ضرب يا ونڊ ڪرڻ وقت سندن ڳڻڪن جي ضرب يا ونڊ ٿيندي آهي ان سان گڏ قوت نمائن جا قاعدا به واپرائبا آهن.

مثال، $-4y^3 \times 2y^2z = -8y^5z$; $12a^2b \div 3ab^2 = \frac{4a}{b}$

ذرا ياد ڪريون

گھٽپدن تي ڪارروايون

گھٽپد جو جوڙ ڪٽ، ضرب ۽ ونڊ اهي ڪارروايون آلجبرائي ڪالڪن تي ڪارروائين وانگر ڪبيون آهن.

مثال (1) $5a^2 - 2a$ مان $7a^2 + 5a + 6$ ڪٽ ڪريو

حل :

$$(7a^2 + 5a + 6) - (5a^2 - 2a)$$
$$= 7a^2 + 5a + 6 - 5a^2 + 2a$$
$$= \underline{7a^2 - 5a^2} + \underline{5a + 2a} + 6$$
$$= 2a^2 + 7a + 6$$

مثال (2) $-2a \times 5a^2 = -10a^3$

مثال (3) $(m^2 - 5) \times (m^3 + 2m - 2) = ?$

حل :

$$(m^2 - 5) \times (m^3 + 2m - 2)$$

پھرئين گھٽپدن جي هرهڪ پد جي ٻئين گھٽپدي سان ضرب

$$= m^2(m^3 + 2m - 2) - 5(m^3 + 2m - 2)$$
$$= m^5 + 2m^3 - 2m^2 - 5m^3 - 10m + 10$$

هڪ جھڙن پدن کي گڏ ڪرڻ

$$= m^5 + 2m^3 - 5m^3 - 2m^2 - 10m + 10$$
$$= m^5 - 3m^3 - 2m^2 - 10m + 10$$

مثال (4) $2m^2n - mn^2 + mn$ ۽ $3m^2n + 5mn^2 - 7mn$ جو جوڙ ڪريو

حل : $(3m^2n + 5mn^2 - 7mn) + (2m^2n - mn^2 + mn)$

$$= 3m^2n + 5mn^2 - 7mn + 2m^2n - mn^2 + mn$$

(هڪجھڙن پدن کي گڏ ڪرڻ)

$$= \underline{3m^2n + 2m^2n} + \underline{5mn^2 - mn^2} - \underline{7mn + mn}$$

(هڪجھڙن پدن جو جوڙ)

$$= 5m^2n + 4mn^2 - 6mn$$

ذرا ويچار ڪريون

هڪ گهڻپدي جي پدوي 3 ۽ ٻئي گهڻپدي جي پدوي 5 آهي ته انهن جي ضرب اپٽ جي پدوي ڇا ٿيندي؟

ضربجندڙ ۽ ضربيندڙ گهڻپدي جي پدوين ۽ سندن ضرب اپٽ جي پدوي ۾ ڪهڙو لاڳاپو هوندو آهي؟

مثال (5) $(2 + 2x^2) \div (x + 2)$ اها ونڊ ڪريو ۽ جواب

پاڇي + ونڊاپٽ × ونڊيندڙ = ونڊڻي روپ ۾ لکو

مثال : پهرين $p(x) = 2 + 2x^2$

$\therefore \quad 2 + 2x^2 = 2x^2 + 0x + 2$

طريقو I :

$$
\begin{array}{r}
2x - 4 \\
x + 2 \overline{)\, 2x^2 + 0x + 2} \\
- \;\; 2x^2 + 4x \\
- \quad - \\
\hline
-4x + 2 \\
- \quad -4x - 8 \\
+ \quad + \\
\hline
10
\end{array}
$$

پاڇي + ونڊاپٽ × ونڊيندڙ = ونڊڻي

$2 + 2x^2 = (x + 2) \times (2x - 4) + 10$

ونڊيندڙ $q(x) = (x + 2)$

ونڊاپٽ $s(x) = 4 - 2x$, ونڊيندڙ $r(x) = 10$

$\therefore \; p(x) = q(x) \times s(x) + r(x).$

طريقو II : ونڊ جو ليکي طريقو

$(2x^2 + 2) \div (x + 2)$ ونڊ ڪريو

$2x^2$ پد حاصل ڪرڻ لاءِ $(x + 2)$ کي $2x$ سان ضرب ڪري، $4x$ ڪٽ ڪنداسين

$(2x(x+2) - 4x = 2x^2)$

$\therefore$ ونڊڻي $= 2x^2 + 2 = 2x(x+2) - 4x + 2 \quad \text{(I)}\ldots$

هاڻي پد حاصل ڪرڻ لاءِ $(x+2)$ کي 4- سان ضرب ڪري 8 جوڙ ڪنداسين.

$(-4\,(x+2) + 8 = -4x)$

$\therefore \; (2x^2 + 2) = 2x(x+2) - 4(x+2) + 8 + 2 \ldots$(مان I)

$\therefore \; (2x^2 + 2) = (x + 2)\,(2x - 4) + 10$

پاڇي + ونڊاپٽ × ونڊيندڙ = ونڊڻي

ڌيان ۾ رکو

يوڪلنڊ جو ونڊ جو سڌيان

جيڪڏهن s(x) ۽ p(x) اهي ٻہ گهٽپدا آهن s(x) جي پدوي m، p(x) جي پدوي n کان وڌيڪ هوندي ۽ s(x) کي p(x) سان ونڊڻ سان ونڊاپت $q(x)$ هوندي تہ $s(x) = p(x)\ q(x) + r(x)$.

هتي $r(x) = 0$ يا $p(x)$ جي پدوي

اڀياس 3.2

(1) ڏنل اکر اِستعمال ڪري جواب لکو.

(i) ننڍپور ڳوٺ ۾ a وڻ آهن. وڻن جو عدد هر سال b جيترو وڌي ٿو تہ n سال ڪانپوءِ ان ڳوٺ ۾ ڪيترا وڻ هوندا؟

(ii) ٻارن لاءِ هڪ قطار ۾ y ٻار بيهاري اهڙيون x قطارون ٺاهيون تہ ٻارن لاءِ ڪل ڪيترا ٻار موؤجود رهندا؟

(iii) هڪ ٻن انگن واري عدد جي ايڪن ۽ ڏهاڪن واري جاءِ تي سلسليوار m ۽ n انگہ آهن تہ اهو ٻن درجن وارو عدد ڏيکاريندڙ گهٽپدو لکو.

(2) هيٺين گهٽپدن جو جوڙ ڪريو.

(i) $x^3 - 2x^2 - 9\ ;\ 5x^3 + 2x + 9$

(ii) $-7m^4 + 5m^3 + \sqrt{2}\ ;\ 5m^4 - 3m^3 + 2m^2 + 3m - 6$

(iii) $2y^2 + 7y + 5\ ;\ 3y + 9\ ;\ 3y^2 - 4y - 3$

(3) پهرئين گهٽپدي مان ٻيون گهٽپدو ڪٽ ڪريو.

(i) $x^2 - 9x + \sqrt{3}\ ;\ -19x + \sqrt{3} + 7x^2$

(ii) $2ab^2 + 3a^2b - 4ab\ ;\ 3ab - 8ab^2 + 2a^2b$

(4) هيٺين گهٽپدن جي ضرب ڪريو .

(i) $2x\ ;\ x^2 - 2x - 1$ (ii) $x^5 - 1\ ;\ x^3 + 2x^2 + 2$ (iii) $2y + 1\ ;\ y^2 - 2y^3 + 3y$

(5) پهرئين گهٽپدي کي ٻئين گهٽپدي سان ونڊ ڪريو ۽ جواب (ونڊڻي = ونڊيندڙ x ونڊاپت + ٻاچي) روُپ ۾ لکو

(i) $x^3 - 64\ ;\ x - 4$ (ii) $5x^5 + 4x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 2\ ;\ x^2 - x$

(*6) هيٺين چاڻ ڪالڪ روُپ ۾ لکو انکي سادي صورت ۾ آڻيو.

هڪ مستطيل کيت جي ڊيگهہ $(2a^2 + 3b^2)$ م ۽ ويڪر $(a^2 + b^2)$ م آهي کڙميءَ جي کيت ۾ $(a^2 - b^2)$ م پاسي واري چوُرس جڳهہ تي گهر اڏايو تہ کيت جي بچيل حصي جي ايراضي ڪيتري؟

مشغولي : هيٺيون تڪرپڙهو ۽ ڇؤڪٽ ۾مناسب ڪالڪ لکو، چرچا ڪريو.

شِندي ڳوٺ ۾ گووند جو 5 ايڪڙ جوکيت آهي، هنجي ڪٽنب ۾زال ، 2 ٻارَ ۽ ماءُ آهي. کيتيءَ لاءِ هن بئنڪ مان سوا لکھ روپيا جو قرض 10 فِي .س بھا سان ورتو. هڪ کيت ۾ x ايڪر زمين ۾سويابين ۽ y ايڪڙ زمين ۾ ڪپهه ۽ ٿوئر جو فصل پوکيو. کيتيءَ لاءِ هيٺ ڏنل خرچ آيو.

ٻجن لاءِ هن 10,000 رپيا ڏنا. سويابين فصل لاءِ $2000x$ رپيا ڀاڻ ۽ جيوڙا ماردوائن تي ۽ مزوري وغيرهه تي $4000x^2$ روپيا خرچ آيو. ڪپهه ۽ ٿوئر فصلن لاءِ 8000 y روپيا ڀاڻن ۽ جيوڙا ماردوائن ۽ $9000y^2$ رپيا مزوريءَ وغيرهه تي خرچ آيو.

کيتيءَ ۾آيل خرچ x ۽ y واپرائي لکنداسين.

روپيا $\square + 8000\,y + 4000\,x^2 + 2000\,x + \square$

هنجي کيتي ۾سويابين جو فصل $5x^2$ ڪئنٽل ٿيو. هن اهو 2800 رپيا في ڪئنٽل جي اگهه سان وڪيو. ڪپهه جو فصل $\frac{5}{3}y^2$ ڪئنٽل ٿيو جيڪو هن 5000 رپيا في ڪئنٽل جي اگهه سان وڪيو. ٿوئر جو فصل 4y ڪئنٽل ٿيو جيڪو هن 4000 روپيا في ڪئنٽل سان وڪيو.

سڄو فصل وڪڻڻ کان پوءِ ڪل اُپت x ۽ y ڪم آڻي ڪالڪ روپ ۾لکنداسين.

روپيا $\square + \square + \square$

چاڪي وٺون

سنشليشڪ ونڊ طريقو (Synthetic Division)

هڪ گهٽپدي کي ٻئي گهٽپدي سان ڪيئن ونڊ ڪجي اها اسانکي ڄاڻ آهي. هاڻي اسان ونڊيندڙ گهٽپدو هڪڙ وقت ونڊ جو سؤلو طريقو سمجهنداسين. هتي ونڊيندڙ x±a يا x-a روپ ۾هجي.

مثال (1) $(3x^3 + 2x^2 - 1)$ گهٽپدي کي $(x + 2)$ سان ونڊيو.

حل : پهرين ونڊڻي گهٽپدو قوت نما واري روپ ۾ لکي پوءِ گڻڪ روپ ۾لکنداسين.

ونڊڻيءَ جو پرماڻڪ روپ : $3x^3 + 2x^2 - 1 = 3x^3 + 2x^2 + 0\,x - 1$

∴ ونڊڻيءَ جو گڻڪ روپ = $(3,\ 2,\ 0,\ -1)$

ونڊيندڙ گهٽپدو = $x + 2$

هيٺين ڏاکن وسيلي سنشليشڪ ونڊ ڪنداسين

پهرين سٽ	------	
ٻين سٽ	------	
ٽين سٽ	------	

(1) ير ۾ ڊيڪارپل موجب هڪ اُڀي ۽ هڪ آڏي ليڪ ڪڍو

(2) ونڊيندڙ x+2 آهي ، 2 جو اُبتڙ عدد 2- آهي ۽ پهرين سٽ ۾ اڀي ليڪ جي کاٻي طرف 2- ۽ ساڄي طرف ونڊٽي گهٽپدي جو گڻڪ روُپ لکنداسين.

-2	3	2	0	-1	پهرين سٽ
	↓				
	3				ٽين سٽ

(3) آڏي ليڪ هيٺان يعني ٽين سٽ ۾ ونڊٽيءَ جو پهريون گڻڪ جيئن جو تيئن لکنداسين.

(4) ٽين سٽ ۾ 3 ۽ ونڊيندڙ جي 2- جي ضرب اپت 6- ٻين سٽ ۾ 2 جي هيٺيان لکنداسين.

پوءِ 2 ۽ 6- جو جوڙ 4- ٽين سٽ ۾ لکنداسين.

-2	3	2	0	-1
	↓	-6	8	-16
	3	-4	8	[-17]

اهڙيءَ ريت ضربوُن ۽ جوڙ ڪري آخري عدد پاڇي هوندو آهي.

هتي پاڇي 17- آهي.

(3,-4,8) ونڊاپت جو گڻڪ روُپ آهي

$$\therefore \text{ونڊاپت} = 3x^2 - 4x + 8 \quad \text{پاڇي} = -17$$

$$\therefore 3x^3 + 2x^2 - 1 = (x+2)(3x^2 - 4x + 8) - 17$$

مٿئين طريقي کي سنشليشڪ ونڊ طريقو چئجي ٿو.

اها ونڊ ليڪي طريقي وسيلي هيٺين نموني ڪري سگهبي.

$$\begin{aligned}3x^3 + 2x^2 - 1 &= 3x^2(x+2) - 6x^2 + 2x^2 - 1\\ &= 3x^2(x+2) - 4x^2 - 1\\ &= 3x^2(x+2) - 4x^2 - 8x + 8x - 1\\ &= 3x^2(x+2) - 4x(x+2) + 8x - 1\\ &= 3x^2(x+2) - 4x(x+2) + 8x + 16 - 16 - 1\\ &= 3x^2(x+2) - 4x(x+2) + 8(x+2) - 17\end{aligned}$$

$$\therefore 3x^3 + 2x^2 - 1 = (x+2)(3x^2 - 4x + 8) - 17$$

مثال (2) $(2y^4 - 3y^3 + 5y - 4) \div (y - 1)$ ونڊ ڪريو.

حل : ونڊڻي سنشليشڪ طريقو $= 2y^4 - 3y^3 + 5y - 4 = 2y^4 - 3y^3 + 0y^2 + 5y - 4$

ونڊيندڙ $y - 1 =$ 1- جو اُبتڙ عدد آهي.

1	2	-3	0	5	-4
		2	-1	-1	4
	2	-1	-1	4	0 (پاڇي)

ونڊاپت جو گڏڪ روپ $(2, -1, -1, 4)$

$\therefore$ ونڊاپت $= 2y^3 - y^2 - y + 4$ پاڇي $= 0$

ليکي طريقو: $2y^4 - 3y^3 + 5y - 4 = 2y^3(y - 1) + 2y^3 - 3y^3 + 5y - 4$

$= 2y^3(y - 1) - y^2(y - 1) - y^2 + 5y - 4$

$= 2y^3(y - 1) - y^2(y - 1) - y(y - 1) + 4y - 4$

$= (2y^3 - y^2 - y + 4)(y - 1)$

ڌيان ۾رکو

سنشليشڪ ونڊ طريقي ۾ x+a يا x-a اهڙا پدوي 1 هوندڙ گهٽپدا ئي ونڊيندڙ طورڪنيل آهن.

اڀياس 3.3

1. هيٺيون ونڊون سنشلشڪ ۽ ليکي طريقي ڪريو ونڊاپت ۽ پاڇي لکو .

(i) $(2m^2 - 3m + 10) \div (m - 5)$ (ii) $(x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 4x + 5) \div (x + 2)$

(iii) $(y^3 - 216) \div (y - 6)$ (iv) $(2x^4 + 3x^3 + 4x - 2x^2) \div (x + 3)$

(v) $(x^4 - 3x^2 - 8) \div (x + 4)$ (vi) $(y^3 - 3y^2 + 5y - 1) \div (y - 1)$

چاڻي وٺون

گهٽپدي جو ملهه (Value of polynomial)

گهٽپدي جي ڦيرائتي جو ڪو ملهه رکڻ سان ان گهٽپدي جو ملهه ملندو آهي. مثال x+7 گهٽپدي ۾ x جو ملهه 2 رکڻ سان، گهٽپدي جو ملهه 9 ملندو.

p(x) گهٽپدي ۾ x جو ملهه a رکڻ سان گهٽپدي جو ملندڙ ملهه p(x) وسيلي ڏيکاربو آهي.

مثال (1) $p(x) = 2x^2 - 3x + 5$ گهٽپدي جو ملهه لهو . جڏهن $x = 2$

گهٽپدو $p(x) = 2x^2 - 3x + 5$

ملهه رکڻ سان $x = 2$

$$\therefore\ p(2) = 2 \times 2^2 - 3 \times 2 + 5$$
$$= 2 \times 4 - 6 + 5$$
$$= 8 - 6 + 5$$
$$\therefore\ p(2) = 7$$

مثال (2) $y = -2$ تہ گهٽپدي $p(y) = 2y^3 - 2y + \sqrt{7}$ جو ملهه لهو .

حل : $p(y) = 2y^3 - 2y + \sqrt{7}$

$$\therefore\ p(-2) = 2 \times (-2)^3 - 2 \times (-2) + \sqrt{7}$$
$$= 2 \times (-8) - 2 \times (-2) + \sqrt{7}$$
$$= -16 + 4 + \sqrt{7}$$
$$= -12 + \sqrt{7}$$

$\therefore$ $y = -2$ هئڻ وقت گهٽپدي جو ملهه $-12 + \sqrt{7}$ آهي.

مثال (3) $p(x) = 2x^2 - x^3 + x + 2$ گهٽپدي $p(0)$ لهو .

حل : $p(x) = 2x^2 - x^3 + x + 2$

$$\therefore\ p(0) = 2 \times 0^2 - 0^3 + 0 + 2$$
$$= 2 \times 0 - 0 + 0 + 2$$
$$= 2$$

مثال (4) جيڪڏهن گهٽپدي $m^2 - am + 7$ جو ملهه $m = -1$ وقت **10** آهي.
تہ a جو ملهه لهو.

حل : $p(m) = m^2 - am + 7$

$$\therefore\ p(-1) = (-1)^2 - a \times (-1) + 7$$
$$= 1 + a + 7$$
$$= 8 + a$$

پر $p(-1) = 10$ مليل آهي

$$\therefore\ 8 + a = 10$$
$$\therefore\ a = 10 - 8$$
$$\therefore\ a = 2$$

اڀياس 3.4

(1) جيڪڏهن $x = 0$ تہ گھٽپدي $x^2 - 5x + 5$ جو ملهہ لکو.

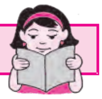
(2) جيڪڏهن $p(y) = y^2 - 3\sqrt{2}y + 1$ تہ $p(3\sqrt{2})$ لکو.

(3) جيڪڏهن $p(m) = m^3 + 2m^2 - m + 10$ تہ $p(a) + p(-a) =$ ؟

(4) جيڪڏهن $p(y) = 2y^3 - 6y^2 - 5y + 7$ تہ $p(2)$ لکو.

ڌيان ۾ رکو

قيرائتي جي ڪنهن ملهہ لاءِ گھٽپدي جو ملهہ لکڻ وقت هرهڪ پد ۾ ان قيرائتي عيوض ڏنل ملهہ رکي ان گھٽپدي جو ملهہ لکبو آهي.



چاڻي وٺون

پاچي سڌيان (Remainder Theorem)

گھٽپدي $p(x)$ کي $(x + a)$ سان ونڊڻ تي بچندڙ پاچي ۽ ان گھٽپدي ۾ x جو ملهہ (-a) رکڻ سان ملندڙ گھٽپدي جي ملهہ ۾ آپسي لاڳاپو هوندو آهي. اهو لاڳاپو سمجھڻ لاءِ هيٺيون مثال سمجھو.

مثال $p(x) = (4x^2 - x + 2)$ کي $(x + 1)$ سان ونڊ ڪريو.

[هتي $(x + a)$ جي $(x + 1)$ عيوض آهي.]

حل : ونڊڻي $= 4x^2 - x + 2$

ونڊيندڙ $= x + 1$

$$\begin{array}{r|l} & 4x - 5 \quad \text{(ونڊاپت)} \\ x + 1 & 4x^2 - x + 2 \quad \text{(ونڊڻي)} \\ & -(4x^2 + 4x) \\ \hline & -5x + 2 \\ & -(-5x - 5) \\ \hline & 7 \quad \text{(پاچي)} \end{array}$$

ونڊاپت $= 4x - 5$ پاچي $= 7$ .... (I)

ساڳيو مثال سنشليشڪ ونڊ وسيلي حل ڪريون.

$p(x)$ جو گُڻڪ روپ $= (4, -1, 2)$

ونڊيندڙ $= x + 1$

1 جو اُبتڙ عدد -1

-1	4	-1	2	
		-4	5	
	4	-5	7	پاچي

ونڊاپت $= 4x - 5$ پاچي $= 7$

هاڻي اسين پاڇيءَ ۽ ونڊڻي گهٽپدي جي ملهه ۾ لاڳاپو ڏسون .

ونڊڻيءَ گهٽپدي $4x^2 - x + 2$ جو $x = -1$ لاءِ ملهه لهون.

$$p(x) = 4x^2 - x + 2$$

$$\therefore\ p(-1) = 4 \times (-1)^2 - (-1) + 2$$

$$= 4 \times 1 + 1 + 2$$

$$= 4 + 1 + 2$$

$$= 7$$

$\therefore$ $x = -1$ وقت گهٽپدي $p(x)$ جو ملهه 7 آهي . ... (II)

انڪري بيان (I) ۽ (II) مان , $p(x) = 4x^2 - x + 2$ گهٽپدي کي $(x + a)$ يعني هتي $x + 1$ سان ونڊڻ سان ملندڙ پاڇي ۽ $x = -1$ وقت $p(x)$ گهٽپدي جو ملهه يعني $p(-1)$ ساڳيا آهن.

ان مان هيٺين خاصيت سمجهه ۾ اچي ٿي.

$p(x)$ گهٽپدي کي (x-a)سان ونڊڻ تي ملندڙ پاڇي p(-a) جيتري يعني p(x) ۾ x=-a رکڻ سان ملندڙ گهٽپدي جي ملهه جيتري آهي.

ان خاصيت کي پاڇي سڏيان چئجي ٿو.

يوڪلڊ جي ونڊ قاعدي وسيلي اها خاصيت ثابت ڪنداسين .

$p(x)$ کي $(x + a)$ سان ونڊڻ تي،

$p(x) = q(x) \times (x + a) + r(x)$ [$q(x)$ = ونڊاپت , $r(x)$ = پاڇي]

جيڪڏهن , $r(x) \neq 0$, تہ قاعدي موجب $r(x)$ جي پدوي 1 کان گهٽ يعني 0 آهي ان ڪري $r(x)$ حقيقي عدد آهي.

$\therefore r(-a)$ پڻ حقيقي عدد آهي.

هاڻي , $p(x) = q(x) \times (x + a) + r(x)$ ....(1)

ان ۾ $x = -a$ ملهه رکڻ سان.

$$p(-a) = q(-a) \times (a - a) + r(-a)$$

$$= q(-a) \times 0 + r(-a) ....(2)$$

$\therefore$ $p(-a) = r(-a)$ .... (1) ۽ (2) مان

مشغولي : هيٺيان مثال جاچيو

(1) $p(x) = 3x^2 + x + 7$ گهٽپديکي $x + 2$ گهٽپدن سان ونڊيو ۽ پاڇي لکو .

(2) $x = -2$ وقت $p(x) = 3x^2 + x + 7$ گهٽپدي جو ملهه لکو .

(3) هاڻي مليل پاڇي $p(-2)$ جي ملهه جيتري آهي ڇا؟

هڪ ٻيو به مثال ڪٺي متئين نموني جاچ لکو.

مثال (1) $x^4 - 5x^2 - 4x$ گهٽپدي کي $x + 3$ سان ونڊڻ تي پاڇي لکو.

حل :

پاڇي سڌيان وسيلي

ونڊڻي $p(x) = x^4 - 5x^2 - 4x$

ونڊيندڙ $x + 3 =$ کٹو

$\therefore\ x = -3$

$\therefore\ p(x) = x^4 - 5x^2 - 4x$

$(p(-3) = (-3)^4 - 5(-3)^2 - 4(-3)$

$= 81 - 45 + 12$

$p(-3) = 48$

سنشليشڪ ونڊ طريقي

پرماڻڪ روپ $x^4 + 0x^3 - 5x^2 - 4x + 0$

گڻڪ روپ $= (1, 0, -5, -4, 0)$

- 3	1	0	-5	-4	0	
		-3	9	-12	48	
	1	- 3	4	-16	48	پاڇي

پاڇي $= 48$

مثال (2) پاڇي سڌيان اِستعمال ڪري $x^3 - 2x^2 - 4x - 1$ گهٽپدي کي $x - 1$ ونڊڻ سان پاڇي لکو.

حل : $p(x) = x^3 - 2x^2 - 4x - 1$

ونڊيندڙ $= x - 1\ \therefore x = 1$ لکو

$\therefore$ پاڇي سڌيان وسيلي، پاڇي $= p(1) = 1^3 - 2 \times 1^2 - 4 \times 1 - 1$

$= 1 - 2 \times 1 - 4 - 1$

$p(1) = 1 - 2 - 4 - 1 = -6$

$\therefore$ پاڇي سڌيان وسيلي، پاڇي $= -6$

مثال (3) جيڪڏهن $t^3 - 3t^2 + kt + 50$ گهٽپدي کي $(t-3)$ سان ونڊڻ تي پاڇي 62 ملي تي تہ k جو ملهه لکو

حل : ڏنل گهٽپدي کي $(t-3)$ سان ونڊڻ تي پاڇي 62 ڏنل آهي انکري ڏنل گهٽپدن جو ملهه $t = 3$ وقت لهنداسين.

$p(t) = t^3 - 3t^2 + kt + 50$

∴ پاڇي سڏيان موجب

$p(3) = 3^3 - 3 \times 3^2 + k \times 3 + 50$ = پاڇي

$= 27 - 3 \times 9 + 3k + 50$

$= 27 - 27 + 3k + 50$

$= 3k + 50$

پرپاڇي 62 ڏنل آهي

$\therefore\ 3k + 50 = 62$

$\therefore\ 3k = 62 - 50$

$\therefore\ 3k = 12$

$\therefore\ k = \frac{12}{3}$

$\therefore\ k = 4$

ڌيان ڏيو

پاڇي سڏيان : جيڪڏهن p(x) کوبہ گهٽپدو ۽ ‘a’ حقيقي عدد آهي تہ p(x) کي (x+a) سان ونڊڻ تي ملندڙ پاڇي p(-a) جيتري ٿيندي.

$p(x) = s(x)\ (x - a) + r(x)$ $\qquad r(x) = 0$ يا $r(x) < 1$ جي پدوي

متئين مساوات ۾ $x = a$ رکڻ سان $p(a) = 0 + r\ (a) = r\ (a)$ ملي ٿو.

∴ $r(a)$ جي پدوي = 0 يا $r(a) = 0$ يعني $(x - a)$ اهو $p(x)$ جو جُزو آهي، اهو سمجھ ۾ اچي ٿو.

چاڪي ونون

جُزو سڏيان (Factor Theorem)

21 کي 7 سان ونڊڻ تي پاڇي 0 ملي ٿي. انکري اسان چوندا آهيون تہ 7 ،21 جو جُزو آهي.

ساڳئي نموني ڏنل گهٽپدي کي ونڊيندڙ گهٽپدي سان ونڊ ڪرڻ تي پاڇي 0 ملي ٿي تہ اهو گهٽپدو ، ڏنل گهٽپدي جو جُزو آهي. اڻين چئبو آهي.

مثال (1) $p(x) = (x^3 + 4x - 5)$ گهٽپدي کي $(x - 1)$ سان ونڊ ڪرڻ تي پاڇي لهو.

جاچ لهو تہ $(x - 1)$ $p(x)$ جو جُزو آهي.

حل : $p(x) = x^3 + 4x - 5$

$p(1) = (1)^3 + 4(1) - 5$

$= 1 + 4 - 5$

$= 0$

هتي پاڇي سڏيان موجب، پاڇي = 0

∴ $(x - 1)$ ، $p(x)$ گهٽپدي جو جُزو آهي.

مثال (2) $p(x) = x^3 + 4x - 5$ گهٽپدي کي $x + 2$ سان ونڊڻ تي پاڇي لهو

$(x + 2)$ $p(x)$ جو جُزو آهي ڇا؟

حل : $p(x) = x^3 + 4x - 5$

$p(-2) = (-2)^3 + 4(-2) - 5$

$p(-2) = -8 - 8 - 5$

$= -21$

پاڇي سڏيان موجب، پاڇي 21– آهي.

هتي، پاڇي $\neq 0$

∴ $(x + 2)$ ، $p(x)$ جو جُزونہ آهي.

مشغولي : $(x - 1)$، گهٽپدي $x^3 + 4x - 5$ جو جزو آهي ڇا؟ جاچيو .

ڌيان ڏيو

جيڪڏهن p(x) ڪوبہ گهٽپدو ۽ ڪوبہ حقيقي عدد آهي ۽ p(a)=o آهي تہ (x-a) اهو p(x) جو جُزو هوندو آهي.

انجي ابتڙ (x-a), p(x) گهٽپدي جو جُزو هوندو تہ p(a)=o ٿيندو.

مثال (1) جُزو سڏيان ۾ استعمال ڪري $x - 2$ ، گهٽپدي $x^3 - x^2 - 4$ جو جُزو آهي .
چا ، اهو طيءِ ڪريو.

حل : $p(x) = x^3 - x^2 - 4$ وندينڊڙ $x - 2 =$

$\therefore\ p(2) = 2^3 - 2^2 - 4 = 8 - 4 - 4 = 0$

$\therefore$ پاڇي سڏيان موجب ، $(x - 2)$ گهٽپدي $(x^3 - x^2 - 4)$ جو جُزو آهي.

مثال (2) جيڪڏهن $(x - 1)$، $(x^3 - 2x^2 + mx - 4)$ جو جزو آهي تہ m جو ملھہ لھو.

حل : $(x - 1)$، $p(x)$ جو جُزو آهي. $\therefore\ p(1) = 0$

$p(x) = x^3 - 2x^2 + mx - 4$

$p(1) = 1^3 - 2 \times 1^2 + m \times 1 - 4 = 0$

$\therefore\ 1 - 2 \times 1 + m - 4 = 0$

$\therefore\ 1 - 2 + m - 4 = 0 \qquad \therefore\ m - 5 = 0 \qquad \therefore\ m = 5$

مشغولي : اسان ڪسان گووند جي کيتيءَ نسبت گهٽپدن جي روُپ ۾ کيتيءَ جو خرچ ۽ اپت اهي ڳالهيون ڏنيون. هن بئنڪ مان سوا لک روپيا قرض ورتو هو ۽ 10% بها سان اهو واپس ڪيو هو. ٻجن تي خرچ 10000 رپيا ، سويابين فصل، پاڻ ۽ جيوڙا ماردوائن تي 2000x رپيا ۽ زمين کيڙڻ لاءِ $4000x^2$ رپيا خرچ آيو هوس. ڪپهہ ۽ ٿوهر فصلن لاءِ پاڻ ۽ جيوڙا ماردوائن تي 8000y رپيا ۽ کيڙڻ وغيرهہ تي $9000y^2$ رپيا خرچ آيو هوس.

ڪل اپت $14000x^2 + \frac{25000}{3}y^2 + 16000y$ ايتري ٿيس.
x=2, y=3 ملهہ رکي گووند جي کيتيءَ مان اپت ۽ خرچ لھو.

حل :

اپت

بئنڪ جو قرض	₹ 1,25,000	
سويابين مان اپت		₹
ڪپهہ مان اپت		₹
ٿوهر مان اپت		₹
ڪل اپت		₹

خرچ

بئنڪ کي وياج سان گڏ قرض موٽايو	₹1,37,000	
ٻجن لاءِ		₹
سويابين : پاڻ ۽ دوائون		₹
سويابين : مزوري ، کيڙڻ		₹
ڪپهہ ۽ ٿوهر پاڻ ، دوائون		₹
ڪپهہ، ٿوهر: مزوري، کيڙڻ		₹
ڪل خرچ		₹

اڀياس 3.5

(1) x جو ڏنل ملھ رکي گھڻپدي $2x - 2x^3 + 7$ جا ملھ لھو.

(i) $x = 3$ (ii) $x = -1$ (iii) $x = 0$

(2) ھينين گھڻپدن لاءِ $p(1)$ ، $p(0)$ ۽ $p(-2)$ لھو.

(i) $p(x) = x^3$ (ii) $p(y) = y^2 - 2y + 5$ (iii) $p(x) = x^4 - 2x^2 - x$

(3) جيڪڏھن گھڻپدي $m^3 + 2m + a$ جو ملھ $m = 2$ وقت 12 آھي تہ a جو ملھ لھو.

(4) جيڪڏھن گھڻپدي $mx^2 - 2x + 3$ نسبت ۾ $p(-1) = 7$ آھي تہ m جو ملھ لھو.

(5) ھينين مان پھرئين گھڻپدي کي ٻيٽي گھڻپدي سان ونڊ ڪرڻ تي ملندڙ پاڇي سڌيان وسيلي لھو.

(i) $(x^2 - 7x + 9)$; $(x + 1)$

(ii) $(2x^3 - 2x^2 + ax - a)$; $(x - a)$

(iii) $(54m^3 + 18m^2 - 27m + 5)$; $(m - 3)$

(6) گھڻپدي $y^3 - 5y^2 + 7y + m$ کي $y + 2$ ونڊڻ تي پاڇي 50 ملي ٿي تہ m جو ملھ لھو .

(7) جزو سڌيان اِستعمال ڪري ٻڌايو تہ ڇا $x + 3$ ، $x^2 + 2x - 3$ جو جُزو آھي؟

(8) جيڪڏھن $x - 2$ گھڻپدي $x^3 - mx^2 + 10x - 20$ جو جزو آھي تہ m جو ملھ لھو.

(9) ھينين مثالن ۾ $q(x)$ ، $p(x)$ جو جُزو آھي يا نہ اھو جزو سڌيان وسيلي طيءِ ڪريو .

(i) $p(x) = x^3 - x^2 - x - 1$, $q(x) = x - 1$

(ii) $p(x) = 2x^3 - x^2 - 45$, $q(x) = x - 3$

(10) $(x + 1)$ سان $(x^{31} + 31)$ کي ونڊڻ تي پاڇي لھو.

(11) ڏيکاريو تہ $m - 1$ ، $m^{21} - 1$ ۽ $m^{22} - 1$ گھڻپدن جو جُزو آھي.

(12*) $x - 2$ ۽ $x - \frac{1}{2}$ ٻئي $nx^2 - 5x + m$ گھڻپدن جا جُزا آھن.
ڏيکاريو تہ $m = n = 2$

(13) (i) جيڪڏھن $p(x) = 2 + 5x$ تہ $p(2) + p(-2) - p(1)$

(ii) جيڪڏھن $p(x) = 2x^2 - 5\sqrt{3}x + 5$ تہ $p(5\sqrt{3})$ لھو .

ذرا ياد ڪريو

اڳئين درجي ۾ اسين گھڻپدن جا جزا لھڻ سکيا آھيون اچو تہ ڪي مثال ڏسون.

جُزا لھو

مثال (1) $4x^2 - 25$

$= (2x)^2 - (5)^2$

$= (2x + 5)(2x - 5)$

مثال (2) $3x^2 + 7x + 2$

$= \underline{3x^2 + 6x} + \underline{x + 2}$

$= 3x(x + 2) + 1(x + 2)$

$= (x + 2)(3x + 1)$

مثال (3) $63x^2 + 5x - 2$

$= 63x^2 + 14x - 9x - 2$

$= 7x(9x + 2) - 1(9x + 2)$

$= (9x + 2)(7x - 1)$

مثال (4) $6x^2 - 5x - 6$

$= 6x^2 - 9x + 4x - 6$

$= 3x(2x - 3) + 2(2x - 3)$

$= (2x - 3)(3x + 2)$

چاڻي وٺون

گهٽپدن جا جزا (Factors of polynomials)

ڪڏهن ڪڏهن ڏنل گهٽپدي کي $ax^2 + bx + c$ روپ ۾لکي سگهجي ٿو. انڪري انجا جزا لهڻ سؤلو ٿيندو آهي.

مثال (1) $(y^2-3y)^2 - 5(y^2-3y) - 50$ جا جزا لهو.

ڏنل گهٽپدي ۾ سمجهو ته $(y^2-3y) = x$

$\therefore\ (y^2-3y)^2 - 5(y^2-3y) - 50 = x^2 - 5x - 50$

$= x^2 - 10x + 5x - 50$

$= x(x - 10) + 5(x - 10)$

$= (x - 10)(x + 5)$

$= (y^2-3y - 10)(y^2-3y + 5)$

$= [y^2-5y + 2y - 10](y^2-3y + 5)$

$= [y(y - 5) + 2(y - 5)](y^2-3y + 5)$

$= (y - 5)(y + 2)(y^2-3y + 5)$

مثال(2) جزا لهو

$(x + 2)(x - 3)(x - 7)(x - 2) + 64$

حل : $(x + 2)(x - 3)(x - 7)(x - 2) + 64$

$= (x + 2)(x - 7)(x - 3)(x - 2) + 64$

$= (x^2 - 5x - 14)(x^2 - 5x + 6) + 64$

$= (m - 14)(m + 6) + 64$ . . . . ($x^2 - 5x$ لاءِ m رکڻ سان)

$= m^2 - 14m + 6m - 84 + 64$

$= m^2 - 8m - 20$

$= (m - 10)(m + 2)$

$= (x^2 - 5x - 10)(x^2 - 5x + 2)$.... m جو ملهه واپس $x^2 - 5x$ رکڻ سان

اڀياس 3.6

(1) هيٺين گهٽپدن جا جزا لهو

(i) $2x^2 + x - 1$ (ii) $2m^2 + 5m - 3$ (iii) $12x^2 + 61x + 77$

(iv) $3y^2 - 2y - 1$ (v) $\sqrt{3}x^2 + 4x + \sqrt{3}$ (vi) $\frac{1}{2}x^2 - 3x + 4$

(2) هينين گھٽپدن جا جزا لهو

(i) $(x^2 - x)^2 - 8(x^2 - x) + 12$ (ii) $(x - 5)^2 - (5x - 25) - 24$

(iii) $(x^2 - 6x)^2 - 8(x^2 - 6x + 8) - 64$ (iv) $(x^2 - 2x + 3)(x^2 - 2x + 5) - 35$

(v) $(y + 2)(y - 3)(y + 8)(y + 3) + 56$

(vi) $(y^2 + 5y)(y^2 + 5y - 2) - 24$

(vii) $(x - 3)(x - 4)^2(x - 5) - 6$

گڏيل اڀياس 3

(1) هينين سوالن مان هرهڪ لاءِ مناسب جواب چونڊيو .

(i) هينين مان گھٽپدو ڪھڙو آهي؟

(A) $\frac{x}{y}$ (B) $x^{\sqrt{2}} - 3x$ (C) $x^{-2} + 7$ (D) $\sqrt{2}x^2 + \frac{1}{2}$

(ii) $\sqrt{7}$ گھٽپدي جي پدوي ڪھڙي آهي؟

(A) $\frac{1}{2}$ (B) 5 (C) 2 (D) 0

(iii) 0 گھٽپدي جي پدوي ڪيتري آهي؟

(A) 0 (B) 1 (C) وصيفل نہ آهي (D) ڪوبہ حقيقي عدد

(iv) $2x^2 + 5x^3 + 7$ گھٽپدي جي پدوي ٻڌايو؟

(A) 3 (B) 2 (C) 5 (D) 7

(v) $x^3 - 1$ گھٽپديجو گڏڪروپڪھڙوآهي؟

(A) (1, − 1) (B) (3, − 1) (C) (1, 0, 0, − 1) (D) (1, 3, − 1)

(vi) $p(x) = x^2 - 7\sqrt{7}x + 3$ تہ $p(7\sqrt{7}) = ؟$

(A) 3 (B) $7\sqrt{7}$ (C) $42\sqrt{7} + 3$ (D) $49\sqrt{7}$

(vii) جيڪڏهن $x = -1$ آهي تہ $2x^3 + 2x$ گھٽپدي جو ملھہ ڪيترو؟

(A) 4 (B) 2 (C) − 2 (D) − 4

(viii) گھٽپدي $3x^2 + mx$ جو $x - 1$ جزو آهي تہ m جو ملھہ ڪيترو؟

(A) 2 (B) − 2 (C) − 3 (D) 3

(ix) ضرب ڪري ۽ ملندڙ گھٽپدي جي پدوي ڪيتري؟ $(x^2 - 3)(2x - 7x^3 + 4)$

(A) 5 (B) 3 (C) 2 (D) 0

(x) هيٺين مان ليڪي گهٽپدو ڪهڙو آهي؟

(A) $x + 5$ (B) $x^2 + 5$ (C) $x^3 + 5$ (D) $x^4 + 5$

(2) هيٺين مان هرهڪ گهٽپدي جي پدوي لکو

(i) $5 + 3x^4$ (ii) 7 (iii) ax^7+bx^9 { مقررعدد آهن a, b }

(3) هنيان گهٽپدا پرماڻڪ روُپ ۾لکو.

(i) $4x^2+7x^4-x^3-x+9$ (ii) $p+2p^3+10p^2+5p^4-8$

(4) هينيان گهٽپدا ڳٽڪ روُپ ۾لکو.

(i) x^4+16 (ii) $m^5+2m^2+3m+15$

(5) هينيان ڳٽڪ روُپ گهٽپدا x ڦيراڻنو واپراڻي قوت نما روپ ۾لکو.

(i) (3, −2, 0, 7, 18) (ii) (6, 1, 0, 7) (iii) (4, 5, −3, 0)

(6) جوڙ ڪريو

(i) $7x^4-2x^3+x+10$; $3x^4+15x^3+9x^2-8x+2$ (ii) $3p^3q+2p^2q+7$; $2p^2q+4pq-2p^3q$

(7) ڪٽ ڪريو :

(i) $5x^2-2y+9$; $3x^2+5y-7$ (ii) $2x^2+3x+5$; x^2-2x+3

(8) ضرب ڪريو

(i) $(m^3-2m+3)(m^4-2m^2+3m+2)$ (ii) $(5m^3-2)(m^2-m+3)$

(9) $3x^3-8x^2+x+7$ گهٽپدي کي $x-3$ گهٽپدي سان سنشليشڪ طريقي ونڊ ڪريو ۽ پاڇي لهو.

(10) m جي ڪهڙي ملهه لاءِ $x+3$ اهو گهٽپدي $x^3-2mx+21$ جو جزو ٿيندو؟

(11) 2016 سال جي آخر ۾ڪوواڻ وروڙ ۽ چڪلي ڳوٺن جي آدمشماري نمبروار $5x^2-3y^2$، $7y^2+2xy$ ۽ $9x^2+4xy$ هئي. 2017 جي شروعات ۾ٺنهي ڳوٺن مان تعليم ۽ روزگار لاءِ نمبروار x^2+xy-y^2، $5xy$ ۽ $3x^2+xy$ ماڻهو ٻين شهرن ۾ويا ته 2017 جي شروعات ۾انهن ڳوٺن جي ڪل آدمشماري ڪيترئ هئي؟

(12) bx^3-2x+5 ۽ $bx^2 + x + 5$ گهٽپدن کي $x-3$ سان ونڊڻ تي پاڇي نمبروار m ۽ n اچي ٿي. جيڪڏهن $m - n = 0$ ته b جو ملهه لهو.

(13) سادي صورت ۾بدلايو: $(8m^2+ 3m - 6) - (9m - 7) + (3m^2 - 2m + 4)$

(14) $x^2 + 13x + 7$ مان ڪهڙو گهٽپدو ڪٽ ڪجي جيئن $3x^2 + 5x - 4$ گهٽپدو ملي ؟

(15) $4m + 2n + 3$ ڪالڪ ۾ڪهڙو ڪالڪ جوڙ ڪجي جيئن $6m + 3n + 10$ گهٽپدو ملي ؟

4 ريشو ۽ پروپورشن

اچو تہ سکون

- ريشو
- برابر ريشوز تي ڪارروايون
- برابر ريشوز جو سڃاڻپ
- ريشو جون خاصيتون
- لاڳيتو پروپورشن
- K طريقو

ذرا ياد ڪريون

اسان اڳئين درجن ۾ ريشو ۽ پروپورشن جو اڀياس ڪيو آهي انهنجا مثال بہ اسان حل ڪيا آهن.

مثال : ومل جا سوُجي ۽ جا ناهيل لڏوُن سوادي آهن. هو ۽ 1 وٽي گيهہ، 3 وٽيون سوُجي ۽ 2 وٽيون کنڊ ڪٽي لڏون ناهي ٿي.

هتي سوُجي ۽ کنڊ جو ريشو 3:2 يا $\frac{3}{2}$ آهي.

جيڪڏهن لڏن لاءِ 12 وٽيون سوُجي کنئي تہ ان لاءِ کنڊ ڪيتري لڳندي؟

سمجهو تہ کنڊ x وٽيون لڳندي اِن مان، $\frac{3}{2} = \frac{12}{x}$ $\therefore\ 3x = 24$ $\therefore\ x = 8$

يعني لڏن لاءِ 12 وٽيون سوجي ۽ کنئي تہ 8 وٽيون کنڊ لڳندي.

اهو مثال هيٺيئن نموني بہ حل ڪري سگهجي ٿو.

سوجي 3k وٽيون آهي تہ کنڊ 2k وٽيون لڳندي چو تہ $\frac{3k}{2k} = \frac{3}{2}$

جيڪڏهن $3k = 12$ تہ $k = 4$ انڪري $2k = 8$ يعني 8 وٽيون کنڊ لڳندي.

چاڪي وٺون

ريشو ۽ پروپورشن (Ratio and proportion)

ٻن عددن جي ريشو جو ويچارڻ يا وڌيڪ عددن لاءِ وڌائي سگهجي ٿو.

لڏن جو مثال کڻو. گيهہ، سوُجي ۽ کنڊ جو پروپورشن 1:3:2 آهي. هتي گيهہ ۽ سوُجي ۽ ريشو 1:3 ۽ سوجي ۽ کنڊ جو ريشو 3:2 آهي.

اها چاڙ هڪ پروپورشن وسيلي ڏنل آهي.

گيهہ 1k يعني k وٽيون، سوجي 3k وٽيون ۽ کنڊ 2k وٽيون مڃي سگهجي ٿو جيڪڏهن سوجي 12 وٽيون آهن تہ لڏن لاءِ ڪيتريون وٽيون گيهہ ۽ کنڊ لڳندي اهو لهي سگهجي ٿو.

$\therefore\ 3k = 12$ $\therefore\ k = 4$، $2k = 8$ يعني 4 وٽيون گيهہ ۽ 8 وٽيون کنڊ لڳندي.

ساڳيو ويچار ڇئن يا وڌيڪ ڳالهين جي پروپورشن لاءِ واپرائي سگهجي ٿو.

جيڪڏهن d,c,b,a اُنهن ڇئن عددن جو پورپورشن 2:3:7:4 آهي ته سمجهو ته اهي عدد آهن 4m،7m،3m،2m ڏنل چاڻ واپرائي m جو ملهه لهي سگهجي ٿو. مثال جيڪڏهن انهن ڇئن عددن جي جوڙاپٽ 48 آهي ته اهي عدد لهو.

هتي $2m + 3m + 7m + 4m = 16m = 48$

$\therefore \quad m = 3$

$\therefore \quad 2m = 6, \; 3m = 9, \; 7m = 21, \; 4m = 12$

∴ گهربل عدد آهن 6، 9، 21، 12

مثال (1) ڀاڻ جي 18:18:10 قسم ۾ نائٽروجن جا مرڪب 18% فاسفورس جا مرڪب 18% ۽ پوٽشيم جا مرڪب 10% آهي. بچيل حصو بين پدارٿن جو هوندو آهي. اهڙي 20 ڪ گ ڀاڻ ۾ هرهڪ قسم جا مرڪب ڪيترا ڪ گ هوندا؟

حل: سمجهو ته 20 ڪ گ ڀاڻ ۾ نائٽروجن جا مرڪب x ڪ گ آهن.

$$\therefore \quad \frac{18}{100} = \frac{x}{20} \qquad \therefore \quad x = \frac{18 \times 20}{100} = 3.6$$

∴ نائٽروجن جا مرڪب 3.6 ڪ گ هوندا.

فاسفورس مرڪب جو سيڪڙو به 18 آهي فاسفورس پڻ 3.6 ڪ گ هوندو سمجهو ته پوٽشيم جي مرڪب جو وزن y ڪ گ آهي.

$$\frac{10}{100} = \frac{y}{20} \qquad \therefore y = 2$$

∴ پوٽشيم مرڪب 2 ڪ گ هوندو

سڌي ڦير

هڪ موٽر ڪار 1 ل پيٽرول ۾ 10 ڪ م مفاصلو طيءِ ڪري ٿي.

ته 20 رپيا پيٽرول ۾ اها ڪار 10x20=200 ڪ م مفاصلو طيءِ ڪندي.

40 رپيا پيٽرول ۾ اها ڪار 10x40=400 ڪ م مفاصلو طيءِ ڪندي.

مٿين چاڻ لاءِ خاڪي ۾ لکنداسين.

پيٽرول : x ليٽر	1	20	40	
مفاصلو y ڪ م	10	200	400	
$\frac{x}{y}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{20}{200} = \frac{1}{10}$	$\frac{40}{400} = \frac{1}{10}$	$\frac{x}{y} = k$

ڪار ۾ وڌل پيٽرول (ليٽرن) ۾ ان پيٽرول وسيلي طيءِ ڪيل مفاصلو (ڪ م ۾) اهو ريشو مقرر آهي. ان وقت ائين چئبو ته اهي پد سڌي ڦير ۾ آهن.

اڻسڌي ڦير

هڪ ڪار کي 50 ڪ م في ڪلاڪ رفتار سان 100 ڪ م مفاصلو ڪرڻ ۾ 2 ڪلاڪ لڳن ٿا. هڪ بئل گاڏيءَ جي رفتار في ڪلاڪ 5 ڪ م آهي تہ ساڳيو مفاصلو (100 ڪ م) طيءِ ڪرڻ ۾ بئل گاڏيءَ کي 20 ڪلاڪ لڳن ٿا.

مفاصلو = رفتار x وقت اهو نيم خيال ۾ رکي چارٽ خاڪي ۾ لکنداسين.

	رفتار / ڪلاڪ x	وقت y	$x \times y$	$x \times y = k$
ڪار	50	2	100	
بئل گاڏي	5	20	100	

هتي واهڻ جي رفتار ۽ مسافريءَ ۾ لڳندڙ وقت جي ضرب اڀت مقرر آهي ان ڪري چئبو تہ اهي پد اڻسڌي ڦير ۾ آهن.

متئين مثال ۾ واهڻ جي رفتار ۽ مفاصلو طيءِ ڪرڻ ۾ لڳندڙ وقت اڻسڌي ڦير ۾ آهن.

ذرا ياد ڪريو

ريشو جون خاصيتون

(1) ٻن عددن a ۽ b جو ريشو a:b يا $\frac{a}{b}$ روپ ۾ لکجي ٿو هتي a کي پهريون پد ۽ b کي ٻيون پد چئجي ٿو.

(2) ٻن عددن جي ريشو ۾ جيڪڏهن ٻيون پد 100 هوندو تہ ان ريشو کي سيڪڙو چئبو آهي.

(3) ريشو جي سيني پدن کي ساڳئي غيرٻڙي عدد سان ضرب يا ونڊ ڪرڻ تي ريشو نہ بدلجندو آهي.

مثال $9:12 = 6:8 = 3:4$ يا $2:3:5 = 8:12:20$ يا k غيرٻڙي عدد هوندو تہ

$a : b = ak : bk$ $a : b:c = ak : bk : ck$

(4) جن عددن جو ريشو لڌو آهي انهن جي ماپ جا ايڪو ساڳيو هئڻ گهرجي .

(5) ريشو کي ايڪو نہ هوندو آهي.

جيئن 2 ڪ گ ۽ 300 گ جو ريشو 2:300 نہ ٿيندو اهو 2 ڪ گ = 2000 گ ان ڪري 2000:300 يعني 20:3 ٿيندو.

مثال (1) سيما ۽ راجشريءَ جي عمر جو ريشو 3:1 آهي راجشري ۽ اَتل جي عمر جو ريشو 2:3 آهي تہ سيما، راجشري ۽ اتل جي عمر جو ريشو لهو.

حل : سيما جي عمر : راجشريءَ جي عمر = 3:1   راجشريءَ جي عمر : اتل جي عمر 2:3

پهرئين ريشو جو ٻيون پد، ٻئين ريشو جو پهريون پد هئڻ گهرجي.

هتي لاڳيتو ريشو حاصل ڪرڻ لاءِ پهرئين ريشو 6 جي پدن کي 2سان ضرب ڪنداسين

انکري 6:2=3:1 ملندو.

$$\frac{2}{3} = \frac{\text{راجشريءَ جي عمر}}{\text{اتل جي عمر}} , \quad \frac{6}{2} = \frac{\text{سيما جي عمر}}{\text{راجشريءَ جي عمر}}$$

∴ سيما جي عمر : راجشريءَ جي عمر : اتل جي عمر 6 : 2 : 3

مثال (2) هڪ مستطيل کيت جي ڊيگهه 1.2 ڪ م آهي ، انجي ويڪر 400م آهي تہ ڊيگهہ جو ويڪرسان ريشو لهو.

حل : هتي ڊيگهہ ڪ م ۽ ويڪر م آهي. ريشو لاءِ ايڪا ساڳيا هئڻ گهرجن انڪري ڪ. م. ميٽر ۾ بدلائينداسين.

ڪ م کي م ۾ بدلائينداسين.

1.2ڪ م = 1.2x 1000=1200 م ∴ 1200 م جو 400سان ريشو لهبو

$$\text{ريشو} = \frac{1200}{400} = \frac{3}{1} = 3:1$$

مثال (3) مهيش جي ماهياني خرچ جو سندس اُپت سان ريشو 3:5 آهي ٻڌايو تہ هنجو خرچ سندس اُپت جو ڪيترو سيڪڙو آهي؟

حل : خرچ جو اپت مان ريشو 3:5 آهي اُنکي سيڪڙي ۾ بدلائڻ لاءِ ٻيون پد 100 ڪبو.

$$\frac{3}{5} = \frac{3\times20}{5\times20} = \frac{60}{100} \quad \text{يعني} \quad \frac{\text{خرچ}}{\text{اپت}} = \frac{60}{100} = 60\%$$

∴ مهيش جو خرچ اپت جو 60%آهي.

مثال (4) هڪ باغ ۾ انبن ۽ چڪن جي وڻن جي عددن جو ريشو 2:3 آهي. ان باغ ۾ هرهڪ قسمن جا اجا 5 وڻ لڳايا تہ اهو ريشو 5:7 ٿئي ٿو. ٻڌايو تہ ان باغ ۾ انبن ۽ چڪن جا ڪيترا وڻ آهن؟

حل : شروعاتي ريشو 2:3 آهي.

سمجهو تہ انبن جا وڻ آهن 2x۽ چڪن جا وڻ آهن 3x

$$\frac{2x+5}{3x+5} = \frac{5}{7}$$ ، ڏنل شرطن موجب

$$14x + 35 = 15x + 25$$

$$\therefore\ x = 10$$

∴ باغ ۾ انبن جا وڻ $= 2x = 2 \times 10 = 20$

∴ باغ ۾ چڪن جا وڻ $= 3x = 3 \times 10 = 30$

مثال (5) ٻن عددن جو ريشو 5:7 آهي جيڪڏهن هرهڪ عدد ۾ 40 جوڙ ڪيا تہ جوڙا اُبتن جو ريشو 25:31 ٿي ٿو تہ اهو عدد لهو.

حل : سمجهو تہ پهريون عدد = 5x ، ٻيون عدد = 7x

ڏنل شرطن موجب

$$\frac{5x+40}{7x+40}=\frac{25}{31}$$

$$31(5x+40)=25(7x+40)$$

$$155x+1240=175x+1000$$

$$1240-1000 = 175x-155x$$

$$240=20x$$

$$x=12$$

∴ پهريون عدد = 5 × 12 = 60

ٻيون عدد = 7 × 12 = 84

∴ گهربل عدد آهن 60 ۽ 84

اڀياس 4.1

(1) هيٺ ڏنل عددن جي جوڙي مان پهرئين عدد جو ٻئين عدد سان ريشو سادي ننڍي ۾ ننڍو روپ ۾ لکو.

(i) 72, 60 (ii) 38,57 (iii) 52,78

(2) هينئين ۾ پهرئين پد ٻئين پد سان ريشو سادي روپ ۾ لکو.

(i) 308 روپيا, 700 روپيا (ii) 40 پ 12 رپيا 14 رپيا

(iii) 2500 م ل , 5 ل (iv) 5 سال 8 مهنا , 3 سال 4 مهنا

(v) 1900 گ , 3.8 ڪ گ (vi) 5 منٽ 6 س , 7 منٽ 20 س

(3) هينيان سيڪڙا سادي روپ ۾ لکو.

(i) 75 : 100 (ii) 44 : 100 (iii) 6.25% (iv) 52 : 100 (v) 0.64%

(4) هڪ ننڍو گهر 3 ماڻهو ۾ 8 ڏينهن ۾ اڏين ٿا تہ ساڳيو گهر 6 ڏينهن ۾ اڏڻ لاءِ ڪيترا ماڻهو گهرجندا؟

(5) هينئين ريشوز کي سيڪڙي روپ ۾ بدلايو .

(i) 15 : 25 (ii) 47 : 50 (iii) $\frac{7}{10}$ (iv) $\frac{546}{600}$ (v) $\frac{7}{16}$

(6) آيا ۽ سندس ماءُ جي عمر جو ريشو 2:5 آيا جي جنم وقت سندس ماءُ جي عمر 27 سال هئي آيا ۽ سندس ماءُ جي اجوڪي عمر لهو.

(7) وندنا ۽ سارا جي اجوڪي عمر نمبروار 14 سال ۽ 10 سال آهي ڪيترن سالن کانپوءِ سندس عمر جي نسبت 5:4 ٿيندي؟

(8) ريهانا ۽ سندس ماءُ جي اجوڪي عمر جو ريشو 2:7 آهي. 2 سالن کانپوءِ سندن عمر جو ريشو 1:3 ٿيندو ريهانا جي اجوڪي عمر لهو.

ڄاڻي وٺون

ريشو جي ڀيٽ

جيڪڏهن $b > 0$, $d > 0$ تہ $\frac{a}{b}$ ، $\frac{c}{d}$ انهن ريشوز جي ڀيٽ ڏسون - ڀيٽ هيٺين نموني ڪري سگهبي.

(i) جيڪڏهن $ad > bc$ تہ $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$ (ii) جيڪڏهن $ad < bc$ تہ $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ (iii) جيڪڏهن $ad = bc$ تہ $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

هاڻي هيٺ ڏنل مثالن ۾ريشوز جي جوڙن جو سلسلو لاڳاپو طيءِ ڪريو.

مثال (1) $\frac{4}{9}, \frac{7}{8}$

حل : 4×8 ? 7×9

$32 < 63$

$\therefore \quad \frac{4}{9} < \frac{7}{8}$

مثال (2) $\frac{\sqrt{13}}{\sqrt{8}}, \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{5}}$

$\sqrt{13} \times \sqrt{5}$, ? $\sqrt{8} \times \sqrt{7}$

$\sqrt{65}$? $\sqrt{56}$

$\sqrt{65} > \sqrt{56}$

$\therefore \quad \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{8}} > \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{5}}$

مثال (3) جيڪڏهن a ۽ b سچا انگي عدد آهن ۽ $a < b$, $b > 1$ تہ $\frac{a-1}{b-1}$ ، $\frac{a+1}{b+1}$ جو سلسلو لاڳاپو طيءِ ڪريو

حل : $a < b$

$\therefore a - 1 < b - 1$

هاڻي اِن ڪٽ جون ويچار ڪريون. $\frac{a-1}{b-1} - \frac{a+1}{b+1}$

$$\frac{a-1}{b-1} - \frac{a+1}{b+1} = \frac{(a-1)(b+1)-(a+1)(b-1)}{(b-1)(b+1)}$$

$$= \frac{(ab-b+a-1)-(ab+b-a-1)}{b^2-1}$$

$$= \frac{ab-b+a-1-ab-b+a+1}{b^2-1}$$

$$= \frac{2a-2b}{b^2-1}$$

$$= \frac{2(a-b)}{b^2-1} \quad \ldots\ldots\ldots\ (1)$$

هاڻي $a < b$ $\quad \therefore a - b < 0$

$b > 1$ ۽ $b^2 - 1 > 0$

$\frac{2(a-b)}{b^2-1} < 0 \ldots\ldots\ldots\ (2)$

مان (1) ۽ (2) $\frac{a-1}{b-1} - \frac{a+1}{b+1} < 0$

$\frac{a-1}{b-1} < \frac{a+1}{b+1}$

مثال(4) جيڪڏهن $a : b = 2 : 1$ ۽ $b : c = 4 : 1$ تہ $\left(\frac{a^4}{32b^2c^2}\right)^3$ ڪالڪجو ملھہ لھو

حل : $\frac{a}{b} = \frac{2}{1}$ $\therefore a = 2b$ $\frac{b}{c} = \frac{4}{1}$ $\therefore b = 4c$

$a = 2b = 2 \times 4c = 8c$ $\therefore a = 8c$

هاڻي $a = 8c, b = 4c$ ملھہ رکڻ سان

$$\left(\frac{a^4}{32b^2c^2}\right)^3 = \left(\frac{(8c)^4}{32 \times 4^2 \times c^2 \times c^2}\right)^3$$

$$= \left[\frac{8 \times 8 \times 8 \times 8 \times c^4}{32 \times 16 \times c^2 \times c^2}\right]^3$$

$$= (8)^3$$

$$\therefore \left(\frac{a^4}{32b^2c^2}\right)^3 = 512$$

اڀياس 4.2

(1) $\frac{a}{b} = \frac{ak}{bk}$ خاصيت جو اِستعمال ڪري خالن ۾ مناسب عدد لکو.

(i) $\frac{5}{7} = \frac{....}{28} = \frac{35}{....} = \frac{....}{3.5}$ (ii) $\frac{9}{14} = \frac{4.5}{....} = \frac{....}{42} = \frac{....}{3.5}$

(2) هيٺين ۾ ريشو لھو.

(i) گول جي نيم قطر جو انجي گھيري سان هوندڙ ريشو.

(ii) r نيم قطر هوندڙ گول جي گھيري جو سندس ايراضيءَ سان هوندڙ ريشو .

(iii) 7 س م پاسي واري چورس جي اريب جو سندس پاسي سان هوندڙ ريشو.

(iv) ڊيگھہ 5 س م ۽ ويڪر 3.5 س م هوندڙ مستطيل جي گرد ماپ جو انجي ايراضيءَ سان هوندڙ ريشو .

(3) هيٺين ريشوز جي جوڙن ۾ ننڍ وڏائي طيءِ ڪريو .

(i) $\frac{\sqrt{5}}{3}, \frac{3}{\sqrt{7}}$ (ii) $\frac{3\sqrt{5}}{5\sqrt{7}}, \frac{\sqrt{63}}{\sqrt{125}}$ (iii) $\frac{5}{18}, \frac{17}{121}$

(iv) $\frac{\sqrt{80}}{\sqrt{48}}, \frac{\sqrt{45}}{\sqrt{27}}$ (v) $\frac{9.2}{5.1}, \frac{3.4}{7.1}$

(4)

(i) $\square$ABCD هڪ پوروچوٽ پاسو چؤڪندو آهي انجي $\angle A$ ۽ $\angle B$ جي ماپن جو ريشو 5:4 آهي $\angle B$ جي ماپ لھو

(ii) البرٽ ۽ سليم جي اڄوڪين عمر جو ريشو 5:9 آهي. پنجن سالن کانپوءِ سندن عمر جو ريشو 3:5 ٿيندو سندن اڄوڪي عمر لھو.

(iii) هڪ مستطيل جي ڊيگهه ۽ ويڪر ۾ ريشو 3:1 آهي. مستطيل جي گرد ماپ 36 س م آهي. ته مستطيل جي ڊيگهه ۽ ويڪر لهو.

(iv) ٻن عددن جو ريشو 31:23 آهي ۽ سندن جوڙ اپت 216 آهي اُهي عدد لهو.

(5*) جيڪڏهن $a : b = 3 : 1$ ۽ $b : c = 5 : 1$ ته لهو: (i) $\left(\frac{a^3}{15b^2c}\right)^3$ (ii) $\frac{a^2}{7bc}$

(6*) جيڪڏهن $\sqrt{0.04\times 0.4\times a} = 0.4\times 0.04\times \sqrt{b}$ ته $\frac{a}{b}$ جو ريشو لهو.

(7) $(x+3) : (x+11) = (x-2) : (x+1)$ ته x جو ملهه لهو.

چاڙهي وٺون

برابر لاڳن ريشوز جون خاصيتون

برابري ۾ جي خاصيتون ڪم آڻي ٻن برابر ريشو تي ڪجهه ڪاروايون ڪري سگهجن ٿيون اچو ته انهن جو اڀياس ڪريون جيڪڏهن a,b,c,d واڌو عدد آهن ته انهن نسبت هيٺين خاصيتون سمجهو.

(I) انورٽينڊو (Invertendo) جيڪڏهن $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ ته $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

$$\therefore\ a\times d=b\times c$$

$$\therefore\ b\times c=a\times d$$

$$\therefore\ \frac{b\times c}{a\times c}=\frac{a\times d}{a\times c}$$ (ٻنهي پاسي $a\times c$ سان ونڊڻ تي)

$$\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$$

$\therefore$ جيڪڏهن $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ ته $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$ ان خاصيت کي ٽينڊو يا اُلٽوڪ چئجي ٿو.

(II) الٽر نينڊو ٽينڊو (Alternando) جيڪڏهن $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ ته $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

$$\therefore\ a\times d=b\times c$$

$$\frac{a\times d}{c\times d}=\frac{b\times c}{c\times d}$$ (ٻنهي پاسي $c\times d$ سان ونڊڻ تي)

$$\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$$

جيڪڏهن $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ ته $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$ ان خاصيت کي يا متبدل لوگ الٽرنينڊو چئجي ٿو.

(III) ڪامپونينڊو (Componendo) جيڪڏهن $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ تہ $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

$$\frac{a}{b}+1=\frac{c}{d}+1$$ (ٻنهي پاسي 1 جوڙڻ سان)

$$\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$$

جيڪڏهن $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ تہ $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$ ان خاصيت کي ڪامپنينڊو يا سنجوڳچئجي ٿو.

(IV) ڊويڊينڊو (Dividendo) جيڪڏهن $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ تہ $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$

$\therefore \quad \frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

$\therefore \quad \frac{a}{b}-1=\frac{c}{d}-1$ (ٻنهي پاسي 1 ڪٽ ڪرڻ سان)

$\therefore \quad \frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$

جيڪڏهن $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ تہ $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$ ان خاصيت کي ڊويڊينڊو يا ويوڳہ چئجي ٿو.

(V) ڪامپونينڊو - ڊويڊنيڊو (Componendo–dividendo) جيڪڏهن $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ تہ $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$ ، $a\neq b$ ، $c\neq d$

جيڪڏهن $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

$\therefore \quad \frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$ (ڪامپونينڊووسيلي ڏنل) ....(1)

$\therefore \quad \frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$ (ڊويڊنيڊو وسيلي) ....(2)

$\therefore \quad \frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$ (1 ۽ 2 مان)

جيڪڏهن $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ تہ $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$ ان خاصيت کي ڪامپونينڊو- ڊويڊنيڊو يا سنجوڳہ - ويوڳہ چئجي ٿو.

ڪامپو نينڊو ڊويڊينڊو ڪريائن جو عام روُپ :

جيڪڏهن $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ تہ $\frac{c+d}{d}=\frac{a+b}{b}$ (هڪ دفعو ڪامپونينڊو)

$$\frac{a+2b}{b}=\frac{c+2d}{d}$$ (ٻہ دفعا ڪامپونينڊو ڪريا)

عام طوُر $\frac{a+mb}{b}=\frac{c+md}{d}$ (m دفعا ڪامپونينڊو ڪريا) ...(1)

ساڳئي نموني $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ تہ $\frac{a-mb}{b}=\frac{c-md}{d}$ (mدفعا ڊويڊنيڊو ڪريا) ...(2)

جيڪڏهن $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ تہ $\frac{a+mb}{a-mb}=\frac{c+md}{c-md}$ (1 ۽ 2مان، ونڊ ڪري) ...

ڎیان ۑړکو

جیکڈهن $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ تہ $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$ (انورټینډو) جیکڈهن $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ تہ $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$ (کامپونینډو)

جیکڈهن $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ تہ $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$ (انټرنینډو) جیکڈهن $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ تہ $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$ (کامپونینډو)

جیکڈهن $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ تہ $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$ (کامپوټینډو - ډویډنیډو)

حل کیل مثال :

مثال (1) جیکڈهن $\frac{a}{b}=\frac{5}{3}$ تہ $\frac{a+7b}{7b}$ = ریشو لهو .

طریقو I

حل: جیکڈهن $\frac{a}{b}=\frac{5}{3}$ تہ $\frac{a}{5}=\frac{b}{3}=k$ ، (الټرنینډو موجب)

$$\therefore\ a=5k,\ b=3k$$

$$\therefore\ \frac{a+7b}{7b}=\frac{5k+7\times3k}{7\times3k}$$

$$=\frac{5k+21k}{21k}$$

$$=\frac{26k}{21k}\quad=\frac{26}{21}$$

طریقو II

$$\frac{a}{b}=\frac{5}{3}$$

$$\therefore\ \frac{a}{7b}=\frac{5}{21}$$

$$\therefore\ \frac{a+7b}{7b}=\frac{5+21}{21}$$ (کامپونینډو موجب)

$$\therefore\ \frac{a+7b}{7b}=\frac{26}{21}$$

مثال (2) جیکڈهن $\frac{a}{b}=\frac{7}{4}$ تہ $\frac{5a-b}{b}$ لهو

طریقو I

حل : $\frac{a}{b}=\frac{7}{4}$

$\therefore\ \frac{a}{7}=\frac{b}{4}$ (انټرټینډو موجب)

$\therefore\ \frac{a}{7}=\frac{b}{4}=m$ سمجهو تہ

$$\therefore\ a=7m,\quad b=4m$$

$$\therefore\ \frac{5a-b}{b}=\frac{5(7m)-4m}{4m}$$

$$=\frac{35m-4m}{4m}$$

$$=\frac{31}{4}$$

طریقو II

$$\frac{a}{b}=\frac{7}{4}$$

$$\frac{5a}{b}=\frac{5\times7}{4}$$

$$=\frac{35}{4}$$

$$\frac{5a-b}{b}=\frac{35-4}{4}$$ (ډویډنیډو موجب)

$$\frac{5a-b}{b}=\frac{31}{4}$$

مثال (3) جيڪڏهن $\frac{a}{b}=\frac{7}{3}$ تہ $\frac{a+2b}{a-2b}$ ملهہ لهو.

طريقو I : سمجهو تہ $a=7m,\ b=3m$

$$\therefore \frac{a+2b}{a-2b}=\frac{7m+2\times 3m}{7m-2\times 3m}$$

$$=\frac{7m+6m}{7m-6m}$$

$$=\frac{13m}{m}=\frac{13}{1}$$

طريقو II : $\therefore \frac{a}{b}=\frac{7}{3}$

ٻنهي پاسي $\frac{1}{2}$ سان ضربڻ سان … $\therefore \frac{a}{2b}=\frac{7}{6}$

(ڪامپونينڊو ڊويڊنيڊو موجب) $\therefore \frac{a+2b}{a-2b}=\frac{7+6}{7-6}$

$$\therefore \frac{a+2b}{a-2b}=\frac{13}{1}$$

مثال (4) جيڪڏهن $\frac{a}{3}=\frac{b}{2}$ تہ $\frac{5a+3b}{7a-2b}$ تہ جو ملهہ لهو

حل :

طريقو I

$$\frac{a}{3}=\frac{b}{2}$$

$$\therefore \frac{a}{b}=\frac{3}{2}\ \cdots\cdots$$

هاڻي $\frac{5a+3b}{7a-2b}$ جي هرهڪ پد کي b سان ونڊڻ تي.

$$\frac{\frac{5a}{b}+\frac{3b}{b}}{\frac{7a}{b}-\frac{2b}{b}}=\frac{5\left(\frac{a}{b}\right)+3}{7\left(\frac{a}{b}\right)-2}$$

$$=\frac{5\left(\frac{3}{2}\right)+3}{7\left(\frac{3}{2}\right)-2}$$

$$=\frac{\frac{15}{2}+3}{\frac{21}{2}-2}$$

$$=\frac{15+6}{21-4}$$

$$=\frac{21}{17}$$

طريقو II

ڏنل $\frac{a}{3}=\frac{b}{2}$

سمجهو تہ $\therefore \frac{a}{3}=\frac{b}{2}=t$

ملهہ رکڻ سان $\therefore\ a=3t$ ۽ $b=2t$

$$\frac{5a+3b}{7a-2b}=\frac{5(3t)+3(2t)}{7(3t)-2(2t)} \quad (t\neq 0)$$

$$=\frac{15t+6t}{21t-4t}$$

$$=\frac{21t}{17t}$$

$$=\frac{21}{17}$$

مثال (5) جيڪڏهن $\frac{x}{y}=\frac{4}{5}$ تہ $\frac{4x-y}{4x+y}$ جو ملهہ لهو

حل :

$$\frac{x}{y} = \frac{4}{5}$$

$$\frac{4x}{y} = \frac{16}{5} \quad \text{...}$$ (ٻنهي پاسي 4 سان ضربڻ تي)

$$\therefore \frac{4x+y}{4x-y} = \frac{16+5}{16-5} \quad \text{...}$$ (ڪامپونيندو ڊويڊيندو)

$$\therefore \frac{4x+y}{4x-y} = \frac{21}{11}$$

$$\therefore \frac{4x-y}{4x+y} = \frac{11}{21}$$ (انورٽيندو)

مثال (6) جيڪڏهن $5x = 4y$ تہ $\frac{3x^2+y^2}{3x^2-y^2}$ جيڪڏهن تہ جو ملهہ لهو.

حل:

$$\frac{x}{y} = \frac{4}{5}$$

$$\frac{x^2}{y^2} = \frac{16}{25}$$

$$\therefore \frac{3x^2}{y^2} = \frac{48}{25} \quad \text{..}$$ (ٻنهي پاسي 3 سان ضربڻ تي)

$$\therefore \frac{3x^2+y^2}{3x^2-y^2} = \frac{48+25}{48-25} \quad \text{...}$$ (ڪامپونيندو ڊويڊيندو)

$$\therefore \frac{3x^2+y^2}{3x^2-y^2} = \frac{73}{23}$$

$\therefore$

چاڪي ونون

برابر ريشوز جي خاصيتن جو اِستعمال (Use of Properties of equal ratios)

ڪجهہ مساواتون ٻين طريقن سان حل ڪرڻ کان برابر ريشوز جي خاصيتن وسيلي حل ڪرڻ سؤلو ٿيندو آهي.

مثال (1) مساوات حل ڪريو $\frac{3x^2+5x+7}{10x+14} = \frac{3x^2+4x+3}{8x+6}$

حل : $\frac{3x^2+5x+7}{10x+14} = \frac{3x^2+4x+3}{8x+6}$

$$\frac{(6x^2+10x+14)}{10x+14} = \frac{(6x^2+8x+6)}{8x+6}$$ (ٻنهي پاسي 2 سان ضربڻ تي)

$$\frac{(6x^2+10x+14)-(10x+14)}{10x+14}=\frac{(6x^2+8x+6)-(8x+6)}{8x+6}$$ (ڊويڊينڊو)

$$\therefore \quad \frac{6x^2}{10x+14}=\frac{6x^2}{8x+6}$$

اها مساوات x=0ملهہ سان صحيح بڻجي ٿي . $\therefore\ x=0$ اهو هڪ حل آهي .

جيڪڏهن $x \neq 0$ تہ $x^2 \neq 0$, $\therefore\ 6x^2$ ونڊبڻ ٿي ، $\frac{1}{10x+14}=\frac{1}{8x+6}$

$$\therefore \quad 8x+6=10x+14$$

$$\therefore \quad 6-14=10x-8x$$

$$\therefore \quad -8=2x$$

$$\therefore \quad x=-4$$

$\therefore\ x=-4$ يا $x=0$ ڏنل مساوات جا حل آهن.

مثال (2) حل ڪريو $\frac{\sqrt{x+7}+\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+7}-\sqrt{x-2}}=\frac{5}{1}$

$$\frac{(\sqrt{x+7}+\sqrt{x-2})+(\sqrt{x+7}-\sqrt{x-2})}{(\sqrt{x+7}+\sqrt{x-2})-(\sqrt{x+7}-\sqrt{x-2})}=\frac{5+1}{5-1}$$ (ڪامپونينڊو - ڊويڊينڊو)

$$\therefore \quad \frac{2\sqrt{x+7}}{2\sqrt{x-2}}=\frac{6}{4}$$

$$\therefore \quad \frac{\sqrt{x+7}}{\sqrt{x-2}}=\frac{3}{2}$$

$$\therefore \quad \frac{x+7}{x-2}=\frac{9}{4}$$ (ٻنهي پاسي ٻي سگهہ ڪري)

$$\therefore \quad 4x+28=9x-18$$

$$\therefore \quad 28+18=9x-4x$$

$$\therefore \quad 46=5x$$

$$\therefore \quad \frac{46}{5}=x$$

$\therefore\ x=\frac{46}{5}$ ڏنل مساوات جو حل آهي.

مشغولي : ٿلهي ڪاغذ جا پنج ٽڪرڪٽو هرهڪ ڪاغذ تي هيٺين مان هڪ هڪ بيان لکو.

(i) $\dfrac{a+b}{b}=\dfrac{c+d}{d}$ (ii) $\dfrac{a}{c}=\dfrac{b}{d}$ (iii) $\dfrac{a}{b}=\dfrac{ac}{bd}$ (iv) $\dfrac{c}{d}=\dfrac{c-a}{d-b}$ (v) $\dfrac{a}{b}=\dfrac{rc}{rd}$

a,c,b,d واڌو عدد آهن ۽ $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$ اها ڄاڻ مليل آهي مٿين مان هرهڪ بيان صحيح آهي يا غلط اهو ڪارڊ جي پٺيان لکو غلط بيان جو سبب لکو.

اڀياس 4.3

(1) جيڪڏهن $\dfrac{a}{b}=\dfrac{7}{3}$ ته هيٺين ريشوز جا ملهه لهو.

(i) $\dfrac{5a+3b}{5a-3b}$ (ii) $\dfrac{2a^2+3b^2}{2a^2-3b^2}$ (iii) $\dfrac{a^3-b^3}{b^3}$ (iv) $\dfrac{7a+9b}{7a-9b}$

(2) جيڪڏهن $\dfrac{15a^2+4b^2}{15a^2-4b^2}=\dfrac{47}{7}$ ته هيٺين ريشوز جا ملهه طيءِ ڪريو .

(i) $\dfrac{a}{b}$ (ii) $\dfrac{7a-3b}{7a+3b}$ (iii) $\dfrac{b^2-2a^2}{b^2+2a^2}$ (iv) $\dfrac{b^3-2a^3}{b^3+2a^3}$

(3) جيڪڏهن $\dfrac{3a+7b}{3a-7b}=\dfrac{4}{3}$ ته $\dfrac{3a^2-7b^2}{3a^2+7b^2}$ ريشو جو ملهه لهو.

(4) هيٺيون مساواتون حل ڪريو.

(i) $\dfrac{x^2+12x-20}{3x-5}=\dfrac{x^2+8x+12}{2x+3}$ (ii) $\dfrac{10x^2+15x+63}{5x^2-25x+12}=\dfrac{2x+3}{x-5}$

(iii) $\dfrac{(2x+1)^2+(2x-1)^2}{(2x+1)^2-(2x-1)^2}=\dfrac{17}{8}$ (iv*) $\dfrac{\sqrt{4x+1}+\sqrt{x+3}}{\sqrt{4x+1}-\sqrt{x+3}}=\dfrac{4}{1}$

(v) $\dfrac{(4x+1)^2+(2x+3)^2}{4x^2+12x+9}=\dfrac{61}{36}$ (vi) $\dfrac{(3x-4)^3-(x+1)^3}{(3x-4)^3+(x+1)^3}=\dfrac{61}{189}$

مشغولي : هيٺ ڏنل وچواري چوڪٽ جي a، b جا ملهه بدلائي يعني a:b ريشو جو ملهه ڦيري اڳيان اڳيان مثال ڏاهي سگهبا. اُستاد اهڙا مثال ڏهرائي اڀياس ڪرائين .

$\dfrac{a}{b}=\dfrac{3}{4}$

- $\dfrac{5a^2+2b^2}{5a^2-2b^2}=$ -----
- $\dfrac{3a}{4b}=$ -----
- $\dfrac{2a-b}{2a+b}=$ -----
- $\dfrac{a^2+b^2}{b^2}=$ ---
- $\dfrac{a}{2b}=$ -----

چاڻي وٺون

برابر ريشوز جو سڏيان (Theorem on equal ratios)

جيڪڏهن $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ تہ $\frac{a}{b}=\frac{a+c}{b+d}=\frac{c}{d}$ تہ ان خاصيت کي برابر ريشوز جو سڏيان چئجي ٿو

ثابتي : سمجهو تہ $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k \quad \therefore \quad a=bk \quad , \quad c=dk$

$$\therefore \quad \frac{a+c}{b+d}=\frac{bk+dk}{b+d}=\frac{k\left(b+d\right)}{b+d}=k$$

$$\therefore \quad \frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}$$

اسان کي ڄاڻ آهي تہ $\frac{a}{b}=\frac{al}{bl}$

$\therefore$ جيڪڏهن $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k$, تہ $\frac{al}{bl}=\frac{cm}{dm}=\frac{al+cm}{bl+dm}=k$

ساڳئي نموني جيڪڏهن $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=........$ (محدود پد) ۽ n,m,l غيرٻڙي عدد آهن

تہ هر هڪ ريشو $=\frac{al+cm+en+...}{bl+dm+fn+...}$ (محدود پد)

(اهو برابر ريشوز جي سڏيان جو عام روپ ملي ٿو.)

ويچار ڪريو

هڪ ڪسرت شالا ۾ ننڍڙن ٻارن جي گروهہ ۾ 35 ڇوڪريون ۽ 42 ڇوڪرا، ٻار گروهہ ۾ 30 ڇوڪريون ۽ 36 ڇوڪرا ۽ جوان گروهہ ۾ 20 ڇوڪريون ۽ 24 ڇوڪرا آهن تہ هر هڪ گروهہ ۾ ڇوڪرين جو ڇوڪرن جي عدد سان ريشو لهو.

ٽيم ڪوايد لاءِ ٽيئي گروهہ ميدان تي آيا. تہ ڪل ڇوڪرين ۽ ڪل ڇوڪرن جي عدد جو ريشو ٻڌايو.

مٿين مثال مان توهان برابر ريشو جي سڏيان جي چڪاس ڪريو.

مثال (1) هيٺيان خال پريو

(i) $\frac{a}{3}=\frac{b}{7}=\frac{4a+9b}{..........}$ (ii) $\frac{x}{3}=\frac{y}{5}=\frac{z}{4}=\frac{5x-3y+4z}{...............}$

حل : (i) $\frac{a}{3}=\frac{b}{7}=\frac{4a+9b}{4\times3+9\times7}=\frac{4a+9b}{12+63}=\frac{4a+9b}{75}$

(ii) $\frac{x}{3}=\frac{y}{5}=\frac{z}{4}=\frac{5\times x}{5\times3}=\frac{-3\times y}{-3\times5}=\frac{4\times z}{4\times4}$

$$\therefore \quad =\frac{5x}{15}=\frac{-3y}{-15}=\frac{4z}{16}$$

$$=\frac{5x-3y+4z}{15-15+16} \quad ---- \text{ (برابر ريشو جي سڏيان موجب)}$$

$$=\frac{5x-3y+4z}{16}$$

مثال (2) جيڪڏھن $\frac{a}{(x-2y+3z)}=\frac{b}{(y-2z+3x)}=\frac{c}{(z-2x+3y)}$ ۽ $x+y+z\neq 0$ تہ

ڏيکاريو تہ $\frac{a+b+c}{2(x+y+z)}$ = هرهڪ ريشو

حل : سمجھو تہ $\frac{a}{(x-2y+3z)}=\frac{b}{(y-2z+3x)}=\frac{c}{(z-2x+3y)}=k$

$\therefore$ برابر ريشوز جي سڏيان موجب

$$k=\frac{a+b+c}{(x-2y+3z)+(y-2z+3x)+(z-2x+3y)}$$

$$=\frac{a+b+c}{2x+2y+2z}$$

$$=\frac{a+b+c}{2(x+y+z)}$$

$$\therefore\quad \frac{a}{x-2y+3z}=\frac{b}{y-2z+3x}=\frac{c}{z-2x+3y}=\frac{a+b+c}{2(x+y+z)}$$

مثال (3) جيڪڏھن $\frac{a}{z+x}=\frac{b}{x+y}=\frac{c}{y+z}$ تہ $\frac{y}{b+c-a}=\frac{z}{c+a-b}=\frac{x}{a+b-c}$ اھو ثابت ڪريو

حل

$$\frac{b+c-a}{y}=\frac{c+a-b}{z}=\frac{a+b-c}{x}$$ (انورتيندو موجب)

سمجھو تہ $\frac{b+c-a}{y}=\frac{c+a-b}{z}=\frac{a+b-c}{x}=k$

برابر ريشوز جي سڏيان موجب

$$k=\frac{(b+c-a)+(c+a-b)}{y+z}=\frac{2c}{y+z}\quad .....(III)$$

$$k=\frac{(a+b-c)+(b+c-a)}{x+y}=\frac{2b}{x+y}\quad ....(II)$$

$$k=\frac{(c+a-b)+(a+b-c)}{z+x}=\frac{2a}{z+x}\quad .....(I)$$

$$\therefore\quad \frac{2a}{z+x}=\frac{2b}{x+y}=\frac{2c}{y+z}$$

$$\therefore\quad \frac{a}{z+x}=\frac{b}{x+y}=\frac{c}{y+z}$$

مثال (4) حل ڪريو : $\frac{14x^2-6x+8}{10x^2+4x+7}=\frac{7x-3}{5x+2}$

حل : مساوات کي جاچڻ سان چاڻ پوندي تہ ساڄي پاسي ريشو کي جي ٻنهي پدن کي 2x سان ضربڻ تي کابي ريشو جا پھريان ٻہ پد ملن ٿا ان ڪري اسين ساڄي ريشو کي 2x سان ضربينداسين. (هتي x غيرٻڙي عدد آهي اھو پڪ ڪريون)

جيڪڏهن $x = 0$ تہ $\frac{8}{7} = \frac{14x^2-6x+8}{10x^2+4x+7}$ ۽ $\frac{7x-3}{5x+2} = \frac{-3}{2}$

$\therefore \frac{8}{7} = \frac{3}{2}$ (اها اڻٺيڪ آهي)

$\therefore x \neq 0$

($\therefore$ ٻئي ريشو جي ٻنهي پدن کي 2x سان ضرب ڪريو.)

$$\frac{14x^2-6x+8}{10x^2+4x+7} = \frac{2x(7x-3)}{2x(5x+2)} = k$$

$$\therefore \frac{14x^2-6x+8}{10x^2+4x+7} = \frac{14x^2-6x}{10x^2+4x} = k$$

$$\therefore \frac{14x^2-6x+8-14x^2+6x}{10x^2+4x+7-10x^2-4x} = \frac{8}{7} = k$$

$$\therefore k = \frac{8}{7}$$

$$\therefore \frac{7x-3}{5x+2} = \frac{8}{7}$$

$$\therefore 49x-21 = 40x+16$$

$$\therefore 49x-40x = 16+21$$

$$\therefore 9x = 37 \qquad \therefore x = \frac{37}{9}$$

اڀياس 4.4

(1) خال ڀريو

(i) $\frac{x}{7} = \frac{y}{3} = \frac{3x+5y}{\ldots\ldots\ldots} = \frac{7x-9y}{\ldots\ldots}$ (ii) $\frac{a}{3} = \frac{b}{4} = \frac{c}{7} = \frac{a-2b+3c}{\ldots\ldots} = \frac{\ldots\ldots}{6-8+14}$

(2) جيڪڏهن $5m - n = 3m + 4n$ تہ هيٺين ڪالڪن جا ملهہ لهو.

(i) $\frac{m^2+n^2}{m^2-n^2}$ (ii) $\frac{3m+4n}{3m-4n}$

(3) (i) جيڪڏهن $a(y+z)=b(z+x) = c(x+y)$ ۽ a, b, c مان ڪي بہ ٻہ عدد برابر نہ آهن تہ ڏيکاريو.

$$\frac{y-z}{a(b-c)} = \frac{z-x}{b(c-a)} = \frac{x-y}{c(a-b)}$$

(ii) جيڪڏهن $\frac{x}{3x-y-z} = \frac{y}{3y-z-x} = \frac{z}{3z-x-y}$ ۽ جيڪڏهن $x+y+z \neq 0$

تہ ڏيکاريو تہ هرهڪ ريشو جو ملهہ 1 آهي.

(iii) جيڪڏهن $\frac{ay+bz}{y+z}=\frac{bx+az}{x+z}=\frac{ax+by}{x+y}$ ۽ $x+y+z\neq 0$ ثابت ڪريو ته هرهڪ ريشو $=\frac{a+b}{2}$

(iv) جيڪڏهن $\frac{x+y}{c}=\frac{z+x}{b}=\frac{y+z}{a}$ ته ڏيکاريو $\frac{x}{b+c-a}=\frac{y}{c+a-b}=\frac{z}{a+b-c}$

(v) جيڪڏهن $\frac{3x-5y}{5z+3y}=\frac{x+5z}{y-5x}=\frac{y-z}{x-z}$ ته ڏيکاريو ريشو هر هڪ $\frac{x}{y}$ جيترو آهي.

(4) حل ڪريو:

(i) $\frac{16x^2-20x+9}{8x^2+12x+21}=\frac{4x-5}{2x+3}$ (ii) $\frac{5y^2+40y-12}{5y+10y^2-4}=\frac{y+8}{1+2y}$

جاچي وٺون

لڳيتو پروپورشن (Continued Proportion)

4:12 ۽ 12:36 ريشو برابر آهن انهن ٻن ريشوز ۾ پيون جو پهريون پد ۽ پوئين جو پهرئين پد ساڳيا آهن هتي عدد 36,12,4 لڳيتي پرپورشن ۾ آهن ائين چئبو.

جڏهن $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$ ته چئبو ته a، b، c لڳيتي پروپورشن ۾ آهن.

جيڪڏهن $ac=b^2$، ته ٻنهي پاسي bc سان ونڊڻ تي $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$ مساوت ملندي.

$\therefore$ $ac=b^2$ ۾ ٻه a، b، c لڳيتي پروپورشن ۾ آهن.

جڏهن a، b، c لڳيتي پروپورشن ۾ هوندا آهن ته b کي a ۽ c جو جاميترڪ وچ (Geometric mean) يا وچون پروپورشن (Mean proportional) چئبو آهي. مٿين ڳالهه جا مان هيٺيان هڪجهڙا بيان ملن ٿا.

$\therefore$ (1) $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$ (2) $b^2=ac$ (3) a, b, c ، لڳيتي پروپورشن ۾ آهن

(4) b اهو a ۽ c جو جاميترڪ وچ آهي. (5) b اهو c,a جو وچون پروپورشن آهي.

لڳيتي پروپورشن جو ٻه وستار ڪري سگهجي ٿو.

جيڪڏهن $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}=\frac{d}{e}=\frac{e}{f}$ ته چئبو a، b، c، d، e ۽ f لڳيتي پروپورشن ۾ آهن.

مثال (1) جيڪڏهن x اهو 25 ۽ 4 جو جاميترڪ وچ آهي ته x جو ملهه لهو

حل: x اهو 25 ۽ 4 جوجاميترڪ وچ آهي.

$$\therefore \quad x^2 = 25\times 4$$
$$\therefore \quad x^2 = 100$$
$$\therefore \quad x = 10$$

مثال (2) جيڪڏهن $4\,a^2b$، $8\,ab^2$، p لڳيتي پروپورشن ۾ آهن تہ p جو ملهہ لهو.

حل : $4\,a^2b$، $8\,ab^2$، p لڳيتي پروپورشن ۾ آهن.

$$\therefore \quad \frac{4a^2b}{8ab^2} = \frac{8ab^2}{p}$$

$$p = \frac{8ab^2 \times 8ab^2}{4a^2b} = 16b^3$$

مثال (3) 7، 12 ۽ 18 عددن مان ڪهڙو عدد ڪٽ ڪجي جيئن ملندڙ عدد لڳيتي پروپورشن ۾ هجن.

حل : سمجهو تہ x عدد ڪٽ ڪرڻ سان ملندڙ عدد لڳيتي پروپورشن ۾ ٿيندا.

لڳيتي پروپورشن ۾ آهن $(7-x), (12-x), (18-x)$

$$\therefore \quad (12-x)^2 = (7-x)(18-x)$$

$$\therefore \quad 144 - 24x + x^2 = 126 - 25x + x^2$$

$$\therefore \quad -24x + 25x = 126 - 144$$

$$\therefore \quad x = -18$$

چڪاس

$$(7-x) = 7-(-18) = 25$$

$$(12-x) = 12-(-18) = 30$$

$$(18-x) = 18-(-18) = 36$$

$$30^2 = 900 \qquad 25 \times 36 = 900$$

لڳيتي پروپورشن ۾ آهن. $25, 30, 36$

$\therefore$ 7، 12، 18 مان -18 ڪٽ ڪرڻ سان عدد لڳيتي پروپورشن ۾ ملندا.

k – طريقو (k –method)

k طريقو ريشوز ۽ پروپورشن جا مثال حل ڪرڻ جو هڪ سؤلو طريقو آهي. هن طريقي ۾ هرهڪ ريشو جو ملهہ k مڃيو آهي.

مثال (1) جيڪڏهن $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ تہ ڏيکاريو : $\frac{5a-3c}{5b-3d} = \frac{7a-2c}{7b-2d}$

حل : $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$ سمجهو تہ $\therefore\ a = bk,\ c = dk$

(a ۽ b جا ملهہ پنهنجي پاسن ۾ رکي.)

$$\text{LHS} = \frac{5a-3c}{5b-3d} = \frac{5(bk)-3(dk)}{5b-3d} = \frac{k(5b-3d)}{(5b-3d)} = k$$

$$\text{RHS} = \frac{7a-2c}{7b-2d} = \frac{7(bk)-2(dk)}{7b-2d} = \frac{k(7b-2d)}{7b-2d} = k$$

$$\therefore \quad \text{LHS} = \text{RHS}$$

$$\therefore \quad \frac{5a-3c}{5b-3d} = \frac{7a-2c}{7b-2d}$$

مثال (2) جيڪڏهن c,b,a لاڳيتي پروپورشن ۾ آهن تہ ثابت ڪريو $\frac{(a+b)^2}{ab}=\frac{(b+c)^2}{bc}$

حل : c,b,a لاڳيتي پروپورشن ۾ آهن سمجهو تہ $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=k$

$(\therefore b=ck,\ a=bk=ck\times k=ck^2)$

a ۽ b جا ملهہ رکڻ سان

$$\text{LHS}=\frac{(a+b)^2}{ab}=\frac{(ck^2+ck)^2}{(ck^2)(ck)}=\frac{c^2k^2(k+1)^2}{c^2k^3}=\frac{(k+1)^2}{k}$$

$$\text{RHS}=\frac{(b+c)^2}{bc}=\frac{(ck+c)^2}{(ck)c}=\frac{c^2(k+1)^2}{c^2k}=\frac{(k+1)^2}{k}$$

$\therefore$ LHS = RHS $\qquad \therefore \frac{(a+b)^2}{ab}=\frac{(b+c)^2}{bc}$

مثال (3) جيڪڏهن c,b,a لاڳيتي پروپورشن ۾ آهن تہ ثابت ڪريو.

سمجهو تہ : $\frac{a}{c}=\frac{a^2+ab+b^2}{b^2+bc+c^2}$

حل : a ۽ b لاڳيتي پروپورشن ۾ آهن . $\therefore \frac{a}{b}=\frac{b}{c}$

سمجهو تہ ، $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\text{k}$ $\therefore b=ck$ ۽ $a=ck^2$

$$\text{LHS}=\frac{a}{c}=\frac{ck^2}{c}=k^2$$

$$\text{RHS}=\frac{a^2+ab+b^2}{b^2+bc+c^2}$$

$$=\frac{(k^2c)^2+ck^2(ck)+(ck)^2}{(ck)^2+(ck)(c)+c^2}$$

$$=\frac{k^4c^2+k^3c^2+c^2k^2}{c^2k^2+c^2k+c^2}$$

$$=\frac{c^2k^2(k^2+k+1)}{c^2(k^2+k+1)}$$

$$=k^2$$

$\therefore$ LHS = RHS

$$\therefore \frac{a}{c}=\frac{a^2+ab+b^2}{b^2+bc+c^2}$$

مثال (4) پنج عدد لاڳيتي پروپورشن ۾ آهن انهن ۾ پهريون پد 5 ۽ آخرين پد 80 آهي تہ اهي عدد لهو.

سمجهو تہ اهي پنج پد آهن

$(a,\ ak,\ ak^2,\ ak^3,\ ak^4)$

هتي $a=5$ ۽ $ak^4=80$

$\therefore 5\times k^4=80$

$\therefore k^4=16$

$\therefore k=2 \quad \because 2^4=16$

$ak=5\times 2=10 \qquad ak^2=5\times 4=20$

$ak^3=5\times 8=40 \qquad ak^4=5\times 16=80$

اهي عدد آهن 5, 10, 20, 40, 80

اڀياس 4.5

(1) 16,12 ۽ 21 مان هرهڪ عدد ۾ ڪهڙو عدد جوڙڪجي ته ملندڙ عدد لاڳيتي پروپورشن ۾ ٿيندا؟

(2) (23-x) ۽ (19-x) جو (28-x) وچون پروپورشنل آهي ته x جو ملهه لهو.

(3) ٽي عدد لاڳيتي پروپورشن ۾ آهن انهنجو وچون پروپورشنل 12 آهي ۽ بچيل ٻن عددن جي جوڙ پٽ 26 آهي ته اهي عدد لهو.

(4) جيڪڏهن $(a + b + c)(a - b + c) = a^2 + b^2 + c^2$ ته ڏيکاريو ته a، b، c عدد لاڳيتي پروپورشن ۾ آهن.

(5) جيڪڏهن $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$ ۽ $a, b, c > 0$ سال آهي ته ثابت ڪريو ته

(i) $(a + b + c)(b - c) = ab - c^2$

(ii) $(a^2 + b^2)(b^2 + c^2) = (ab + bc)^2$

(iii) $\frac{a^2+b^2}{ab} = \frac{a+c}{b}$

(6) $\frac{x+y}{x-y}$، $\frac{x^2-y^2}{x^2y^2}$ وچون پورپوشنل لهو.

مشغولي : جاگرافي ۽ جي ڪتاب ۾ ڀارت جو سياسي نقشو ڏسو، ان ۾ ڏنل مفاصلي جو پئمانو ڏسو. ان وسيلي الڳ الڳ شهرن ۾ سڌي ليڪ ۾ مفاصلو لهو.

جيئن (i) نئين دهلي کان بنگلورُو (ii) ممبئي ۽ کان ڪولڪتا (iii) جئپور کان پوُنيشور

گڏيل اڀياس 4

(1) هيٺين سوالن لاءِ مناسب جواب چونڊيو.

(i) جيڪڏهن 6:5=y:20 ته y جو ملهه هيٺين مان ڪهڙو آهي؟

(A) 15　　(B) 24　　(C) 18　　(D) 22.5

(ii) 1 مر م جو 1 س م سان ريشو هيٺين مان ڪهڙو آهي؟

(A) 1 : 100　　(B) 10 : 1　　(C) 1 : 10　　(D) 100 : 1

(iii*) جتن، نتن ۽ موهسين جي عمرنمبر 24,16 ۽ 36 سال آهي ته نتن جي عمر جو موهسين جي عمرسان هوندڙ ريشو ڪهڙو؟

(A) 3 : 2　　(B) 2 : 3　　(C) 4 : 3　　(D) 3 : 4

(iv) شيم ۽ انيل ۾ 24 ڪيلا 3:5 ريشو ۾ورهايا تہ شيم کي مليل ڪيلا ڪيترا آهن ؟

(A) 8 (B) 15 (C) 12 (D) 9

(v) 4 ۽ 25 جو وچون پروپورشن هيٺين مان ڪهڙو آهي؟

(A) 6 (B) 8 (C) 10 (D) 12

(2) هيٺين ۾ڀهرئين عدد جو ٻئين عدد سان ريشو ننڍي ۾ننڍي ساديءَروپ ۾لکو .

(i) 21, 48 (ii) 36, 90 (iii) 65, 117 (iv) 138, 161 (v) 114, 133

(3) هيٺيان ريشو سادي روپ ۾ لکو .

(i) گول جي نيم قطر ۽ گهيري جي ريشو.

(ii) مستطيل جي ڊيگهہ 4 س م ۽ ويڪر 3 س م آهي تہ اُن جي اُريب جو ڊيگهہ سان ريشو لهو.

(iii) چؤرس جو پاسو 4 س م آهي تہ چؤرس جي گرد ماپ جو اُنجي ايراضيءَ سان ريشو.

(4) طيءِ ڪريو تہ هيٺيان عدد لاڳيتي پروپورشن ۾ آهن ڇا؟

(i) 2, 4, 8 (ii) 1, 2, 3 (iii) 9, 12, 16 (iv) 3, 5, 8

(5) c,b,a عدد لاڳيتي پروپورشن ۾ آهن جيڪڏهن a=3، c=27 تہ b=?

(6) هيٺين ريشوز کي سيڪڙي ۾ بدلايو .

(i) 37 : 500 (ii) $\frac{5}{8}$ (iii) $\frac{22}{30}$ (iv) $\frac{5}{16}$ (v) $\frac{144}{1200}$

(7) پهرئين پد جو ٻئين پد سان ريشو سادي روپ ۾لکو .

(i) 1024 MB, 1.2 GB [(1024 MB = 1 GB)]

(ii) 17 ر ، 25 ر 60 پ

(iii) 5 ڊزن ، 120 نگ

(iv) 4 چ م ، 800 چ س م

(v) 1.5 ڪ گ، 2500 گ

(8) جيڪڏهن $\frac{a}{b}=\frac{2}{3}$ تہ هيٺين ريشوز جو ملهہ لهو.

(i) $\frac{4a+3b}{3b}$ (ii) $\frac{5a^2+2b^2}{5a^2-2b^2}$

(iii) $\frac{a^3+b^3}{b^3}$ (iv) $\frac{7b-4a}{7b+4a}$

(9) a، b، c، d پروپورشن ۾ آهن تہ ثابت ڪريو.

(i) $\frac{11a^2+9ac}{11b^2+9bd}=\frac{a^2+3ac}{b^2+3bd}$

(ii*) $\sqrt{\frac{a^2+5c^2}{b^2+5d^2}}=\frac{a}{b}$

(iii) $\frac{a^2+ab+b^2}{a^2-ab+b^2}=\frac{c^2+cd+d^2}{c^2-cd+d^2}$

(10) a, b, c لڳاتار پروپورشن ۾ آهن ثابت ڪريو تہ .

(i) $\dfrac{a}{a+2b}=\dfrac{a-2b}{a-4c}$ (ii) $\dfrac{b}{b+c}=\dfrac{a-b}{a-c}$

(11) حل ڪريو : $\dfrac{12x^2+18x+42}{18x^2+12x+58}=\dfrac{2x+3}{3x+2}$

(12) جيڪڏهن $\dfrac{2x-3y}{3z+y}=\dfrac{z-y}{z-x}=\dfrac{x+3z}{2y-3x}$ تہ ثابت ڪريو هرهڪ ريشو $=\dfrac{x}{y}$

(13*) جيڪڏهن $\dfrac{by+cz}{b^2+c^2}=\dfrac{cz+ax}{c^2+a^2}=\dfrac{ax+by}{a^2+b^2}$ تہ ثابت ڪريو تہ $\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c}$

◈◈◈

5 ٻن ڦيرائتن واريون ليڪي مساواتون

اچو تہ سکون

- ٻن ڦيرائتن واريون ليڪي مساواتون
- همروقتي مساواتون حل ڪرڻ
- همروقتي مساواتون
- همروقتي مساواتن جا لفظي مثال

ذرا ياد ڪريون

مثال، هيٺيون مثاوتون حل ڪريو.

(1) $m+3=5$ $m = \square$

(2) $3y+8=22$ $y = \square$

(3) $\frac{x}{3}=2$ $x = \square$

(4) $2p= p+\frac{4}{9}$ $p = \square$

(5) ڪهڙي عدد ۾ 5 جوڙڻ سان عدد 14 ملندو؟

$\square + 5 = 14$

$x + 5 = 14$

$x = \square$

(6) 8 مان ڪيترا ڪٽ ڪرڻ سان 2 بچندا؟

$8 - \square = 2$

$8 - y = 2$

$y = \square$

مٿين مساواتن ۾ ڦيرائتي جي سگهہ 1 آهي انهن مساواتن کي هڪ ڦيرائتي واريون ليڪي مساواتون چوندا آهن .

ڄاڻي وٺون

ٻن ڦيرائتن واريون ليڪي مساواتون (Linear equations in two variables)

اهڙا ٻہ عدد ڳولهيو جن جي جوڙاپ 14 آهي.

انهن عددن لاءِ x ۽ y واپرائڻ سان $x+y=14$ اها مساوات ملندي .

اها ٻن ڦيرائتن واري مساوات آهي. هتي x ۽ y ٻنهي ڦيرائتن جا ڪيترائي ملهہ لهي سگهبا

$4 + 10 = 14$	$8 + 6 = 14$	$7 + 7 = 14$	$9 + 5 = 14$ جيئن
$0 + 14 = 14$	$2.6 + 11.4 = 14$	$15 + (-1) = 14$	$(-1) + 15 = 14$
$\square + \square = 14$	$\square + \square = 14$	$(-100) + (114) = 14$	$100 + (-86) = 14$

يعني مٿين مثالن ۾ $(x = 8, y = 6)$ $(x = 7, y = 7)$ $(x = 9, y = 5)$

وغيره حل ملن ٿا.

$y=5, x=9$ اهو حل (9,5) ائين سلسليوار لکڻ جي ريت آهي. ان جوڙي ۾ پهريون عدد x جو ۽ ٻيون عدد y جو ملهه ڏيکاري ٿو $x+y=14$ اسان مساوت صحيح بڻائيندڙ (9,5)، (7,7)، (8,6)، (4,10)، (10,4)، (1,15-)، (2.6, 11.4)، ... اهڙا انيڪ سلسليوار جوڙا يعني انيڪ حل آهن .

هاڻي ٻيو مثال ڏسو
اهڙا ٻه عدد ڳولهيو جن جي ڪٽ جو جواب 2 آهي

وڏو عدد x ۽ ننڍو عدد y مڃڻ تي $x-y=2$ مساوت ملندي.

x ۽ y جي ملهه لاءِ هيٺين نموني انيڪ مساوتون ملنديون.

$10 - 8 = 2$ $9 - 7 = 2$ $8 - 6 = 2$ $(-3) - (-5) = 2$ $5.3-3.3=2$

$15 - 13 = 2$ $100 - 98 = 2$ $\square - \square = 2$ $\square - \square = 2$

هتي $x=10$, $y=8$ ملهه کڻڻ سان (10,8) اهو سلسليوار جوڙو مساوت کي صحيح بڻائي ٿو يعني اهو جوڙو مساوت جو حل آهي (10,8) جوڙو (8,10) ائين لکڻ غلط آهي ڇو ته (8,10) جو مطلب آهي $x=8$, $y=10$ انهن ملهن سان $x-y=2$ مساوت جو حل نٿو ٿئي.

ان مان سمجهو ته جوڙي جي عددن جو سلسلو اهميت ڀريو آهي.

هاڻي $x-y=2$ مساوت جا حل، سلسليوار جوڙن جي روپ ۾ لکنداسين.
(7, 5), (−2, −4), (0, −2), (5.2, 3.2), (8, 6) وغيرهه انيڪ حل آهن .
$4m - 3n = 2$ مساوت جا حل لهو.
توهان ٻيون اهڙيون ٽي مساوتون ٺاهيو ۽ انهن کي حل ڪريو

هاڻي پهريون ٻه مساوتون ڏسو.

$$x + y = 14 \quad \ldots\ldots\ldots \text{I}$$
$$x - y = 2 \quad \ldots\ldots\ldots \text{II}$$

I مساوت جا حل (9, 5), (7, 7), (8, 6)...

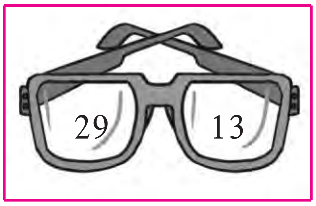
II مساوت جا حل (7, 5), (−2, −4), (0, −2), (5.2, 3.2), (8, 6)...

(8,6) جوڙو ٻنهي مساوتن کي صحيح بڻائي ٿو. ان ڪري اهو ٻنهي مساوتن جو عام حل آهي.

ياد رکو

جڏهن ٻن ڦيرائتن وارين ٻن ليکي مساوتن جو هڪ وقت ويچار ڪبو ته انهن مساوتن کي هم وقتي مساوتون (Simultaneous equations) چئجي ٿو.

مشغولي : هيٺ ڏنل عينڪ جي شيشن تي گهربل عدد لکو.



(i) جنهجي جوڙاپٽ42 ۽ ڪٽ جو جواب 16 آهي . (ii) جنهجي جوڙاپٽ 37 ۽ ڪٽ جو جواب 11 آهي.

(iii) جن جي جوڙا پٽ54 ۽ ڪٽ جو جواب 20 آهي. (iv) جنهجي جوڙاپٽ .... ۽ ڪٽ جو جواب.... آهي .

ويچار ڪريو

$x+y=5$ ۽ $2x+2y=10$ اهي ٻئي ٻن قيرائتن واريون ٻه مساوتون آهن.

$x+y=5$ مساوت جا 5 الڳ حل لهو انهن حلن سان $2x+2y=10$ مساوت ٻه صحيح بڻجي ٿي ڇا اها جاچ ڪريو.

ٻنهي مساوتن جي ڇڪاس ڪريو.

ٻن قيرائتن واريڻ ٻن مساوتن جا سڀ حل ساڳيا هئڻ لاءِ ضروري شرط ملي ٿي ڇا؟

ڄاڻي وٺون

قيرائتنو رد ڪرڻ وارو طريقو (Elimination method)

$x+y=14$ ۽ $x-y=2$ اهي هم وقتي مساوتون قيرائتن ۾ ملهه رکي حل ڪيوسين پر هر دفعي اهو طريقو سولائي ۽ وارو نه آهي. مثال $2x+3y=4$ ۽ $x-5y=11$ اهي مساوتون x ۽ y جا الڳ الڳ ملهه ڪٽي حل ڪري ڏسو. توهان ڏسندا ته هتي اهو طريقو سؤلو نه آهي.

ان لاءِ هم وقتي مساوت حل ڪرڻ جو ٻيو طريقو ڪم آڻبو آهي. ان ۾ ٻن مان هڪ قيرائتي کي رد ڪري هڪ قيرائتي واريون مساوتون حاصل ڪبيون آهن. ان وسيلي ان قيرائتي جو ملهه لهبو آهي. اهو ملهه ٻنهي مان ڪنهن ٻه مساوت ۾ رکڻ سان ٻئي قيرائتي جو ملهه ملندو آهي.

هيٺين مثالن وسيلي اهو طريقو سمجهو.

(1) حل ڪريو: $x + y = 14$ ۽ $x - y = 2$.

حل : ٻنهي مساوتن جو جوڙ ڪرڻ سان. هڪ ڦيرائتي واريون مساواتون حاصل ڪريون.

$$\begin{aligned} x + y &= 14 \quad \ldots\ldots\ldots \text{I} \\ + \quad x - y &= 2 \quad \ldots\ldots\ldots \text{II} \\ \hline 2x + 0 &= 16 \\ 2x &= 16 \\ x &= 8 \end{aligned}$$

$x = 8$ ملهه مساوات I ۾ رکڻ سان

$$x + y = 14$$

$$\therefore\ 8 + y = 14$$

$$\therefore\ y = 6$$

هتي (8,6) اهو پهرين مساوت جو حل آهي. ساڳيو حل ٻين مساوت جو به آهي ڇا انجي چڪاس ڪريون

$x - y = 8 - 6 = 2$ اهو صحيح آهي

(8,6) ٻنهي مساوتن جو عام حل آهي

يعني $x + y = 14$ ۽ $x - y = 2$ هر وقتي مساوتن جو حل $(8, 6)$ آهي.

مثال (2) ماءُ ۽ پُٽ جي عمر جو جوڙ 45 سال آهي. ماءُ جي عمر ٻيڻ مان پٽ جي عمر ڪٽ ڪرڻ سان جواب 54 ملي ٿو ته ٻنهي جي عمر لهو.

ڏنل ڄاڻ کي مساوت جي روپ ۾ لکوُن.

حل : سمجهو ته ماءُ جي اجوڪي عمر آهي x سال ۽ پٽ جي اجوڪي عمر آهي y سال

پهرين شرط موجب $x + y = 45 \quad \ldots\ldots\ldots \text{I}$

ٻين شرط موجب $2x - y = 54 \quad \ldots\ldots\ldots \text{II}$

مساوت I ۽ II جو جوڙ ڪرڻ سان .

$$\begin{aligned} 3x + 0 &= 99 \\ 3x &= 99 \\ x &= 33 \end{aligned}$$

$x = 33$ ملهه ۽ پهرين مساوت ۾ رکڻ سان .

$$\begin{aligned} 33 + y &= 45 \\ y &= 45 - 33 \\ y &= 12 \end{aligned}$$

$x = 33$, $y = 12$ اهو حل ٻين مساوت کي صحيح بڻائي ٿو اهو جاچيو

ماءُ جي اجوڪي عمر 33 سال ۽ پٽ جي اجوڪي عمر 12 سال آهي.

ٻن ڦيرائتن واري ليڪي مساوت جو عام روُپ

$ax + by + c = 0$ مساوت ۾ c,b,a حقيقي عدد هوندا ۽ b,a ساڳئي وقت 0 نہ هوندا تہ اهو ٻن ڦيرائتن واري ليڪي مساوت جو عام روُپ آهي.

ان مساوت ۾ ٻنهي ڦيرائتن جي سگهہ 1 آهي. اها مساوت ليڪي آهي

مثال (1) هينئين هم وقتي مساوتون حل ڪريو

$$3x + y = 5 \ldots\ldots\ldots\ldots (I)$$

$$2x + 3y = 1 \ldots\ldots\ldots (II)$$

هتي ٻنهي مساوتن ۾ ڪنهن بہ ڦيرآئتي ۾ ڳُڻڪ ساڳيون يا ابتڙ عدد نہ آهي. ان ڪري هڪ ڦيرائتي کي رد ڪرڻ لاءِ ڳُڻڪ ساڳيو ڪنداسين.

مساوت I جي ٻنهي پاسي 3 سان ضربڻ تي.

$$\therefore \quad 3x \times 3 + 3 \times y = 5 \times 3$$

$$\therefore \quad 9x + 3y = 15 \quad \ldots\ldots\ldots (III)$$

$$2x + 3y = 1 \quad \ldots\ldots\ldots (II)$$

مساوت III مان II ڪٽ ڪرڻ سان.

$$9x + 3y = 15$$

$$\underset{-}{+} 2x \underset{-}{+} 3y \;\underset{-}{=}\; 1$$

$$7x = 14$$

$$x = 2$$

x=2 ملهہ هڪ مساوت ۾ رکڻ سان

$$2x + 3y = 1$$

$$\therefore \quad 2 \times 2 + 3y = 1$$

$$\therefore \quad 4 + 3y = 1$$

$$\therefore \quad 3y = -3$$

$$\therefore \quad y = -1$$

حل (2,-1) ٻي مساوت کي بہ صحيح بڻائي ٿو ڇا اهو جاچيو.

مثال (2) هينئين هم وقتي مساوتون حل ڪريو

$$3x - 4y - 15 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (I)$$

$$y + x + 2 = 0 \ldots\ldots\ldots (II)$$

ٻنهي مساوتن جا مقرر پد ساڄي پاسي لکو

$$3x - 4y = 15 \ldots\ldots\ldots (I)$$

$$x + y = -2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (II)$$

y ڦيرائتي کي رد ڪرڻ لاءِ مساوت II کي 4 سان ضرب ڪري I مساوت ۾ جوڙيو.

$$3x - 4y = 15$$

$$+ \quad 4x + 4y = -8$$

$$7x = 7$$

$$x = 1$$

x=1 ملهہ مساوت II ۾ رکڻ سان

$$x + y = -2$$

$$\therefore 1 + y = -2$$

$$\therefore y = -2 - 1$$

$$\therefore y = -3$$

(1,-3) حل آهي. اهو حل مساوت I جو بہ آهي اهو جاچيو.

ويچار ڪريو

3x-4y-15=0 ۽ y-x+2=0 مساووتون x ڦيرائتي رد ڪري بہ حل ڪري سگهبيون ڇا؟ حل پوءِ بہ ساڳيو ايندو ڇا؟

ڄاڻي وٺون

ملھہ رکي رد ڪرڻ وارو طريقو (Substitution method)

ڦيرائتي کي رد ڪرڻ جو ٻيو بہ طريقو آھي. مساوات جي ھڪ ڦيرائتي جو ملھہ ٻئي ڦيرائتي جي نسبت ۾ لکي اھو ٻي مساوات ۾رکي ان ڦيرائتي کي رد ڪبو آھي اھو طريقو ھيٺين مثالن مان سمجھو

مثال (1) حل ڪريو $8x + 3y = 11 \;;\; 3x - y = 2$

حل : $8x + 3y = 11$ .... (I)

$3x - y = 2$ .... (II)

مساوات II ۾ y جو ملھہ x جي نسبت ۾ لکڻ سؤلو ٿيندو.

$3x - y = 2$

$3x - 2 = y$

ھاڻي $y=3x-2$ ملھہ مساوات I ۾رکنداسين.

$8x + 3y = 11$

$\therefore\; 8x + 3(3x-2) = 11$

$\therefore\; 8x + 9x - 6 = 11$

$\therefore\; 17x - 6 = 11$

$\therefore\; 17x = 11 + 6 = 17$

$\therefore\; x = 1$

x جو ملھہ $y=3x-2$ ۾رکنداسين.

$\therefore\; y = 3 \times 1 - 2$

$\therefore\; y = 1$

$\therefore$ (1,1) اھو مساوتن جو حل آھي.

مثال (2) حل ڪريو $3x - 4y = 16 \;;\; 2x - 3y = 10$

حل : $3x-4y=16$ ....(I)

$2x - 3y = 10$ ....(II)

مساوات I جو x جو ملھہ y نسبت ۾لکون

$3x - 4y = 16$

$3x = 16 + 4y$

$x = \dfrac{16+4y}{3}$

x جو ملھہ مساوات II رکڻ سان

$2x - 3y = 10$

$2\left(\dfrac{16+4y}{3}\right) - 3y = 10$

$\dfrac{32+8y}{3} - 3y = 10$

$\dfrac{32+8y-9y}{3} = 10$

$32 + 8y - 9y = 30$

$32 - y = 30 \qquad \therefore\; y = 2$

ھاڻي $y=2$ ملھہ مساوات I ۾رکڻ سان

$3x - 4y = 16$

$\therefore\; 3x - 4\times 2 = 16$

$\therefore\; 3x - 8 = 16$

$\therefore\; 3x = 16 + 8$

$\therefore\; 3x = 24$

$\therefore\; x = 8$

$\therefore\; x = 8$ ۽ $y = 2$

$\therefore$ (8,2) اھو مساوتن جو حل آھي.

اڀياس 5.1

(1) x ۽ y ڦيرائتا ڪٽي ٻن ڦيرائتن واريون 5 ليڪي مساوتون لکو.

(2) x+y=7 مساوت جا 5 حل لکو.

(3) هيٺيون همروقتي مساوتون حل ڪريو.

(i) $x + y = 4$; $2x - 5y = 1$

(ii) $2x + y = 5$; $3x - y = 5$

(iii) $3x - 5y = 16$; $x - 3y = 8$

(iv) $2y - x = 0$; $10x + 15y = 105$

(v) $2x + 3y + 4 = 0$; $x - 5y = 11$

(vi) $2x - 7y = 7$; $3x + y = 22$

چاڙي وٺون

همروقتي مساوت جا لفظي مثال

لفظي مثال حل ڪرڻ وقت ڏنل ڊاٽا مان مساوتون ٺاهڻ هڪ اهم ڪم آهي. مساوتن جو حل لهڻ جو طريقو هيٺين ڏاڪڻ وسيلي ڏيکاريل آهي.

ڏاڪا	مثال
لفظي مثال چڱيءَ طرح پڙهو ۽ سمجهو	ٻن عددن جي جوڙاڦپ 36 آهي هڪ عدد جي اٺوڻ مان 9 ڪٽ ڪرڻ ٻيون عدد ملي ٿو.
↓	↓
مثال جي ڊاٽا مان پدن لاءِ ڦيرائتا ڪٽو	سمجهو ته پهريون عدد =x ٻيون عدد =y
↓	↓
ڦيرائتا ڪم آڻي مثال حسابي روپ ۾ لکو	عددن جي جوڙاڦپ 36، x+y=36 ننڍي عدد جي =8x اٺوڻ مان 9 ڪٽ ڪرڻ سان =8x-9 وڏو عدد =y=8x-9
↓	↓
مُناسب طريقي سان مساوتون حل ڪريو	$x + y = 36$ $\therefore 8x - y = 9$ $\therefore\ 9x = 45$ $\therefore\ x = 5$ $\therefore\ 5 + y = 36$ $\therefore\ y = 36 - 5$ $\therefore\ y = 31$
↓	↓
حل لهو	$x = 5,\ y = 31$
↓	↓
مليل حل مساوتن ۾ رکي چڪاس ڪريو	$31 + 5 = 36$ ....(I) $31 = 8 \times 5 - 9$ ....(II)
↓	↓
جواب لکو	∴ اهي عدد آهن 5 ۽ 31

لفظي مثال

هاڻي اسين جدا جدا لفظي مثال ڏسون

(1) عمرسان لاڳاپو رکندڙ

(2) عددن سان لاڳاپو رکندڙ

(3) اڪپورن سان لاڳاپو رکندڙ

(4) مالي وهنوارسان لاڳاپو رکندڙ

(5) جاميٽرڪ شڪلين جي خاصيتن تي آڌارت

(6) رفتار، مفاصلو، وقت تي مدار رکندڙ

مثال (1) ٻن عددن جي جوڙاپت 103 آهي. وڏي عددکي ننڍي عدد سان ونڊڻ تي ونڊاپت 2 ۽ پاڇي 19 اچي ٿي ته اهي عدد لهو.

حل: ڏاڪو 1: لفظي مثال سمجهڻ.

ڏاڪو 2: گهربل عددن لاءِ اکر مڃڻ.

پاڇي + ونڊاپت x ونڊيندڙ = ونڊڻي اهو نيم ڌيان ۾ رکڻ.

وڏو عدد x ۽ ننڍو عدد y مڃينداسين.

ڏاڪو 3: ملين چاڪ: عددن جي جوڙاپت 103 آهي.

x+y=103 اها هڪ مساوات ملي .

وڏي عددکي ننڍي عدد سان ونڊڻ تي ونڊاپت 2 ۽ پاڇي 19 اچي ٿي.

$x = 2 \times y + 19$ ... (پاڇي + ونڊاپت x ونڊيندڙ = ونڊڻي)

$x - 2y = 19$ ٻين مساوات ملي

ڏاڪو 4: مساوتن جو حل لهنداسين

$$x + y = 103 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(I)$$

$$x - 2y = 19 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(II)$$

(I) مساوت مان (II) مساوت ڪٽ ڪنداسين.

$$\begin{array}{rcl} x + y & = & 103 \\ x - 2y & = & 19 \\ - \quad + & & - \\ \hline 0 + 3y & = & 84 \\ \therefore \quad y & = & 28 \end{array}$$

ڏاڪو 5 : x+y=103 مساوت ۾جو ملهه رکنداسين .

$$\therefore \quad x + 28 = 103$$

$$\therefore \quad x = 103 - 28$$

$$\therefore \quad x = 75$$

ڏاڪو 6 : گهربل عدد آهن 75 ۽ 28

مثال (2) سميت جي عمر سوهن جي عمر جي اڌ کان 23 سال وڌيڪ آهي. 5 سال اڳ ۾ سندس عمر جي جوڙاڪ 55 سال هئي ته سندن اڄوڪي عمر لهو.

حل : سمجهو ته سُميت جي اڄوڪي عمر x ۽ سوهن جي اڄوڪي عمر y آهي سميت جي عمر سوهن جي عمر جي اڌ کان 23 سال وڌيڪ آهي انڪري $x = \frac{y}{2} + \square$

پنج سال اڳ ۾ سميت جي عمر (x-5) سال پنج سال اڳ ۾ سوهن جي عمر (y-5)

پنج سال اڳ ۾ سندن جي عمر جي جوڙاڪ = 55 سال

$$\square + \square = 55$$

مساواتون حل ڪرڻ

$$2x = y + 46 \qquad 2x - y = 46 \ldots\ldots\ldots\ldots(I)$$

$$(x - 5) + (y-5) = 55$$

$$x + y = 65 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(II)$$

$$\begin{aligned} 2x - y &= 46 \\ + \quad x + y &= 65 \\ \hline \therefore \quad 3x &= 111 \\ \therefore \quad x &= 37 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x+y &= 65 \\ \therefore \quad 37 + y &= 65 \\ \therefore \quad y &= 65 - 37 \\ \therefore \quad y &= 28 \end{aligned}$$

سميت جي اڄوڪي عمر 37 سال ۽ سوهن جي اڄوڪي عمر 28 سال آهي.

مثال (3) هڪ ٻن انگن وارو عدد سندن انگن جي جوڙاڪ جي چئوڻو آهي انجي انگن ۾ادل بدل ڪرڻ تي ملندڙ عدد اصلي مدد جي ٻيڻ کان 9 گهٽ آهي ته اهو عدد لهو.

حل سمجهو ته اصلي عدد جي ايڪن واري جاءِ تي x انگ ۽ y انگ ڏهاڪن واري جاءِ تي y انگ آهن.

	ڏهاڪن واري جاءِ تي انگ	ايڪن واري جاءِ تي انگ	عدد	انگن جي جوڙاڪ
اصلي عدد	y	x	$10y + x$	$y + x$
نئون عدد	x	y	$10x + y$	$x + y$

پهرين شرط موجب $\quad 10y + x = 4\,(y+x)$

$$\therefore 10y + x = 4y + 4x$$

$$\therefore\ x - 4x + 10y - 4y = 0$$

$$\therefore\ -3x + 6y = 0 \qquad \therefore\ -3x = -6y \qquad \therefore x = 2y \quad \ldots..(I)$$

ٻين شرط موجب

$$10x + y = 2(10y+x)-9$$
$$10x+y = 20y + 2x-9$$
$$10x-2x+y-20y = -9$$
$$8x - 19y = -9 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(II)$$
$$x = 2y \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(I)$$

x=2y ملهه مساوتII ۾رکڻ سان

$$16y - 19y = -9 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(I)$$
$$\therefore -3y = -9$$
$$\therefore y = 3$$

y=3 ملهه مساوتI ۾رکڻ سان $x - 2y = 0$

$$x - 2 \times 3 = 0 \quad \therefore x - 6 = 0 \quad \therefore x = 6$$

اصلي ٻن انگن وارو عدد $10y + x = 10 \times 3 + 6$

$$= 36$$

مثال (4) هڪ ڳوٺ جي آدمشماري 50000 هئي. هڪ سال ۾ پرشن جو عدد 5% ۽ عورتن جو عدد 3% وڌيو انڪري اُن ڳوٺ جي آدمشماري 52020 تي ويئي ته پهرئين سال ڳوٺن ۾ پرشن ۽ عورتن جو عدد ڪيترو هو؟

حل : سمجهو ته پهرئين سال پرشن جو عدد x ۽ عورتن جو عدد y هو.

پهرين شرط موجب $\square + \square = 50000 \ldots\ldots(I)$

پرشن جو عدد 5% وڌي $\frac{\square}{\square}x$ ٿيو.

عورتن جو عدد 3% وڌي $\frac{\square}{\square}y$ ٿيو.

$$\frac{\square}{\square}x + \frac{\square}{\square}y = 52020$$

ٻين شرط موجب $\square x + \square y = 5202000 \quad \ldots\ldots(II)$

مساوت کي 103 سان ضربڻ تي

$$\square x + \square y = 5150000 \quad \ldots\ldots(III)$$

Iمساوت مان III مساوت ڪٽ ڪرڻ سان

$$2x = 5202000 - 5150000$$
$$2x = 52000$$

$\therefore$ پرشن جو عدد $= x = \square$ $\therefore$ عورتن جو عدد $= y = \square$

مشغولي I : هيٺين شڪل ۾ تيرن وسيلي ڪجھ هدايتون ڏنل آهن انُهن وسيلي ملندڙ مساوات چوڪٽ ۾ لکو چوڪٽن مان ڪي ٻہ ٻہ مساواتون کڻي انُهن کي حل ڪريو. حل جي چڪاس ڪريو

ٻن مساواتن جو هڪ جوڙو اهڙا ڪيترا جوڙا ملندا؟ انُهن جي حل بابت ڳالهہ ٻولهہ ڪريو.

منهنجي ڊيگهہ ۽ ويڪر جي جوڙايت 36 آهي

منهنجي ڊيگهہ جي ٻيڻ مان ويڪر گهٽ ڪرڻ سان 27 ملندا.

مان مستطيل آهيان منهنجي ڊيگهہ x ۽ ويڪر y آهي.

منهنجي ويڪر ڊيگهہ جي $\frac{5}{7}$ اوڻ آهي.

منهنجي ڊيگهہ ۽ ويڪر ۾ تفاوت 6 آهي

اڀياس 5.2

(1) هڪ لفافي ۾ ڪجھہ 5 روپئي جا ۽ ڪجھہ 10 روپئي جا نوٽ آهن نوٽن جو ڪل ملهہ 350 روپيا آهي. 5 رپين جي نوٽن جو عدد 10 روپين جي نوٽن جي عدد جي ٻيڻ کان 10 گهٽ آهن. ٻڌايو تہ لفافي ۾ 5 روپيا ۽ 10 روپئي جي نوٽن جو عدد ڪيترو آهي؟

(2) هڪ اڀپورو جو ڇيد انجي انس جي ٻيڻ کان 1 گهٽ آهي. انس ۽ ڇيد مان هرهڪ ۾ 1 جوڙ ڪرڻ تي انهن جو ڇيد سان ريشو 3:5 ٿئي ٿو تہ اهو اڀپور لهو.

(3) پرينڪا ۽ ديپيڪا جي عمر جو جوڙ 34 سال آهي. پرينڪا ديپڪا کان 6 سال وڏي آهي تہ سندن عمر لهو.

(4) جانورن جي هڪ باغ ۾ شينهن ۽ مورن جو ڪل عدد 50 آهي. سندن پيرن جو ڪل عدد 140 آهي تہ اتان جي شينهن ۽ مورن جو عدد لهو.

(5) سنجيہ کي ماهياني پگهار ملندي آهي هو سال هنجي پگهار ۾ طئي ٿيل رقم جي واڌ ٿيندي آهي. جيڪڏهن 4 سالن کان پوءِ هنجي ماهياني پگهار 4500 روپيا ۽ 10 سالن کان پوءِ هنجي ماهياني پگهار 5400 روپيا ٿي تہ شروعاتي پگهار ۽ ساليانی واڌ جي رقم لهو.

(6) 3 ڪرسين ۽ 2 ٽيبلن جي ڪل قيمت 4500 روپيا آهي 5 ڪرسين ۽ 3 ٽيبلن جي ڪل قيمت 7000 روپيا آهي تہ 2 ڪرسين ۽ 2 ٽيبلن جي ڪل قيمت لهو.

(7) هڪ ٻن انگن واري عدد جي انگن جي جوڙ‌اپٽ 9 آهي. انگن جي ادل بدل ڪرڻ تي ملندڙ عدد اصلي عدد کان 27 وڌيڪ آهي ته اصلي عدد لهو.

(8*) $\triangle ABC$ ۾ $\angle A$ جي ماپ $\angle B$ ۽ $\angle C$ جي ماپ جي جوڙ‌اپٽ جيتري آهي. $\angle B$ ۽ $\angle C$ جي ماپن جو ريشو 4:5 آهي. جي ڪنڊن جي ماپ لهو.

(9*) 560 س م ڊيگهه واري نوڙيءَ جا ٻه ٽڪر ائين ڪرڻا آهن جو ننڍي ٽڪر جي ڊيگهه جي ٻيڻ وڏي ٽڪر جي ڊيگهه جي $\frac{1}{3}$ اوڻ آهي وڏي ٽڪر جي ڊيگهه لهو.

(10) هڪ چٽاپيٽي امتحان ۾ 60 سوال هئا. هرهڪ سوال جي صحيح جواب تي 2 مارڪون ۽ غلط جواب لاءِ ڪاٽو 1 مارڪ هئي. يشونت سڀ سوال حل ڪيا ته ڪيس 90 مارڪون مليون. ٻڌايو ته هنجا ڪيترا جواب غلط ٿيا هئا؟

گڏيل اپياس 5

(1) هيٺين مان مناسب جواب چونڊيو .

(i) $3x + 5y = 9$ ۽ $5x + 3y = 7$ ته $x + y$ ملهه هيٺين مان ڪهڙو آهي؟

(A) 2 (B) 16 (C) 9 (D) 7

(ii) مستطيل جي ڊيگهه ۽ ويڪر هرهڪ مان 5 ڪٽ ڪرڻ تي انجي گرد ماپ 26 اَچي ٿي ان چاڻ جو حسابي روُپ ڪهڙو آهي؟

(A) $x - y = 8$ (B) $x + y = 8$ (C) $x + y = 23$ (D) $2x + y = 21$

(iii) اجيم، وجيم کان 5 سال ننڍو آهي. سندن عمر جي جوڙ‌اپٽ 25 آهي ته اجيم جي عمر ڪيتري؟

(A) 20 (B) 15 (C) 10 (D) 5

(2) هيٺيون هم وقتي مساوتون حل ڪريو .

(i) $2x + y = 5$; $3x - y = 5$

(ii) $x - 2y = -1$; $2x - y = 7$

(iii) $x + y = 11$; $2x - 3y = 7$

(iv) $2x + y = -2$; $3x - y = 7$

(v) $2x - y = 5$; $3x + 2y = 11$

(vi) $x - 2y = -2$; $x + 2y = 10$

(3) گڏ‌ڪ ساڳيا ڪري هيٺيون مساوتون حل ڪريو .

(i) $3x-4y=7$; $5x+2y=3$

(ii) $5x + 7y=17$; $3x-2y=4$

(iii) $x-2y= -10$; $3x-5y= -12$

(iv) $4x + y=34$; $x+4y= 16$

(4) هيٺيون هم وقتي مساوتون حل ڪريو .

(i) $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=4$; $\frac{x}{2}-\frac{y}{4}=1$

(ii) $\frac{x}{3}+5y=13$; $2x+\frac{y}{2}=19$

(iii) $\frac{2}{x}+\frac{3}{y}=13$; $\frac{5}{x}-\frac{4}{y}=-2$

(*5) هڪ ٻن انگن وارو عدد، انجي انگن جي جوڙاپٽ جي چئوڻ کان 3 وڌو آهي ان عدد ۾ 18 جوڙ ڪرڻ تي ملندڙ جوڙاپٽ، اصلي عدد جي انگن جي ادل بدل ڪرڻ سان ملندڙ عدد آهي. تہ اصلي عدد لهو.

(6) 8 ڪتابن ۽ 5 پينين جي ڪل قيمت 420 رپيا آهي. 5 ڪتابن ۽ 8 پينين جي ڪل قيمت 321 رپيا آهي تہ هڪ ڪتاب ۽ ٻن پينين جي قيمت لهو.

(*7) ٻن ماڻهن جي اپت جو ريشو 4:3 آهي، سندن خرچن جو ريشو 4:3 آهي هرهڪ جي بچت 200 روپيا آهي تہ هرهڪ جي اُپت لهو.

(*8) هڪ مستطيل جي ديگهہ 5 ايڪا گهٽ ڪئي ۽ ويڪر 3 ايڪا وڌائي تہ اُنجي ايراضي 9 چوُرس ايڪا گهٽ ٿي. جيڪڏهن ديگهہ 3 ايڪا گهٽ ڪئي ۽ ويڪر 2 ايڪا وڌائي تہ ايراضي 67 چورس ايڪا وڌي ٿي تہ ان مستطيل جي ديگهہ ۽ ويڪر لهو.

(*9) هڪ رستي تي A ۽ B ٻن هنڌن ۾ مفاصلو 70 ڪ م آهي. هڪ ڪار A جڳهہ کان ۽ ٻي ڪار B جڳهہ کان نڪتي. هڪ ئي طرف ۽ هلڻ سان اهي 7 ڪلاڪن ۾ ملن ٿيون ۽ مختلق طرفن ۾ هلڻ سان 1 ڪلاڪ ۾ ملن ٿيون تہ سندن رفتار لهو.

(*10) هڪ ٻن انگن وارو عدد ۽ اُنجي انگن جي ادل بدل ڪرڻ سان ملندڙ عدد جي جوڙ اپٽ 99 آهي تہ اصلي عدد لهو.

مشغولي : اڻپور لهو

انس x
چيد y

↓

اڻپور جي انس ڪي 3 سان ضرب ڪئي ۽ چيد مان 3 ڪٽ ڪئي تہ $\frac{18}{11}$ اڻپور ملي ٿو.

مساوت I

$11x - 6y + 18 = 0$

اڻپور جي انس ، 8 ملايا ۽ چيد ٻيڻو ڪيو تہ $\frac{1}{2}$ اڻپور ملي ٿو.

مساوت II

$x - y + 8 = 0$

∴ گهربل اڻپور = $\frac{\square}{\square}$

جواب جي چڪاس ڪريو

◈◈◈

6 مالي رٿا ٺاهڻ

اچو تہ سکون

- مالي يوجنا جي واقفيت
- بچت ۽ سيڙپ
- ٽئڪس جي بناوت
- اپت تي ٽئڪس جي ڪٽوٽ

اچو تہ چرچا ڪريون

انيتا : اسان ڪمپيوٽر خريد ڪريون ڇا؟

ماءُ : ها، پر ايندڙ سال.

انيتا : هن سال ڇو نہ؟

ماءُ : اُن جي قيمت ڪاگهٽ نہ آهي

انيتا : يعني اسان کي پئسا گڏ ڪرڻ گهرجن؟

ماءُ : ها.

اسان کي پنهنجي آس پاس اهڙيون ڳالهيون ٻڌڻ ۾ اينديون آهن هرهڪ شخص کي پنهنجون گهر جون پوريون ڪرڻ لاءِ پئسن جي گهر ۾ هوندي آهي انکري روزمرهہ جون ضروري گهرجون پوريون ڪري ٻيون گهرجون پوريون ڪرڻ لاءِ هرهڪ پئسا جمع ڪرڻ جي ڪوشش ڪندو آهي. انکي ئي اسين 'بچت' چوندا آهيون. بچت جي حفاظت ۽ واڌ لاءِ اسان انکي بئنڪ ۾ رکندا آهيون يا زمين گهر وغيرهہ خريد ڪندا آهيون انکي ئي 'سيڙپ ڪرڻ' چئجي ٿو.

هرهڪ سيڙپ ڪار ضروري رقم خرچ ڪري بچيل رقم جي بچت ڪندو آهي ۽ بچت ڪيل رقم جي مناسب سيڙپ بہ ڪندو آهي. انکي 'مالي رٿا ٺاهڻ' چئبو آهي. ملڪيت جو واڌارو ۽ حفاظت اهي مالي رٿائن جا مکيہ مقصد آهن.

زندگيءَ ۾ ٿيندڙ اُميد ڪيل يا اوچتن واقعن جي انتظام طور مالي رٿائن جو اپيوگ ٿئي ٿو. هيٺ ڪجهہ مثال ڏنل آهن.

اُميد ڪيل واقعا	اوچتا واقعا
(1) ٻارن جي تعليم تي خرچ	(1) قدرتي آپدا
(2) ڌنڌي لاءِ موڙي	(2) گهرجي ڪنهن ڀاتيءَ جي بيماري
(3) واهڻ خريد ڪرڻ	(3) حادثي سبب ٿيل نقصان
(4) گهرجي اڏاوت يا مرمت	(4) اچانڪ موت
(5) ٻڍاپي جون گهرجون	

مٿين ڳالهين مان مالي رٿائن جي ضرورت جي ڄاڻ پوي ٿي. مالي رٿا ٺاهڻ وقت ڪجهہ ڳالهيون ڌيان ۾ رکڻ ضروري آهن.

چاڻي وٺون

بچت (Savings)

(1) بچت جي حفاظت ۽ اُن ۾ واڌ ٿيڻ گھرجي. بچت جي رقم بئنڪ يا پوسٽ آفيس ۾ محفوظ رهي ٿي. بئنڪ ۾ جمع ٿيل رقم سان روڪ رهت وهنوار ڪري سگهجي ٿو. اهڙي وهنوار ۾ پاڻ وٽ وڌيڪ رقم رکڻي پوي ٿي ۽ اها گم ٿيڻ يا چوري ٿيڻ جو ڊپ به نٿو رهي.

(2) اسانجي بچت روڪ روُپ ۾ هوندي ۽ اها بنا سيڙائڻ جي ائين ئي رکي ڇڏي ته وقت گذرندي اُن جو ملهه گهٽجندو آهي. يعني ڪا شيءِ خريدڻ لاءِ اُنجي خريد شڪتي سالن ڪان پوءِ 10 روپين ۾ هڪ ئي پينسل ملندي انڪري بچت مناسب جڳهه تي سيڙائي اُنکي وڌائڻ گهرجي.

(3) بچت ڪيل رقم ڏنڏو وڌائڻ، نئون هنر شروع ڪرڻ وغيرهه ڪمن لاءِ واپرائبي ته راشٽريه اپت ۾ واڌ ٿيندي.

(4) ڪلعملي اپت مان ڪجهه رقم سماجڪ ڪمن ۾ خرچ ڪرڻ تي انجو فائدو سڀني کي ٿئي ٿو

(5) ضروري خرچ ڪري ايش آرام جي شين تي گهٽ خرچ ڪرڻ ڪري تعليم, ڊاڪٽري علاج وغيرهه لاءِ بچت ڪرڻ فائدي مند ٿئي ٿو.

اچو ته چرچا ڪريون

مٿيون چترجاچيو, بچت ۽ سيڙپ جا ڪجهه طريقا ان ۾ ڏيکاريل آهن انتي چرچا ڪريو ٻيا ڪهڙا طريقا آهن انجي ڄاڻ حاصل ڪريو. اهي مالي جاين ۾ لکو.

ڄاڻي وٺون

سيڙپ (Investments)

سيڙپ ڄاڻ گهڻائي طريقا آهن امانت ڪار بئنڪ، پوسٽ وغيره مالي وهنوارڪندڙ سنسٿائن ۾ سيڙپ ڪرڻ پسند ڪندا آهن ڇو ته انتي رقم محفوظ رهندي آهي. شيئرس ميوچوئل فنڊ وغيره ۾ سيڙپ ڪرڻ ٿورو جوکائتو آهي. اهي پئسا جنهن اديوڳ ۾ سيڙايا اُن ۾ نقصان ٿيڻ تي سيڙايل رقم گهٽجي ٿي. انجي ابتڙ فائدو ٿيڻ تي رقم محفوظ رهي ٿي ۽ فائدي جو حصو ملي ٿو.

سيڙپ ڪارڪي سيڙپ ڪرڻ وقت به مکيه ڳالهيون ڌيان ڪرڻ گهرجن هڪ جوکم ۽ ٻيو فائدو وڏيڪ جوکم ڪٽي سيڙپ ڪار وڏيڪ فائدو ڪمائي سگهي ٿو پر جوکم سبب نقصان به ٿي سگهي ٿو اهو ڌيان ۾ رکڻ گهرجي.

اُپٽ ۽ سيڙپ تي آڌارت ڪجهه مثال هيٺ ڇڏايل آهن انهن جو ابياس ڪريو.

مثال (1) شيامللعل 2015-16 جي سپ ٽئڪسون پرڻ ڪانپوءِ ساليانو اپت 640000 رپيا آهن هوُ هر مهني ويمي لاءِ 2000 رپيا قسط پريندو آهي. ساليانو اپت جو 20% هو پي ايف ۾ سيڙائيندو آهي. اوچتي گهرجن لاءِ 500 روپيا مهنو پاسيرو ڪندو آهي ته هوُ سال ۾ ڪيترو رقم خرچ ڪندو آهي؟

حل : (i) شيامللعل جي ساليانو اپت $= 6,40,000$ روپيا

(ii) ويمي جي قسط $= 2000 \times 12 = 24,000$ روپيا

(iii) پي ايف ۾ سيڙايل رقم $= \dfrac{20}{100} \times 6,40,000 = 1,28,000$ روپيا

(iv) اوچتين گهرجن لاءِ پاسيري ڪيل رقم $= 500 \times 12 = 6000$ روپيا

$\therefore$ رقا جي ڪل رقم $= 1,58,000 = 24,000 + 1,28,000 + 6,000$ روپيا

$\therefore$ سال ۾ خرچ لاءِ بچيل رقم $= 4,82,000 = 6,40,000 - 1,58,000$ روپيا

مثال (2) شري شها 320000 روپيا بئنڪ ۾ 10% گڏيل وياج تي 2 سالن لاءِ سيڙايا. هن 240000 روپيا ٽئڪس فري ميوچوئل فنڊ ۾ سيڙايا. 2 سالن کان پوءِ هن کي اُن جا 3,05,000 رپيا مليا. ته هن جي ڪهڙي سيڙپ وڏيڪ فائديمند ٿي؟

حل : (i) پهرين بئنڪ ۾ سيڙايل رقم جو گڏيل وياج لهنداسين.

مور - راس = گڏيل وياج

يعني $I = A - P$

$$C.I = P\left(1+\frac{r}{100}\right)^{n} - P$$

$$= P\left[\left(1+\frac{r}{100}\right)^{n} - 1\right]$$

$$= 3,20,000\left[\left(1+\frac{10}{100}\right)^{2} - 1\right]$$

$= 3,20,000 \left[(1.1)^2 - 1\right]$

$= 3,20,000 \left[1.21 - 1\right]$

$= 3,20,000 \times 0.21$

$= 67\ 200$ روپيا

شماڪي بئنڪ مان 67200 رپيا وياج مليو.

مليل وياج سيڙپ جو ڪيترو سيڪڙو آهي اهو ڳڻيو.

∴ وياج جو سيڪڙو $\dfrac{100 \times 67200}{3,20,000} = 21 =$ بئنڪ جي سيڙپ ۾ 21% نفعو ٿيو.

(ii) ميوچوئل فنڊ مان 2 سالن کانپوءِ مليل رقم = 3,05,000 روپيا

∴ ميوچوئل فنڊ جي فائدي پٽي = 3,05,000 − 2,40,000 = 65,000 روپيا

∴ فائدي پٽيءَ جو سيڪڙو = $\dfrac{65000 \times 100}{2,40,000} = 27.08$

ميوچوئل فنڊ ۾ سيڙپ سان 7.08% سيڪڙو نفعو ٿيو.

ان مان اهو ڄاڻ پوي ٿي تہ شماڪي ميوچوئل فنڊ جي سيڙپ ۾ وڌيڪ نفعو ٿيو.

مثال (3) ڪريم ڀائيءَ ڪي شيشي جي ڪارخاني ۾ 400000 رپيا سيڙايا. 2 سالن کان پوءِ هنکي ان مان 520000 رپيا مليا. نفعي جي رقم هن 3:2 ريشو ۾ بئنڪ ۾ امانت ۽ شيئرس ۾ سيڙايا تہ هن بنهي ڳالهين ۾ ڪيتري رقم سيڙائي؟

حل : ڪريم ڀائيءَ کي ٻن سالن کان پوءِ ٿيل نفعو = 5,20,000 − 4,00,000 = 1,20,000 رپيا

بئنڪ ۾ امانت رکيل رقم $= \dfrac{3}{5} \times 1,20,000$

$= 3 \times 24,000$

$= 72,000$

شيئرن ۾ سيڙايل رقم $= \dfrac{2}{5} \times 1,20,000$

$= 2 \times 24,000$

$= 48,000$ رپيا

ڪريم ڀائيءَ امانت طور 72000 رپيا ۽ شيئرن ۾ 84000 رپيا سيڙايا .

(4) انيل جي ماهياني اپت ۽ خرچ جو ريشو 5:4 آهي. امن بابت ساڳيو ريشو 3:2 آهي. امن جي ماهياني اپت جو 4% رقم انيل جي ماهياني اپت جو 7% آهي. انيل جي ماهياني اپت 9600 رپيا آهي تہ

(i) امن جي ماهياني اپت لهو (ii) انيل ۽ امن جي بچت لهو.

حل : اسانکي ڄاڻ آهي تہ ، خرچ - اپت = بچت

انيل جي اپت ۽ خرچ جو ريشو 5:4

سمجهو تہ انيل جي اپت آهي 5x

۽ خرچ آهي 4x

امن جي اپت ۽ خرچ جو ريشو 3:2

سمجهو تہ امن جي اپت آهي 3x

۽ خرچ آهي 2y

انيل جي ماهياني اپت $= 5x = 9600$

$$\therefore\ 5x = 9600$$

$$x = 1920$$

ماهيانو خرچ $= 4x = 4 \times 1920 = 7680$

انيل جي ماهيانو خرچ 7680 روپيا $\therefore$ انيل جي بچت 1920 روپيا

ڏنل انيل جي ماهياني اپت جو 7% = امن جي ماهياني اپت جو 4%

$$\therefore\ \frac{4}{100} \times 3y = 9600 \times \frac{7}{100}$$

$$\therefore\ 12y = 9600 \times 7$$

$$\therefore\ y = \frac{9600 \times 7}{12} = 5600$$

امن جي اپت $= 3y = 3 \times 5600 = 16,800$ روپيا

امن جو خرچ $= 2y = 2 \times 5600 = 11,200$ روپيا

$\therefore$ امن جي بچت $16,800 - 11,200 = 5,600$ روپيا

امن جي ماهياني اپت 16800 روپيا ۽ هن جي بچت آهي 6500 روپيا

انيل جي ماهياني بچت 1920 روپيا

مشغولي I : سلوني ۽ 35000 روپيا مان ڪجھہ رقم 4% بچيل رقم 5% وياج سان هڪ سال لاءِ سيڙائي. هن کي ڪل وياج 1530 روپيا مليو هن ٻنهي قسمن جي وياج ۾ ڪيتري رقم سيڙائي؟

5% وياج سال y روپيلسيڙايا — 4% وياج سال x روپيلسيڙايا

$\square + \square = 35000$ ..... (I)

↓ وياج

$$\frac{4}{100}x + \frac{5}{100}y = 1530 \quad ..... (II)$$

$x = \square$ $\quad$ $y = \square$

مشغولي 1 : ٻانڪن جي مدد سان پنهنجي گهر جي هفتي جي ڪهاڻيءَ - خرچ ڳڻيو. ڪيتري خرچ جي قسم جا ڪالم ٺاهيو.
ڪرائو، تعليم، ڊاڪٽري خرچ ، سفر، ڪپڙا ۽ ننڍا خرچ انهن جو ويچار ڪري ڪل خرچ ڳڻيو. ڪمائي پاسي گهرخرچ لاءِ ملندڙ رقم پهريان جي بچيل رقم ۽ ڪجهه نئين ملڪيت هجي ته لکو.

(2) موڪلن جي مهني جي ڪمائي خرچ لکو

صفحي 52 تي ڏنل گوئند جي اپت خرچ ڏسو

مشغولي -2 ٻنا رٻيع واري زمين هوندڙ ڪڙميءَ جي اپت وڌائڻ جا ڪهڙا طريقا ٿي سگهن ٿا ان تي ڪلاس ۾ چرچا ڪريو. ڪجهه ويچار هيٺ ڏنل آهن.

شيتل : ڪڙميءَ کي فصل وڪڻڻ کان پوءِ ئي اپت ٿيندي آهي. ان مان ٿيل نفعو سڄو سال پورو پوي ان لاءِ مالي رٿا ٺاهڻ گهرجي.

پرڪاش : فصل کي واجب اگهه ملڻ گهرجي جيئن اپت وڌي

نرگس : ارٿ شاستر جو نيم آهي ته رسد وڌڻ تي شيءِ جو اگهه گهٽجندو آهي.

اگهه گهٽجڻ سان فائدو ته گهٽجندو نه!

ريتوُ : جيڪڏهن فصل گهڻو ٿيو ۽ اگهه گهٽ هجي ته مال سانڍي رکجي پوءِ واجب اگهه ملڻ تي وڪڻجي.

آتش : ان لاءِ سنا گودام ٺاهڻ گهرجن

ريشما : ڪڙمين کي گهٽ اگهه تي قرض ملڻ گهرجي

ويا : کير، ڪڪڙ پالڻ وغيره پورڪ ڌندا ڪيا ته وڌيڪ ڪمائي ٿيندي جانورن جي افراجي پدارٿن مان عضوي ڀاڻ به ملندو

ڪُنال : کيتيءَ جي فصل تي آڌارت ڪارخانا وڌا ۽ شربت، جئم، ڪٽائڻ، سُڪل ڀاڄيون، ميون جو گودو وغيره شيون پيڪنگ ڪري سڄو سال وڪڻي سگهجن ٿيون.

مال جي روانگي ڪري وڌيڪ اپت حاصل ڪري سگهجي ٿي.

اڀياس 6.1

1. الڪا کي هر مهني موڪليل رقم مان هوءَ 90%خرچ ڪندي آهي ۽ 120رپيا بچت ڪندي آهي ته هنکي ڪيتري رقم موڪلي ويندي آهي؟

2. سمت 50000رپيا موڙيءَ سان ڪاڏي جو ڌندو شروع ڪيو. ان ۾ هنکي پهرئين مال 20%نقصان ٿيو. بچيل موڙيءَ مان هن ٻئي سال منائيءَ جو ڌندو شروع ڪيو ان ۾ هنکي 5% نفعو ٿيو ته مول موڙيءَ تي هنکي ڪيترو سيڪڙ نفعو يا نقصان ٿيو؟

3. راجڪمار پنهنجي ماهياني ڪمائي جو 5% ٻارن جي تعليم خرچ ڪري ٿو 14% رقم شيئرس ۾ 3%بئنڪ ۾سيڙائي ۽ 40% رقم روزاني حرچن لاءِ رکي. سيڙپ ۽ خرچ ڪٽ ڪري هن وٽ 19000 ربچيا. ته هنجي ماهياني ڪمائي لهو.

4. سعيد ڀائي پنهنجي ڪمائيءَ مان 40000ر 8% گڏيل وياج تي 2سالن لاءِ بئنڪ ۾رکيا. فرنانڊز 120000ر ميوچوئل فنڊ ۾2 سالن لاءِ سيڙايا. 2 سالن کان پوءِ هنکي ان مان 192000رپيا مليا. ٻڌايو ته سعيد ڀائي ۽ فرنانڊز مان ڪنهنجي سيڙپ وڌيڪ فائديمند ثابت ٿي؟

5. سيما پنهنجي ڪمائيءَ جو 3% رقم سماجڪ ڪمن لاءِ ڏني ۽ 90% ڪمائي خرچ ۾ڪئي هن وٽ 1750 ربچيا. ته سندس ماهياني ڪمائي لهو.

اچو ته چرچا ڪريون

ٽئڪس يعني ڇا؟ ٽئڪس جا ڪهڙا قسم آهن؟ ان بابت ڄاڻ هيٺين ويب سائيٽس مان حاصل ڪريو.

ICT Tools or Links	www.incometaxindia.gov.in, www.mahavat.gov.in

ڄاڻي وٺون

ٽئڪس

ديش جي وڪاس لاءِ سرڪار الڳ الڳ يوجنائون ٺاهيندڙ آهي انهن تي عمل لاءِ سرڪاري گهڻي رقم جي گهرج هوندي آهي الڳ الڳ ٽئڪس وسيلي اها رقم گڏ ڪئي ويندي آهي.

ٽئڪس جو اُپيوگ (Utility of taxes)

- بنيادي سيوائون ميسر ڪرائڻ
- ماڻهن جي ڪلياڻ جي يوجنائن لاءِ
- الڳ الڳ ڪيترن ۾ وڪاس جا ڪم ۽ سنشوڌن ڪرڻ لاءِ
- قاعدي ۽ بندوبست لاءِ
- قدرتي آپداڪان پيڙت ماڻهن جي مدد لاءِ
- ديش ۽ ناگرڪن جي حفاظت لاءِ

ٽئڪس جا قسم (Types of taxes)

سڌي ٽئڪس (Direct taxes)

جنهن ٽئڪس جو بار سڌو ٽئڪس ڀريندڙ تي پوي ٿو

مثال : انڪم ٽئڪس، ملڪيت ٽئڪس، پروفيشنم ٽئڪس

اڻسڌي ٽئڪس (Indirect taxes)

جنهن ٽئڪس جو بار ٽئڪس ڀريندڙ سڌو نٿو پوي جيئن سيلس ٽئڪس، وئٽ ٽئڪس، سروس ٽئڪس، ڪسٽم ڊيوٽي، ايڪسائيز ڊيوٽي وغيره.

۲۰۱۷ سال ۾ ٽئڪس جي قاعدن موجب اُنهنجا قسم متي ڏيڪاريل آهن.

مشغولي : الڳ الڳ ٽئڪس ڀريندڙ نوڪريءَ وارا يا واپارين ڪان ٽئڪس بابت ڄاڻ حاصل ڪريو.

چاڻي وٺون

انڪم ٽئڪس (Income tax)

ماڻهن سنستائن يا ٻين اُديوگن وغيره جي پارت ۾ اُپت مقرر ڪيل حد کان وڌيڪ هوندي تہ اُنتي انڪم ٽئڪس لڳندي آهي.

هڪ باب ۾ اسين فقط ماڻهن تي لڳندڙ ٽئڪس بابت ويچار ڪرڻ وارا آهيون انڪم ٽئڪس مرڪزي سرڪار لڳائيندي آهي پارت ۾ انڪم ٽئڪس ٻن قاعدن وسيلي لڳائي ويندي آهي.

(i) اِنڪم ٽئڪس قاعدو 1961 جيڪو تہ 01.04.1962 کان وجود ۾ آيو.

(ii) هر سال سنسد ۾ پيش ٿيندڙ بجيٽ جي انتظامن موجب هر سال رواجي طرح ضروري مهني ۾ مالي منتري، مالي سال لاءِ بجيٽ پيش ڪندا آهن ان ۾ انڪم ٽئڪس جا اگهہ ڏنل هوندا آهن سنسد جي بجيٽ منظور ڪرڻ تي اهي ايندڙ سال لاءِ لاڳو ٿيندا آهن.

انڪم ٽئڪس بابت مُدا

- انڪم ٽئڪس پريندڙ (An assessee) انڪم ٽئڪس جي نيمن موجب جنهن ماڻهوءَ مان انڪم ٽئڪس جي اميد ڪيل آهي انکي انڪم ٽئڪس پريندڙ چئجي ٿو.
- مالي سال (Financial year) جنهن سال جي عرصي و اپت حاصل ٿيندي آهي انکي مالي سال چوندا آهن اسانجي ديش ۾ فلحال مالي سال اپريل کان 31 مارچ هوندي آهي.
- ٽئڪس ڪاٿو سال (Assessment year) مالي سال کانپوءِ واري لڳتي مالي سال کي 'ٽئڪس ڪاٿو سال' چوندا آهن هلندڙ مالي سال ۾ اڳئين مالي سال جي ٽئڪس ڪٽ ڪبي آهي.

مالي سالي ۽ انجو ٽئڪس ڪاٿو سال جا مثال

مالي سال (Financial Year)	ٽئڪس ڪاٿوسال (Assessment Year)
31-03-17 - 01-04-2016 کان 2016-17	2017-18
31-03-18 - 01-04-2017 کان 2017-18	2018-19

- قائم کاتو نمبر (PAN) : ماڻهوءَ جي عرض ڪرڻ تي انڪم ٽئڪس ويپاڳ هنکي انگہ اکرن نمبر ڏنو ويندو آهي، ان کي قائم کاتو نمبر 'Permanent Account Number (PAN)' چوندا آهن چڱن ڪاغذن ۽ مالي وهنوار ۾ اهو نمبر لکڻ ضروري هوندو آهي.

پئن ڪارڊ جو اپيوگہ : انڪم ٽئڪس ويپاڳہ کي ٽئڪس پيرڻ لاءِ چلن، ٽئڪس جو تفصيل وغيره ڪاغذن تي پئن نمبر لکڻ ضروري هوندو آهي. وڏي مالي وهنوار ۾ بہ پئن نمبر لکڻو پوندو آهي. انجو سڃاڻپ جي ثبوت طور بہ اِستعمال ٿيندو آهي.

ڄاڻي وٺو

انڪم ٽئڪس جي ڪٽ

انڪم ٽئڪس جي ڪٽ اپت تي ٿيڻ سبب اپت جي وسيلا ڄاڻڻ ضروري آهي اپت جا مکيه 5 وسيلا آهن.

(1) پگهار وسيلي ملندڙ اپت (2) گهر مان ملندڙ اپت

(3) ڌنڌي ۽ پيشي مان ملندڙ اُپت (4) موڙي ۽ مان فائدو (Capital gain)

(5) ٻين وسيلن مان ملندڙ اُپت

پگهار حاصل ڪندڙ شخص جي انڪم ٽئڪس ڪٽ لاءِ مکيه ڳالهيون.

انڪم ٽئڪس ڪل ساليانی اپت تي لڳندي آهي انڪم ٽئڪس جي قلمن 80G,80D,80C موجب ساليانی ڪمائي ۽ مان مقرر ڪاٽ ملندي آهي. ان ڪاٽ ڪانپوءِ بچيل اپت کي ’ٽئڪس لائق اپت‘ چوندا آهن انڪم ٽئڪس ان رقم تي لڳندي آهي.

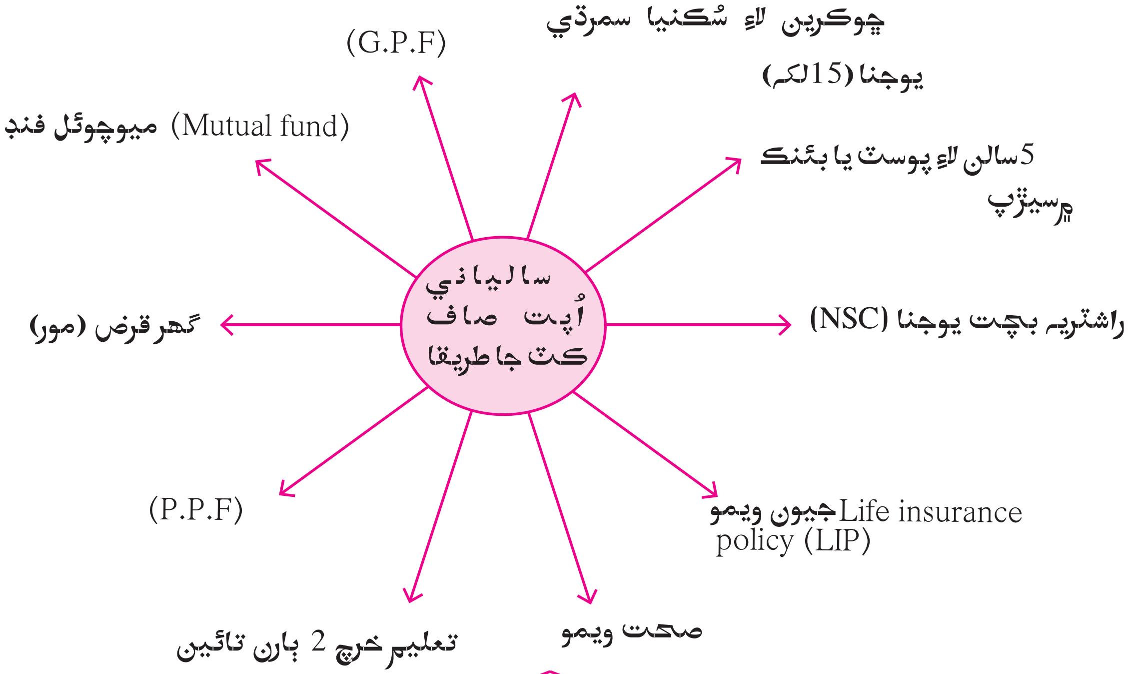
ٽئڪس ڪٽ ڪرڻ جا نيم متجندا رهندا آهن انڪري اسانکي نون نيمن جي ڄاڻ هئڻ گهرجي.

ٽئڪس لائق رقم مان مقرر حد تائين اپت تي ٽئڪس نه لڳندي آهي ان رقم کي ٽئڪس لائق اپت جي ’مول معاف ڪيل رقم‘ چئبو آهي.

- ڪسانن کي کيتي ۽ جي اپت تي ٽئڪس نه لڳندي آهي.
- انڪم ٽئڪس جي قلم 80G موجب پرڌان منتري فنڊ، مکيه منتري فنڊ يا مڃيتا مميل سنستائن کي چندو ڏيڻ تي انڪم ٽئڪس ۾ 100% ڇوٽ ملندي آهي.
- 80D قلم موجب صحت ويمي جي قسط تي ڇوٽ ملندي آهي.

- الڳ الڳ قسمن جي سيڙپ تي 80C قلم موجب وڌ ۾ وڌ 150000 ۽ تائين ڪاٽ ملندي آهي.

- 2017-18 جي بجيٽ موجب سيڙپ تي ڪاٽ حاصل ٿيڻ جا مکيه طريقا ڏيکاريل آهن.



انڪم ٽئڪس پريندڙ جي عمر موجب ٻه ڪٽ جا الڳ الڳ گروھ آھن هيٺ اپت جي حد موجب انڪم ٽئڪس جي اڳهه جي چجرو ڏنل آھن.

چجرو I

60 سال عمر تائين جا شخص			
سيڪنڊري ۽ هائر سيڪنڊري سيس	تعليمي سيس (اپ ٽئڪس)	انڪم ٽئڪس	ٽئڪس لائق اپت جا گروھ (روپين ۾)
ٽئڪس معاف	ٽئڪس معاف	ٽئڪس معاف	2,50,000
انڪم ٽئڪس جو 1 سيڪڙو	انڪم ٽئڪس جو 2 سيڪڙو	5 سيڪڙو (ٽئڪس لائق رقم مان 250000 ڪٽ ڪري)	2,50,001 – 5,00,000
انڪم ٽئڪس جو 1 سيڪڙو	انڪم ٽئڪس جو 2 سيڪڙو	₹ 12,500 + 20 سيڪڙو (ٽئڪس لائق اپت مان 5 لک ڪٽ ڪري)	5,00,001 – 10,00,000
انڪم ٽئڪس جو 1 سيڪڙو	انڪم ٽئڪس جو 2 سيڪڙو	₹ 1,12,500 + 30 سيڪڙو (ٽئڪس لائق اپت مان 10 لک ڪٽ ڪري)	10,00,000 کان وڌيڪ
ساليانو اپت 50 لک کان 1 ڪروڙ تائين هوندي شخص کي انڪم ٽئڪس جي 10 سيڪڙو سر چارج ۽ 1 ڪروڙ کان وڌيڪ اپت تي 15% سرچارج ۾ لڳندي آهي.			

مشغولي : مٿيون چجرو جاچي هيٺين چوکنڊن ۾ مناسب عدد لکو .

مثال : ● مهتا جي ساليانو اپت ساڍا چار لک آهي. هن ڪاٽ ملڪ واري ڪا بہ بچت نہ ڪئي آهي.

سندس ٽئڪس لائق رقم ڪهڙي گروھ ۾ ايندي . ______

● هن کي ______ رقم تي ______ اڳهه سان انڪم ٽئڪس ڏيڻي پوندي

● هن کي ______ رقم تي سيس (اپ ٽئڪس) ڏيڻي پوندي.

چجرو -II

بزرگ ناگرڪ 60 سالن کان 80 سال عمر			
سيڪنڊري ۽ هائر سيڪنڊري سيس	تعليمي سيس	انڪم ٽئڪس	ٽئڪس لائق جا گروھ (روپين ۾)
ٽئڪس معاف	ٽئڪس معاف	ٽئڪس معاف	3,00,000 تائين
انڪم ٽئڪس جو 1 سيڪڙو	انڪم ٽئڪس جو 2 سيڪڙو	5 سيڪڙو (ٽئڪس لائق مان 3 لک ڪٽ ڪري)	3,00,001 – 5,00,000
انڪم ٽئڪس جو 1 سيڪڙو	انڪم ٽئڪس جو 2 سيڪڙو	₹ 10,000 + 20 سيڪڙو (ٽئڪس لائق مان 3 لک ڪٽ ڪري)	5,00,001 – 10,00,000
انڪم ٽئڪس جو 1 سيڪڙو	انڪم ٽئڪس جو 2 سيڪڙو	₹ 1,10,000 + 30 سيڪڙو (ٽئڪس لائق مان 3 لک ڪٽ ڪري)	10,00,000 لک کان وڌيڪ
(ساليانو اپت 50 لک کان 1 ڪروڙ درميان هوندڙن کي انڪم ٽئڪس جو 10 سرچارج ۽ ساليانو اپت 1 ڪروڙ کان وڌيڪ هوندڙن کي انڪم ٽئڪس جو 15% سرچارج)			

مشغولي : ڇيجري II مان هيٺين مشغولي ڪريو.

مثال: شري پنڊت جي عمر 67سال آهي. گذريل سال سندن ساليانو اُپت 13,25,000 رپيا هئي ٻڌايو تہ سندن ٽئڪس لائق اپت ڪيتري هئي؟ ڪيترو انڪم ٽئڪس ڀرڻي پوندي؟

$$13,25,000 - 10,00,000 = 3,25,000$$

سندن ٽئڪس $= 1,10,000 + 3,25,000 \times \frac{30}{100} = \boxed{}$

يعني ڪل انڪم ٽئڪس $\boxed{} + \boxed{} = \boxed{}$

انڪم ٽئڪس جو 2% تعليمي سيس $\boxed{} \times \frac{2}{100} = \boxed{}$.

انڪم ٽئڪس جو 1% سيڪنڊري ۽ هائر سيڪنڊري سيس $\boxed{} \times \frac{1}{100} = \boxed{}$

$\therefore$ ڪل انڪم ٽئڪس = انڪم ٽئڪس + تعليمي سيس + اوچ سکيا سيس

$= \boxed{} + \boxed{} + \boxed{}$

$= \boxed{₹\ 2,13,725}$

ڇيجرو III

گھٽا بزرگ ناگرڪ (عمر 80 سالن کان وڌيڪ)			
ٽئڪس اپت جا گروھ (روپين ۾)	انڪم ٽئڪس	تعليمي سيس	سيڪنڊري ۽ هائر سيڪنڊري
تائين 5,00,000	ٽئڪس معاف	ٽئڪس معاف	ٽئڪس معاف
5,00,001 10,00,000	سيڪڙو 20 (ٽئڪس لائق اپت مان 5 لک ڪٽ ڪري)	انڪم ٽئڪس جو 2سيڪڙو	انڪم ٽئڪس جو 1 سيڪڙو
ڪان وڌيڪ 10,00,000	سيڪڙو 30 + ₹ 1,00,000 (ٽئڪس لائق اپت مان 10 لک ڪٽ ڪري)	انڪم ٽئڪس جو 2سيڪڙو	انڪم ٽئڪس جو 1 سيڪڙو
(ساليانو اپت 50 لک کان 1 ڪروڙ درميان هوندڙن کي انڪم ٽئڪس جو 10% سرچارج ۽ ساليانو اپت 1 ڪروڙ کان وڌيڪ هوندڙن کي انڪم ٽئڪس جو 15% سرچارج)			

مشغولي : 80C, 80G, 80D قلمن جي ڄاڻ هٿ ڪريو.

پئن ڪارڊ جي ڄاڻ جاچيو

روڪ رهت (Cashless) وهنوار لاءِ ڪهڙا طريقا آهن؟

مٿين ڇيجرن جي مدد سان الڳ الڳ شخصن جي انڪم ٽئڪس جي ڪٽ جا مثال اسين ڏسنداسين.

مثال (1) شري مهاتري جي عمر 50 سال آهي ۽ هن کي ساليانو آمدني 12,00,000 رپيا آهي هڪ هيٺيئن نموني سيڙپ ڪئي.

(i) ويما قسط : ₹ 90,000 (ii) پي ايف : ₹ 25,000

(iii) پي پي ايف : ₹ 15,000 (iv) راشٽريه بچت يوجنا : ₹ 20,000

ان وسيلي انڪم ٽئڪس ۾ ملندڙ ڪاٽ، ٽئڪس لائق اپت ۽ انڪم ٽئڪس لهو

حل : (1) ڪل ساليانو ڪمائي = 12,00,000 رپيا

(2) 80C جي سيڙپ موجب

سيڙپ	رقم (رپيا)
(i) ويمو	90,000
(ii) پي ايف	25,000
(iii) پي پي ايف	15,000
(iv) راشٽريه بچت يوجنا	20,000
ڪل	1,50,000

نيم 80C موجب انڪم ٽئڪس لاءِ وڌ ۾ وڌ 1,50,000 رپين جي ڪاٽ ملندي آهي.

(3) ∴ ٽئڪس لائق اپت = [1] جي رقم [2] جي رقم

= 12,00,000 − 1,50,000 = 10,50,000

(4) شري مهاتري جي ٽئڪس ڪٽ 2 چجري I موجب ڪنداسين.

(10 لکن کان وڌيڪ آهي) 10,50,000= هن جي ٽئڪس لائق رقم.

(ڪل اپت مان 10 لک ڪٽ ڪري) 1,12,500+30%= چجري I موجب ٽئڪس.

∴ 10,50,000 − 10,00,000 = 50,000

∴ انڪم ٽئڪس = $1,12,500 + 50,000 \times \frac{30}{100}$

$=1,12,500 + 15,000$

$= 1,27,500$

ان کان سواءِ 2% تعليمي سيس ۽ 1% اوچ تعليمي سيس به جوڙڻي پوندي.

تعليمي سيس = $1,27,500 \times \frac{2}{100} = 2550$ روپيا

اوچ تعليمي سيس = $1,27,500 \times \frac{1}{100} = 1275$ روپيا

∴ ڪل انڪم ٽئڪس = 1,27,500 + 2550 + 1275 = 1,31,325 روپيا

شري مهاتري کي 1,31,325 رپيا ٽئڪس ڀرڻي پوندي.

(2) 62ورهين جو احمد ڀائي هڪ ڪمپنيءَ ۾ نوڪري ڪندو آهي سندس ڪل سالياني اپت 6,20,000 آهي هن پي ايف کاتي ۾ 1,00,000 سيڙايا ويمي جو سالياني قسط 80,000 ڀري مکيہ مشنري فنڊ ۾ 10,000 چندو ڏنو.

تہ احمد ڀائيءَ کي ڪل ڪيتري ٽئڪس ڀرڻي پوندي؟

(1) ڪل سالياني اپت = 6,20,000 رپيا

(2) موجب کاتا 80C

(i) پي. ايف = 1,00,000 رپيا

(ii) ويمو = 80,000 رپيا

1,80,000 رپيا

(iii) 80C موجب وڌ ۾ وڌ 150000, کاتا

(3) مکيہ منتري فنڊ ۾ چندو (80 G کاتا) = 10000 رپيا

(4) ٽئڪس لائق اپت = (1) − [(2) + (3)]

$= 6,20,000 - [1,50,000 + 10000]$

= 4,60,000 رپيا

ان رقم تي چجري (II) موجب ڪٽ ٿيندي.

∴ لڳندڙ انڪم ٽئڪس = (ٽئڪس لائق رقم − 3,00,000) $\times \frac{5}{100}$

$= (4,60,000 - 3,00,000) \times \frac{5}{100}$

$= 1,60,000 \times \frac{5}{100}$

= 8000 رپيا

سيس جي ڪٽ ڪريون

تعليمي سيس : $8,000 \times \frac{2}{100} = 160$ اوچ تعليمي سيس : $8,000 \times \frac{1}{100} = 80$

∴ ڪل انڪم ٽئڪس = ₹ 8,240 = 8000 + 160 + 80

∴ احمد ڀائيءَ کي ڪل 8240 روپيا انڪم ٽئڪس ڀرڻي پوندي.

مثال (3) شريمتي هندوجا جي عمر 50 سال آهي سندس ٽئڪس لائق اپت 16,30,000 رپيا آهي هنکي ڪيتري انڪم ٽئڪس ڀرڻي پوندي؟

حل : شريمتي هندوجا جي اپت ڏهہ لک کان وڌيڪ واري گروهہ ۾ آهي.

هتي اسين چجري I موجب ٽئڪس جي ڪٽ ڪنداسين.

چجري I موجب

ٽئڪس = 112500 + (ٽئڪس لائق اپت مان ڏهہ لک ڪٽ ڪري انجو 30%)

ڏهه لک شريمتي هندوجا جي اُپت = 16,30,000 − 10,00,000

= 6,30,000 رپيا

چجري I موجب

انڪم ٽئڪس $= 1,12,500 + 6,30,000 \times \frac{30}{100}$

$= 1,12,500 + 30 \times 6,300$

$= 1,12,500 + 1,89,000$

= 3,01,500 رپيا

اوچ تعليمي سيس 1% $= \frac{1}{100} \times 3,01,500 =$ ₹ 3015

اوچ تعليمي سيس 2% $= \frac{2}{100} \times 3,01,500 =$ ₹ 6030

∴ ڪل انڪم ٽئڪس $= 3,01,500 + 3015 + 6030$

$= 3,10,545$

∴ هن کي ڪل 3,10,545 رپيا ٽئڪس ڀري پوندي

اڀياس 6.2

(1) هيٺيون چجرو جاچيو ڏنل شخص کي ٽئڪس لائق رقم تي انڪم ٽئڪس ڀرڻي پوندي يا نه اهو لکو

نمبر	شخص	عمر	ٽئڪس لائق رقم (₹)	ٽئڪس ڀرڻي پوندي يا نه
(i)	نڪتا	27	₹ 2,34,000	
(ii)	ڪلڪرڻي	36	₹ 3,27,000	
(iii)	مهتا	44	₹ 5,82,000	
(iv)	بجاج	64	₹ 8,40,000	
(v)	ڊسلوا	81	₹ 4,50,000	

(2) ڪرتار سنگهه (عمر 48 سال) خانگي ڪمپنيءَ ۾ نوڪري ڪندا آهڙي سندس ماهياني پگهار 42000 رپيا آهي. هوُ پي ايف ۾ هر مهني 3000 رپيا سيڙائيندو آهي. هن 15000 رپيا روپئي جا راشٽريه بچت سرٽيفڪيٽ به ورتا. 12000 رپيا جو چندو پرڌان منتري فنڊ ۾ ڏنو آهي. سندس ٽئڪس جي ڪٽ ڪريو.

(1) مناسب جواب چونڊيو.

(i) 80C قلم موجب وڌ ۾ وڌ ڪيتري ڪاٽ (روپيا) منظور آهي؟

(A) ڏيڍ لک (B) اڍائي لک (C) هڪ لک (D) ٻه لک

(ii) هڪ شخص جي 2017-18 جي آپت جو ٽئڪس ڪاٽو سال هيٺين مان ڪهڙو آهي؟

(A) 2016-17 (B) 2018-19 (C) 2017-18 (D) 2015-16

(2) شڪر آپت جو 60% خرچ ڪندو آهي. بچيل رقم مان هُو اناٿ آشرم ۾ 300روپيا چندو ڏيندو آهي ته هن وٽ 3200 رپيا بچندا آهن هنجي آپت ڪيتري آهي؟

(3) هيرالعل 215000 روپيا ميوچوئل فنڊ ۾ سيڙايا ان مان هنکي 2 سالن کانپوءِ 305000 روپيا مليا. رمٽيڪ لعل 1,40,000 روپيا 8% سان گڏيل وياج تي 2 سالن لاءِ بئنڪ ۾ سيڙايا هرهڪ کي ٿيل سيڪڙو نفعو ٻڌايو ڪنهن جي سيڙپ وڌيڪ فائديمند ٿي؟

(4) هڪ بچت کاتي ۾ سال جي شروعات ۾ 24000 روپيا هئا ان ۾ 56000 روپيا پريا ۽ ڪل رقم 7.5% بها سان گڏيل وياج تي بئنڪ ۾ رکي. 3 سالن کانپوءِ ڪل ڪيتري رقم واپس ملندي؟

(5) منوهر پنهنجي آپت جو 20% حصو پنهنجي وڏي پٽ ۽ 30% حصو ننڍي چوڪري کي ڏنو بچيل رقم جو 10% هن اسڪول کي چندو ڏنو. ته هن وٽ 1,80,000 روپيا بچيا. منوهرلعل جي آپت لهو.

(6) ڪٿلش جي آپت 85% خرچ ۾ ٿيندو آهي. هنجي آپت 36% وڌي ۽ هنجو خرچ پهرين کان 40% وڌيو. هن جي هاڻي ٿيندڙ سيڪڙو بچت لهو.

(7) رميش، سريش ۽ پريتيءَ جي ڪل ساليانى آپت 8,07,000 روپيا آهي. هو پنهنجي آپت جو نمبروار 75%،80%،90% حصو خرچ ڪندا آهن. جيڪڏهن سندن بچت جو ريشو 16:17:12 آهي ته هرهڪ جي ساليانى بچت لهو.

(8) هيٺين ۾ انڪم ٽئڪس جي ڪٽ ڪريو.

(i) شري ڪدم (عمر 35 سال) جي ٽئڪس لائق آپت 13,35,000 روپيا آهي.

(ii) شري خان (عمر 65 سال) جي ٽئڪس لائق آپت 4,50,000 روپيا آهي.

(iii) ڪماري ورشا (عمر 26سال) جي ٽئڪس لائق آپت 2,30,000 روپيا آهي.

◈◈◈

ICT Tools or Links

ڀارت سرڪار جي ويب سائيٽ www.incometaxindia.gov.in ڏسو. ان ويب سائيٽ incometax calculator مينؤ تي ڪلڪ ڪريو. اينڊڙ فارم تي خيالي آپت ۽ ڪاٽ جون خيالي رقمون لکي انڪم ٽئڪس ڪٽ ڪريو.

7 عدد شاسنر

اچو تہ سکون

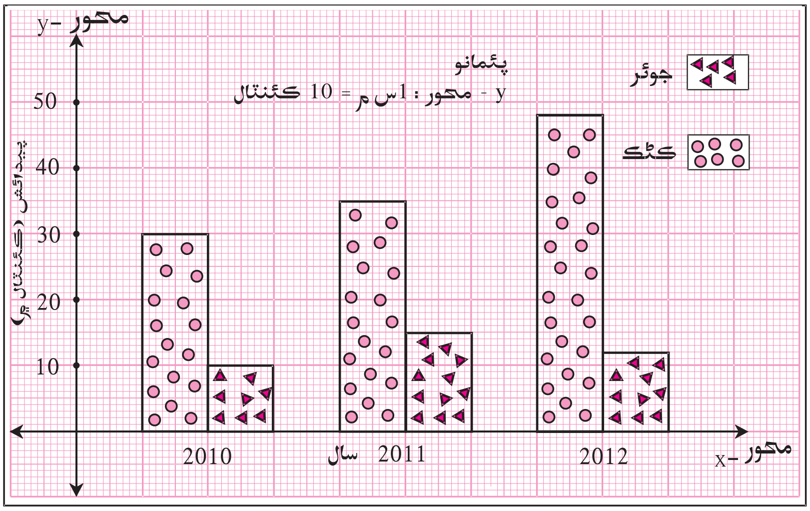
- گڏيل ڪالم گراف
- اُپ ورهايل ڪالم گراف
- سيڪڙو ڪالم گراف
- شروعاتي ۽ بئي درجي جي ڇاڻ
- اَڻ گرهيل ۽ گهروهيل جهجهائي ورهاست ڇڃرو
- گڏيل جهجهائي ورهاست ڇڃرو

ذرا ياد ڪريو

گذريل درجي ۾ اسان سادو ڪالم گراف ۽ گڏيل ڪالم گراف، اهي ڪيئن ڪڍبا آهن، اهو سکيا آهيون. ساڳئي نموني اخبارون، مخزون، دوردرشن وغيره ماڌيمن ۾ ڏنل گراف ڏسي، انُهن مان ڇاڻ حاصل ڪئي آهي.

ڇاڻ جي نموني موجب ٿي، اُن ڇاڻ جي پيش ڪش ڪرڻ لاءِ گراف ڪڍڻ اَهميت وارو آهي.

مثال : هڪ ڪڙمي ۽ جو، سندس کيتي ۾ پيدا ٿيل ڪڻڪ ۽ گراف ۾ ڏنل آهي ان جي آڌارتي سوالن جا جواب ڏيو.



(i) ٽن سالن ۾ ڪهڙي اناج جي پيدائش لڳاتار وڌندي رهي.

(ii) 2012 ۾ 2011 جي ڀيٽ ۾ جوئر جي پيدائش ڪيتري گهٽ ٿي؟

(iii) 2010 ۽ 2012 ۾ ڪڻڪ جي پيدائش ۾ ڪيترو فرق؟

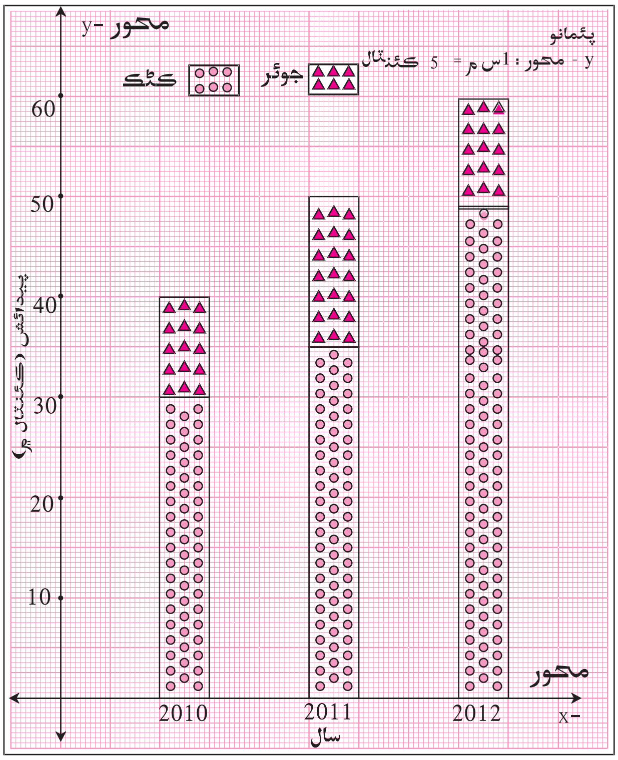
(iv) اِن گراف مان هيٺ ڏنل تختو پورو ڪريو.

پيدائش (ڪئنتال) / سال	ڪڻڪ	جوئر	ڪل
2010			
2011			
2012	48	12	60

چاڪي وٺون

اُپ ورهايل ڪالم گرافت (Sub-divided bar diagram)

ڏنل چارٽ موجب ٻئي طريقي گرافت ڪيو ويو آهي. اِن قسم جي ڪالم گراف کي اُپ ورهايل ڪالم گراف چئبو آهي ان ۾ هڪ قسم جي ٻنهي مدن جو جوڙ ڪبو آهي آيل جوڙ مو مناسب پروپورشن موجب ڪالم ۾ ڏيکاربو آهي هرهڪ مدي جي چارٽ لاءِ ڪالم ۾ ورهاست ڪجي ٿي. اڳواٽ مثال ۾ ڏنل چارٽ موجب اُپ ورهايل ڪالم گراف ڪيئن ڪبو، اُهو ڏسون



(i) ڪل پيدايش جو هرهڪ ڪالم، اُنجي اوچائي مناسب نموني ڏيکارجي

(ii) اُن ۾ ڪڻڪ جي پيدايش، اهو هڪ حصو آهي، اُهو خاص نشاني وسيلي ڏيکاريو

(iii) ڪالم جو بچيل حصو، ظاهر آهي تہ جوئر بابت چارٽ ڏيندو.

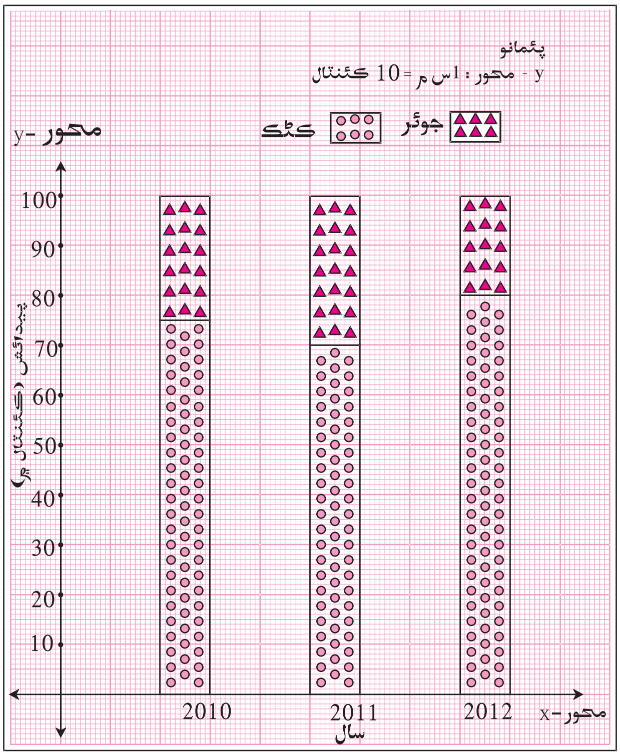
اهڙي ريت پرواري شڪل اُپ ورهايل ڪالم گراف ڏسو.

ڪهڙن بہ ٻن وشين ۾ سيڪڙو ڪڍي ڀيٽ ڪرڻ سان صحيح چارٽ ملندي آهي اهو اسان اڀياس ڪيو آهي. مثال 2000 رپين تي 600 روپيا نفعو ۽ 1500 روپين تي 510 روپيا نفعو اِنهن مان لڳي ٿو 600 رپيا نفعو اهو وهنوار سٺو آهي پر جيڪڏهن سيڪڙو ڪڍنداسين تہ نمبروار 30% ۽ 24% جواب ملندو مطلب 1500 رپين تي 510 رپيا نفعو وڌيڪ فائدي وارو وهنوار آهي.

سيڪڙو ڪالم گراف (Percentage bar diagram)

ڏنل چارٽ جي چڱيءَ طرح ڀيٽ ڪرڻ لاءِ سيڪڙو روپ ۾ ورهايل ڪالم گراف ڪڍبو آهي اُن کي سيڪڙو ڪالم گراف چئبو آهي اڳوارو مثال سيڪڙو ڪالم گراف ڪڍيو سمجهنداسين.

سال	ڪڻڪ جي پيداش	جوئر جي پيداش	سيڪڙو
2010	30	10	$\frac{30}{40} \times 100 = 75\%$
2011	35	15	$\frac{35}{50} \times 100 = 70\%$
2012	48	12	$\frac{48}{60} \times 100 = 80\%$



اها چاڙ ڏيکاريندڙ ڪالم گراف هيٺين ڏاڪن وسيلي ڪڍيو ويو آهي.

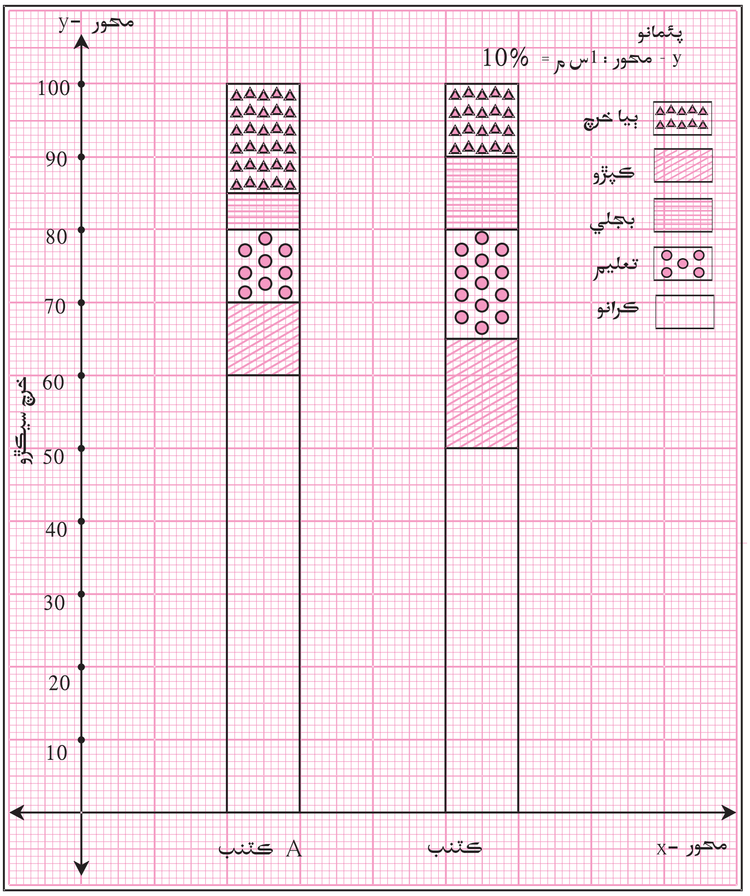
(i) هرهڪ سال جي ڪڻڪ ۽ جوئر جي ڪل پيدائش مان ڪڻڪ ۽ جوئر جي پيداش جو سيڪڙو ڪڍيو.

(ii) هرهڪ ڪالم جي اوچائي yمحدد موجب 100 سيڪڙو ڪنئي.

(iii) ڪڻڪ جي پيدائش جي ڪل پيدائش سان سيڪڙو ڪالم ۾ نشانيون ڪري ڏيکاريو.

(iv) ڪالم جو بچيل حصو ڪل پيدائش ۾ جوئر جو سيڪڙو ڏيکاري ٿو

ٻن ڪان وڌيڪ ڳالهين جي چاڙ اپ ورهايل يا سيڪڙو ـ ڳ ڪالم گراف وسيلي ڏيکاربي آهي.



حل ڪيل مثال

مثال (1) پر۾ سيڪڙو ڪالم گراف ڏيکاريل آهي

ان ۾ ٻن ڪٽنبن جي خرچن جي چاڙ ڏنل آهي

ان مان هيٺين سوالن جا جواب لکو

(i) هرهڪ ڪٽنب جي الڳ الڳ خرچن جا سيڪڙا لکو

(ii) اهو ٻڌئي ڪان ڪهڙي ڪٽنب جي ڪرائي جو خرچ انجي ڪل خرچ جي پيٽ ۾ وڌيڪ آهي؟

(iii) ٻنهي ڪٽنبن جي ٻين خرچن جو سيڪڙو ڪيترو آهي؟

(iv) ڪهڙي ڪٽنب جي بجلي خرچ جو سيڪڙو وڌيڪ آهي؟

(v) ڪهڙي ڪٽنب جي تعليمي خرچ جو سيڪڙو وڌيڪ آهي؟

حل : (i)

خرچ / ڪٽنب	ڪرانو	ڪپڙو	تعليم	بجلي	ٻيا خرچ
A	60%	10%	10%	5%	15%
B	50%	15%	15%	10%	10%

(ii) ڪٽنب A جي ڪراني جو خرچ ڪل خرچ جي ڀيٽ ۾ B کان 10% وڌيڪ آهي؟

(iii) ڪٽنب A جو ٻيو خرچ 15% ۽ ڪٽنب B جو ٻيو خرچ 10% آهي.

(iv) ڪٽنب B جي بجلي خرچ جو سيڪڙو وڌيڪ آهي. (v) ڪٽنب B جو تعليمي خرچ وڌيڪ آهي.

اڀياس 7.1

(1) هيٺين چجري ۾ ڀارتجي ٽرڪ ۽ بس جو اٽڪل عدد (لکن ۾) ڏنل آهي سيڪڙو ڪالم گراف ڪيو

(سيڪڙا ويجهي سڄن عدد ۾ ڪٽو)

سال	ٽرڪ جو عدد	بس جو عدد
2006-2007	47	9
2007-2008	56	13
2008-2009	60	16
2009-2010	63	18

(2) هيٺيئن چجري ۾ ڀارت جي پڪن رستن ۽ ڪچن رستن جي چاڙ ڏنل آهي. ان وسيلي اپ ورهايل سيڪڙو ڪالم گراف ڪيو.

(سيڪڙا پرواري سڄي عدد ۾ ڪٽو)

سال	پڪا رستا (لک ڪ م ۾)	ڪچا رستا (لک ڪ م ۾)
2000-2001	14	10
2001-2002	15	11
2002-2003	17	13
2003-2004	20	19

مشغولي : هيٺيئن خاڪي ۾ الڳ الڳ راڄين جي هرهڪ 1000 ڇوڪرن پٺيان ڇوڪرين جو عدد ڏنل آهي. چجري جي خالي جڳهيون ڀريو.

راڄيہ	ڇوڪرن جو عدد	ڇوڪرين جو عدد	ڪل	ڇوڪرن جو % پرواري سڄي عدد ۾	ڇوڪرين جو % پرواري سڄي عدد ۾
آسام	1000	960	1960	$\frac{1000}{1960} \times \frac{100}{1} = = 51\%$	100 − 51 = 49%
بهار	1000	840	1840		
پنجاب	1000	900			
ڪيرل	1000	1080			
مهاراشٽر	1000	900			

چجري جي چاڙ وسيلي سيڪڙو ڪالم گراف ڪيو. نتيجا ڪڍي چرچا ڪريو.

ويچار ڪريو صفحي 111 تي ڏنل مشغوليءَ ۾ پنجن راڄن جي في هزار ڇوڪرن پٺيان ڇوڪرين جو عدد ڏنل آهي، انهن جي پڙهيلن جو اندازهيٺ ڏنل آهي.

آسام (73%)، بهار (64%)، پنجاب (77%)، ڪيرل (94%) مهاراشٽر (83%)

ڇوڪرن جي ڇوڪرين جو عدد ۽ ان راڄيه جي پڙهيلن عدد انجي ڀيٽ ڪريو. ان مان ڪو نتيجو نڪري ٿو ڇا؟

اچو چرچا ڪريون

هيٺين ڄاڻ ڏيکارڻ لاءِ ڪهڙو ڪالم گراف مناسب ٿيندو؟

(1) ڇئن ڳوٺن ۾ پڙهيلن جو سيڪڙو عدد

(2) هڪ ڪٽنب جو الڳ الڳ ڳالهين تي خرچ

(3) پنجن ڪلاسن مان هرهڪ ڪلاس ۾ ڇوڪرن ۽ ڇوڪرين جو عدد

(4) ٽن ڏينهن جي وکيان نماءُ ۾ آيل شخصن جو عدد

(5) جنوريءَ کان جون تائين هرهڪ مهني ۾ توهانجي شهر جو وڌ ۾ وڌ ۽ گهٽ ۾ گهٽ گرمي پد

(6) واهڻ هلائڻ وقت 100 ڪٽنبن جي هيلميٽ واپرائيندڙ نه واپرائيندڙ شخص جو عدد

ڄاڻي وٺون

عدد شاستر (Statistics)

ڪنهن وڏي گروهه جو اڀياس ڪرڻ لاءِ اڻ گروهه جو ننڍو گروهه بي ترتيب وارطريقي ڪڍندا آهن. اهو وڏي گروهه جو عيوضي گروهه هوندو آهي. ان گروهه جي نسبتي وشيه جي ڄاڻ حاصل ڪبي آهي اها گهڻا دفعا عدد روپ ۾ هوندي آهي. انجي تحقيق ڪري نتيجا ڪڍبا آهن. اهڙي اڀياس کي عدد شاستر (statistics) چئبو آهي.

Statistics لفظ status ان لئٽن فقط مان تيار ٿيو آهي. انجي معني آهي راڄ جي حالت. ان مان لڳي ٿو ته پهرين اهو وشيه راڄيه جي ڪاروباري سرشتي سان لاڳاپو رکندو هو پر هاڻي ان وکيان جو اِستعمال سيني کيترن ۾ ڪيو ويندو آهي. سر رونالڊ ايلمر فِشر (Sir Ronald Aylmer Fisher) (17/02/1890-29/07/1962) کي عدد شاستر جو ابو چئجي ٿو.

ڄاڻ گڏ ڪرڻ (Data collection)

ماستر ڀاڻي: هڪ ڳوٺ جي هرهڪ ڪٽنب وٽ ڪيتري کيتي آهي اها ڄاڻ گڏ ڪرڻي آهي ڪيئن ڪندا؟

رابرٽ: ڳوٺ ۾ هرهڪ جي گهروچي ڄاڻ گڏ ڪبي.

ماستر: بمڪل صحيح، شاگرد دوستو ڪنهن خاص گروهه بابت اسان جيڪا ڄاڻ گڏ ڪريون ٿا اها عدد روُپ ۾ هوندي آهي. انکي ڄاڻ چئجي ٿو ڄاڻ گڏ ڪرڻ کان اڳ انجو مقصد خبر هئڻ گهرجي ڪنهن ماڻهو نسبتي هنڌ تي وڃي سوال پڇي، جائزو وٺي ڄاڻ گڏ ڪئي ته انکي بنيادي ڄاڻ چئجي ٿو.

آفرين :يعني رابرٽ جي چوڻ موجب هرهڪ جي گھروچي ڪني ڪيل ڄاڻ بنيادي ڄاڻ آهي ماسترياڻيءَ کي شاباس آفرين!

رميش : پر ڄاڻ گھٽ وقت ۾ گڏ ڪرڻي هجي ته؟

ماسترياڻي : ويچار ڪريو اهڙي حالت ۾ ڄاڻ گڏ ڪرڻ جو ٻيو طريقو ڪهڙو هوندو؟

ڪيتڪي : اسان تلاٽي آفيس ۾ وڃي هرهڪ ڪتنب جي ڄاڻ گڏ ڪري سگھون ٿا.

ماسترياڻي صحيح آهي، ڪجھ حالتن ۾ وقت يا وسيلن جي گھٽتائيءَ سبب ڄاڻ شخصي طور گڏ ڪرڻ ممڪن نه هوندو آهي. اهڙي وقت، ٻين جي گڏ ڪرڻ ڄاڻ ڪارياليِن جا دستاويزن مان، سرڪاري ويڳن مان، تحقيقي پيپر وغيره مان ڄاڻ هٿ ڪبي آهي ان کي ٻئين درجي جي ڄاڻ چئجي ٿو. مثال ڪيتڪيءَ دواران ڏمل صلاح موجب تلاٽي آفيس مان مليل ڄاڻ اها ٻئين درجي جي ڄاڻ چئجي ٿو.

هيٺيان مثال ڏسو

(i) اخبارن مان مليل ڄاڻ وسيلي ٺاهيل خاڪو ٻئين درجي جي ڄاڻ آهي.

(ii) ڪئنٽين جي پدارٿن جو درجو سمجھڻ لاءِ گراهڪن کان پڇيل رايا بنيادي ڄاڻ آهي.

(iii) ڪلاس ۾ شاگردن جي ورتل اوچائي، بنيادي ڄاڻ آهي.

بنيادي ڄاڻ	ٻئين درجي جي ڄاڻ
1. گڏ ڪرڻ ۾ وقت لڳندو آهي. 2. ڄاڻ نئين ۽ تفصيلوار هوندي آهي. 3. تڙ ۽ پروسيمند هوندي آهي.	1. ترت ملندي آهي. 2. اها ڄاڻ جھوني به ٿي سگھي ٿي تفصيل نه ملندي آهي. 3. گھٽ پروسيمند هوندي آهي.

مشغولي : توهان الڳ الڳ سببن لاءِ ڄاڻ گڏ ڪندا آهيو اٿين 3-14 مثالن ۾ گڏ ڪيل ڄاڻ بنيادي آهي يا ٻئين درجي واري ان تي چرچا ڪريو.

اڀياس 7.2

(1) هيٺ گڏ ڪيل ڄاڻ بنيادي آهي يا ٻئين درجي واري اهو ٻڌايو.

(i) ڪلاس ۾ وڃي هرهڪ شاگرد جي حاضري جاچڻ.

(ii) هرهڪ شاگرد جي اوچائيءَ جي ڄاڻ جلد مٿين آفيس ۾ موڪلڻ لاءِ اسڪول جي پي ٽي ويڳھ ۾ درج ڄاڻ گڏ ڪئي.

(iii) وگيان پروجيڪٽ لاءِ جھنگل ۾ وڃي وڻن جي ڄاڻ درج ڪرڻ .

ذرا ياد ڪريون

ڊاٽا جو ورگيڪرڻ (Classification of data)

مثال (1) هڪ اسڪول جي درجي 9 جي 50 شاگردن جي پهرين يونٽ ٽيسٽ حسابن ۾ 20 مان مليل مارڪون هيٺ ڏنل آهن.

20, 6, 14, 10, 13, 15, 12, 14, 17, 17, 18, 11, 19, 9, 16, 18, 14, 7, 17, 20,
8, 15, 16, 10, 15, 12, 18, 17, 12, 11, 11, 10, 16, 14, 16, 18, 10, 7, 17, 14,
20, 17, 13, 15, 18, 20, 12, 12, 15, 10

هتي گڏيل ڪيل ڊاٽا کي ڇا چئبو؟ بنيادي ڊاٽا

هرهڪ عدد کي ڇا چئبو مارڪون

مٿين ڊاٽا لاءِ هيٺين سوالن جا جواب ڳولهيو

(i) 15 مارڪون کڻندڙ ڪيترا شاگرد آهن؟

(ii) 15 کان وڌيڪ مارڪون کڻندڙ ڪيترا شاگرد آهن؟

(iii) کان گهٽ مارڪون کڻندڙ شاگرد ڪيترا آهن .

(iv) سڀني کان گهٽ مارڪون ڪهڙيون آهن؟

(v) سڀني کان وڌيڪ مارڪون ڪهڙيون آهن؟

اچو چرچا ڪريون

(1) توهان کي انهن سوالن جا جواب سؤلا مليا يا هردفعي مارڪون ڏسڻيون پيون؟

(2) مٿئين ڪم کي سؤلو ڪيئن ڪري سگهبو؟

شميم : هر دفعي مارڪون ڏسڻ سبب اهو ڪم ڏکيو ۽ بي مزي ٿي ويو. مٿين ڊاٽا وڌندڙ يا گهٽجندڙ سلسلي ۾ لکڻ سان اهو ڪم سؤلو ٿي سگهندو.

شميم جي صلاح موجب مارڪون وڌندڙ سلسلي ۾ لکندا سين.

6, 7, 7, 8, 9, 10, 10, 10, 10, 10, 11, 11, 11, 12, 12, 12, 12, 12, 13, 13,
14, 14, 14, 14, 14, 15, 15, 15, 15, 15, 16, 16, 16, 16, 17, 17, 17, 17, 17, 17,
18, 18, 18, 18, 18, 19, 20, 20, 20, 20

ڊاٽا وڌندڙ سلسلي ۾ لکڻ سان (1) جي پنجن ئي سوالن جا سؤلا مليل ڇا؟

جاچ مان ڊاٽا پيئي ته اهو ڪم سؤلو ٿيو.

ذرا ياد ڪريون

مارٿن: ڊاٽا ڇيڄري روپ ۾ لکڻ سان ڪم سؤلو ٿيندو، اهو اسان اڳئين درجي ۾ سکيو آهي ان ڇيڄري کي جهجهائي ورهاست ڇيڄرو چئبو آهي ماسترياڻي ۽ بلڪل صحيح ، هاڻي (1) ۾ ڏنل مثال مان اهو ڇيڄرو ٺاهيو.

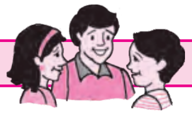
مثال (1) ۾ سڀ کان گهٽ مارڪون آهن ۽ سڀ کان وڌيڪ مارڪون 20 آهن انڪري چجري ۾ مليل مارڪن جي نئين ڪالم ۾ جهجهائي لکبي. ڪالم ۾ 6 کان 20 مارڪون لکو. ٻئين ڪالم ۾ ليڪا نشان.

جهجهائي ورهاست چجرو

ڪٽتون(مارڪون)	ليڪا(نشان)	جهجهائي (f)(شاگردن جو عدد)
6	|	1
7	||	2
8		
9		
10	卌	5
11		
12		
13		
14		
15		
16		
17	卌 |	6
18		
19		
20	||||	4
		ڪل N = 50

N سڀني جهجهاين جو جوڙ آهي.

اچو تہ چرچا ڪريون



گروهيل جهجهائي ورهاست چجرو (Grouped frequency distribution table)

(1) هي ۽ چجرو خوب وڏو لڳي ٿو ڇا؟

(2) جڏهن چاڪ ۾ ڪٽتن جو اندازگهٽو هوندو تہ اهو چجرو تيار ڪرڻ ڏکيو ٿيندو ڇا؟

ماسترياڻي، مٿين چرچا مان توهان سمجهو هوندو تہ، جڏهن چاڪ ۾ ڪٽتن جو عدد وڌيڪ هوندو آهي تہ جهجهائي ورهاست چجرو وڏو ٿي ويندو آهي. ان ۾ وقت لڳندو آهي. ان لاءِ ڪجهہ اپاءَ ڪري سگهجن ٿا؟

روهت: ان وقت چاڪ جا گروهہ ٺاهجن.

ماسترياڻي : شاباس روهت چاڻ جا گروهه يعني ڪلاس ٺاهيا آهن جنهن سان اها جهٽ سمجهه ۾ اچي ٿي اهڙي چجري کي گروهيل جهجهائي ورهاست چجرو چئبو آهي. اها چجري ٻن طريقن ۾ پيش ڪري سگهبو آهي (1) شامل ڪرڻ وارو طريقو (2) ٻاهر ڪيڻ وارو طريقو.

(1) شامل ڪرڻ وارو طريقو (غير لاڳيتو طريقو) (Inclusive method)

6, 7, 7, 8, 9, 10, 10, 10, 10, 10, 11, 11, 11, 12, 12, 12, 12, 12, 13, 13, 14, 14, 14, 14, 14, 15, 15, 15, 15, 15, 16, 16, 16, 16, 17, 17, 17, 17, 17, 17, 18, 18, 18, 18, 18, 19, 20, 20, 20, 20

متين چاڻ ۾ ننڍي ۾ ننڍو ڪٽ ☐ ۽ وڏي ۾ وڏي ڪٽ ☐ آهي.

سيني کان وڏي ڪٽ ۽ سڀ کان ننڍي ڪٽ ۾ تفاوت 16--2=14 آهي ان تفاوت چاڻ جو دائرو چئجي ٿو اهو دائرو ڏسي چاڻ جا ڪهڙا مناسب ڪلاس ٺاهي سگهبا؟

(i) 6 کان 8، 9 کان 11، 12 کان 14، 15 کان 17، 18 کان 20 يا

(ii) 6 کان 10, 11 کان 15, 16 کان 20 کان ائين ڪلاس ٺاهي سگهبا.

6 کان 10, 11 کان 15, 16 کان 20 ڪلاس ڪٽي متين چاڻ جو جهجهائي ورهاست چجرو ٺاهينداسين.

گروهيل جهجهائي ورهاست چجرو (شامل ڪرڻ وارو طريقو)

ڪلاس	ليڪا نشان	جهجهائي (f) شاگردن جو عدد
6 – 10	𝍸 𝍸	**10**
11 – 15	.....	.....
16 – 20	.....	20
		N = 50

اهو چجرو ٺاهڻ وقت 6، 10 ۽ انجي وچ وارن سيني ڪٽن کي 6 کان 10 ڪلاس ۾ شامل ڪنداسين. انڪري اهڙي طريقي کي شامل ڪرڻ وارو طريقو چئبو آهي. 6 کان 10, 11 کان 15, 16 کان 20 انهن ڪلاسن کي اڻ لاڳيتا ڪلاس به چئجي ٿو.

چاڪي وٺون

عدد شاستر جي بنيادي ويچار (Basic terms in statistics)

1. ڪلاس (Class) ڪٽن جي مناسب قد جي گروهن کي ڪلاس چئجي ٿو.

6 کان 10, 11 کان 15 يا 6-10, 11-15 ائين به ليکيا آهن.

2. ڪلاس جون حدون : (Class limits) ڪلاس ڏيکارينڊڙ عددن کي ڪلاس جون حدون چوندا آهن.

6 کان 10 ڪلاس جي هيٺين حد 6 ۽ متين حد 10 آهي.

3. جهجهائي : (Frequency) هرهڪ ڪلاس ۾ جيترين ڪٽون هونديون آهن انهن ڪٽن جي ڪل عدد کي ان ڪلاس جي جهجهائي چئجي ٿو متئين چجري ۾ 11 کان 15 ڪلاس ۾ 20 ڪٽون آهن انڪري اٺ ڪلاس جي جهجهائي 20 آهي.

4. ڪلاس جي ويڪر (Class width): لاڳيتن ڪلاسن ۾ لاڳيتن ڪلاسن جي هيٺين (يا مٿين) حدن جي تفاوت کي ڪلاس جي ويڪر چئجي ٿو.

مثال 5-10 حدن جي تفاوت کي ڪلاس جي ويڪر ... آهي.

5. ڪلاس نشان (Class mark): ڪلاس جي هيٺين ۽ مٿين حد جي سراسري کي ڪلاس نشان يا ڪلاس جو وچ ٽڪو چئبو آهي.

$$\text{ڪلاس نشان} = \frac{\text{مٿين حد + هيٺين حد}}{2}$$

مثال ڪلاس جو ڪلاس نشان $11\text{-}15 = \frac{\square + \square}{2} = \frac{26}{2} = 13$

٢. ٻاهر ڪيڻ وارو طريقو (لاڳيتو ڪلاس) (Exclusive method)

مثال: 6, 10, 10.3, 11, 15.7, 19, 20, 12, 13 ڏنل ڪٽتون آهن.
6-10, 11-15, 16-20 اهي ڪلاس ڪٺي گروهيل جهجهائي چٻرو ٺاهيو.

حل:

ڪلاس (ڪٽتون)	ليڪا نشان	جهجهائي (f)
6-10	||	2
11-15	|||	3
16-20	||	2

مٿئين چٻري ۾ ڏنل ڪٽتن مان 10.3 ۽ 15.7 اهي ڪٽتون نہ آيون.

ڇو تہ 10.3، 15.7 عدد 10-6، 15-11، 20-16 انهن مان ڪنهن بہ ڪلاس ۾ شامل نہ ٿي ٿئي. ان لاءِ ڪلاس جي بناوت بدلائڻي پوندي. ڪلاس 10-5،15-10،20-15 اهڙين لاڳيتا لکڻ سان مٿيون مسئلو نہ ايندو. پر هتي سوال اهو ٿو اُٿي تہ 10 ڪٽت کي 10-5،15-10 انهن مان ڪهڙي ڪلاس ۾ ڪٽبو. اها ڏکيائي حل ڪرڻ لاءِ 10 ڪٽت، ڪلاس ۾ نہ ڪٺي ڪلاس ۾ ڪٽبي اها ريت آهي انڪري 10 ڪٽت کي 15-10 ڪلاس ۾ شامل ڪبو. ان طريقي کي ٻاهر ڪيڻ وارو طريقو چئبو آهي. انهن ڪلاسن ۾ 10.3، 15.7 اهڙا عدد بہ سامل ڪري سگهبا.

هاڻي مٿي ڏنل نموني ٺاهيل چٻرو ڏسو

گروهيل جهجهائي ورهاست چٻرو (ٻاهر ڪيڻ وارو طريقو)

ڪلاس (لاڳيتا) مارڪون	ليڪا نشان	جهجهائي (f) شاگردن جو عدد
5-10	|	1
10-15	~~||||~~	5
15-20	||	2
20-25	|	1

هي ڌيان ۾ رکو

جهجهائي ورهاست چجر

گروهيل

ٻاهر ڪڍڻ وارو طريقو (لاڳيتا ڪلاس)

شاگردن جو عدد	اوچائي (س م)
18	145-150
27	150-155
3	155-160

شامل ڪرڻ وارو طريقو (غير لاڳيتا ڪلاس)

شاگردن جو عدد	يوٽ جو نمبر
12	2-4
29	5-7
7	8-10

اڻ گروهيل

شاگردن جو عدد	ناڻين جي شاگردن جي عمر
12	14
23	15
10	16

اڀياس 7.3

1. 20 کان 25 ڪلاس جي هيٺين ۽ مٿين حد لکو
2. 35 کان 40 ڪلاس جو ڪلاس نشان لهو.
3. هڪ ڪلاس جو ڪلاس نشان 10 ۽ ڪلاس جي ديگهه 6 آهي ته اهو ڪلاس ڪهڙو آهي؟
4. هيٺيون چجرو پورو ڪريو.

عمر سالن ۾ ڪلاس	ليڪا نشان	وديارٿي عدد (f) جهجهائي
12-13	𝍸	☐
13-14	𝍸 𝍸 ||||	☐
14-15		☐
15-16	||||	☐
		$N=\sum f = 35$

5. هڪ اسڪول جي سائي سئنا جي 45 شاگردن مان هرهڪ جي پوڪيل وڻن جو عدد هيٺ ڏنل آهي.

3, 5, 7, 6, 4, 3, 5, 4, 3, 5, 4, 7, 5 , 3, 6, 6, 5, 3, 4, 5, 7, 3, 5, 6, 4, 4, 3,
5, 6, 6, 4, 3, 5, 7, 3, 4, 5, 7, 6, 4, 3, 5, 4, 4, 7.

ان مان اڻ گروهيل جهجهائي چجرو ٺاهيو.

(6) π جو ڏهائي ڪانپوءِ 50 جاءِ تائين ملهه ڏنل آهن.

3.14159265358979323846264338327950288419716939937510

ان مان ڏهائيءَ ڪانپوءِ وارن انگن جو اڻ گروهيل جهجهائي ورهاست چجرو ٺاهيو.

(7*) هيٺين ڇڄرن ۾ڏنل ڇاڻ موجب ڪلاس ٺاهيو ۽ لڳيتا ڪلاس ۽ اڻ لڳيتا ڪلاس وارا جهجهائي ورهاست ڇڄرا ٺاهيو.

(i)

ڪلاس نشان	جهجهائي
5	3
15	9
25	15
35	13

(ii)

ڪلاس نشان	جهجهائي
22	6
24	7
26	13
28	4

(8) اسڪول جي نائين درجي جي 46 شاگردن جي ڪمپاس جي پينسلين جي اوچائي س م ۾ڏنل آهي.

16, 15, 7, 4.5, 8.5, 5.5, 5, 6.5, 6, 10, 12,
13, 4.5, 4.9, 16, 11, 9.2, 7.3, 11.4, 12.7, 13.9, 16,
5.5, 9.9, 8.4, 11.4, 13.1, 15, 4.8, 10, 7.5, 8.5, 6.5,
7.2, 4.5, 5.7, 16, 5.7, 6.9, 8.9, 9.2, 10.2, 12.3, 13.7,
14.5, 10

5-0، 10-5، 15-10، .... ڪلاس ڪئي ٻاهر ڪيڻ واري طريقي جهجهائي ورهاست ڇڄرو ٺاهيو.

(9) هڪ سهڪاري کير جمع ڪرڻ واري مرڪز تي 50 شخصن ڪيترا ليٽر کير جمع ڪيو اهو هيٺ ڏيڪاريل آهي.

27, 75, 5, 99, 70, 12, 15, 20, 30, 35, 45, 80,
77, 90, 92, 72, 4, 33, 22, 15, 20, 28, 29, 14,
16, 20, 72, 81, 85, 10, 16, 9, 25, 23, 26, 46,
55, 56, 66, 67, 51, 57, 44, 43, 6, 65, 42, 36,
7, 35

مناسب ڪلاس ڪٽي گروهيل جهجهائي ورهاست ڇڄرو ٺاهيو.

(10) هڪ سنستاڳوٺ جي 38 ماڻهن وٽان ڪيترو دويانگ وڪاس چندو جمع ڪيو اهو هيٺ ڏنل آهي.

101, 500, 401, 201, 301, 160, 210, 125, 175, 190, 450, 151,
101, 351, 251, 451, 151, 260, 360, 410, 150, 125, 161, 195,
351, 170, 225, 260, 290, 310, 360, 425, 420, 100, 105, 170,
250, 100

(i) 100-149, 150-199, 200-249, ... ڏنل نموني ڪلاس ڪٽي گروهيل جهجهائي ورهاست ڇڄرو ٺاهيو.

(ii) ڇڄري وسيلي ٻڌايو تہ 350روپيا يا ان کان وڌيڪ چندو ڪيترن ماڻهن ڏنو؟

جاڻي وٺون

مٿين حد کان گهٽ گڏيل جهجهائي چڱرو (Less than cumulative frequency)

مثال : هڪ اسڪول جي درجي 9 جي 50 شاگردن جون پهرين يونٽ ٽيسٽ ۾ حسابن ۾ 40 مان کڻيل مارڪن جو جهجهائي ورهاست چڱرو ڏيکاريل آهي.

جهجهائي شاگرد (*f*)	ڪلاس
02	0-10
12	10-20
20	20-30
16	30-40
ڪل N = 50	

(1) چڱري مان هيٺيان چوڪٽ پُريو .

(i) 10 کان 20 ڪلاس جي هيٺين حد □ ۽ مٿين حد □ آهي؟

(ii) 10 کان گهٽ مارڪون کڻندڙ شاگرد ڪيترا آهن؟ 2

(iii) 20 کان گهٽ مارڪون کڻندڙ شاگرد ڪيترا آهن؟ 2 + □ = 14

(iv) 30 کان گهٽ مارڪون کڻندڙ شاگرد ڪيترا آهن؟ □ + □ = 34

(v) 40 کان گهٽ مارڪون کڻندڙ شاگرد ڪيترا آهن؟ □ + □ = 50

ڌيان ۾ رکو

ڪنهن خاص ڪلاس جي جهجهائي ۽ ان ڪلاس کان اڳ وارن سڀني ڪلاسن جي جهجهائي جي جوڙ اپت کي ان ڪلاس جي مٿين حد کان گهٽ وارو (Less than cumulative frequency) گڏيل جهجهائي ورهاست چڱرو چئبو آهي هنڪي ٿوري کان گڏيل جهجهائي به چئبو آهي.

مٿين حد کان گهٽ گڏيل جهجهائي چڱرو جي معني .

مٿين حد کان گهٽ جو مطلب	گڏيل جهجهائي	ڪلاس
2 شاگردن کي 10 کان گهٽ مارڪون	2	0-10
14 شاگردن کي 20 کان گهٽ مارڪون	14	10-20
34 شاگردن کي 30 کان گهٽ مارڪون	34	20-30
50 شاگردن کي 40 کان گهٽ مارڪون	50	30-40
		N=50

کان گهٽ گڏيل جهجهائي	جهجهائي	ڪلاس
2	2	0-10
2 + 12 = □	12	10-20
□ +20=34	20	20-30
34 + □ =50	16	30-40
		N= 50

(2) هيٺين حد يا اِن ڪان وڌيڪ وارو ڳڏيل ڄهڄهائي ورهاست چڄرو.

ڪلاس	ڳڏيل ڄهڄهائي	هيٺين حد يا ان ڪان وڌيڪ جو مطلب
0-10	50	50شاگردن کي 0 يا 10وڌيڪ مارڪون مليون.
10-20	48	48شاگردن کي 10 يا 10 ڪان وڌيڪ مارڪون مليون.
20-30	36	36شاگردن کي 20 يا 20 ڪان وڌيڪ مارڪون مليون.
30-40	16	16شاگردن کي 30 يا 30 ڪان وڌيڪ مارڪون مليون.

ڪلاس	ڄهڄهائي	ڳڏيل ڄهڄهائي
0-10	2	50
10-20	12	50 - 2 = 48
20-30	20	48 - 12 = 36
30-40	16	36 - 20 = 16
	ڪل 50	

مثال : هڪ اسپورٽس ڪلب ۾ ٽيبل ٽينس جي رانديگرن جي عمر جي ورهاست هيٺين چڄري ۾ ڪيل آهي. ان مان ڪان مٿي وارو ڳڏيل ڄهڄهائي ورهاست چڄرو ٺاهيو .

حل : ڪان مٿي ڳڏيل ڄهڄهائي ورهاست چڄرو

عمر(سال)	ليڪا نشان	ڄهڄهائي (شاگردن جو عدد)	ڪان وڌيڪ ڳڏيل ڄهڄهائي
10-12	𝍸 ||||	09	50
12 – 14	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 |||	☐	☐ - 9 = 41
14-16	𝍸 𝍸 |||	☐	41 - 23 = ☐
16 – 18	𝍸	05	☐ - 13 = ☐
		ڪل N = 50	

اڀياس 7.4

(1) هيٺيون ڳڏيل ڄهڄهائي ورهاست چڄرو پورو ڪريو .

ڪلاس (اوچائي س م)	ڄهڄهائي(شاگردن جو عدد)	ڪان گهٽ ڄهڄهائي
05	05	150-153
05+ ☐ = ☐	07	153-156
☐ + 15 = ☐	15	156-159
☐ + ☐ = 37	10	159-162
37+5=42	05	162-165
☐ + ☐ = 45	03	165-168
	ڪل N = 45	

2. هيٺين گڏيل جهجهائي چڄرو پورو ڪريو .

ڪان وڌيڪ گڏيل جهجهائي	جهجهائي (شخص)	(ماهياني اپت) ڪلاس
....	45	1000−5000
....	19	5000−10000
....	16	10000−15000
....	02	15000−20000
....	05	20000−25000
	ڪل N = 87	

(3) هڪ ڪلاس جي 62 شاگردن جون 100 مان ڪنيل مارڪون هيٺ ڏيڪاريل آهن.

0-10, 10-20, ... ڪلاس ڪٺي جهجهائي چڄرو ۽ گڏيل هڪ جهجهائي چڄرو (ڪان وڌيڪ) تيار ڪريو.

55, 60, 81, 90, 45, 65, 45, 52, 30, 85, 20, 10,
75, 95, 09, 20, 25, 39, 45, 50, 78, 70, 46, 64,
42, 58, 31, 82, 27, 11, 78, 97, 07, 22, 27, 36,
35, 40, 75, 80, 47, 69, 48, 59, 32, 83, 23, 17,
77, 45, 05, 23, 37, 38, 35, 25, 46, 57, 68, 45,
47, 49

ٺاهيل چڄري وسيلي هيٺين سوالن جا جواب لکو

(i) 40 يا 40 کان وڌيڪ مارڪون کڻندڙ شاگرد ڪيترا آهن؟

(ii) 90 يا 90 کان وڌيڪ مارڪون کڻندڙ شاگرد ڪيترا آهن؟

(iii) 60 يا 60 کان وڌيڪ مارڪون کڻندڙ شاگرد ڪيترا آهن؟

(iv) 0-10 ڪلاس جي ڪان وڌيڪ گڏيل جهجهائي ڪيتري؟

(4) مٿئين مثال (3) لاءِ کان گهٽ گڏيل جهجهائي چڄرو ٺاهيو ۽ هيٺين سوالن جا جواب ڏيو.

(i) 40 کان گهٽ مارڪون کڻندڙ شاگرد ڪيترا آهن؟

(ii) 10 کان گهٽ مارڪون کڻندڙ شاگرد ڪيترا آهن؟

(iii) 60 کان گهٽ مارڪون کڻندڙ شاگرد ڪيترا آهن؟

(iv) 50-60 ڪلاس جي کان گهٽ گڏيل جهجهائي ڪيتري؟

جاڳي وٺون

مرڪزي رُخ جون ماپون : (Measures of central tendancy)

مرڪزي رخ جاچ پڙتال سروي مان مليل عددي ڄاڻ ۾ عام طور هڪ خاصيت ڏسڻ اچي ٿي ڄاڻ جي ڪنهن عدد جي آس پاس ٻين عددن جي گڏڙدي ڏسندي آهي. ميڙ جي ان خاصيت کي ميڙ جي مرڪزي رخ چئبو آهي.

ائين مڃبو آهي تہ ميڙ جنهن عدد جي آس پاس ٻين عددن جي گڏڙدي هوندي آهي، اها ان ميڙ جي عيوضي ٿئي ٿي. ان عدد کي مرڪزي لاڙي جي ماپ چوندا آهن. عدد شاستر ۾ مرڪزي رخ جا هيٺيان پئمانا واپرايا ويندا آهن.

(1) سراسري (Mean) : ڇاڱ جي سيني عددن جي انگي سراسريءَ کي ان ڇاڱ جو وچ يا سراسري چئجي ٿو.

$$\text{سراسري} = \frac{\text{سيني ڳڻتن جي جوڙاپٽ}}{\text{ڳڻتن جو ڪل عدد}}$$

مثال (1) 25, 30, 27, 23, 25 انهن ڳڻتن جي سراسري لهو.

حل سراسري: $\frac{25+30+27+23+25}{5} = \frac{130}{5} = 26$

مثال (2) نائين درجي شاگردن جون پهرئين ڇماهي امتحان ۾ الجبرا ۾ کنيل مارڪون هيٺ ڏنل اهن.
انهنجي سراسري لهو.

40, 35, 30, 25, 23, 20, 14, 15, 16, 20, 17, 37,
37, 20, 36, 16, 30, 25, 25, 36, 37, 39, 39, 40,
15, 16, 17, 30, 16, 39, 40, 35, 37, 23, 16.

حل : هتي ڳڻتن جو عدد وڏيڪ هئڻ سبب جوڙ ڪرڻ ۾ تڪليف ٿيندي هتي 3 شاگردن مان هرهڪ کي 30 مارڪون آهن. سندن مارڪن جي جوڙاپٽ 30+30+30=90 آهي، ان جي عيوض 30 x 3=90 ائين سؤلو ٿيندو ان لاءِ جهڄهائي ڇڄرو اپيوگي ٿيندو.

مارڪون	شاگردن جو عدد	$f_i \times x_i$
14	1	$14 \times 1 = 14$
15	2	$15 \times 2 = ...$
16	5	$16 \times .... = ...$
17	2	$17 \times 2 = 34$
20	3	$.... \times 3 = ...$
23	2	$23 \times 2 = ...$
25	3	$25 \times 3 = ...$
30	3	$.... \times .... = ...$
35	2	$35 \times 2 = 70$
36	2	$.... \times .... = ...$
37	4	$..... \times .... = ...$
39	3	$39 \times 3 = 117$
40	3	$.... \times .... = 120$
	N= ☐	$\sum f_i x_i = 956$

عدد شاستر ۾ $\sum_{i=1}^{n}$ اها نشاني واپرائڻ سهوليت پرير ٿيندو آهي. $\sum_{i=1}^{n} f_i x_i$ جو مطلب سمجهڻ i واڌو سڄو انگي عدد آهي f_i شاگردن مان هرهڪ کي x_i مارڪون مليون اهو مڃيندا سين. $\sum$ (سگما) نشاني جوڙ لاءِ ڪم آڻيندا آهن. $\sum_{i=1}^{n}$ نشاني جي i کان i کان n ملهن لاءِ n پدن جي جوڙاپٽ ڏيکاري ٿي.

$$\text{سراسري} \quad \bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{N} = \frac{956}{35}$$

$$= 27.31 \text{ اٽڪل}$$

ڏنل ڇاڱ جي سراسري 27.31 آهي. ∴

2) وچون انگ (Median) : ڊاٽا جي عدد وڌندڙ (يا گھٽجندڙ) سلسلي ۾ لکيا آهن. ان سلسلي جي وچين عدد کي ڊاٽا جو وچون عدد چئبو آهي.

ڊاٽا جي ڪٽن جو عدد ٻڏي هوندو تہ وچ تي هوندڙ ٻن عدد جي سراسريءَ کي وچون عدد چئبو آهي.

مثال (1) 72, 66, 87, 92, 63, 78, 54 ان ڊاٽا جو وچون عدد لهو.

حل : وڌندڙ سلسلو

54, 63, 66, **72**, 78, 87, 92

اِن سلسلي ۾ چوٿون عدد 72 وچ تي اهي

∴ ڏنل ڊاٽا جو وچون انگ آهي 72

مثال (2) 30, 25, 32, 23, 42, 36, 40, 33, 21, 43 ان ڊاٽا جو وچون انگ لهو.

حل : ڏنل ڊاٽا وڌندڙ سلسلي موجب لکنداسين.

21, 23, 25, 30, **32**, **33**, 36, 40, 42, 43

هتي ڪٽن جو عدد 10 يعني ٻڏي آهي.

∴ پنجون ۽ ڇهون اهي ٻہ عدد وچ تي آهن اهي آهن 32 , 33

$$\therefore \text{وچون انگ} = \frac{32+33}{2} = \frac{65}{2} = 32.5$$

ويچار ڪريو

ڊاٽا جي ڪٽن جو عدد n هجي تہ

(i) n اڪي هوندو تہ ڪائين ڪٽ ان ڊاٽا جو وچون انگ هوندي؟

(ii) n ٻڏي هوندو تہ ڪھڙن ٻن وچن عددن جي سراسري وچون انگ ٿيندي؟

(3) ڊينگ (Mode) : ڊاٽا ۾ سڀني کان وڌيڪ دفعا ايندڙ عدد کي ان ڊاٽا جو ڊينگ چئبو آهي.

مثال : (1) ڏنل ڊاٽا جو ڊينگ ٻڌايو 90, 55, 67, 55, 75, 75, 40, 35, 55, 95

حل : ڊاٽا جا عدد وڌندڙ سلسلي ۾ لکڻ سان سُجھاڻ سؤلو ٿيندو تہ ڪھڙو عدد وڌيڪ دفعا آيل آهي.

ڊاٽا جو وڌندڙ سلسلو : 35, 40, 55, 55, 55, 67, 75, 75 90, 95

وڌ ۾وڌ آيل عدد = 55

∴ ڊاٽا جو ڊينگ 55.

مثال : (2) هڪ ڪارخاني جي مزورن جي عمر هينئين چجري ۾ ڏنل آهي.

سال عمر	19	21	25	27	30
مزور	5	15	13	15	7

ان وسيلي ڊينگ لهو

حل : هتي وڌ ۾وڌ جھجھائي 15 آهي پر اها جھجھائي ٻن ڪٽن جي آهي.

∴ ڊينگ = 27 ۽ 21 ۾ ∴ عمر جو ڊينگ 21 ۽ 27 سال آهي.

اڀياس 7.5

(1) مڪند جي ستن سالن ۾ سويابين جي في ايڪو پئداٿش (ڪئنٽل ۾) 10,7,5,3,9,6,9 آهي.
ان مان في ايڪو پيدائش جي سراسري لهو.

(2) ڏنل ڊاٽا جو وچون انگ لهو 59,75,68,70,74,75,80

(3) حسابن جي گهرو اڀياس ۾ 7 شاگردن کي 100 مان هيٺيئن نموني مارڪون مليون ڏنل ڊاٽا جو ڊينگ لهو .
99, 100, 95, 100, 100, 80, 90

(4) هڪ ڪارخاني ۾ 30 ڪامگارن کي هيٺيئن نموني ماهياني پگهار ملي.
5000, 7000, 3000, 4000, 4000, 3000, 3000, 3000, 8000, 4000,
4000, 9000, 3000, 5000, 5000, 4000, 4000, 3000, 5000, 5000,
6000, 8000, 3000, 3000, 6000, 7000, 7000, 6000, 6000, 4000
ان ڊاٽا مان ڪامگارن جي ماهياني پگهار جي سراسري لهو.

(5) هڪ ٽوڪريءَ ۾ 10 ٽماٽن جو وزن گرامن ۾ 60, 70, 90, 95, 50, 65,70, 80, 85, 95 ائين آهي
ان مان ٽماٽن جي وزن جو وچون انگ لهو.

(6) هڪ هاڪي رانديگر 9 ميچن ۾ هيٺيئن نموني گول ڪيا.
5, 4, 0, 2, 2, 4, 4, 3, 3 ان وسيلي سراسري، وچون انگ ۽ ڊينگ لهو.

(7) 50 ڪٿن جي سراسري 80 آهي پر ان جي 19 ڪٿت کي غلطيءَ سان 91 ڪنيو ويو غلطيءَ ۾ سڌاري ڪانپوءِ
سراسري ڇا ٿيندي؟

(8) هيٺ 10 ڪٿتون وڌندڙ سلسلي ۾ ڏنل آهن جيڪڏهن انهن جو وچون انگ 11 آهي ته x جو ملهه لهو .
2, 3, 5, 9, x + 1, x + 3, 14, 16, 19, 20

(9*) 35 ڪٿن جي سراسري 20 آهي انهن مان پهرين 18 ڪٿن جي سراسري 15 ۽ آخري 18 ڪٿن جي سراسري
25 آهي ته 18 ڪٿت لهو.

(10) 5 ڪٿن جي سراسري 50 آهي انهن مان هڪ ڪٿت گهٽجڻ تي سراسري 45 ٿئي ٿي ته اهو ڪٿت لهو.

(11*) هڪ ڪلاس ۾ 40 شاگرد آهن انهن مان 15 ڇوڪرا آهن. هڪ امتحان ۾ ڇوڪرن جي مارڪن جي سراسري
33 ۽ ڇوڪرين جي مارڪن جي سراسري 35 آهي ڪلاس جي ڪل شاگردن جي مارڪن جي سراسري لهو.

(12) 10 شاگردن جو وزن (ڪ گ ۾) هيٺ ڏنل آهي ته انهنجو ڊينگ لهو.
40, 35, 42, 43, 37, 35, 37, 37, 42, 37

(13) هيٺئين ڇچري ۾ ڪن ڪٽنبن جي 14 سالن کان ننڍن ٻارن جو عدد ڏنل آهي ته انهن ٻارن جو ڊينگ لهو.

ٻارن جو عدد	1	2	3	4
جهجهائي ڪٽنب	15	25	5	5

(14) هيٺين ڊاٽا جو ڊينگ لهو.

مارڪون ڪٿتون	35	36	37	38	39	40
شاگردن جو عدد	09	07	09	04	04	02

مرڪزي لاڙي جو ڪهڙو پئمانو ڪٿڻ مناسب ٿيندو؟ ان جو جواب مقصد تي مدار رکي ٿو. سمجهو هڪ ڪرڪيٽ رانديگر 11 مئچن ۾ نمبروار 41, 58, 35, 80, 23, 12, 63, 48, 107, 9, 73 رنسون ٺاهيون. هنجو ڪم طيء ڪرڻ لاءِ هرهڪ مئچ جون رنسون ڏيان ۾ رکنديون پونديون ان ڪري اتي مرڪزي لاڙي جو 'سراسري' پئمانو ڪٿڻ صحيح ٿيندو.

ڪپڙا تيار ڪندڙ هڪ ڪمپنيءَ کي ڪهڙي ماپ جي شرٽ وڌيڪ سيجهي اهو طيء ڪرڻو آهي ان لاءِ (44,42,40,38,36,34 مان) ڪهڙي ماپ جي شرٽ وڌيڪ ماڻهو پائيندا آهن اهو ڳولهڻو پوندو. هتي 'ڊگهه' اهو پئمانو واپرائڻ صحيح ٿيندو.

گڏيل اڀياس 7

(1) مناسب جواب چونڊيو

(i) هيٺين مان ڪهڙي ڄاڻ بنيادي نہ آهي؟

(A) ڪلاس جو دؤرو ڪري شاگردن جي حاضري ورتي.

(B) گهرن جو دؤرو ڪري گهرجي ماڻهن جي عددن جي ڄاڻ ورتي.

(C) تلاٽي آفيس ۾ وڃي ڳوٺن جي ڪڙمين جي سويابين پوکہ بابت ڄاڻ ورتي.

(D) خود دؤرو ڪري نالن جي صفائيءَ جي ڄاڻ ورتي

(ii) 25-30 ڪلاس جي مٿين حد ڪهڙي آهي؟

(A) 25 (B) 35 (C) 60 (D) 30

(iii) 25-30 ڪلاس جو ڪلاس نشان ڪهڙو آهي؟

(A) 25 (B) 35 (C) 60 (D) 30

(iv) 0-10, 10-20, 20-30 .... اهڙا ڪلاس هوندڙ جهجهائي چجري ۾ 10 ڪٽت ڪهڙي ڪلاس ۾ شامل ڪنداسين؟

(A) 0-10 (B) 10-20 (C) 0-10 10-20 ٻئي (D) 20-30

(v*) جيڪڏهن $\bar{x}$ اهو $x_1, x_2 \ldots\ldots\ldots\ldots x_n$ ۽ $\bar{y}$ اهو $y_1, y_2, \ldots\ldots\ldots y_n$ جي سراسري آهي ۽ $\bar{z}$ $x_1, x_2 \ldots\ldots\ldots\ldots x_n$ ، $y_1, y_2, \ldots\ldots\ldots y_n$ جي سراسري آهي. تہ $\bar{z} = ?$

(A) $\frac{\bar{x}+\bar{y}}{2}$ (B) $\bar{x}+\bar{y}$ (C) $\frac{\bar{x}+\bar{y}}{n}$ (D) $\frac{\bar{x}+\bar{y}}{2n}$

(vi*) پنجن عددن جي سراسري 50 آهي ۽ انجي 4 عددن جي سراسري 46 آهي تہ پنجون عدد ڪهڙو آهي؟

(A) 4 (B) 20 (C) 434 (D) 66

(vii*) 100 ڪٽتن جي سراسري 40 آهي جيڪڏهن انهن مان ناڻين ڪٽت 30 آهي 30 جي عيوض 70 ڪنيو تہ نئين سراسري ڇا ٿيندي؟

(A) 40.6 (B) 40.4 (C) 40.3 (D) 40.7

(viii) 19, 19, 15, 20, 25, 15, 20, 15 ڏنل ڄاڻ جو ڊگهہ ڪهڙو آهي؟

(A) 15 (B) 20 (C) 19 (D) 25

(ix) 7, 10, 7, 5, 9, 10 ان ڄاڻ جو وچون انگ ڪهڙو آهي؟

(A) 7 (B) 9 (C) 8 (D) 10

(x) هيٺيئن چڪري ۾ 40-30 ڪلاس جي مٿين حد ڪان گهٽ ڳڏيل جهجهائي ڪيتري؟

ڪلاس	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50
جهجهائي	7	3	12	13	2

(A) 13 (B) 15 (C) 35 (D) 22

(2) 20 نؤڪردارن جي پگهارن جي سراسري 10250 رپيا آهي جيڪڏهن ان ۾ آفيس جي وڏي جي پگهار ملائي تہ سراسري 750 روپيا وڌي ٿي تہ وڏي اڏڪاريءَ جي پگهار لهو.

(3) نون عددن جي سراسري 77 آهي انهن ۾ اچا هڪ عدد جوڙڻ سان سراسري 5 وڌي ٿي تہ اهو نئون عدد لهو.

(4) هڪ شهر جي هڪ مهني جي هرروز جو وڌ ۾ وڌ گرمي پد سيلسيس ڊگرين ۾ ڏنل آهي مناسب ڪلاس ڪٽي گروهيل جهجهائي ورهاست چجرو (لاڳيتا ڪلاس) ٺاهيو.

29.2, 29.0, 28.1, 28.5, 32.9, 29.2, 34.2, 36.8, 32.0, 31.0,
30.5, 30.0, 33, 32.5, 35.5, 34.0, 32.9, 31.5, 30.3, 31.4,
30.3, 34.7, 35.0, 32.5, 33.5, 29.0, 29.5, 29.9, 33.2, 30.2

ٺاهيل چجري وسيلي هيٺين سوالن جا جواب ڏيو.

(i) وڌ ۾ وڌ گرمي پد 34°c ڪان گهٽ آهي اهڙا ڪيترا ڏينهن آهن؟

(ii) وڌ ۾ وڌ گرمي پد 34°c يا اُن ڪان وڌيڪ آهي اهڙا ڪيترا ڏينهن آهن؟

(5) هيٺين ڪٽن جي سراسري 20.2 آهي تہ p جو ملهہ لهو.

x_i	10	15	20	25	30
f_i	6	8	p	10	6

(6) ماڊل هاءِ اسڪول نانندپور جي درجي 9 جي 68 شاگردن قلعي امتحان ۾ حسابن ۾ 80 مان هيٺيئن نموني مارڪون ڪنيون.

70, 50, 60, 66, 45, 46, 38, 30, 40, 47, 56, 68,
80, 79, 39, 43, 57, 61, 51, 32, 42, 43, 75, 43,
36, 37, 61, 71, 32, 40, 45, 32, 36, 42, 43, 55,
56, 62, 66, 72, 73, 78, 36, 46, 47, 52, 68, 78,
80, 49, 59, 69, 65, 35, 46, 56, 57, 60, 36, 37,
45, 42, 70, 37, 45, 66, 56, 47

30-40, 40-50 ...... ڪلاس ڪٽي مٿين حد ڪان گهٽ ڳڏيل جهجهائي ورهاست چجرو ٺاهيو.

چجرو وسيلي هيٺين سوالن جا جواب لکو

(i) ڪان گهٽ مارڪون ڪٽندڙ شاگرد ڪيترا آهن؟

(ii) ڪان گهٽ مارڪون ڪٽندڙ شاگرد ڪيترا آهن؟

(iii) ڪان گهٽ مارڪون ڪٽندڙ شاگرد ڪيترا آهن؟

(7) مثال 6 جي ڄاڻ ڪٽي 40-50,30-40, ... اهڙا ڪلاس ڪٽي هيٺين حدڪان وڌيڪ گڏيل جهجهائي ڇڄرو ٺاهيو. ان وسيلي پڙهايو تہ

(i) 70 يا 70 ڪان وڌيڪ مارڪون کڻندڙ شاگرد ڪيترا آهن؟

(ii) 30 يا 30 ڪان وڌيڪ مارڪون کڻندڙ شاگرد ڪيترا آهن؟

(8) هيٺ 10 ڪٽٽون وڌندڙ سلسلي ۾ ڏنل آهن. انهنجو وچون انگہ 59 آهي ان مان x جو ملهہ لهو ان ڄاڻ جي سراسري ۾ ڍنگہ بہ لهو. 45,47,50,52,x, x+2, 60,62,63,74

◈◈◈

حسابي مزو

پاسڪل جو ٽڪنڊو

					1					
				1		1				
			1		2		1			
		1		3		3		1		
	1		4		6		4		1	
1		5		10		10		5		1

اها عددن جي اڏاوت ٽڪنڊي روپ ۾ آهي ان بيهڪ - رچنا کي يا سڪل جو ٽڪنڊو چئبو آهي ان بيهڪ جون هيٺيون ٽي سٽون توهان پوريون ڪريو. ان بيهڪ ۾ آڏي قطارن ۾ ايندڙ عدد (x+y) ٻيڏي جي قوت نمائن جي وستار ۾ سلسليوار ايندڙ ڳڻڪ هوندا آهن هيٺيون وستار ڏسو.

$$(x+y)^0 = 1$$
$$(x+y)^1 = 1x + 1y$$
$$(x+y)^2 = 1x^2 + 2xy + 1y^2$$
$$(x+y)^3 = 1x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$
$$(x+y)^4 = 1x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + 1y^4$$

ان وستار ۾ y ۽ x سڳهن کي ڄاچيو. ان مان $(x+y)^{10}$ جو وستار لکڻ جي ڪوشش ڪريو.

جوابن جي ياداشت

1. سيٽ

اڀياس 1.1

(1) (i) $\{2, 4, 6, 8, \ldots\}$ (ii) $\{2\}$ (iii) $\{-1, -2, -3, \ldots\}$ (iv) {سا، ري، گا، ما، پ، ڌ، ني}

(2) (i) $\frac{4}{3}$ سيٽ Q جو جزو آهي (ii) -2 سيٽ N جو جزو آهي

(iii) سيٽ P جا جزا P ائين آهن جو P اڪي عدد آهي.

(4) (i) A = ڪتي، اسوُ، بدو، سانوڻ، آڪاڻ، چيٽ، ويساک، چيٽ
ڦڳڻ، مانگہ، پوهہ، ناهري

(ii) $X = \{C, O, M, P, L, E, N, T\}$ (iii) Y = {چمڙي، چپ، اکيون، ڪن، نڪ}

(iv) $Z = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$

(v) E = اتر آمريڪا، ڏکڻ آمريڪا، انٽارڪٽا، آسٽريليا، يورپ، آفريڪا، ايشيا

(5) (i) $A = \{x \mid x = n^2, n \in N, n \leq 10\}$ (ii) $B = \{x \mid x = 6n, n \in N, n < 9\}$

(iii) C = {y | y لفظ 'SMILE' جو هڪ اکر آهي}

(iv) D = {z | z لفظ جو هڪ اکر آهي} (v) X = {y | y 'eat' لفظ جو هڪ اکر آهي}

اڀياس 1.2

(1) $A = B = C$ (2) $A = B$ (3) سيٽ A ۽ C خالي سيٽ آهن

(4) (i)، (iii)، (iv)، (v) محدود سيٽ (ii)، (vi)، (vii) لاحد سيٽ

اڀياس 1.3

(1) (i)، (ii)، (iii)، (v) صحيح بيان (iv)، (vi) غلط بيان

(4) $\{1\}, \{3\}, \{2\}, \{7\}, \{1, 3\}, \{1, 2\}, \{1, 7\}, \{3, 2\}, \{3, 7\}, \{2, 7\}, \{1, 3, 2\},$
$\{1, 2, 7\}, \{3, 2, 7\}, \{1, 3, 2, 7\}$ اهڙا ڪي ٻہ ٽي

(5) (i) $P \subseteq H,\ P \subseteq B,\ I \subseteq M,\ I \subseteq B,\ H \subseteq B,\ M \subseteq B$ (ii) سيٽB

(6) (i) N، W، I مان ڪوبہ سيٽ (ii) N، W، I مان ڪوبہ سيٽ

(7) حساب ۾ 50% کان گهٽ مارڪون کڻندڙ شاگردن جو سيٽ

اڀياس 1.4

(1) $n(B) = 21$ (2) ڪجهہ بہ نہ پيئندڙ شاگردن جو عدد = 5

(3) ڪل شاگرد = 70

(4) جابلوُ چڙهائي ۽ آڪاشي جاچ مان ڪجهہ بہ نہ پسند ڪندڙ شاگردن جو عدد = 20

فقط جابلوُ چڙهائي پسند ڪندڙ = 20، فقط آڪاشي جاچ پسند ڪندڙ = 70

(5) (i) $A = \{x, y, z, m, n\}$ (ii) $B = \{p, q, r, m, n\}$

(iii) $A \cup B = \{x, y, z, m, n, p, q, r\}$ (iv) $U = \{x, y, z, m, n, p, q, r, s, t\}$

(v) $A' = \{p, q, r, s, t\}$ (vi) $B' = \{x, y, z, s, t\}$ (vii) $(A \cup B)' = \{s, t\}$

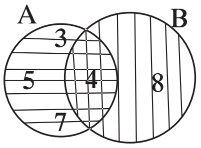
گڏيل اپياس 1

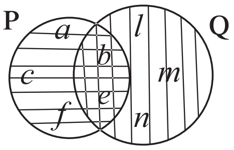
(1) (i) (C) (ii) (D) (iii) (C) (iv) (B) (v) (A) (vi) (A)

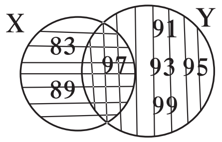
(2) (i) (A) (ii) (A) (iii) (B) (iv) (C)

(3) ڳالهائيندڙ 57، ڳالهائيندڙ 28، ڳالهائيندڙ 15

(4) 135 (5) 12 (6) 4

(7) (i) 

(ii) 

(iii) 

(8) $S \subseteq X,\ V \subseteq X,\ S \subseteq X,\ T \subseteq X,\ S \subseteq Y,\ S \subseteq V,\ S \subseteq T,\ V \subseteq T,\ Y \subseteq T$

(9) $M \cup \phi = M, \quad M \cap \phi = \phi$

(10) $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 13\}, A = \{1, 2, 3, 5, 7\}\ B = \{1, 5, 8, 9, 10\}$

$M \cup B = \{1, 2, 3, 5, 7, 8, 9, 10\}, \quad A \cap B = \{1, 5\}$

(11) $n(A \cup B) = 16$

2. اپياس

اپياس 2.1

(1) ختم ٿيندڙ (i)، (iii)، (iv) ختم نہ ٿيندڙ ورائتا: (ii)، (v)

(2) (i) 0.635 (ii) $0.\overline{25}$ (iii) $3.\overline{285714}$ (iv) 0.8 (v) 2.125

(3) (i) $\frac{2}{3}$ (ii) $\frac{37}{99}$ (iii) $\frac{314}{99}$ (iv) $\frac{1574}{99}$ (v) $\frac{2512}{999}$

اپياس 2.2

(4) (i) $-0.4, -0.3, 0.2$ اهڙا بيحد عدد

(ii) $-2.310, -2.320, -2.325$ اهڙا بيحد عدد

(iii) $5.21, 5.22, 5.23$ اهڙا بيحد عدد

(vi) $-4.51, -4.55, -4.58$ اهڙا بيحد عدد

اپياس 2.3

(1) (i) 3 (ii) 2 (iii) 4 (iv) 2 (v) 3

(2) (i), (iii), (vi) غيرناطق (ii), (iv), (v) غيرناطق نہ آهن

(3) هڪجهڙا غيرناطن (i), (iii), (iv) علحدا غيرناطق : (ii), (v), (vi)

(4) (i) $3\sqrt{3}$ (ii) $5\sqrt{2}$ (iii) $5\sqrt{10}$ (iv) $4\sqrt{7}$ (v) $2\sqrt{42}$

(5) (i) $7\sqrt{2} > 5\sqrt{3}$ (ii) $\sqrt{247} < \sqrt{274}$ (iii) $2\sqrt{7} = \sqrt{28}$

(iv) $5\sqrt{5} < 7\sqrt{5}$ (v) $4\sqrt{42} > 9\sqrt{2}$ (vi) $5\sqrt{3} < 9$ (vii) $7 > 2\sqrt{5}$

(6) (i) $13\sqrt{5}$ (ii) $10\sqrt{5}$ (iii) $24\sqrt{3}$ (iv) $\frac{12}{5}\sqrt{7}$

(i) $18\sqrt{6}$ (ii) $126\sqrt{5}$ (iii) $6\sqrt{10}$ (iv) 80 (7)

(i) 7 (ii) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ (iii) $\sqrt{2}$ (iv) 62 (8)

(i) $\frac{3}{5}\sqrt{5}$ (ii) $\frac{\sqrt{14}}{14}$ (iii) $\frac{5\sqrt{7}}{7}$ (iv) $\frac{2}{9}\sqrt{3}$ (v) $\frac{11}{3}\sqrt{3}$ (9)

اڀياس 2.4

(i) $-3+\sqrt{21}$ (ii) $\sqrt{10}-\sqrt{14}$ (iii) $-18+13\sqrt{6}$ (1)

(i) $\frac{\sqrt{7}-\sqrt{2}}{5}$ (ii) $\frac{3\left(2\sqrt{5}+3\sqrt{2}\right)}{2}$ (iii) $28-\sqrt{16}\;3$ (iv) $4-\sqrt{15}$ (2)

اڀياس 2.5

(i) 13 (ii) 5 (iii) 28 (2) 2 يا $\frac{4}{3}$ (ii) 1 يا 6 (iii) −2 يا 18 (iv) 0 يا −40 (1)

گڏيل اڀياس 2

(i) B (ii) D (iii) C (iv) D (v) A (1)

(vi) C (vii) C (viii) C (ix) A (x) B

(i) $\frac{555}{1000}$ (ii) $\frac{29539}{999}$ (iii) $\frac{9306}{999}$ (iv) $\frac{357060}{999}$ (v) $\frac{30189}{999}$ (2)

(i) $-0.\overline{714285}$ (ii) $0.\overline{81}$ (iii) 2.2360679... (iv) $9.\overline{307692}$ (v) 3.625 (3)

(i) $\frac{3}{2}\sqrt{2}$ (ii) $-\frac{5}{3}\sqrt{5}$ (5)

(i) $\sqrt{2}$ (ii) $\sqrt{2}$ (iii) $\sqrt{3}$ (iv) $\sqrt{10}$ (v) $\sqrt{2}$ (vi) $\sqrt{11}$ (6)

(i) $6\sqrt{3}$ (ii) $\frac{34}{3}\sqrt{3}$ (iii) $\frac{15}{2}\sqrt{6}$ (iv) $-25\sqrt{3}$ (v) $\frac{8}{3}\sqrt{3}$ (7)

(i) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ (ii) $\frac{2\sqrt{7}}{21}$ (iii) $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ (iv) $\frac{3\sqrt{5}-2\sqrt{2}}{37}$ (v) $\frac{6\left(4\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}{23}$ (8)

3. گهٽپدا

اڀياس 3.1

(1) (i) نہ آهي، چو تہ $\frac{1}{y}$ ۾ y جي سگهہ (-1) آهي

(ii) نہ آهي چو تہ $5\sqrt{x}$ ۾ x جي سگهہ $\left(\frac{1}{2}\right)$ اڻپور آهي.

(iii) آهي (vi) نہ آهي چو تہ $2m^{-2}$ ۾ جي سگهہ (-2) آهي. (v) آهي

(i) 1 (ii) $-\sqrt{3}$, (iii) $-\frac{2}{3}$ (2)

(3) (i) x^7 (ii) $2x^{35}-7$ (iii) x^8-2x^5+3 مثالن جو انيڪ جواب ٿي سگهن ٿا.

(i) 0 (ii) 0 (iii) 2 (iv) 10 (v) 1 (vi) 5 (vii) 3 (viii) 10 (4)

(5) (i) ٻسگهي (ii) ليڪي (iii) ليڪي (iv) ٽسگهي (v) ٻسگهي (vi) ٽسگهي

(6) (i) $m^3 + 5m + 3$ (ii) $y^5 + 2y^4 + 3y^3 - y^2 - 7y - \frac{1}{2}$

(7) (i) (1, 0, 0, −2) (ii) (5, 0) (iii) (2, 0, −3, 0, 7) (iv) $\left(\frac{-2}{3}\right)$

(8) (i) $x^2 + 2x + 3$ (ii) $5x^4 - 1$ (iii) $-2x^3 + 2x^2 - 2x + 2$

(9) ٻسگهي گهٽپدو : x^2 ; $2x^2 + 5x + 10$; $3x^2 + 5x$; ٽسگهي گهٽپدو: $x^3 + x^2 + x + 5$; $x^3 + 9$

ليڪي گهٽپدو : $x + 7$; ٻپدو : $x + 7$، $x^3 + 9$; هڪ پدو: $2x^2 + 5x + 10$; هڪ پدو : x^2

اڀياس 3.2

(1) (i) $a + bx$ (ii) xy (iii) $10n + m$

(2) (i) $6x^3 - 2x^2 + 2x$ (ii) $-2m^4 + 2m^3 + 2m^2 + 3m - 6 + \cdot 2$ (iii) $5y^2 + 6y + 11$

(3) (i) $-6x^2 + 10x$ (ii) $10ab^2 + a^2b - 7ab$

(4) (i) $2x^3 - 4x^2 - 2x$ (ii) $x^8 + 2x^7 + 2x^5 - x^3 - 2x^2 - 2$ (iii) $-4y^4 + 7y^2 + 3y$

(5) (i) $x^3 - 64 = (x - 4)(x^2 + 4x + 16) + 0$

(ii) $5x^5 + 4x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 2 = (x^2 - x)(5x^3 + 9x^2 + 6x + 8) + (8x + 2)$

(6) $a^4 + 7a^2b^2 + 2b^4$

اڀياس 3.3

(1) (i) ونڊاپت = $2m + 7$، پاڇي = 45

(ii) ونڊاپت = $x^3 + 3x - 2$، پاڇي = 9

(iii) ونڊاپت = $y^2 + 6y + 36$، پاڇي = 0

(iv) ونڊاپت = $2x^3 - 3x^2 + 7x - 17$، پاڇي = 51

(v) ونڊاپت = $x^3 - 4x^2 + 13x - 52$، پاڇي = 200

(vi) ونڊاپت = $y^2 - 2y + 3$، = 2

اڀياس 3.4

(1) 5 (2) 1 (3) $4a^2 + 20$ (4) −11

اڀياس 3.5

(1) (i) −41 (ii) 7 (iii) 7 (2) (i) 1, 0, −8 (ii) 4, 5, 13 (iii) −2, 0, 10

(3) 0 (4) 2 (5) (i) 17 (ii) $2a^3 - a^2 - a$ (iii) 1544 (6) 92 (7)

(8) 2 (9) (i) (ii) (10) 30 (11)

(13) (i) −3 (ii) 80

اڀياس 3.6

(1) (i) $(x + 1)(2x - 1)$ (ii) $(m + 3)(2m - 1)$ (iii) $(3x + 7)(4x + 11)$

(iv) $(y - 1)(3y + 1)$ (v) $(x + \sqrt{3})(\sqrt{3}x + 1)$ (vi) $(x - 4)\left(\frac{1}{2}x - 1\right)$

(2) (i) $(x - 3)(x + 2)(x - 2)(x + 1)$ (ii) $(x - 13)(x - 2)$

(iii) $(x-8)(x+2)(x-4)(x-2)$ (iv) $(x^2-2x+10)(x^2-2x-2)$

(v) $(y^2+5y-22)(y+4)(y+1)$ (vi) $(y+6)(y-1)(y+4)(y+1)$

(v) $(x^2-8x+18)(x^2-8x+13)$

گڏيل اڀياس 3

(1) (i) D (ii) D (iii) C (iv) A (v) C (vi) A (vii) D (viii) C (ix) A (x) A

(2) (i) 4 (ii) 0 (iii) 9

(3) (i) $7x^4 - x^3 + 4x^2 - x + 9$ (ii) $5p^4 + 2p^3 + 10p^2 + p - 8$

(4) (i) (1, 0, 0, 0, 16) (ii) (1, 0, 0, 2, 3, 15)

(5) (i) $3x^4 - 2x^3 + 0x^2 + 7x + 18$ (ii) $6x^3 + x^2 + 0x + 7$ (iii) $4x^3 + 5x^2 - 3x + 0$

(6) (i) $10x^4 + 13x^3 + 9x^2 - 7x + 12$ (ii) $p^3q + 4p^2q + 4pq + 7$

(7) (i) $2x^2 - 7y + 16$ (ii) $x^2 + 5x + 2$

(8) (i) $m^7 - 4m^5 + 6m^4 + 6m^3 - 12m^2 + 5m + 6$

(ii) $5m^5 - 5m^4 + 15m^3 - 2m^2 + 2m - 6$

(9) = 19 (10) $m = 1$ (11) کل آدمشماري $= 10x^2 + 5y^2 - xy$

(12) $b = \frac{1}{2}$ (13) $11m^2 - 8m + 5$ (14) $-2x^2 + 8x + 11$ (15) $2m + n + 7$

4. ريشو ۽ پروپورشن

اڀياس 4.1

(1) (i) 6 : 5 (ii) 2 : 3 (iii) 2 : 3

(2) (i) 25 : 11 (ii) 35 : 31 (iii) 2 : 1 (iv) 10 : 17 (v) 2 : 1 (vi) 220 : 153

(3) (i) 3 : 4 (ii) 11 : 25 (iii) 1 : 16 (iv) 13 : 25 (v) 4 : 625

(4) 4 ماڻهو (5) (i) 60% (ii) 94% (iii) 70% (iv) 91% (v) 43.75%

(6) آيا جي عمر 18 سال، ماءُ جي عمر 45 سال (7) 6 سالن کانپوءِ (8) ريهانا جي اڄوڪي عمر 8 سال آهي

اڀياس 4.2

(1) (i) نمبروار 20, 49, 2.5 (ii) نمبروار 7, 27, 2.25

(2) (i) $1 : 2\pi$ (ii) $2 : r$ (iii) $\sqrt{2} : 1$ (iv) 34 : 35

(3) (i) $\frac{\sqrt{5}}{3} < \frac{3}{\sqrt{7}}$ (ii) $\frac{3\sqrt{5}}{5\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{63}}{\sqrt{125}}$ (iii) $\frac{5}{18} > \frac{17}{121}$

(iv) $\frac{\sqrt{80}}{\sqrt{48}} = \frac{\sqrt{45}}{\sqrt{27}}$ (v) $\frac{9.2}{5.1} > \frac{3.4}{7.1}$

(4) (i) 80° (ii) البرٽ جي اچوڪي عمر 45 سال ، سليم جي اچوڪي عمر 45 سال

(iii) ڊيگهه 13.5س م، ويڪر 4.5 س م (iv) 124, 92 (v) 20, 18

(5) (7) $x = 5$ (6) 2 : 125 (i) 729 (ii) 45 : 7

ايپاس 4.3

(1) (i) 22 : 13 (ii) 125 : 71 (iii) 316 : 27 (iv) 38 : 11

(2) (i) 3 : 5 (ii) 1 : 6 (iii) 7 : 43 (iv) 71 : 179 (3) 170 : 173

(4) (i) $x = 8$ (ii) $x = 9$ (iii) $x = 2$ (iv) $x = 6$ (v) $x = \frac{9}{14}$ (vi) $x = 3$

ايپاس 4.4

(1) (i) 36, 22 (ii) 16, $2a - 2b + 2c$

(2) (i) 29 : 21 (ii) 23 : 7 (4) (i) $x = 2$ (ii) $y = 1$

ايپاس 4.5

(1) $x = 4$ (2) $x = \frac{347}{14}$ (3) 18, 12, 8 يا 8, 12, 18 (6) $\frac{x+y}{xy}$

گڏيل ايپاس 4

(1) (i) B (ii) C (iii) B (iv) D (v) C

(2) (i) 7 : 16 (ii) 2 : 5 (iii) 5 : 9 (iv) 6 : 7 (v) 6 : 7

(3) (i) 1 : 2 (ii) 5 : 4 (iii) 1 : 1

(4) (i) ۽ (iii) لڳيتو پروپوشن آهي (ii) ۽ (iv) لڳيتو پروپوشن نہ آهي (5) $b = 9$

(6) (i) 7.4% (ii) 62.5% (iii) 73.33% (iv) 31.25% (v) 12%

(7) (i) 5 : 6 (ii) 85 : 128 (iii) 1 : 2 (iv) 50 : 1 (v) 3 : 5

(8) (i) $\frac{17}{9}$ (ii) 19 (iii) $\frac{35}{27}$ (iv) $\frac{13}{29}$

(11) $x = 9$

5. ٻن ڦيرائتن واريون ليڪي مساواتون

ايپاس 5.1

(3) (i) $x = 3;\ y = 1$ (ii) $x = 2;\ y = 1$ (iii) $x = 2;\ y = -2$

(iv) $x = 6;\ y = 3$ (v) $x = 1;\ y = -2$ (vi) $x = 7;\ y = 1$

اپياس 5.2

(1) رپيا 5 جا 30 نوٽ ۽ 10 رپين جا 20 نوٽ آهن

(2) $\frac{5}{9}$ (3) پرينڪا جي عمر 20 سال، ديپيڪا جي 14 سال (4) 20 شينهن ، 30 مور

(5) سالياني واڌ ₹ 3900، شروعاتي پگهار ₹ 150

(6) $\angle C = 50^0$, $\angle B = 40^0$, $\angle A = 90^0$ (8) 36 (7) ₹ 4000

(9) 420 س م (10) 10

گڏيل اپياس 5

(1) (i) A (ii) C (iii) C

(2) (i) $x = 2;\ y = 1$ (ii) $x = 5;\ y = 3$ (iii) $x = 8;\ y = 3$

(iv) $x = 1;\ y = -4$ (v) $x = 3;\ y = 1$ (vi) $x = 4;\ y = 3$

(3) (i) $x = 1;\ y = -1$ (ii) $x = 2;\ y = 1$ (iii) $x = 26;\ y = 18$ (iv) $x = 8;\ y = 2$

(4) (i) $x = 6;\ y = 8$ (ii) $x = 9;\ y = 2$ (iii) $x = \frac{1}{2};\ y = \frac{1}{3}$ (5) 35

(6) ₹ 69 (7) هرهڪجي ماهياني اُپت ₹ 1400 ۽ ₹ 1800

(8) ايڪا 207 ويڪر, ايڪا 347 ڊيگهه (9) ڪ م / في ڪلاڪ 30 , ڪ م / في ڪلاڪ 40

(10) (i) 54, 45 (ii) 36, 63 وغيره

6. مالي رٿا ناهڻ

اپياس 6.1

(1) ₹ 1200 (2) ٻئين سال ڪانپوءِ موڙي ₹ 42,000، مول (شروعاتي) موڙيءَ تي 16 نقصان ٿيو

(3) ماهياني اُپت ₹ 50,000 (4) شري فرنانڊز (5) ₹ 25,000

اپياس 6.2

(1) (i) ٽئڪس نہ ڀرڻي پوندي (ii) ڀرڻي پوندي (iii) ڀرڻي پوندي

(iv) ڀرڻي پوندي (v) نہ ڀرڻي پوندي

(2) ₹ 9836.50

گڏيل اپياس 6

(1) A (i) B (ii) (2) اپت ₹ 8750

(3) هيرالعل جو فائدو 36.73، رمٽيڪ لعل جو فائدو 16.64، هيرالعل

(4) 12.5% (6) ₹ 4,00,000 (5) ₹ 99383.75

(7) رميش جي بچت ₹ 48000; سريش جي بچت ₹ 51000 ; پريتيءَ جي بچت ₹ 36000

(8) (i) ₹ 213000 (ii) ₹ 7500 (iii) ٽئڪس نہ آهي.

اڀياس 7.

اڀياس 7.2

(1) بنيادي چاڪ (i), (iii), (v) ٻئين درجي جي چاڪ : (ii), (iv)

اڀياس 7.3

(1) هيٺين ڪلاس حد = 20, مٿين ڪلاس حد = 25 (2) 7-13 (3) 37.5

اڀياس 7.4

(3) (i) 38 (ii) 3 (iii) 19 (iv) 62 (4) (i) 24 (ii) 3 (iii) 43 (iv) 43

اڀياس 7.5

(1) 7 ڪئنٽل (2) 74 (3) 100 (4) ₹ 4900 (5) 75 گرام

(6) سراسري= 3, وچون انگ = 3, ڊنگہ = 4 (7) 78.56 (8) $x = 9$ (9) 20 (10) 70

(11) 34.25 (12) 37 ڪِگ (13) 2 (14) 35 ۽ 37

گڏيل اڀياس 7

(1) (i) C (ii) B (iii) D (iv) B (v) A (vi) D

(vii) B (viii) A (ix) C (x) C

(2) ₹ 26000 (3) ₹ 127

(4) (i) 24 (ii) 06

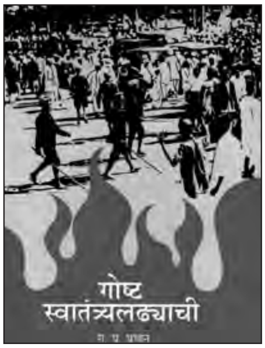
(5) P = 20

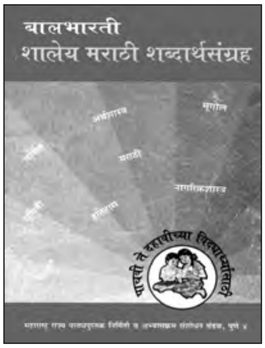
(6) (i) 66 (ii) 14 (iii) 45

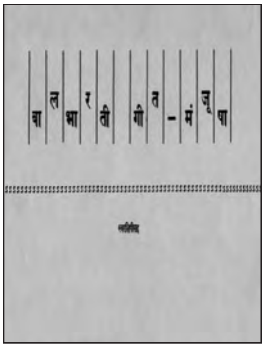
(7) (i) 11 (ii) 68

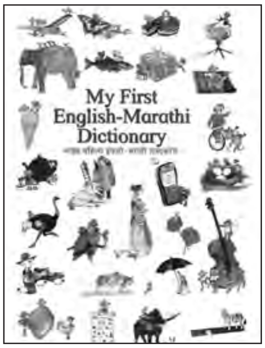
(8) $x = 52$, سراسري = 55.9, ڊنگہ = 52

◈◈◈









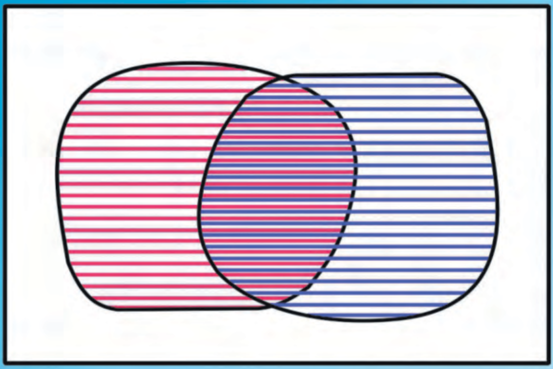
- पाठ्यपुस्तक मंडळाची वैशिष्ट्यपूर्ण पाठ्येत्तर प्रकाशने.
- नामवंत लेखक, कवी, विचारवंत यांच्या साहित्याचा समावेश.
- शालेय स्तरावर पूरक वाचनासाठी उपयुक्त.

पुस्तक मागणीसाठी www.ebalbharati.in, www.balbharati.in संकेत स्थळावर भेट द्या.

साहित्य पाठ्यपुस्तक मंडळाच्या विभागीय भांडारांमध्ये विक्रीसाठी उपलब्ध आहे.

ebalbharati

विभागीय भांडारे संपर्क क्रमांक : पुणे - ☎ २५६५९४६५, कोल्हापूर- ☎ २४६८५७६, मुंबई (गोरेगाव) - ☎ २८७७१८४२, पनवेल - ☎ २७४६२६४६५, नाशिक - ☎ २३९१५११, औरंगाबाद - ☎ २३३२१७१, नागपूर - ☎ २५४७७१६/२५२३०७८, लातूर - ☎ २२०९३०, अमरावती - ☎ २५३०९६५



$x + y = 4$

$2x + 3y = 3$

$x = \square$, $y = \square$

مهاراشٽر راجيه پاٺ پُستڪ
نرمتي وَ اڀياسڪرم
سنشوڌن منڊل، پڻي.

सिंधी (अरे.) गणित इ. ९ वी भाग-१ ₹64.00