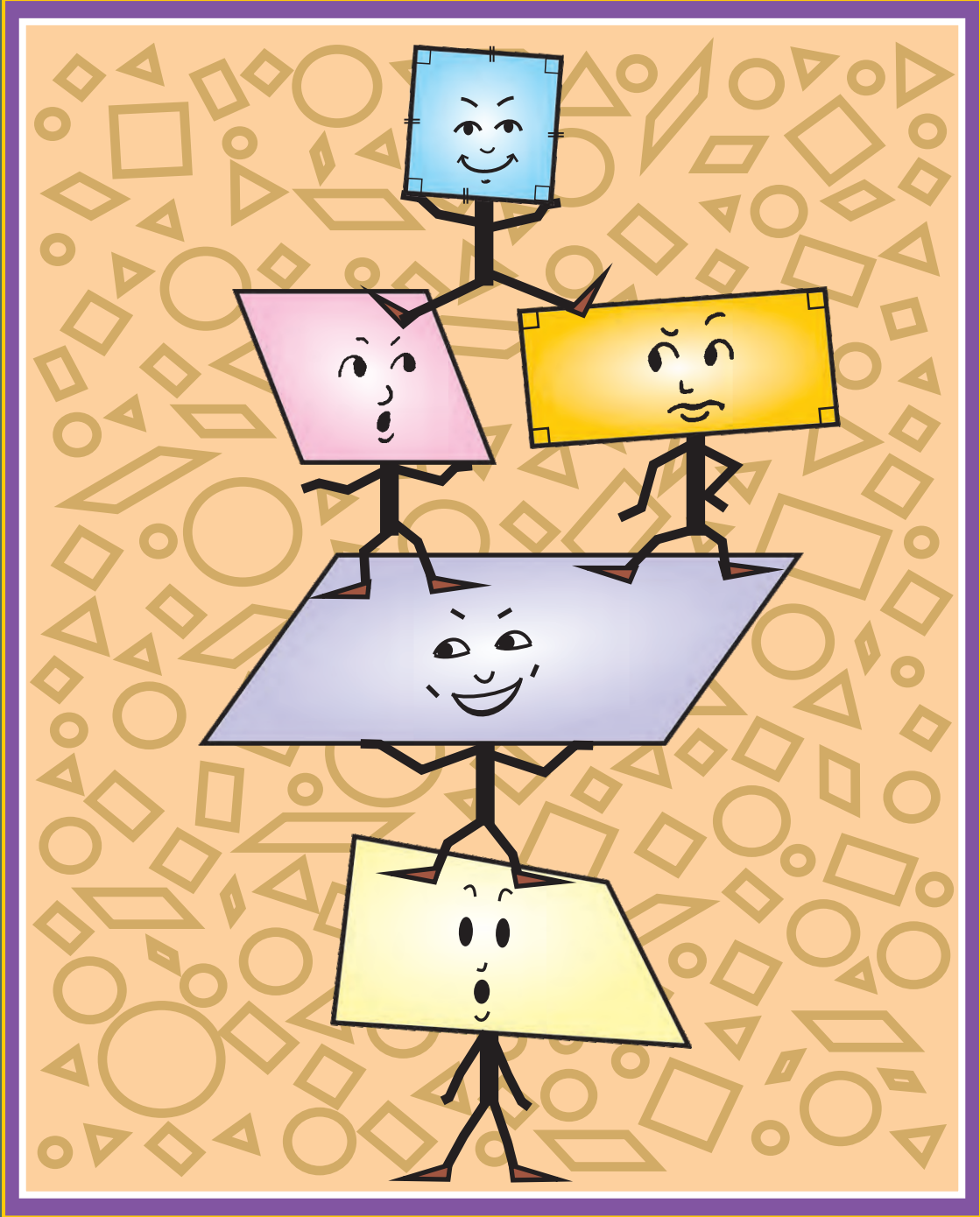




গণিত

অষ্টম শ্রেণী



ভারতের সংবিধান

ভাগ 4 ক

মৌলিক কর্তব্য

অনুচ্ছেদ 51 ক

মৌলিক কর্তব্য - ভারতের প্রতিটি নাগরিকের এই কর্তব্য থাকবে যে সে-

- (ক) সংবিধানকে মান্য করতে হবে এবং সংবিধানের আদর্শ, প্রতিষ্ঠানসমূহ, জাতীয় পতাকা এবং জাতীয় সংগীতের প্রতি শ্রদ্ধা জানাতে হবে ;
- (খ) যে সকল মহান আদর্শ দেশের স্বাধীনতার জন্য জাতীয় সংগ্রামকে অনুপ্রাণিত করেছিল, সেগুলিকে পোষণ এবং অনুসরণ করতে হবে ;
- (গ) ভারতের সার্বভৌমিকতা, ঐক্য এবং সংহতিকে সমর্থন ও সংরক্ষণ করতে হবে ;
- (ঘ) দেশরক্ষা ও জাতীয় সেবাকার্যে আত্মনিয়োগের জন্য আহ্বাত হলে সাড়া দিতে হবে ;
- (ঙ) ধর্মগত, ভাষাগত, অঞ্চলগত বা শ্রেণীগত বিভেদের উর্ধ্বে থেকে সমস্ত ভারতবাসীর মধ্যে ঐক্য ও ভ্রাতৃত্ববোধকে সম্প্রসারিত করতে হবে এবং নারীজাতির মর্যাদাহানিকর সকল প্রথাকে পরিহার করতে হবে ;
- (চ) আমাদের দেশের বহুমুখী সংস্কৃতির গৌরবময় ঐতিহ্যকে মূল্যপ্রদান ও সংরক্ষণ করতে হবে ;
- (ছ) বনভূমি, হ্রদ, নদী, বন্যপ্রাণী-সহ প্রাকৃতিক পরিবেশের সংরক্ষণ ও উন্নতি এবং জীবজন্তুর প্রতি মমত্ববোধ প্রকাশ করতে হবে ;
- (জ) বৈজ্ঞানিক দৃষ্টিভঙ্গি, মানবিকতাবোধ, অনুসন্ধিসা, সংস্কারমূলকমনোভাবের প্রসার ঘটাতে হবে ;
- (ঝ) জাতীয় সম্পত্তি রক্ষণাবেক্ষণ ও হিংসার পথ পরিহার করতে হবে ;
- (ঞ) সকল ক্ষেত্রে জাতীয় উন্নতির উর্ধ্ব এবং গতি বজায় রাখার উদ্দেশ্যে ব্যক্তিগত ও সমষ্টিগত সকল কাজে চরম উর্ধ্বের জন্য সচেষ্ট হতে হবে ;
- (ট) মাতা-পিতা বা অভিভাবকদের ছয় থেকে চৌদ্দ বছর বয়সেরপ্রত্যেক শিশুকে শিক্ষাদানের ব্যবস্থা করতে হবে।

শাসন নির্ণয় ক্রমান্বয়ে : অভ্যাস-২১১৬ / (প্র.ক্র. ৪৩ / ১৬) এসভী-৪ তারিখ ২৫.০৪.২০১৬ অনুযায়ী স্থাপিত করা সমন্বয়
সমিতির তারিখ ২৯.০৪.২০২২ এর সভায় এই পাঠ্যপুস্তক সন ২০২২-২০২৩ এই শৈক্ষিক বর্ষ থেকে নির্ধারিত করার জন্য
মান্যতা দেওয়া হয়েছে।

গণিত

অষ্টম শ্রেণী



মহারাষ্ট্র রাজ্য পাঠ্যপুস্তক নির্মিতী ও অভ্যাসক্রম সংশোধন মণ্ডল, পুণে - ৪১১ ০০৪



Z8D8G8

আপনার স্মার্টফোনে DIKSHA APP দ্বারা পাঠ্যপুস্তকের
প্রথম পৃষ্ঠার Q.R. Code-এর মাধ্যমে ডিজিটাল পাঠ্যপুস্তক
এবং পাঠের সম্বন্ধে অধ্যয়ন-অধ্যাপনের জন্য উপযুক্ত দৃক-
শ্রাব্য সাহিত্য উপলব্ধ হবে।

First Edition : 2022 © মহারাষ্ট্র রাজ্য পাঠ্যপুস্তক নির্মিती ও অভ্যাসক্রম সংশোধন মণ্ডল,
পুণে-৪১১ ০০৪

এই বইয়ের সর্ব অধিকার মহারাষ্ট্র রাজ্য পাঠ্যপুস্তক নির্মিती ও অভ্যাসক্রম
সংশোধন মণ্ডলের অধিনে সুরক্ষিত আছে। এই পাঠ্যপুস্তকের কোনো ভাগ
সঞ্চালক, মহারাষ্ট্র রাজ্য পাঠ্যপুস্তক নির্মিती ও অভ্যাসক্রম সংশোধন মণ্ডলের
লিখিত অনুমতি ছাড়া উদ্ধৃতি করা যাবে না।

গণিত বিশেষজ্ঞ সমিতি

ডা. মঙ্গলা নারডীকর	(অধ্যক্ষ)
ডা. জয়শ্রী অত্র	(সদস্য)
শ্রী বিনায়ক গোডবোলে	(সদস্য)
শ্রীমতী প্রাজক্তি গোখলে	(সদস্য)
শ্রী রমাকান্ত সরোদ	(সদস্য)
শ্রী সন্দীপ পঞ্চভাই	(সদস্য)
শ্রীমতী পূজা জাধব	(সদস্য)
শ্রীমতী উজ্জ্বলা গোডবোলে	(সদস্য সচিব)

প্রমুখ সংযোজক

উজ্জ্বলা শ্রীকান্ত গোডবোলে
প্র. বিশেষাধিকারী গণিত, পাঠ্যপুস্তক মন্ডল, পুণে

নির্মিতি

সচিন মেহতা
মুখ্য নির্মিতি অধিকারী
সঞ্জয় কাংবড়ে
নির্মিতি অধিকারী

গণিত বিষয় - রাজ্য অভ্যাসগট সদস্য

শ্রীমতী জয়শ্রী পুরন্দরে	শ্রী প্রমোদ ঠোস্বরে
শ্রী রাজেন্দ্র চৌধুরী	ডা. ভারতী সহস্রবুদ্ধে
শ্রী সন্দেশ সোনাওয়ানে	শ্রীমতী স্বাতী ধর্মাদিকারী
শ্রী জ্ঞানেশ্বর মাশালকর	শ্রী প্রতাপ কাশিদ
শ্রমতী সুবর্ণা দেশপান্ডে	শ্রী মিলিন্দ ভাকরে
শ্রী শ্রীপাদ দেশপান্ডে	শ্রী আমাপা পরীট
শ্রী সুরেশ দাতে	শ্রী গণেশ কোলতে
শ্রী উমেশ রেড়ে	শ্রী রামা হ্যান্যাডকর
শ্রী বন্দী হাওয়াড়ে	শ্রী সুধীর পাটিল
শ্রীমতী রোহিণী শির্কে	শ্রী প্রকাশ কাপসে
শ্রী প্রকাশ ঝোন্ডে	শ্রী রবীন্দ্র খন্দারে
শ্রী লক্ষ্মণ দাওয়াণকর	শ্রী বসন্ত শেওয়াড়ে
শ্রী শ্রীকান্ত রত্নপারখী	শ্রী অরবিন্দকুমার তিওয়ারী
শ্রী সুনিল শ্রীবাস্তও	শ্রী মল্লেশাম বেথী
শ্রী আশারী আব্দুল হামিদ	শ্রীমতী আর্ষা ভিড়ে
শ্রী আশার শেখ	
শ্রীমতী তরুবেন পোপট	

ভাষান্তরকার : শ্রী বিশ্বজিৎ সন্তোষ বাইন
শ্রী বিদুর শিশির অধিকারী

সমীক্ষক : শ্রী জনক গোপাল সরকার
শ্রী সুজিত শঙ্কর দাস

বিষয় তত্ত্ব : শ্রী নিত্যানন্দ রঞ্জন বালা
শ্রী প্রকাশ রঞ্জিৎ দেবনাথ

ভাষান্তর সংযোজক : ডা. অলকা পোতদার
বিশেষাধিকারী, হিন্দী
পাঠ্যপুস্তক মণ্ডল, পুণে

সংযোজক সহায়ক : সৌ. সন্ধ্যা বি উপাসনী
সহায়ক বিশেষাধিকারী, হিন্দী
পাঠ্যপুস্তক মণ্ডল, পুণে

কাগজ

৭০ জী. এস. এম. ক্রিমবোভ

মুদ্রণাদেশ

N/PB/2022-23/1,000

মুদ্রক

Uchitha Graphics Ptrs. Pvt.Ltd., Navi Mumbai

মুখপৃষ্ঠ ও কম্পিউটার আরেখন

সন্দীপ কোলী, চিত্রকার, মুম্বই

অক্ষরাক্ষর

মুদ্রা বিভাগ, পাঠ্যপুস্তক মন্ডল, পুণে

প্রকাশক

বিবেক উত্তম গোসারী, নিয়ন্ত্রক
পাঠ্যপুস্তক নির্মিती মণ্ডল,
প্রভাদেবী, মুম্বই-২৫

ভারতের সংবিধান

উদ্দেশিকা

“আমরা, ভারতের জনগণ, ভারতকে সার্বভৌম,
সমাজতান্ত্রিক, ধর্মনিরপেক্ষ, গণতান্ত্রিক, সাধারণতন্ত্র রূপে
গড়ে তুলতে এবং তার সকল নাগরিকই যাতে
সামাজিক, অর্থনৈতিক ও রাজনৈতিক ন্যায়,
বিচার, মতপ্রকাশ, বিশ্বাস, ধর্ম
এবং উপাসনার স্বাধীনতা,
সামাজিক প্রতিষ্ঠা অর্জন
ও সুযোগের সমতা প্রতিষ্ঠা
এবং তাদের সকলের মধ্যে

ব্যক্তির মর্যাদা এবং জাতীয় ঐক্য
ও সংহতি সুনিশ্চিতকরণের মাধ্যমে
তাদের মধ্যে যাতে ভ্রাতৃত্বের ভাব
গড়ে ওঠে তার জন্য

সত্যনিষ্ঠার সঙ্গে শপথ গ্রহণ করে আমাদের গণপরিষদে,
আজ ১৯৪৯, সালের ২৬ শে নভেম্বর, (তিথি মাঘ শুক্ল
সপ্তমী, সন্বত দুই হাজার ছয় বিক্রমী) এতদ্বারা এই
সংবিধান গ্রহণ, বিধিবদ্ধ এবং নিজেদের অর্পণ করছি।”

রাষ্ট্রগীত

জনগণমন-অধিনায়ক জয় হে
ভারত-ভাগ্যবিধাতা ।
পাঞ্জাব সিন্ধু গুজরাত মরাঠা
দ্রাবিড় উৎকল বঙ্গ,
বিন্ধ্য হিমাচল যমুনা গঙ্গা
উচ্ছল জলধিতরঙ্গ
তব শুভ নামে জাগে, তব শুভ আশিষ মাগে,
গাহে তব জয়গাথা ।
জনগণ মঙ্গলদায়ক জয় হে,
ভারত-ভাগ্যবিধাতা ।
জয় হে, জয় হে, জয় হে,
জয় জয় জয় জয় হে ॥

প্রতিজ্ঞা

ভারত আমার দেশ । সমস্ত ভারতবাসী আমার ভাই-
বোন ।

আমি আমার দেশকে ভালবাসি আমার দেশের সমৃদ্ধি
এবং বিবিধতায় বিভূষিত পরম্পরার উপর আমার গর্ব ।

ওই পরম্পরার সফলতা অনুসারে চলার জন্য আমি
সর্বদা ক্ষমতা অর্জন করতে চেষ্টা করবো ।

আমি আমার মা-বাবা, গুরুজন এবং বড়দের প্রতি
সম্মান ও সৌজন্যপূর্ণ ব্যবহার করবো ।

আমি প্রতিজ্ঞা করছি যে, আমি আমার দেশ ও
দেশবাসীর প্রতি নিষ্ঠাবান থাকবো । তাদের কল্যাণ এবং
সমৃদ্ধিতেই আমার সুখ নিহিত ।

প্রস্তাবনা

প্রিয় ছাত্র বন্ধুরা,

অষ্টম শ্রেণীতে তোমাদের সকলকে স্বাগত জানাই।

গণিত বিষয়ের প্রথম শ্রেণী হতে সপ্তম শ্রেণীর পাঠ্যপুস্তকের অধ্যয়ন তোমরা অবশ্যই করেছো। বাঙালী শিক্ষার্থীদের চাহিদা মাথায় রেখে প্রথম বার অষ্টম শ্রেণী বাংলা মাধ্যমের গণিত পাঠ্যপুস্তকটির নির্মিতি করা হয়েছে। অষ্টম শ্রেণীর গণিত পাঠ্যপুস্তকটি তোমাদের হাতে তুলে দিতে আমরা বিশেষ আনন্দ বোধ করছি। মারাত্মক গণিত পাঠ্যপুস্তকের নির্মিতি বর্ষ ২০১৮ তে করা হয়েছে।

গণিত বিষয় যাতে করে ভালোভাবে আয়ত্ত করা যায়, মনোরঞ্জক হয় এর জন্য পাঠ্যপুস্তকে কিছু কৃতি ও রচনার আবির্ভাব আছে, সেগুলি অবশ্যই করে দেখবে। তার সম্পর্কে আপসে চর্চা করবে। প্রতিফলে গণিতের কিছু নতুন ধর্ম তোমরা আয়ত্ত করতে পারবে।

পাঠ্যপুস্তকের প্রত্যেক পর্ব তোমরা মনোযোগ সহকারে ও সুস্বভাবে পঠন করবে এটাই আমাদের দৃঢ় আশা। পাঠ্যপুস্তকের কোনো অংশ বুঝতে কঠিন বোধ হলে শিক্ষক, অভিভাবক কিম্বা তোমাদের সহপাঠী শিক্ষার্থীদের সাহায্যে বুঝে নিবে। তথ্য প্রযুক্তিরও সাহায্য নিতে হবে। পাঠ্যপুস্তকের প্রথম পৃষ্ঠার প্রদত্ত কিউ আর কোড-এর ব্যবহার তোমরা অবশ্যই করবে।

পাঠ্য ঘটকের বিষয়বস্তু বোঝার পরেই অনুশীলনীতে দেওয়া উদাহরণ সমাধান করবে। নিয়মিত অভ্যাসে পাঠ্য ঘটকের গুরুত্বপূর্ণ বিষয়বস্তু ভালোভাবে বুঝতে পারবে ও চিরস্মরণে বজিয়ে থাকবে। অনুশীলনীর প্রদত্ত উদাহরণের ন্যায় অধিকাধিক উদাহরণ তোমরাও অবশ্য তৈরি করতে পারবে। অনুশীলনীতে তারকা চিহ্নিত উদাহরণগুলি একটু আহ্বানাত্মক। এগুলিও অবশ্য সমাধান করে দেখবে।

যদিও গণিতের অধ্যয়নে প্রায়ই প্রদত্ত তথ্য কম বলে মনে হয়, যৌক্তিক চিন্তাভাবনা করে বেশি উপসংহার প্রাপ্ত করা যায়। ত্রিভুজের সর্বসমতার পরীক্ষা, উদাহরণস্বরূপ। আগামী অধ্যয়নে পরীক্ষাগুলি আরও গবেষণায় ব্যাপকভাবে ব্যবহার করা হবে। তাদের মনোযোগ সহকারে অধ্যয়ন করবে।

এই বইটি জীবনের অর্থনৈতিক লেনদেনে ব্যবহৃত চক্রবৃদ্ধি সুদ, ছাড়-কমিশন, মুদ্রা, নিয়মিত ও অনিয়মিত বিভিন্ন আকৃতির ক্ষেত্রফল, কিছু ত্রিমাত্রিক আকারের আয়তন ইত্যাদি ব্যাখ্যা করে।

গণিত অধ্যয়ন করার সময় পূর্ব শ্রেণীতে প্রাপ্ত জ্ঞানের ব্যবহার করতে হয়, তাই বিভিন্ন পাঠ্য ঘটকের গুরুত্বপূর্ণ সূত্র, বৈশিষ্ট্য ইত্যাদি ‘এটা আমি বুঝতে পেরেছি’ শিরোনামের নিচে ছকে দেওয়া আছে। এটা অবশ্য মনে রাখবে।

অষ্টম শ্রেণী প্রাথমিক শিক্ষার শেষ বছর। এই বছরে ভালোভাবে পড়াশোনা করে, মাধ্যমিক শিক্ষার জন্য আত্মবিশ্বাসের সাথে নবম শ্রেণীতে প্রবেশ করবে। তারজন্য আন্তরিক শুভকামনা!



(কৃষ্ণকুমার পাটিল)

সঞ্চালক

পুণে

তারিখ : ২ এপ্রিল ২০২২

ভারতীয় সৌর তারিখ : ১২ চৈত্র ১৯৪৪

মহারাষ্ট্র রাজ্য পাঠ্যপুস্তক নির্মিতি ও

অভ্যাসক্রম সংশোধন মন্ডল, পুণে

সপ্তম শ্রেণী - গণিত অধ্যয়ন ফলাফল

অধ্যয়নের জন্য নির্দেশিত শিক্ষণ প্রক্রিয়া	অধ্যয়ন ফলাফল
শিক্ষার্থীদের ব্যক্তিগতভাবে / যুগ্মভাবে / দলগতভাবে সুযোগ পদান করে কৃতি করতে উৎসাহিত করা। - সমস্ত গাণিতিক ক্রিয়াসহ মূলদ সংখ্যার উদাহরণ খোঁজ করা ও উক্ত উদাহরণে আকৃতিপ্রবাহ খোঁজ করা। - বর্গসংখ্যা, বর্গমূল, ঘনসংখ্যা, ঘনমূল এদের আকৃতিপ্রবাহ খোঁজ করে পূর্ণ সংখ্যার ঘাতের জন্য নিয়মাবলী খোঁজ করা। - সরল সমীকরণ তৈরি করার জন্য পূরক পরিস্থিতির ব্যবস্থা করা ও সহজ পদ্ধতি অনুসরণ করে তার সমাধান করার জন্য উৎসাহিত করা। - সংখ্যার বিতরণ বৈশিষ্ট্যের উপর নির্ভর করে, দুটি বীজগাণিতিক পদ কিম্বা বহুপদের গুণন ক্রিয়ার অনুভব প্রদান করা ও বিভিন্ন বীজগাণিতিক নিয়মিতার প্রত্যক্ষ উদাহরণের দ্বারা স্বাভাবিকীকরণ করা। - দুটি সংখ্যার উৎপাদকে বিশ্লেষণ করাকে পূর্বজ্ঞান মেনে নিয়ে উপযুক্ত কৃতির সাহায্যে বীজগাণিতিক পদাবলীর উৎপাদকে বিশ্লেষণের পরিচয় করে দেওয়া। - শতকরা উপযোগ অস্ত্রভুক্ত ছাড়, লাভ-হানি, সাধারণ সুদ, চক্রবৃদ্ধি সুদ ইত্যাদি সম্পর্কে ঘটনা প্রদান করা। - বারংবার সাধারণ সুদ বের করে চক্রবৃদ্ধি সুদের সূত্র প্রাপ্ত করা যায়, এরজন্য বিভিন্ন উদাহরণ তৈরি করা। - এমন ঘটনা প্রদান করা যাতে একটি রাশি অপর রাশির উপর নির্ভরশীল। উভয় রাশির মধ্যে একটি বৃদ্ধি করলে অপরটিও বৃদ্ধি পায় অথবা একটি বৃদ্ধি করলে অপরটি হ্রাস পায় এমন ঘটনাগুলি সনাক্ত করতে উৎসাহিত করা। উদাহরণস্বরূপ, বাহনের বেগ বৃদ্ধি করলে একই দূরত্ব অতিক্রম করতে তত কম সময় লাগে। - বিভিন্ন চতুর্ভুজের কোণ এবং বাহু গণনা করা ও তাদের সম্পর্কে আকৃতিপ্রবাহ খোঁজ করা, তাদের সাধারণীকরণ করে নিয়মাবলী খোঁজ করা এবং তারপর উদাহরণ দ্বারা যাচাই করা। - সমান্তরাল চতুর্ভুজের ধর্ম চতুর্ভুজের রচনা করে, কর্ণ ঐকে, বাহু ও কোণ পরিমাণ করে যাচাই করে দেখা ও কারণ মিমাংসা করা।	শিক্ষার্থীরা 08.71.01 আকৃতিপ্রবাহের দ্বারা মূলদ সংখ্যার যোগ, বিয়োগ, গুণ ও ভাগের গাণিতিক ধর্মের স্বাভাবিকীকরণ করে। 08.71.02 দুটি মূলদ সংখ্যার মধ্যস্থ অধিকাধিক মূলদ সংখ্যা খোঁজ করে। 08.71.03 বিভিন্ন পদ্ধতি দ্বারা বর্গ, ঘন, বর্গমূল ও ঘনমূল প্রাপ্ত করে। 08.71.04 পূর্ণসংখ্যা সূচকের বিভিন্ন উদাহরণ সমাধান করে। 08.71.05 চল্লের ব্যবহার করে গাণিতিক ধাঁধা ও দৈনিক জীবনের উদাহরণ সমাধান করে। 08.71.06 বীজগাণিতিক রাশির গুণ করে। উদা. $(2x+5)(3x^2+7)$-এর বিস্তার করে। 08.71.07 দৈনন্দিন জীবনে সমস্যা সমাধানের জন্য বীজগাণিতিক নিয়মিতার ব্যবহার করে। 08.71.08 ছাড় এবং চক্রবৃদ্ধি সুদের উদাহরণে লাভ অথবা হানি নির্ণয় করার জন্য শতকরা ধারণার ব্যবহার করে। 08.71.09 মুদ্রিত মূল্য ও প্রত্যক্ষ ছাড় দেওয়াতে শতকরা ছাড় নির্ণয় করে কিম্বা বিক্রয় মূল্য এবং লাভ দ্বারা শতকরা লাভ নির্ণয় করে। 08.71.10 সরল ভেদ ও ব্যস্ত ভেদের উদাহরণ সমাধান করে। 08.71.11 চতুর্ভুজের উভয় কোণের মাপের সমষ্টির ধর্ম ব্যবহার করে বিভিন্ন উদাহরণ সমাধান করে। 08.71.12 সমান্তরাল চতুর্ভুজের ধর্ম যাচাই করে দেখে ও তাদের মধ্যে সম্পর্কের সাকারণ বিশ্লেষণ করে। 08.71.13 কম্পাস এবং মাপন পাটির সাহায্যে বিভিন্ন চতুর্ভুজের রচনা করে। 08.71.14 আকৃতিপ্রবাহের সাহায্যে আয়লায়ের সূত্রের যাচাই করে দেখে।

• জ্যামিতিক যন্ত্রপাতির সাহায্যে বিভিন্ন চতুর্ভুজ অঙ্কনের প্রাথমিক প্রদান করা। • ছক কাগজের উপর সমলম্ব চতুর্ভুজ এবং বহুভুজাকৃতির অন্য আকৃতি অঙ্কন করা। শিক্ষার্থীরা একক বর্গ গণনা করে তাদের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করতে উৎসাহিত করা। • ত্রিভুজ, আয়ত এবং বর্গ এদের ক্ষেত্রফলের ব্যবহার করে সমলম্ব চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করা। • ঘনক, আয়তঘন এবং চোঙ ন্যায় ত্রিমাত্রিক আকৃতির তল সনাক্ত করা। • ঘনক, আয়তঘন এবং চোঙের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফলের সূত্র আয়ত, বর্গ ও বৃত্তের ক্ষেত্রফলের সূত্রের ব্যবহার করে নির্ণয় করা। • ঘন এককের ব্যবহার করে ঘনক ও আয়তঘনের ঘনফল নির্ণয় করা। • সামগ্রী সংগ্রহ করা, তার পৃথককরণ করা এবং স্তম্ভলেখ তৈরী করা। • প্রদত্ত সামগ্রীর প্রতিনিধি মূল্য নির্ণয় করা অর্থাৎ সামগ্রীর মধ্য নির্ণয় করা। • প্রথমে সর্বসমতার মানদণ্ড নিশ্চয় করে আকৃতি একে-অপরে রেখে সর্বসমতার ধর্ম যাচাই করা।	08.71.15 ছক কাগজের ব্যবহার করে বহুভুজাকৃতি এবং সমলম্ব চতুর্ভুজ এদের অনুমানিক ক্ষেত্রফল নির্ণয় করে এবং সূত্র দ্বারা যাচাই করে। 08.71.16 বহুভুজাকৃতি আকৃতির ক্ষেত্রফল নির্ণয় করে। 08.71.17 আয়তঘন ও চোঙ আকারের বস্তুর পার্শ্বতল ও আয়তন নির্ণয় করে। 08.71.18 স্তম্ভলেখের পঠন করে তার ব্যাখ্যা করে। 08.71.19 দুটি সমান্তরাল সরলরেখার ছেদকের দ্বারা তৈরী কোণের জোড়ার ধর্ম যাচাই করে দেখে। 08.71.20 বা-বা-বা, বা-কো-বা, কো-বা-কো, কর্ণবাহু এই পরীক্ষাগুলির ব্যবহার করে ত্রিভুজের সর্বসমতার বিশ্লেষণ করে। 08.71.21 ছক কাগজের ব্যবহার করে বন্ধ আকৃতির অনুমানিক ক্ষেত্রফল নির্ণয় করে। 08.71.22 দৈনিক কামকাজের ব্যবহৃত পরিসংখ্যান তথ্যের দ্বারা মধ্য নির্ণয় করে। 08.71.23 প্রদত্ত রেখার সমান্তরাল সরলরেখা অঙ্কনের জন্য আবশ্যিক রচনা করে।
--	--

শিক্ষক মহাশয়ের জন্য মার্গদর্শক তথ্য

অষ্টম শ্রেণীর পাঠ্যপুস্তকের ব্যবহার শ্রেণীকক্ষে প্রশ্ন-উত্তর, কৃতি, চর্চা ও শিক্ষার্থীদের সঙ্গে বার্তালাপ এমন বিভিন্ন মাধ্যমে হওয়া উচিত। এর জন্য পাঠ্যপুস্তকটি মনোযোগ সহকারে পঠন করবেন। পঠনের সময় অধ্যাপনের ক্ষেত্রে গুরুত্বপূর্ণ বাক্যগুলি অধোরেখিত করবেন। তথ্য সূত্র বুঝে নেওয়ার জন্য পূর্ব ও আগাম শ্রেণীর পাঠ্যপুস্তক ও অন্যান্য সাহিত্যের অধ্যয়ন করবেন। এর জন্য QR Code-এ দেওয়া তথ্যগুলিও সহায়ক হবে।

পাঠ্যপুস্তকে আমাদের পরিবেশ, ভূগোল, বিজ্ঞান, অর্থশাস্ত্র এই সকল বিষয়ের গণিতের সঙ্গে সমন্বয় করা হয়েছে। এমন অনেক বিষয়ে গণিতের ধারণার ব্যবহার হয়ে থাকে তা শিক্ষক মহাশয় শিক্ষার্থীদের নজরে এনে দিবেন। শিক্ষার্থীদের দ্বারা উপক্রম, প্রকল্প ও প্রাথমিকগুলি পূর্ণ করে নিবেন। প্রতিফলে দৈনিক আচরণে গণিতের ব্যবহার পরিষ্কার হয়ে বিষয় অধ্যয়নের গুরুত্ব শিক্ষার্থীরা বুঝতে পারবে। গাণিতিক ধারণার ব্যাখ্যা সরল ভাষায় করা হয়েছে। অনুশীলনীতে দেওয়া উদাহরণের ন্যায় অধিকাধিক উদাহরণ তৈরি করে শিক্ষার্থীদের হতে সমাধান করে নিবেন ও তারাও যাতে করে নতুন উদাহরণ তৈরি করে তার জন্য তাদের উৎসাহিত করবেন।

শিক্ষার্থীদের জন্য কিছু চ্যালেঞ্জিং প্রশ্ন তারকা চিহ্নিত করে রাখা হয়েছে। ‘অধিক তথ্যের জন্য’ শীর্ষকের নিচে একটি অধিক তথ্য তুলে ধরা হয়েছে। এই তথ্যগুলি আগাম শ্রেণীর অধ্যয়নের জন্য শিক্ষার্থীদের অবশ্যই ব্যবহৃত হবে। গণিত অষ্টম শ্রেণীর এই পাঠ্যপুস্তকটি আপনারা নিশ্চয়ই পছন্দ করবেন এটাই আমাদের আশা।

সূচিপত্র

বিভাগ-1

1. মূলদ ও অমূলদ সংখ্যা	01 থেকে 06
2. সমান্তরাল সরলরেখা ও ছেদক	07 থেকে 13
3. সূচক ও ঘনমূল	14 থেকে 18
4. ত্রিভুজের উচ্চতা ও মধ্যমা.....	19 থেকে 22
5. বিস্তার সূত্র.....	23 থেকে 28
6. বীজগাণিতিক রাশির উৎপাদকে বিশ্লেষণ	29 থেকে 34
7. চল.....	35 থেকে 40
8. চতুর্ভুজ : রচনা ও প্রকার	41 থেকে 50
9. ছাড় ও কমিশন	51 থেকে 58
বিমিশ্রিত প্রশ্নসংগ্রহ 1	59 থেকে 60

বিভাগ-2

10. বহুপদ বিভাজন.....	61 থেকে 66
11. পরিসংখ্যান.....	67 থেকে 74
12. একচলবিশিষ্ট সমীকরণ.....	75 থেকে 80
13. ত্রিভুজের সর্বসমতা	81 থেকে 87
14. চক্রবৃদ্ধি সুদ.....	88 থেকে 93
15. ক্ষেত্রফল.....	94 থেকে 105
16. পৃষ্ঠতল ও আয়তন.....	106 থেকে 113
17. বৃত্ত : জ্যা এবং চাপ	114 থেকে 118
বিমিশ্রিত প্রশ্নসংগ্রহ 2	119 থেকে 120

1

মূলদ ও অমূলদ সংখ্যা



একটু স্মরণ করি।

আমরা স্বাভাবিক সংখ্যা সমূহ, অখন্ড সংখ্যা সমূহ, পূর্ণ সংখ্যা সমূহ এবং মূলদ সংখ্যা সমূহের পরিচয় করেছি।

স্বাভাবিক সংখ্যা সমূহ

 $1, 2, 3, 4, \dots$

অখন্ড সংখ্যা সমূহ

 $0, 1, 2, 3, 4, \dots$

পূর্ণ সংখ্যা সমূহ

 $\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$

মূলদ সংখ্যা সমূহ

 $-\frac{25}{3}, \frac{10}{-7}, -4, 0, 3, 8, \frac{32}{3}, \frac{67}{5}, \text{ ইত্যাদি}$

মূলদ সংখ্যা সমূহ : $\frac{m}{n}$ -এই ধরনের সংখ্যাগুলিকে মূলদ সংখ্যা বলা হয়।

এখানে m এবং n পূর্ণ সংখ্যা কিন্তু n শূন্য নয়।

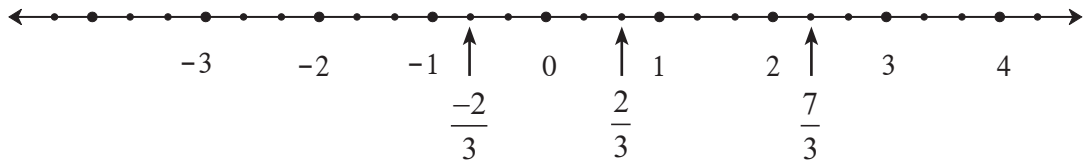
আমরা দেখেছি যে দুটি মূলদ সংখ্যার মধ্যে অসংখ্য মূলদ সংখ্যা থাকে।



এসো জেনে নেই।

সংখ্যারেখায় মূলদ সংখ্যা দেখানো (To show rational number on a number line)

$\frac{7}{3}, 2, \frac{-2}{3}$ -এই সংখ্যাগুলি সংখ্যা রেখায় কিরূপ দেখানো হয় তা দেখি। প্রথমে একটি সংখ্যারেখা আঁকি।



- 2 একটি মূলদ সংখ্যা ও পূর্ণ সংখ্যা। তাহা সংখ্যারেখায় দেখাই।
- $\frac{7}{3} = 7 \times \frac{1}{3}$, অর্থাৎ শূন্যের ডানপাশের প্রতিটি এককের তিন সমান ভাগ করি। শূন্য থেকে সপ্তম বিন্দু $\frac{7}{3}$ -এই সংখ্যা দেখায়। অথবা $\frac{7}{3} = 2 + \frac{1}{3}$, অর্থাৎ 2 সংখ্যার পরবর্তী $\frac{1}{3}$ একক অন্তরে বিন্দু $\frac{7}{3}$ - এই সংখ্যা দেখাবে।

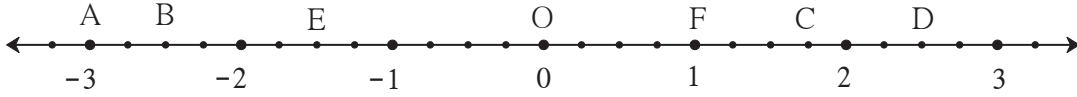
- সংখ্যারেখায় $\frac{-2}{3}$ -এই সংখ্যা দেখানোর জন্য, প্রথমে $\frac{2}{3}$ -এই সংখ্যাটি দেখিয়ে 0 -এর বামপাশে ততোটা অন্তরে $\frac{-2}{3}$ -এই সংখ্যাটি দেখানো যাবে।

অনুশীলনী 1.1

1. সংখ্যারেখায় দেওয়া মূলদ সংখ্যা দেখাও। প্রত্যেক উদাহরনের জন্য ভিন্ন ভিন্ন সংখ্যারেখা আঁকো।

(1) $\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, -\frac{3}{2}$ (2) $\frac{7}{5}, \frac{-2}{5}, \frac{-4}{5}$ (3) $\frac{-5}{8}, \frac{11}{8}$ (4) $\frac{13}{10}, \frac{-17}{10}$

2. প্রদত্ত সংখ্যারেখা দেখে নিচে দেওয়া প্রশ্নের উত্তর লেখো।



- (1) B বিন্দুটি কোন মূলদ সংখ্যা উপস্থাপন করে?
 (2) $1\frac{3}{4}$ এই সংখ্যা কোন বিন্দু দ্বারা দেখানো হয়েছে?
 (3) 'D এই বিন্দু দ্বারা $\frac{5}{2}$ -এই মূলদ সংখ্যাটি দেখানো হয়েছে'। এই বিধানটি সত্য কি মিথ্যা তাহা লেখো।



মূলদ সংখ্যার তুলনা (ছোট বড়) (Comparison of rational numbers)

আমরা জানি যে সংখ্যারেখায় সংখ্যার প্রতিটি জোড়ায়, বাম দিকের সংখ্যা ডান দিকের সংখ্যা থেকে ছোটো হয়ে থাকে। তেমনি, মূলদ সংখ্যার লব এবং হর এদের একই শূন্যন্তর সংখ্যা দিয়ে গুণ করলে সংখ্যা সমান থাকে অথবা তার মূল্য বদল হয় না, অর্থাৎ $\frac{a}{b} = \frac{ka}{kb}$, ($k \neq 0$).

উদা. (1) $\frac{5}{4}$ ও $\frac{2}{3}$ এদের বড়-ছোটোত্ব নির্ণয় করো। $<$, $=$, $>$ -এদের থেকে সঠিক চিহ্ন ব্যবহার করে লেখো।

সমাধান : $\frac{5}{4} = \frac{5 \times 3}{4 \times 3} = \frac{15}{12}$ $\frac{2}{3} = \frac{2 \times 4}{3 \times 4} = \frac{8}{12}$
 $\frac{15}{12} > \frac{8}{12}$ $\therefore \frac{5}{4} > \frac{2}{3}$

উদা. (2) $-\frac{7}{9}$ ও $\frac{4}{5}$ -এই মূলদ সংখ্যা দুটির তুলনা করো।

সমাধান : ঋণ সংখ্যা সর্বদা ধন সংখ্যা অপেক্ষা ছোটো হয়ে থাকে।

$$\text{অতএব : } -\frac{7}{9} < \frac{4}{5}.$$

দুইটি ঋণ সংখ্যার তুলনা করার জন্য

a, b দুটি ধন সংখ্যা, যদি $a < b$, হয় তবে $-a > -b$ -এর অনুভব করে নেই।

$$2 < 3 \text{ কিন্তু } -2 > -3$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{5}{4} < \frac{7}{4} \text{ কিন্তু } -\frac{5}{4} > -\frac{7}{4} \end{array} \right\} \text{ এদের সংখ্যারেখায় যাচাই করে দেখো।}$$

উদা. (3) $-\frac{7}{3}$, $-\frac{5}{2}$ -এর তুলনা করো।

সমাধান : প্রথমে $\frac{7}{3}$ এবং $\frac{5}{2}$ -এর তুলনা করি।

$$\frac{7}{3} = \frac{7 \times 2}{3 \times 2} = \frac{14}{6}, \quad \frac{5}{2} = \frac{5 \times 3}{2 \times 3} = \frac{15}{6} \quad \text{এবং} \quad \frac{14}{6} < \frac{15}{6}$$

$$\therefore \frac{7}{3} < \frac{5}{2} \quad \therefore -\frac{7}{3} > -\frac{5}{2}$$

উদা. (4) $\frac{3}{5}$ ও $\frac{6}{10}$ দুটি মূলদ সংখ্যা। তাদের তুলনা করো।

সমাধান : $\frac{3}{5} = \frac{3 \times 2}{5 \times 2} = \frac{6}{10} \quad \therefore \frac{3}{5} = \frac{6}{10}$

মূলদ সংখ্যার তুলনা করার সময় নিম্নলিখিত নিয়মের প্রয়োজন হয়।

$\frac{a}{b}$ ও $\frac{c}{d}$ এই মূলদ সংখ্যায় যদি b এবং d ধনাত্মক হয়, এবং

$$(1) \text{ যদি } a \times d < b \times c \text{ তবে } \frac{a}{b} < \frac{c}{d}$$

$$(2) \text{ যদি } a \times d = b \times c \text{ তবে } \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

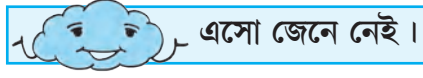
$$(3) \text{ যদি } a \times d > b \times c \text{ তবে } \frac{a}{b} > \frac{c}{d}$$

অনুশীলনী 1.2

1. নিম্নলিখিত সংখ্যার মধ্যে ছোট-বড় নির্ণয় করো।

$$(1) -7, -2 \quad (2) 0, -\frac{9}{5} \quad (3) \frac{8}{7}, 0 \quad (4) -\frac{5}{4}, \frac{1}{4} \quad (5) \frac{40}{29}, \frac{141}{29}$$

$$(6) -\frac{17}{20}, -\frac{13}{20} \quad (7) \frac{15}{12}, \frac{7}{16} \quad (8) -\frac{25}{8}, -\frac{9}{4} \quad (9) \frac{12}{15}, \frac{3}{5} \quad (10) -\frac{7}{11}, -\frac{3}{4}$$



এসো জেনে নেই।

মূলদ সংখ্যার দশমিক রূপ (Decimal representation of rational numbers)

একটি মূলদ সংখ্যার লবকে হর দ্বারা ভাগ দেওয়ার সময় দশমিক ভগ্নাংশের ব্যবহার করলে ওই সংখ্যার দশমিক রূপ প্রাপ্ত হয়। উদাহরণ স্বরূপ $\frac{7}{4} = 1.75$, এখানে 7-কে 4 দিয়ে ভাগ করলে ভাগশেষ শূন্য প্রাপ্ত হয়। ভাগের ক্রিয়া পূর্ণ হলো।

মূলদ সংখ্যার এই ধরনের দশমিক রূপকে খন্ডিত দশমিক রূপ বলে।

আমরা জানি যে প্রতিটি মূলদ সংখ্যা অখন্ডিত আবৃত্তি দশমিক হিসাবে লেখা যেতে পারে।

উদাহরণ স্বরূপ : (1) $\frac{7}{6} = 1.1666... = 1.1\dot{6}$ (2) $\frac{5}{6} = 0.8333... = 0.8\dot{3}$

(3) $\frac{-5}{3} = -1.666... = -1.\dot{6}$

(4) $\frac{22}{7} = 3.142857142857... = 3.\overline{142857}$ (5) $\frac{23}{99} = 0.2323... = 0.\overline{23}$

তেমনি $\frac{7}{4} = 1.75 = 1.75000... = 1.75\dot{0}$ এইভাবে শূন্যের ব্যবহার করে খন্ডিত রূপকে অখন্ডিত আবৃত্তি দশমিক হিসাবে লেখা যায়।

অনুশীলনী 1.3

1. নিম্নলিখিত মূলদ সংখ্যা দশমিক রূপে লেখো।

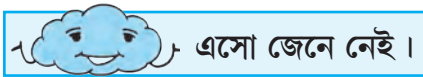
(1) $\frac{9}{37}$

(2) $\frac{18}{42}$

(3) $\frac{9}{14}$

(4) $\frac{-103}{5}$

(5) $-\frac{11}{13}$



এসো জেনে নেই।

অমূলদ সংখ্যা (Irrational numbers)

মূলদ সংখ্যা ব্যতিরিক্ত, আরও অনেক সংখ্যা সংখ্যারেখায় রয়েছে, যা মূলদ সংখ্যা নয়। অর্থাৎ এমন সংখ্যাকে অমূলদ সংখ্যা বলা হয়। $\sqrt{2}$ এমনই একটি অমূলদ সংখ্যা।

$\sqrt{2}$ এই সংখ্যাটি আমরা সংখ্যারেখায় দেখাবো।

- সংখ্যারেখায় A-এই বিন্দু 1-এই সংখ্যা দেখায়। সংখ্যারেখায় বিন্দু A থেকে লম্ব l আঁকো।
রেখা l -এর উপর বিন্দু P এইরূপ নাও যাতে করে $OA = AP = 1$ একক হবে।
- রেখা OP টানো। ΔOAP একটি সমকোণ ত্রিভুজ তৈরী হলো।

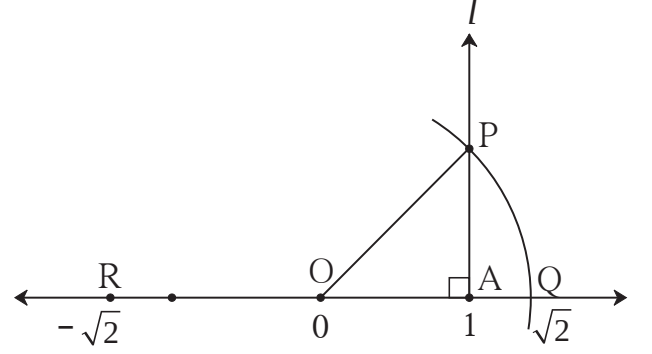
পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে,

$$\begin{aligned} OP^2 &= OA^2 + AP^2 \\ &= 1^2 + 1^2 = 1 + 1 = 2 \end{aligned}$$

$$OP^2 = 2$$

$$\therefore OP = \sqrt{2} \dots (\text{উভয় পক্ষের বর্গমূল নিয়ে।})$$

- এখন O কেন্দ্র এবং OP ব্যাসার্ধ নিয়ে



একটি চাপ আঁকো। ওই চাপ সংখ্যারেখায় যেখানে ছেদ করে সেই বিন্দুকে Q নাম দাও। OQ এর দৈর্ঘ্যও $\sqrt{2}$ । অর্থাৎ $\sqrt{2}$ - এই সংখ্যাটি সংখ্যারেখায় Q - এই বিন্দু দ্বারা দেখানো হয়েছে।

কম্পাসে OQ, দূরত্ব নিয়ে O -এর বামপাশে R এই বিন্দু স্থাপন করলে ওই বিন্দু দ্বারা নির্দেশিত সংখ্যা $-\sqrt{2}$ হবে।

$\sqrt{2}$ -এই সংখ্যা অমূলদ তা আমরা আগাম শ্রেণীতে প্রমাণিত করবো। অমূলদ সংখ্যার দশমিক রূপ অখন্ড এবং অনাবৃত্তি থাকে এটাও আমরা আগাম শ্রেণীতে দেখবো।

মনে রেখো যে-

পূর্ব শ্রেণীতে আমরা শিখেছি যে, π -এই সংখ্যা মূলদ সংখ্যা নয়। অর্থাৎ সংখ্যাটি অমূলদ সংখ্যা। আমরা সাধারণত সুবিধার জন্য π -এর নিকটতম মূল্য $\frac{22}{7}$ অথবা 3.14 নিয়ে থাকি। কিন্তু $\frac{22}{7}$ ও 3.14-এই সংখ্যাগুলি হলো মূলদ সংখ্যা।

যে সংখ্যাগুলি সংখ্যারেখায় বিন্দু দিয়ে দেখানো যায় ওই সংখ্যাগুলিকে বাস্তব সংখ্যা বলে। আমরা দেখেছি যে সমস্ত মূলদ সংখ্যা একটি সংখ্যারেখায় দেখানো যায়। অতএব সকল মূলদ সংখ্যা বাস্তব সংখ্যা হয়ে থাকে। তদ্রূপ অসংখ্য অমূলদ সংখ্যাও বাস্তবিক সংখ্যা হয়। $\sqrt{2}$ -এই সংখ্যাটি অমূলদ সংখ্যা। $3\sqrt{2}$, $7 + \sqrt{2}$, $3 - \sqrt{2}$ প্রভৃতি সমস্ত সংখ্যাগুলি অমূলদ এটা মনে রাখো। কারণ যদি $3\sqrt{2}$ -এই সংখ্যাটি মূলদ সংখ্যা হয় তবে $\frac{3\sqrt{2}}{3}$ এটাও একটি মূলদ সংখ্যা হওয়া উচিত। কিন্তু এটি সত্য নয়।

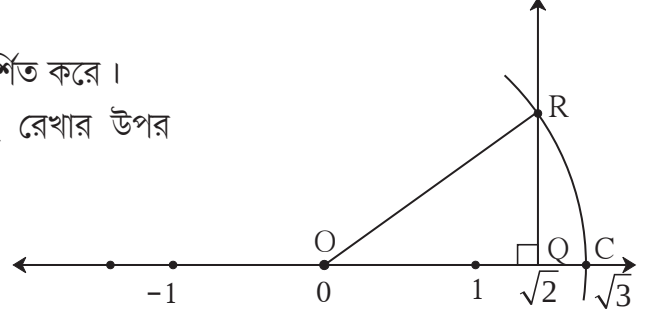
আমরা দেখেছি যে মূলদ সংখ্যা কিভাবে একটি সংখ্যারেখায় দেখাতে হয়। তেমনই $\sqrt{2}$ এই অমূলদ সংখ্যা আমরা সংখ্যারেখায় দেখিয়েছি। তদানুযায়ী $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$... এমন অমূলদ সংখ্যাও আমরা সংখ্যারেখায় দেখাতে পারি।

অনুশীলনী 1.4

- $\sqrt{2}$ এই সংখ্যাটি সংখ্যারেখায় দেখানো হয়েছে। তদানুযায়ী $\sqrt{3}$ -এই সংখ্যাটি সংখ্যারেখায় দেখানোর জন্য নীচের কৃতির ধাপ দেওয়া আছে। ধাপের শূন্যস্থান সঠিক ভাবে পূর্ণ করে কৃতিটি পূর্ণ করো।

কৃতি :

- সংখ্যারেখায় Q এই বিন্দু এই সংখ্যা প্রদর্শিত করে।
- Q বিন্দুতে একটি লম্বরেখা আঁকা হয়েছে। ওই রেখার উপর 1 একক দৈর্ঘ্য নির্দেশিত বিন্দু R আছে।
- OR যুক্ত করতে ΔORQ -একটি সমকোণ ত্রিভুজ প্রাপ্ত হয়।
- $l(OQ) = \sqrt{2}$, $l(QR) = 1$



$\therefore$ পিথাগোরাসের উপপাদ্যনুসারে,

$$[l(OR)]^2 = [l(OQ)]^2 + [l(QR)]^2$$

$$= \boxed{}^2 + \boxed{}^2 = \boxed{} + \boxed{}$$

$$= \boxed{} \quad \therefore l(OR) = \boxed{}$$

OR এর ন্যায় দূরত্ব নিয়ে আঁকা চাপটি সংখ্যারেখায় যেখানে ছেদ করে, ওই বিন্দুকে C নাম দেবো।
C -এই বিন্দু $\sqrt{3}$ -এই সংখ্যাটি প্রদর্শিত করে।

2. সংখ্যারেখায় $\sqrt{5}$ -এই সংখ্যাটি দেখাও।
- 3*. সংখ্যারেখায় $\sqrt{7}$ -এই সংখ্যাটি দেখাও।

৳৳৳

উত্তরমালা

অনুশীলন 1.1

2. (1) $\frac{-10}{4}$ (2) C (3) সত্য

অনুশীলন 1.2

1. (1) $-7 < -2$ (2) $0 > \frac{-9}{5}$ (3) $\frac{8}{7} > 0$ (4) $\frac{-5}{4} < \frac{1}{4}$ (5) $\frac{40}{29} < \frac{141}{29}$
- (6) $\frac{-17}{20} < \frac{-13}{20}$ (7) $\frac{15}{12} > \frac{7}{16}$ (8) $\frac{-25}{8} < \frac{-9}{4}$ (9) $\frac{12}{15} > \frac{3}{5}$ (10) $\frac{-7}{11} > \frac{-3}{4}$

অনুশীলন 1.3

- (1) $0.\overline{243}$ (2) $0.\overline{428571}$ (3) $0.6\overline{428571}$ (4) -20.6 (5) -0.846153

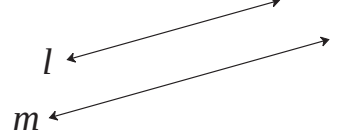


একটু স্মরণ করি।

একই সমতলে অবস্থিত দুইটি রেখা যারা পরস্পর একে-অপরকে ছেদ করে না, এইরকম সরলরেখাকে সমান্তরাল সরলরেখা বলে।

‘রেখা l ও রেখা m দুটি সমান্তরাল সরলরেখা,’

এটাকে ‘রেখা $l \parallel$ রেখা m ’ এইভাবে লেখা হয়।

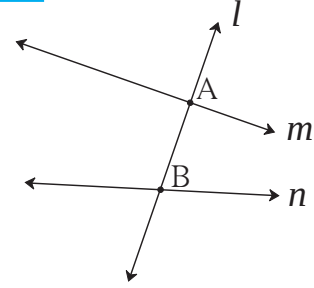


এসো জেনে নেই।

ছেদক (Transversal)

পাশের আকৃতিতে রেখা m ও রেখা n -কে রেখা l ক্রমাগত বিন্দু A ও বিন্দু B -এই দুই ভিন্ন ভিন্ন বিন্দুতে ছেদ করেছে।

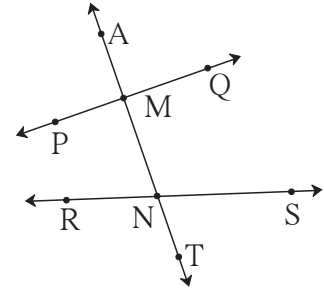
এইজন্য রেখা l হলো, রেখা m ও রেখা n -এর ছেদক।



যে সরলরেখা, দুটি বা তার বেশি সরলরেখাকে আলাদা-আলাদা বিন্দুতে ছেদ করে তাকে ওই রেখাগুলির ছেদক বলে।

ছেদকের দ্বারা তৈরি কোণ (Angles made by a transversal)

পাশের আকৃতিতে ছেদকের কারণে ছেদ বিন্দু M -এর নিকট চারটি এবং ছেদ বিন্দু N -এর নিকট চারটি এইরকম ৪টি কোণ তৈরি হয়েছে, এটা আমরা দেখতে পাচ্ছি। প্রত্যেক কোণের একটি বাহু ছেদকের উপরে আছে ও দ্বিতীয় বাহু অন্য দুটি রেখার মধ্যে যে কোনো একটি রেখার উপরে আছে। এর ব্যবহার করে কোণের জোড়া নির্ধারিত করা হয়েছে। এসো ওই কোণের জোড়াগুলির অধ্যয়ন করি।



• অনুরূপ কোণ (Corresponding angles)

যে কোণের জোড়ায় ছেদকের উপরের বাহু একই দিক নির্দেশ করে ও ছেদকের উপরে না থাকা বাহু ছেদকের একই পাশে অবস্থিত থাকে সেই কোণের জোড়া হলো অনুরূপ কোণ।

• অন্তঃস্থ কোণ (Interior angles)

যে কোণের জোড়া প্রদত্ত দুই রেখার অভ্যন্তরে ও ছেদক রেখার একই পাশে অবস্থিত থাকে সেই কোণের জোড়া হলো অন্তঃস্থ কোণ।

উপরের আকৃতির মধ্যে অনুরূপ কোণের জোড়া -□

- (i) $\angle AMP$ এবং $\angle MNR$
- (ii) $\angle PMN$ এবং $\angle RNT$
- (iii) $\angle AMQ$ এবং $\angle MNS$
- (iv) $\angle QMN$ এবং $\angle SNT$

উপরের আকৃতি অনুসারে অন্তঃস্থ কোণের জোড়া -

- (i) $\angle PMN$ এবং $\angle MNR$
- (ii) $\angle QMN$ এবং $\angle MNS$

• একান্তর কোণ (Alternate angles)

যে কোণের জোড়া ছেদকের বিপরীত পাশে থাকে এবং ছেদকের উপরে অবস্থিত বাহু বিপরীত দিক নির্দেশ করে, সেই কোণের জোড়া হলো একান্তর কোণ।

আকৃতিতে দুই জোড়া অন্তঃস্থ একান্তর কোণ ও দুই জোড়া বহিঃস্থ একান্তর কোণ দেখানো হয়েছে।

অন্তঃস্থ একান্তর কোণ

(রেখার অভ্যন্তর ভাগে অবস্থিত কোণ)

- (i) $\angle PMN$ ও $\angle MNS$
- (ii) $\angle QMN$ ও $\angle RNM$

বহিঃস্থ একান্তর কোণ

(রেখার বাইরের ভাগে অবস্থিত কোণ)

- (i) $\angle AMP$ ও $\angle TNS$
- (ii) $\angle AMQ$ ও $\angle RNT$

অনুশীলনী 2.1

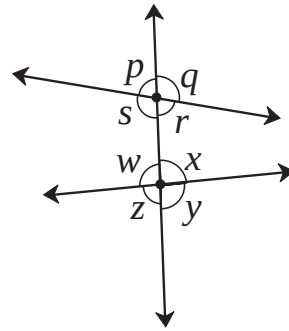
1. সংলগ্ন আকৃতিটি দেখো। আকৃতিতে কোণের নাম এক অক্ষরে দেওয়া হয়েছে। এর সাহায্যে খালি ছক ভরো।

অনুরূপ কোণের জোড়া।

- (1) $\angle p$ ও □
- (2) $\angle q$ ও □
- (3) $\angle r$ ও □
- (4) $\angle s$ ও □

অন্তঃস্থ একান্তর কোণের জোড়া।

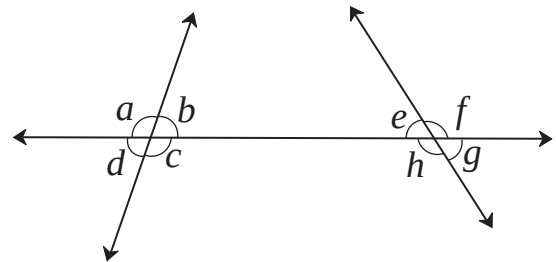
- (5) $\angle s$ ও □
- (6) $\angle w$ ও □

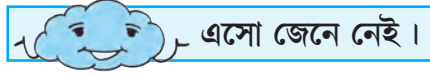


2. পাশের আকৃতিতে প্রদত্ত কোণগুলি দেখো।

নিম্নলিখিত জোড়া নির্দেশ করে এমন কোণগুলির নাম লেখো।

- (1) অন্তঃস্থ একান্তর কোণ
- (2) অনুরূপ কোণ
- (3) অন্তঃস্থ কোণ

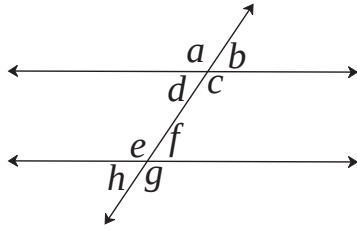




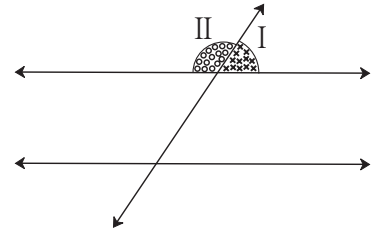
এসো জেনে নেই।

সমান্তরাল রেখা ও ছেদকের দ্বারা তৈরি কোণ ও তাদের ধর্ম (Properties of angles formed by two parallel lines and transversal)

কৃতি (I) : একটি খাতার পৃষ্ঠায় আকৃতি (A), তে দেখানো অনুসারে দুটি সমান্তরাল রেখা এবং তার একটি ছেদক রেখা আঁকো। ট্রেসিং পেপারের সাহায্যে ওই আকৃতির একখানি প্রতিলিপি একটি সাদা কাগজে আঁকো। আকৃতি (B). তে দেখানো অনুসারে ভাগ I ও ভাগ II এইগুলি ভিন্ন-ভিন্ন রঙে রঙ করো। এই দুই ভাগ কাঁচির সাহায্যে কাটো।



(A)



(B)

ভাগ I ও ভাগ II মিলে যে কোণ তৈরি হলো সেটা সন্নিহিত কোণ এটা মনে রেখো। এখন ভাগ I ও ভাগ II, আকৃতি A তে তৈরি যে আটটি কোণ তার প্রতিটি কোণের উপরে রেখে দেখো।

কোন কোণগুলির সাথে ভাগ I হুবহু জুড়ে যায়?

কোন কোণগুলির সাথে ভাগ II হুবহু জুড়ে যায়?

দেখতে পাবে যে, $\angle b \cong \angle d \cong \angle f \cong \angle h$, কারণ এই কোণগুলি ভাগ I-এর সাথে জুড়ে যায়।

$\angle a \cong \angle c \cong \angle e \cong \angle g$, কারণ এই কোণগুলি ভাগ II-এর সাথে জুড়ে যায়।

$$(1) \angle a \cong \angle e, \angle b \cong \angle f, \angle c \cong \angle g, \angle d \cong \angle h$$

(এইগুলি অনুরূপ কোণের জোড়া)

$$(2) \angle d \cong \angle f \text{ এবং } \angle e \cong \angle c \text{ (এইগুলি অন্তঃস্থ একান্তর কোণের জোড়া)}$$

$$(3) \angle a \cong \angle g \text{ এবং } \angle b \cong \angle h \text{ (এইগুলি বহিঃস্থ একান্তর কোণের জোড়া)}$$

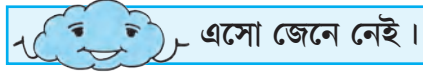
$$(4) m\angle d + m\angle e = 180^\circ \text{ এবং } m\angle c + m\angle f = 180^\circ$$

(এইগুলি হলো অন্তঃস্থ কোণের জোড়া)



এসো চর্চা করি।

দুইটি সমান্তরাল সরল রেখাকে একটি ছেদক রেখা ছেদ করলে মোট আটটি কোণ তৈরি হয়। এই আটটি কোণের মধ্যে যেকোনো একটি কোণের পরিমাপ যদি দেওয়া থাকে, তাহলে বাকি সাতটি কোণের পরিমাপ বের করা যাবে কি?



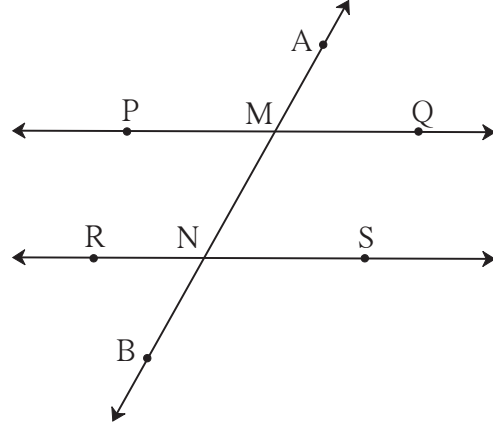
(1) অনুরূপ কোণের ধর্ম (Property of corresponding angles)

সমান্তরাল রেখার ছেদকের কারণে তৈরি হওয়া অনুরূপ কোণের প্রতিটি জোড়া একে-অপরের সাথে সর্বসম হয়। পাশের আকৃতিতে রেখা $PQ \parallel$ রেখা RS .

রেখা AB হলো এর ছেদক।

অনুরূপ কোণ

$$\begin{aligned}\angle AMP &\cong \angle MNR & \angle PMN &\cong \angle RNB \\ \angle AMQ &\cong \angle MNS & \angle QMN &\cong \angle SNB\end{aligned}$$



(2) একান্তর কোণের ধর্ম (Property of alternate angles)

সমান্তরাল রেখার ছেদকের কারণে তৈরি হওয়া একান্তর কোণের প্রতিটি জোড়ার কোণগুলি একে-অপরের সর্বসম হয়।

অন্তঃস্থ একান্তর

বহিঃস্থ একান্তর

কোণ

কোণ

$$\begin{aligned}\angle PMN &\cong \angle MNS & \angle AMP &\cong \angle SNB \\ \angle QMN &\cong \angle MNR & \angle AMQ &\cong \angle RNB\end{aligned}$$

(3) অন্তঃস্থ কোণের ধর্ম (Property of interior angles)

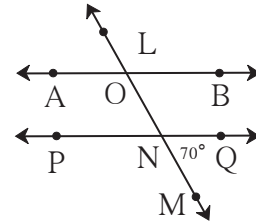
সমান্তরাল রেখার ছেদকের কারণে তৈরি হওয়া অন্তঃস্থ কোণের প্রতিটি জোড়ার কোণের পরিমাপের সমষ্টি 180° হয়।

অন্তঃস্থ কোণ

$$\begin{aligned}m\angle PMN + m\angle MNR &= 180^\circ \\ m\angle QMN + m\angle MNS &= 180^\circ\end{aligned}$$

সমাধান করা উদাহরণ

উদা. (1) পাশের আকৃতিতে রেখা $AB \parallel$ রেখা PQ ও রেখা LM হলো এর ছেদক।
 $m\angle MNQ = 70^\circ$, তাহলে
 $m\angle AON$ এর পরিমাপ বের করো।



সমাধান : পদ্ধতি I

$$\begin{aligned}m\angle MNQ &= m\angle ONP = 70^\circ \dots (\text{বিপ্রতীপ কোণ}) \\ m\angle AON + m\angle ONP &= 180^\circ \dots (\text{অন্তঃস্থ কোণ}) \\ \therefore m\angle AON &= 180^\circ - m\angle ONP \\ &= 180^\circ - 70^\circ \\ &= 110^\circ\end{aligned}$$

পদ্ধতি II

$$\begin{aligned}m\angle MNQ &= 70^\circ \\ \therefore m\angle NOB &= 70^\circ \dots (\text{অনুরূপ কোণ}) \\ m\angle AON + m\angle NOB &= 180^\circ \\ \therefore m\angle AON + 70^\circ &= 180^\circ \\ \therefore m\angle AON &= 110^\circ\end{aligned}$$

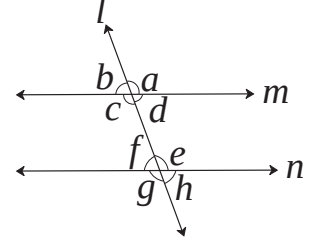
(উপরের প্রশ্নটি ভিন্নভাবে উদ্ভাবন করে সমাধান করা যেতে পারে।)

উদা. (2) পাশের আকৃতিতে রেখা $m \parallel$ রেখা n

রেখা l হলো এদের ছেদক।

যদি $m\angle b = (x + 15)^\circ$ এবং

$m\angle e = (2x + 15)^\circ$ হয় তাহলে x -এর মান বের করো।



সমাধান : $\angle b \cong \angle f \dots$ (অনুরূপ কোণ)

$\therefore m\angle f = m\angle b = (x + 15)^\circ$

$m\angle f + m\angle e = 180^\circ \dots\dots\dots$ (রৈখিক যুগ্ম কোণ)

সমীকরণে মান রেখে,

$$x + 15 + 2x + 15 = 180^\circ \quad \therefore 3x + 30 = 180^\circ$$

$$\therefore 3x = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ \dots\dots\dots \text{(উভয় দিকে 30 বিয়োগ করে)}$$

$$x = \frac{150^\circ}{3} \dots\dots\dots \text{(উভয় দিকে 3 দিয়ে ভাগ করে)}$$

$$\therefore x = 50^\circ$$



আমি এটা বুঝতে পেরেছি

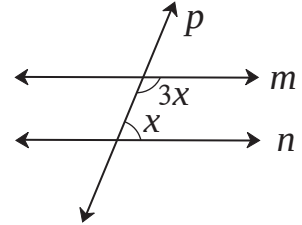
দুটি সমান্তরাল রেখাকে একটি ছেদক রেখা ছেদ করলে তৈরি হওয়া কোণের মধ্যে

- অপূরূপ কোণের জোড়া সর্বসম হয়।
- একান্তর কোণের জোড়া সর্বসম হয়।
- অন্তঃস্থ কোণের প্রতিটি জোড়া একে-অপরের সম্পূরক কোণ হয়।

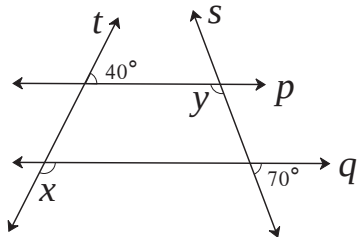
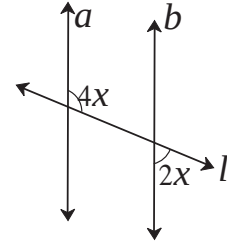
অনুশীলনী 2.2

1. উচিৎ বিকল্প চয়ন করো।

- (1) পাশের আকৃতিতে যদি রেখা $m \parallel$ রেখা n থাকে এবং রেখা P -এদের ছেদক রেখা হয় তাহলে x এর মান কতো হবে?
(A) 135° (B) 90° (C) 45° (D) 40°

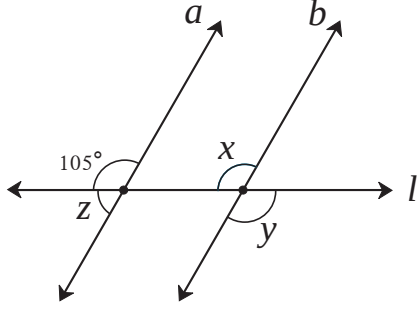
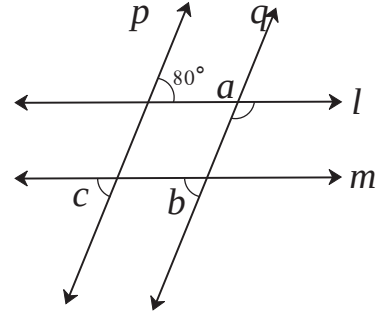


- (2) পাশের আকৃতিতে যদি রেখা $a \parallel$ রেখা b এবং রেখা l তাদের ছেদক রেখা হয় তাহলে x এর মান কতো হবে?
(A) 90° (B) 60° (C) 45° (D) 30°



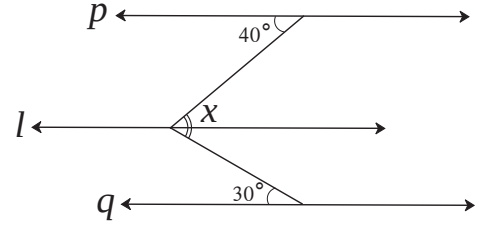
2. সংলগ্ন আকৃতিতে রেখা $p \parallel$ রেখা q . রেখা t ও রেখা s এইগুলি হলো এদের ছেদক রেখা। প্রদত্ত মাপের সাহায্যে $\angle x$ ও $\angle y$ এর পরিমাপ বের করো।

3. সংলগ্ন আকৃতিতে রেখা $p \parallel$ রেখা q এবং রেখা $l \parallel$ রেখা m . প্রদত্ত মাপের সাহায্যে $\angle a$, $\angle b$, $\angle c$, এদের কোণগুলির পরিমাপ বের করো। কারণ লেখো।



- 4*. সংলগ্ন আকৃতিতে, রেখা $a \parallel$ রেখা b । রেখা l হলো এদের ছেদক রেখা। প্রদত্ত কোণের মাপের সাহায্যে $\angle x$, $\angle y$, $\angle z$ -এদের পরিমাপ বের করো।

- 5*. পাশের আকৃতিতে যদি রেখা $p \parallel$ রেখা $l \parallel$ রেখা q হয় তাহলে প্রদত্ত মাপের সাহায্যে $\angle x$ -এর পরিমাপ বের করো।



অধিক তথ্যের জন্য :

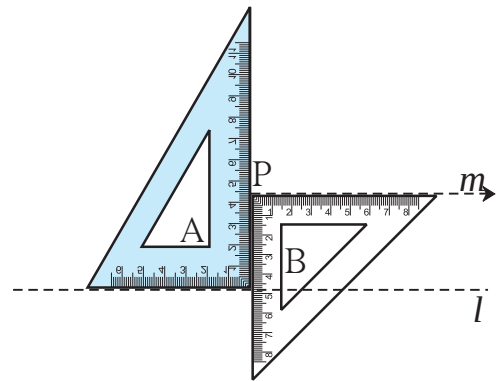
- দুটি একই সমতলে অবস্থিত রেখাকে একটি ছেদক রেখা ভেদ করলে তৈরি হওয়া
- অনুরূপ কোণের এক জোড়া যদি সর্বসম হয় তাহলে ওই রেখাগুলি সমান্তরাল হয়।
- একান্তর কোণের এক জোড়া যদি সর্বসম হয় তাহলে ওই রেখাগুলি সমান্তরাল হয়।
- অন্তঃস্থ কোণের এক জোড়া যদি সর্বসম হয় তাহলে ওই রেখাগুলি সমান্তরাল হয়।

প্রদত্ত রেখার সমান্তরাল রেখা আঁকো (To draw a line parallel to the given line)

রচনা (I) : ত্রিকোণীর সাহায্যে রেখার বাইরের একটি বিন্দু থেকে প্রদত্ত রেখার সমান্তরাল একটি রেখা আঁকো।

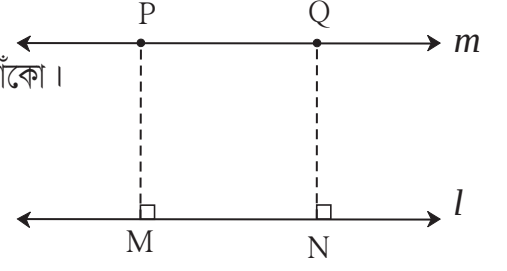
পদ্ধতি I : রচনার সোপান

- (1) রেখা l আঁকো
- (2) রেখা l এর বাইরে একটি বিন্দু p নাও।
- (3) আকৃতিতে দেখানো অনুসারে দুইটি ত্রিকোণী একে অপরের সাথে লাগিয়ে রাখো। ত্রিকোণী A ও B ধরে রাখো। B ত্রিকোণীর ধার P বিন্দুর উপরে স্পর্শ হয়ে আছে, ওই ধার থেকে একটি রেখা আঁকো।
- (4) ওই রেখার নাম m দাও।
- (5) রেখা m রেখা l -এর সমান্তরাল রেখা।



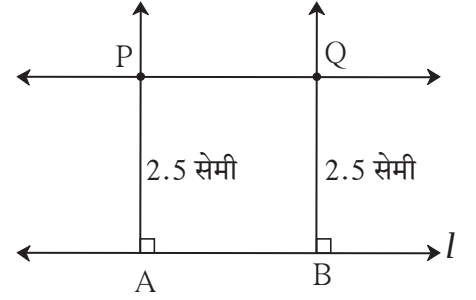
পদ্ধতি II : রচনার সোপান

- (1) রেখা l আঁকো। রেখার বাইরে একটি বিন্দু P নাও।
- (2) বিন্দু P থেকে রেখা l -এর উপরে একটি লম্ব রেখাংশ PM আঁকো।
- (3) রেখা l -এর উপরে একটি ভিন্ন বিন্দু N নাও।
- (4) বিন্দু N থেকে রেখা l -এর উপরে একটি লম্ব রেখাংশ NQ আঁকো। $l(NQ) = l(MP)$ নাও।
- (5) বিন্দু P ও Q থেকে যায় এমন একটি রেখা m আঁকো।
এই রেখাটি, রেখা l -এর সমান্তরাল রেখা।



রচনা (II) : দেওয়া দূরত্ব নিয়ে প্রদত্ত রেখার সমান্তরাল একটি রেখা আঁকো।

পদ্ধতি : রেখা l থেকে 2.5 সেমি দূরত্বে একটি সমান্তরাল রেখা আঁকো।



রচনার সোপান :

- (1) রেখা l আঁকো। (2) রেখা l -এর উপরে বিন্দু A এবং বিন্দু B নাও।
- (3) বিন্দু A ও বিন্দু B থেকে রেখা l এর উপরে লম্ব রেখা আঁকো।
- (4) ওই রেখায়, বিন্দু A এবং বিন্দু B থেকে 2.5 সেমি দূরত্বে বিন্দু P এবং বিন্দু Q নাও।
- (5) রেখা PQ আঁকো। (6) রেখা PQ হলো রেখা l -এর 2.5 সেমি দূরত্বে অবস্থিত সমান্তরাল রেখা।

অনুশীলনী 2.3

1. রেখা l আঁকো। ওই রেখার বাইরে একটি বিন্দু A নাও। A বিন্দু থেকে যায় এবং রেখা l -এর সমান্তরাল রেখা আঁকো।
2. রেখা l আঁকো। ওই রেখার বাইরে একটি বিন্দু T নাও। T বিন্দু থেকে অন্তর্ভুক্ত এবং রেখা l -এর সমান্তরাল রেখা আঁকো।
3. রেখা m এবং ওই রেখার 4 সেমি দূরত্বে একটি সমান্তরাল রেখা n আঁকো।



উত্তরমালা

অনুশীলনী 2.1 1. (1) $\angle w$ (2) $\angle x$ (3) $\angle y$ (4) $\angle z$ (5) $\angle x$ (6) $\angle r$

2. (1) $\angle c$ ও $\angle e$, $\angle b$ ও $\angle h$ (2) $\angle a$ ও $\angle e$, $\angle b$ ও $\angle f$, $\angle c$ ও $\angle g$,
 $\angle d$ ও $\angle h$ (3) $\angle c$ ও $\angle h$, $\angle b$ ও $\angle e$.

অনুশীলনী 2.2 1. (1) C (2) D 2. $\angle x = 140^\circ$, $\angle y = 110^\circ$

3. $\angle a = 100^\circ$, $\angle b = 80^\circ$, $\angle c = 80^\circ$ 4. $\angle x = 105^\circ$, $\angle y = 105^\circ$, $\angle z = 75^\circ$

5. $\angle x = 70^\circ$



একটু স্মরণ করি।

পূর্ব শ্রেণীতে আমরা সূচক এবং তার নিয়মের অধ্যয়ন করেছি।

- $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$, এই উৎপাদকগুলিকে সংক্ষেপে আমরা 2^5 এইভাবে লিখি। এখানে 2 হলো নিধান এবং 5 হলো সূচক। 2^5 হলো সূচক সংখ্যা।

- সূচকের নিয়ম : m এবং n পূর্ণ সংখ্যা হলে,

$$(i) a^m \times a^n = a^{m+n} \quad (ii) a^m \div a^n = a^{m-n} \quad (iii) (a \times b)^m = a^m \times b^m \quad (iv) a^0 = 1$$

$$(v) a^{-m} = \frac{1}{a^m} \quad (vi) (a^m)^n = a^{mn} \quad (vii) \left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m} \quad (viii) \left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\frac{b}{a}\right)^m$$

- সূচকের নিয়মের ব্যবহার করে প্রদত্ত উদাহরণগুলির ছকে সঠিক সংখ্যাটি লেখো।

$$(i) 3^5 \times 3^2 = 3^{\square} \quad (ii) 3^7 \div 3^9 = 3^{\square} \quad (iii) (3^4)^5 = 3^{\square}$$

$$(iv) 5^{-3} = \frac{1}{5^{\square}} \quad (v) 5^0 = \square \quad (vi) 5^1 = \square$$

$$(vii) (5 \times 7)^2 = 5^{\square} \times 7^{\square} \quad (viii) \left(\frac{5}{7}\right)^3 = \frac{\square^3}{\square^3} \quad (ix) \left(\frac{5}{7}\right)^{-3} = \left(\frac{\square}{\square}\right)^3$$



এসো জেনে নেই।

সূচক মূলদ সংখ্যা থাকার অর্থ (Meaning of numbers with rational indices)

(I) সংখ্যার সূচক $\frac{1}{n}$. এইরূপে মূলদ সংখ্যা থাকলে, তার অর্থ।

যদি সংখ্যার সূচক $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \dots, \frac{1}{n}$. এই রূপে মূলদ সংখ্যা হয়, তাহলে ওই সংখ্যার অর্থ দেখবো।

যে কোনো একটি সংখ্যার বর্গ দেখানোর জন্য তার সূচক 2 লিখতে হয় এবং সংখ্যার বর্গমূল দেখানোর জন্য তার সূচক $\frac{1}{2}$ লিখতে হয়।

উদাহরণার্থে, 25-এর বর্গমূল ' $\sqrt{\quad}$ ' এই বর্গমূল চিহ্ন ব্যবহার করে আমরা $\sqrt{25}$ এইভাবে লিখি।

সূচক ব্যবহার করে ওই সংখ্যা $25^{\frac{1}{2}}$ এইভাবে লিখতে হয়। অর্থাৎ $\dots \sqrt{25} = 25^{\frac{1}{2}}$

সাধারণতঃ a এই সংখ্যার বর্গ a^2 এইভাবে লিখতে হয়, তাহলে a -এর বর্গমূল $\sqrt[3]{a}$ - এইভাবে অথবা $\sqrt{a}$ অথবা $a^{\frac{1}{2}}$ এইভাবে লিখতে হয়।

তেমনি a এই সংখ্যার ঘন a^3 এইভাবে লিখতে হয় এবং a -এর ঘনমূল $\sqrt[3]{a}$ এইভাবে অথবা $a^{\frac{1}{3}}$ এইভাবে লিখতে হয়।

যেমন, $4^3 = 4 \times 4 \times 4 = 64$.

$\therefore 64$ -এর ঘনমূল $\sqrt[3]{64}$ অথবা $(64)^{\frac{1}{3}}$ -এমন লেখা হয়। মনে রাখবে যে, $64^{\frac{1}{3}} = 4$

$3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^5 = 243$ । অর্থাৎ 3-এর 5 ম ঘাত 243।

এর বিপরীত 243-এর পঞ্চম মূল $(243)^{\frac{1}{5}}$ এমন লেখা যায় অথবা $\sqrt[5]{243}$ এভাবেও লেখা যায়,

$\therefore (243)^{\frac{1}{5}} = 3$

সাধারণত a -এর n তম মূল $a^{\frac{1}{n}}$ -এমন লেখা হয়।

উদাহরণ্য, (i) $128^{\frac{1}{7}} = 128$ -এর 7 ম মূল, (ii) $900^{\frac{1}{12}} = 900$ -এর 12 তম মূল, ইত্যাদি।

মনে রাখবে যে $10^{\frac{1}{5}} = x$ হলে $x^5 = 10$.

অনুশীলনী 3.1

1. সূচক ব্যবহার করে নিচের সংখ্যা লেখো।

(1) 13-এর পঞ্চম মূল

(2) 9-এর ষষ্ঠ মূল

(3) 256-এর বর্গমূল

(4) 17-এর ঘনমূল

(5) 100-এর অষ্টম মূল

(6) 30-এর সপ্তম মূল

2. নিম্নলিখিত সূচক সংখ্যা কোন সংখ্যার কতো তম মূল তাহা লেখো।

(1) $(81)^{\frac{1}{4}}$

(2) $49^{\frac{1}{2}}$

(3) $(15)^{\frac{1}{5}}$

(4) $(512)^{\frac{1}{9}}$

(5) $100^{\frac{1}{19}}$

(6) $(6)^{\frac{1}{7}}$

(II) সংখ্যার সূচক $\frac{m}{n}$ -এই রূপ বিশেষ মূলদ সংখ্যা হয়, এমন সংখ্যার অর্থ

আমাদের এটা জানা আছে যে $8^2 = 64$,

64 -এর ঘনমূল $= (64)^{\frac{1}{3}} = (8^2)^{\frac{1}{3}} = 4$

$\therefore 8$ -এর বর্গের ঘনমূল $= 4$ (I)

তেমনি, 8 -এর ঘনমূল $= 8^{\frac{1}{3}} = 2$

$\therefore 8$ -এর ঘনমূলের বর্গ $\left(8^{\frac{1}{3}}\right)^2 = 2^2 = 4$ (II)

(I) এবং (II) থেকে

8 -এর বর্গের ঘনমূল $= 8$ -এর ঘনমূলের বর্গ অর্থাৎ $(8^2)^{\frac{1}{3}} = \left(8^{\frac{1}{3}}\right)^2$ এটা বোঝা যায়।

যখন সূচক একটি পূর্ণসংখ্যা হয় তখন সূচকের যে নিয়ম থাকে ওই একই নিয়ম সূচক মূল সংখ্যার জন্য ব্যবহার হয়।

$\therefore (a^m)^n = a^{mn}$, -এই নিয়ম ব্যবহার করে $(8^2)^{\frac{1}{3}} = \left(8^{\frac{1}{3}}\right)^2 = 8^{\frac{2}{3}}$ ।

তদানুসারে $8^{\frac{2}{3}}$ -এই সংখ্যাটির দুই প্রকার অর্থ বিমোচন করা যায়।

(i) $8^{\frac{2}{3}} = (8^2)^{\frac{1}{3}} = 8$ -এর বর্গের ঘনমূল

(ii) $8^{\frac{2}{3}} = \left(8^{\frac{1}{3}}\right)^2 = 8$ -এর ঘনমূলের বর্গ

তেমনি, $27^{\frac{4}{5}} = (27^4)^{\frac{1}{5}}$ অর্থাৎ ‘27 -এর চতুর্থ ঘাতের পঞ্চম মূল’,

এবং $27^{\frac{4}{5}} = \left(27^{\frac{1}{5}}\right)^4$ অর্থাৎ ‘27-এর পঞ্চম মূলের চতুর্থ ঘাত’ এমন দুইটি অর্থ হয়।

সাধারণত $a^{\frac{m}{n}}$ -এই সংখ্যার দুই প্রকারে অর্থ প্রকাশ করা যায়।

$a^{\frac{m}{n}} = (a^m)^{\frac{1}{n}}$ অর্থাৎ a -এর m তম ঘাতের n তম মূল কিস্তি

$a^{\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m$ অর্থাৎ a -এর n তম মূলের m তম ঘাত।

অনুশীলনী 3.2

1. নিম্নলিখিত তালিকা পূর্ণ করো।

ক্র	সংখ্যা	কতো তম মূলের কতো তম ঘাত	কতো তম ঘাতের কতো তম মূল
(1)	$(225)^{\frac{3}{2}}$	225-এর বর্গমূলের ঘন	225-এর ঘনের বর্গমূল
(2)	$(45)^{\frac{4}{5}}$		
(3)	$(81)^{\frac{6}{7}}$		
(4)	$(100)^{\frac{4}{10}}$		
(5)	$(21)^{\frac{3}{7}}$		

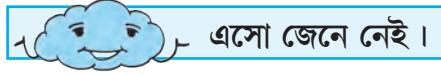
2. মূলদ সূচকের রূপে প্রকাশ করো।

- | | |
|-------------------------------------|-----------------------------|
| (1) 121-এর পঞ্চম সূচকের বর্গমূল | (2) 324 -এর চতুর্থ মূলের ঘন |
| (3) 264 -এর বর্গক্ষেত্রের পঞ্চম মূল | (4) 3 -এর ঘনমূলের ঘন |



একটু স্মরণ করি।

- $4 \times 4 = 16$ অর্থাৎ $4^2 = 16$, তেমনি $(-4) \times (-4)$ অর্থাৎ $(-4)^2 = 16$, এভাবে 16-এই সংখ্যার দুটি বর্গমূল হয়, একটি ধনাত্মক এবং অন্যটি ঋণাত্মক। সংকেতানুসারে 16-এর ধনাত্মক বর্গমূল $\sqrt{16}$, তবে 16-এর ঋণাত্মক বর্গমূল $-\sqrt{16}$ এইরূপ দেখানো হয়। $\sqrt{16} = 4$ এবং $-\sqrt{16} = -4$.
- প্রতিটি ধনাত্মক সংখ্যার দুইটি বর্গমূল থাকে।
- শূন্য এই সংখ্যার বর্গমূল শূন্যই থাকে।



ঘন এবং ঘনমূল (Cube and Cube Root)

একটি সংখ্যাকে তিন বার নিয়ে তার গুণ করলে প্রাপ্ত গুণফল সেই সংখ্যাটির ঘন হয়।
উদাহরণ, $6 \times 6 \times 6 = 6^3 = 216$ । অর্থাৎ 216 -এই সংখ্যা 6 এর ঘন।

মূলদ সংখ্যার ঘন বের করা।

উদা. (1) 17-এর

ঘন বের করো।

$$17^3 = 17 \times 17 \times 17 \\ = 4913$$

উদা.. (2) (-6) -এর

ঘন বের করো।

$$(-6)^3 = (-6) \times (-6) \times (-6) \\ = -216$$

উদা.. (3) $\left(-\frac{2}{5}\right)$ -এর
ঘন বের করো।

$$\left(-\frac{2}{5}\right)^3 = \left(-\frac{2}{5}\right) \times \left(-\frac{2}{5}\right) \times \left(-\frac{2}{5}\right) \\ = -\frac{8}{125}$$

উদা. (4) (1.2) -এর

ঘন বের করো।

$$(1.2)^3 = 1.2 \times 1.2 \times 1.2 \\ = 1.728$$

উদা. (5) (0.02) -এর ঘন বের করো।

$$(0.02)^3 = 0.02 \times 0.02 \times 0.02 \\ = 0.000008$$



উদা. (1) -এর মধ্যে 17 একটি ধনাত্মক সংখ্যা, উক্ত সংখ্যাটির ঘন 4913 এটাও ধনাত্মক সংখ্যা।

উদা. (2) -এর মধ্যে - 6 এর ঘন হলো - 216। আরও কিছু ধনাত্মক এবং ঋণাত্মক সংখ্যা নিয়ে তাদের ঘন বের করো। তার থেকে সংখ্যার চিহ্ন ও ঘনের চিহ্নের সম্পর্ক কি পাওয়া যায় তাহা খোঁজ করো।

উদা. (4) ও (5) -এর মধ্যে প্রদত্ত সংখ্যার দশমিক চিহ্নের পরের অঙ্কের সংখ্যা এবং সেই সংখ্যার ঘনের দশমিক চিহ্নের পরে অঙ্কের সংখ্যার পরস্পর সম্পর্কটা কি ?

ঘনমূল নির্ণয় করো।

আমরা দেখেছি যে কিভাবে মৌলিক উৎপাদক পদ্ধতিতে একটি প্রদত্ত সংখ্যার বর্গমূল বের করা যায়।
একই পদ্ধতিতে আমরা ঘনমূল নির্ণয় করবো।

উদা. (1) 216 -এর ঘনমূল নির্ণয় করো।

সমাধান : প্রথমে 216-এর মৌলিক উৎপাদক বের করি। $216 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3$

3 এবং 2-এই উৎপাদক দুটি 3-3 বার এসেছে। অর্থাৎ তাহা একই বার নিয়ে নিম্নরূপে সমূহ করি।

$$\therefore 216 = (3 \times 2) \times (3 \times 2) \times (3 \times 2) = (3 \times 2)^3 = 6^3$$

$$\therefore \sqrt[3]{216} = 6 \quad \text{অর্থাৎ} \quad (216)^{\frac{1}{3}} = 6$$

উদা. (2) -1331 -এর ঘনমূল নির্ণয় করো।

সমাধান : -1331 -এর ঘনমূল নির্ণয় করার জন্য প্রথমে 1331 -এর মৌলিক উদপাদক নির্ণয় করি।

$$1331 = 11 \times 11 \times 11 = 11^3$$

$$\begin{aligned} -1331 &= (-11) \times (-11) \times (-11) \\ &= (-11)^3 \end{aligned}$$

$$\therefore \sqrt[3]{-1331} = -11$$

উদা. (3) 1728 -এর ঘনমূল নির্ণয় করো।

সমাধান : $1728 = 8 \times 216 = 2 \times 2 \times 2 \times 6 \times 6 \times 6$

$$\therefore 1728 = 2^3 \times 6^3 = (2 \times 6)^3 \dots\dots\dots a^m \times b^m = (a \times b)^m$$

$$\sqrt[3]{1728} = 2 \times 6 = 12 \quad (\text{মনে রাখবে যে, } -1728\text{-এর ঘনমূল } -12 \text{ হয়})$$

উদা. (4) $\sqrt[3]{0.125}$ নির্ণয় করো।

$$\begin{aligned} \text{সমাধান : } \sqrt[3]{0.125} &= \sqrt[3]{\frac{125}{1000}} \\ &= \frac{\sqrt[3]{125}}{\sqrt[3]{1000}} \dots \left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m} \\ &= \frac{\sqrt[3]{5^3}}{\sqrt[3]{10^3}} \\ &= \frac{5}{10} = 0.5 \dots (a^m)^{\frac{1}{m}} = a \end{aligned}$$

অনুশীলনী 3.3

1. নিম্নলিখিত সংখ্যার ঘনমূল নির্ণয় করো।

(1) 8000 (2) 729 (3) 343 (4) -512 (5) -2744 (6) 32768

2. ঘনমূল নির্ণয় করো।

(1) $\sqrt[3]{\frac{27}{125}}$ (2) $\sqrt[3]{\frac{16}{54}}$

3. যদি $\sqrt[3]{729} = 9$ তবে $\sqrt[3]{0.000729} =$ কতো?

৳৳৳

উত্তরমালা

অনুশীলনী 3.1 (1) $13^{\frac{1}{5}}$ (2) $9^{\frac{1}{6}}$ (3) $256^{\frac{1}{2}}$ (4) $17^{\frac{1}{3}}$ (5) $100^{\frac{1}{8}}$ (6) $30^{\frac{1}{7}}$

2. (1) 81 -এর চতুর্থ মূল (2) 49 -এর বর্গমূল (3) 15 -এর পঞ্চম মূল

(4) 512 -এর নবম মূল (5) 100 -এর উনিশতম মূল (6) 6 -এর সপ্তম মূল

অনুশীলনী 3.2 1. 45-এর পঞ্চম মূলের চতুর্থ ঘাত, 45-এর চতুর্থ ঘাতের পঞ্চম মূল

(3) 81-এর সপ্তম মূলের ষষ্ঠ ঘাত, 81-এর ষষ্ঠ ঘাতের সপ্তম মূল

(4) 100-এর দশম মূলের চতুর্থ ঘাত, 100-এর চতুর্থ ঘাতের দশম মূল

(5) 21-এর সপ্তম মূলের তৃতীয় ঘাত, 21-এর তৃতীয় ঘাতের সপ্তম মূল

2. (1) $(121)^{\frac{5}{2}}$ (2) $(324)^{\frac{3}{4}}$ (3) $(264)^{\frac{2}{5}}$ (4) $3^{\frac{3}{2}}$

অনুশীলনী 3.3 1. (1) 20 (2) 9 (3) 7 (4) -8 (5) -14

(6) 32 2. (1) $\frac{3}{5}$ (2) $\frac{2}{3}$ 3. 0.09



একটু স্মরণ করি।

পূর্ববর্তী শ্রেণীতে আমরা ত্রিভূজের কোণের দুভাজক (দ্বিখণ্ডক) সংগামী হয়ে থাকে ও ত্রিভূজের ভূজার লম্বদ্বিখণ্ডক সংগামী হয়ে থাকে তার অধ্যয়ন করেছি।

কৃতি :

একটি রেখা আঁকো। রেখাংশের বাইরে যে কোনো একটি বিন্দু নাও। ত্রিকোণীর সাহায্যে বিন্দু থেকে রেখার উপর একটি লম্ব টানো।



এসো জেনে নেই।

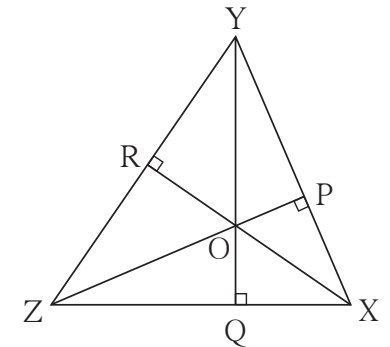
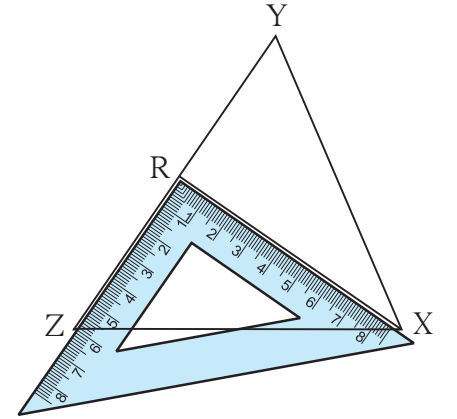
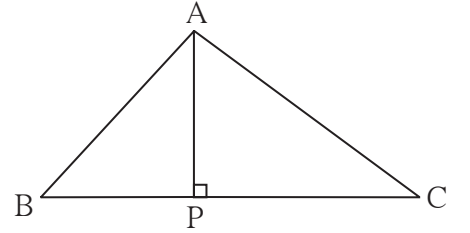
উচ্চতা (Altitude)

ত্রিভূজের শীর্ষবিন্দু থেকে তার বিপরীত ভূজার উপর যে লম্ব রেখাংশ টানা হয়, তাকেই ত্রিভূজের উচ্চতা বলা হয়। ΔABC -তে রেখা AP আধার BC -এর উপর টানা উচ্চতা।

ত্রিভূজের উচ্চতা টানা :

1. ΔXYZ এমন একটি ত্রিভূজ আঁকো।
2. আধার YZ -এর বিপরীত শীর্ষবিন্দু X থেকে ত্রিকোণীর সাহায্যে লম্ব টানো। এটা YZ -এর উপর যেখানে ছেদ করছে ওই বিন্দুর নাম R দাও। রেখাংশ XR আধার YZ -এর উপর টানো
.....
3. রেখাংশ XZ কে আধার মনে করে নাও। বিপরীত শীর্ষবিন্দু Y থেকে রেখাংশ XZ -এর উপর লম্ব টানো। রেখাংশ $YQ \perp$ রেখাংশ XZ
4. রেখাংশ XY কে আধার মনে নাও। বিপরীত শীর্ষবিন্দু Z হতে রেখাংশ XY -এর উপর লম্ব টানো। রেখাংশ $ZP \perp$ রেখাংশ XY । রেখাংশ XR , রেখাংশ YQ , রেখাংশ ZP , এগুলি ΔXYZ -এর উচ্চতা। এটা অবশ্যই মনে রেখো যে-এই তিনটি উচ্চতা সংগামী।

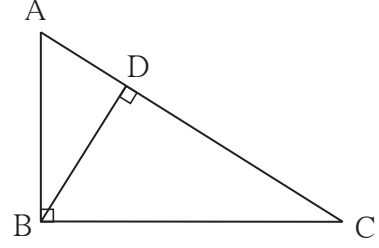
এই সংগামী বিন্দুকে ত্রিভূজের শীর্ষলম্বকেন্দ্র কিংবা লম্বকেন্দ্র বলা হয়। তাকে 'O' অক্ষর দ্বারা দেখানো হয়।



ত্রিভূজের লম্বকেন্দ্র বিন্দুর স্থান :

কৃতি I :

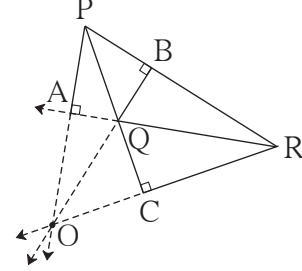
যে কোনো একটি সমকোণ ত্রিভূজ আঁকো। তার সকল উচ্চতাগুলি টানো। তারা কোন বিন্দুতে মিলছে তাহা লেখো।



কৃতি II :

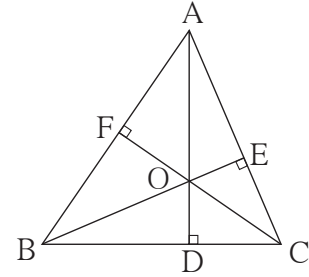
যে কোনো একটি বিশাল কোণ ত্রিভূজ আঁকো। তার তিনটি শীর্ষলম্ব টানো। সেগুলি একে-অপরকে ছেদ করছে কিনা?

এই শীর্ষলম্বদ্বিগের সমাবিষ্ট করবার রেখা আঁকো। সেগুলি ত্রিভূজের বাইরে একটি বিন্দুতে মিলিত হয়। এটা অনুভব করো।



কৃতি III :

লম্বকোণ ত্রিভূজ, ΔABC আঁকো। তার প্রত্যেকটি উচ্চতা টানো। লম্বকেন্দ্রের স্থান কোথায় তাহা দেখো।



আমি এটা বুঝতে পেরেছি।

ত্রিভূজের উচ্চতা একই বিন্দু থেকে যায় অর্থাৎ এই শীর্ষলম্ব সংগামী (concurrent) হয়ে থাকে। তার সংগামী বিন্দুকে লম্ব সংগাম বিন্দু (orthocentre) বলা হয়। তাকে 'O' এই অক্ষর দ্বারা দেখানো হয়।

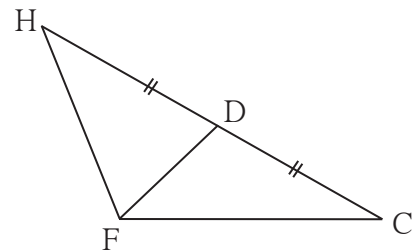
- সমকোণ ত্রিভূজের লম্বকেন্দ্র বিন্দুটি সমকোণ যুক্ত কোণের শীর্ষবিন্দুর উপর হয়ে থাকে।
- বৃহৎকোণ ত্রিভূজের লম্বকেন্দ্র বিন্দুটি সেই ত্রিভূজের বহির্ভাগে হয়ে থাকে।
- লম্বকোণ ত্রিভূজের লম্বকেন্দ্র বিন্দুটি সেই ত্রিভূজের অন্তর্ভাগে হয়ে থাকে।

এসো জেনে নেই।

মধ্যমা (Median)

ত্রিভূজের শীর্ষবিন্দু ও বিপরীত ভূজের মধ্যবিন্দুকে যুক্ত করা রেখাংশকে ত্রিভূজের মধ্যমা বলা হয়।

ΔHCF -তে রেখাংশ FD আধার HC-এর উপর টানা মধ্যমা।



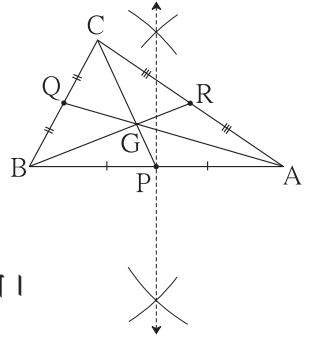
ত্রিভুজের মধ্যমা টানা :

1. ΔABC আঁকো।
2. ভূজা AB -এর মধ্যবিন্দু নির্ণয় করো। তাকে 'P' নাম দাও। রেখাংশ CP টানো।
3. ভূজা BC -এর মধ্যবিন্দু নির্ণয় করো। তাকে 'Q' নাম দাও। রেখাংশ AQ টানো।
4. ভূজা AC -এর মধ্যবিন্দু নির্ণয় করো। তাকে 'R' নাম দাও। রেখাংশ BR টানো।

রেখাংশ PC, রেখাংশ QA, রেখাংশ BR ΔABC -এর মধ্যমা।

মধ্যমাগুলি সংগামী তা' লক্ষ্য করো। তাদের সংগম বিন্দুকে ভরকেন্দ্র বলা হয়।

তাকে G এই অক্ষর দ্বারা দেখানো হয়।



কৃতি IV : একটি সমকোণ ত্রিভুজ, একটি বিশাল কোণ ও একটি লঘুকোণ ত্রিভুজ আঁকো ও তার মধ্যমা টানো। সকল মধ্যমাগুলি সংগামী নয় তা' অনুভব করো।

ত্রিভুজের কেন্দ্র বিন্দুর গুণধর্ম :

- ΔABC এমন যে কোনো একটি ত্রিভুজ আঁকো।
 - ΔABC -এর রেখাংশ AR, রেখাংশ BQ ও রেখাংশ CP নামে মধ্যমা টানো। সংগামী বিন্দুকে 'G' নাম দাও।
- তৈরি আকৃতির মধ্যে রেখাংশের দৈর্ঘ্য মেপে তালিকার রিক্ত ছকে বসানো।

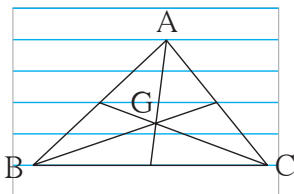
$l(AG) =$	$l(GR) =$	$l(AG):l(GR) =$:
$l(BG) =$	$l(GQ) =$	$l(BG):l(GQ) =$:
$l(CG) =$	$l(GP) =$	$l(CG):l(GP) =$:

এ সকল অনুপাত প্রায়শ 2:1 এটা অনুভব করো।

 আমি এটা বুঝতে পেরেছি।

ত্রিভুজের মধ্যমা সংগামী হয়ে থাকে। তার সংগামী বিন্দুকে ভরকেন্দ্র (Centroid) বলা হয়। তাকে 'G' এই বর্ণ দ্বারা দেখানো হয়। যে কোনো ত্রিভুজে G এর স্থান ত্রিভুজের অন্তর্ভাগে হয়ে থাকে। সংগামী বিন্দুর কারণে প্রত্যেক মাধ্যিকার 2:1 অনুপাতে বিভাজন হয়।

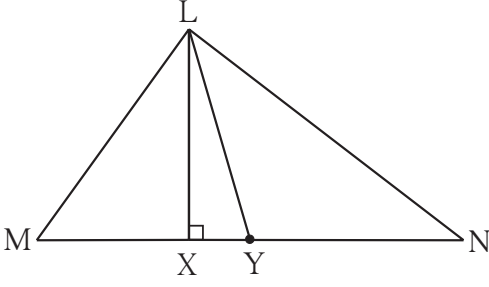
 এসো, চর্চা করি।



একজন শিক্ষার্থী খাতার কাগজের উপর পাঁচটি সমান্তরাল রেখার ব্যবহার করে ΔABC আঁকলো ও G-এই ভরকেন্দ্র খুঁজে বের করলো। তবে তার দ্বারা নির্ধারিত করা G এর স্থান সঠিক আছে তা কেমন করে বুঝবে?

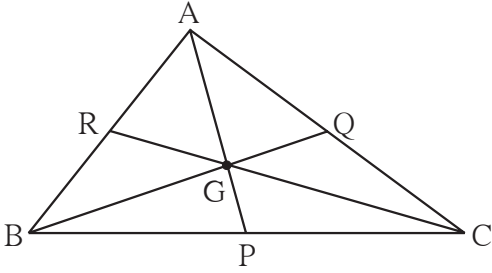
অনুশীলনী 4.1

1.



ΔLMN , এর মধ্যেএটা উচ্চতা ও এটা মধ্যমা। (খালি স্থানে উচিৎ রেখাংশের নাম লেখো।)

2. ΔPQR নামক একটি সুস্পর্শকোণী ত্রিভুজ আঁকো ও তিনটি উচ্চতা টানো। সংগাম বিন্দুকে 'O' নাম দাও।
3. ΔSTV নামক একটি স্থূলকোণী ত্রিভুজ আঁকো ও তার মধ্যমা টেনে তার ভরকেন্দ্র দেখাও।
4. ΔLMN নামক একটি স্থূলকোণী ত্রিভুজ আঁকো। তার সকল উচ্চতা টানো সংগামী বিন্দুকে 'O' দ্বারা দেখাও।
5. ΔXYZ নামক একটি সমকোণী ত্রিভুজ আঁকো। তার সকল মধ্যমা টানো ও সংগামী বিন্দুকে 'G' দ্বারা দেখাও।
6. যে কোনো একটি সমদ্বিভুজ ত্রিভুজ আঁকো। তার সকল মধ্যমা ও শীর্ষলম্ব টানো। তাদের সংগাম বিন্দু বিষয়ে তোমাদের নিরীক্ষণ লেখো।
7. খালি স্থান পূর্ণ করো।



ΔABC -এর বিন্দু 'G' বিন্দুটি ভারকেন্দ্র

- (1) যদি $I(RG) = 2.5$ হয় তাহলে $I(GC) = \dots\dots$
- (2) যদি $I(BG) = 6$ হয় তাহলে $I(BQ) = \dots\dots$
- (3) যদি $I(AP) = 6$ হয় তাহলে $I(AG) = \dots\dots$
এবং $I(GP) = \dots\dots$



এটা করে দেখো।

- (I) : যে কোনো একটি ত্রিভুজ আঁকো। সেই ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র (C), অন্তকেন্দ্র (I), ভরকেন্দ্র বিন্দু (G) ও শীর্ষলম্বকেন্দ্র বিন্দু (O) টানো, নিরীক্ষণ করো।
- (II): যে কোনো একটি সমদ্বিভুজ ত্রিভুজ আঁকো। তার ভরকেন্দ্র বিন্দু, শীর্ষলম্বকেন্দ্র বিন্দু, পরিকেন্দ্র, অন্তকেন্দ্র, সবই একটি রেখার উপর আছে কি না, যাচাই করো।



উত্তরমালা

অনুশীলনী 4.1

1. রেখাংশ LX এবং রেখাংশ LY
7. (1) 5, (2) 9, (3) 4, 2

5 বিস্তার সূত্র



একটু স্মরণ করি।

সপ্তম শ্রেণীতে আমরা অগ্রগামী বিস্তার সূত্রের অধ্যয়ন করেছি।

$$(i) (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \quad (ii) (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2,$$

$$(iii) (a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

উপরের বিস্তার সূত্রের ব্যবহার করে নিচের ছকে সঠিক পদ লেখো।

$$(i) (x + 2y)^2 = x^2 + \boxed{} + 4y^2$$

$$(ii) (2x - 5y)^2 = \boxed{} - 20xy + \boxed{}$$

$$(iii) (101)^2 = (100 + 1)^2 = \boxed{} + \boxed{} + 1^2 = \boxed{}$$

$$(iv) (98)^2 = (100 - 2)^2 = 10000 - \boxed{} + \boxed{} = \boxed{}$$

$$(v) (5m + 3n)(5m - 3n) = \boxed{} - \boxed{} = \boxed{} - \boxed{}$$



এসো জেনে নেই।

কৃতি : আয়ত ও বর্গের ক্ষেত্রফলের সাহায্যে $(x + a)(x + b)$ এর বিস্তার করো।

	x	b
x	x^2	xb
a	ax	ab

$$= x \begin{array}{c} x \\ \boxed{} \\ x \end{array} x + a \begin{array}{c} \boxed{} \\ x \end{array} + \begin{array}{c} \boxed{} \\ b \end{array} x + a \begin{array}{c} \boxed{} \\ b \end{array}$$

$$(x + a)(x + b) = x^2 + ax + bx + ab$$

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$$

(I) $(x + a)(x + b)$ এর বিস্তার Expansion of $(x + a)(x + b)$

$(x + a)$ এবং $(x + b)$ উভয় একপদ সমান থাকা দ্বিপদী। এসো আমরা এই দ্বিপদীর গুণ করি।

$$(x + a)(x + b) = x(x + b) + a(x + b) = x^2 + bx + ax + ab$$

$$= x^2 + (a + b)x + ab$$

$$\therefore \boxed{(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab}$$

বিস্তার করো

উদা. (1) $(x + 2)(x + 3) = x^2 + (2 + 3)x + (2 \times 3) = x^2 + 5x + 6$

উদা. (2) $(y + 4)(y - 3) = y^2 + (4 - 3)y + (4) \times (-3) = y^2 + y - 12$

উদা. (3) $(2a + 3b)(2a - 3b) = (2a)^2 + [(3b) + (-3b)]2a + [3b \times (-3b)]$
 $= 4a^2 + 0 \times 2a - 9b^2 = 4a^2 - 9b^2$

উদা. (4) $\left(m + \frac{3}{2}\right)\left(m + \frac{1}{2}\right) = m^2 + \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\right)m + \frac{3}{2} \times \frac{1}{2} = m^2 + 2m + \frac{3}{4}$

উদা. (5) $(x - 3)(x - 7) = x^2 + (-3 - 7)x + (-3)(-7) = x^2 - 10x + 21$

অনুশীলনী 5.1

1. বিস্তার করো।

(1) $(a + 2)(a - 1)$

(2) $(m - 4)(m + 6)$

(3) $(p + 8)(p - 3)$

(4) $(13 + x)(13 - x)$

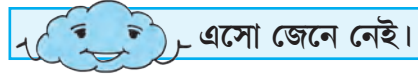
(5) $(3x + 4y)(3x + 5y)$

(6) $(9x - 5t)(9x + 3t)$

(7) $\left(m + \frac{2}{3}\right)\left(m - \frac{7}{3}\right)$

(8) $\left(x + \frac{1}{x}\right)\left(x - \frac{1}{x}\right)$

(9) $\left(\frac{1}{y} + 4\right)\left(\frac{1}{y} - 9\right)$



(II) $(a + b)^3$ এর বিস্তার (Expansion of $(a + b)^3$)

$$\begin{aligned}(a + b)^3 &= (a + b)(a + b)(a + b) = (a + b)(a + b)^2 \\&= (a + b)(a^2 + 2ab + b^2) \\&= a(a^2 + 2ab + b^2) + b(a^2 + 2ab + b^2) \\&= a^3 + 2a^2b + ab^2 + ba^2 + 2ab^2 + b^3 \\&= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3\end{aligned}$$

$$\therefore (a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

এসো এই বিস্তার সূত্রের ব্যবহার করে সমাধান করা কিছু উদাহরণ অধ্যয়ন করি।

উদা. (1) $(x + 3)^3$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \text{ এখানে}$$

$$a = x \text{ ও } b = 3$$

$$\begin{aligned}\therefore (x + 3)^3 &= (x)^3 + 3 \times x^2 \times 3 + 3 \times x \times (3)^2 + (3)^3 \\ &= x^3 + 9x^2 + 27x + 27\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{উদা. (2)} \quad (3x + 4y)^3 &= (3x)^3 + 3(3x)^2(4y) + 3(3x)(4y)^2 + (4y)^3 \\ &= 27x^3 + 3 \times 9x^2 \times 4y + 3 \times 3x \times 16y^2 + 64y^3 \\ &= 27x^3 + 108x^2y + 144xy^2 + 64y^3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{উদা. (3)} \quad \left(\frac{2m}{n} + \frac{n}{2m}\right)^3 &= \left(\frac{2m}{n}\right)^3 + 3\left(\frac{2m}{n}\right)^2\left(\frac{n}{2m}\right) + 3\left(\frac{2m}{n}\right)\left(\frac{n}{2m}\right)^2 + \left(\frac{n}{2m}\right)^3 \\ &= \frac{8m^3}{n^3} + 3\left(\frac{4m^2}{n^2}\right)\left(\frac{n}{2m}\right) + 3\left(\frac{2m}{n}\right)\left(\frac{n^2}{4m^2}\right) + \frac{n^3}{8m^3} \\ &= \frac{8m^3}{n^3} + \frac{6m}{n} + \frac{3n}{2m} + \frac{n^3}{8m^3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{উদা. (4)} \quad (41)^3 &= (40 + 1)^3 = (40)^3 + 3 \times (40)^2 \times 1 + 3 \times 40 \times (1)^2 + (1)^3 \\ &= 64000 + 4800 + 120 + 1 = 68921\end{aligned}$$

অনুশীলনী 5.2

1. বিস্তার করো।

$$\begin{array}{llll}(1) (k + 4)^3 & (2) (7x + 8y)^3 & (3) (7 + m)^3 & (4) (52)^3 \\ (5) (101)^3 & (6) \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 & (7) \left(2m + \frac{1}{5}\right)^3 & (8) \left(\frac{5x}{y} + \frac{y}{5x}\right)^3\end{array}$$

কৃতি : নিজের সুবিধা অনুযায়ী a এবং b বাছ নিয়ে ভিন্ন-ভিন্ন দুটি ঘনক তৈরি করো। দৈর্ঘ্য ও প্রস্থের জন্য a এবং উচ্চতার জন্য b ব্যবহার করে 3টি আয়তঘন তদ্রূপ দৈর্ঘ্য ও প্রস্থের জন্য b এবং উচ্চতার জন্য a ব্যবহার করে আরো 3টি আয়তঘন তৈরি করো। এই ঘনকাকৃতিগুলির উচিৎ রচনা করে $(a + b)$ বাহুযুক্ত একটি ঘনক তৈরি করো।



(III) $(a - b)^3$ এর বিস্তার (Expansion of $(a - b)^3$)

$$\begin{aligned}\therefore (a - b)^3 &= (a - b)(a - b)(a - b) = (a - b)(a - b)^2 \\ &= (a - b)(a^2 - 2ab + b^2) \\ &= a(a^2 - 2ab + b^2) - b(a^2 - 2ab + b^2)\end{aligned}$$

$$= a^3 - 2a^2b + ab^2 - a^2b + 2ab^2 - b^3$$

$$= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$\therefore \boxed{(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3}$$

উদা. (1) বিস্তার করো $(x - 2)^3$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \quad \text{এখানে, } a = x \text{ ও } b = 2 \text{ রেখে,}$$

$$(x - 2)^3 = (x)^3 - 3 \times x^2 \times 2 + 3 \times x \times (2)^2 - (2)^3$$

$$= x^3 - 6x^2 + 12x - 8$$

উদা. (2) $(4p - 5q)^3$ -এর বিস্তার করো।

$$(4p - 5q)^3 = (4p)^3 - 3(4p)^2(5q) + 3(4p)(5q)^2 - (5q)^3$$

$$(4p - 5q)^3 = 64p^3 - 240p^2q + 300pq^2 - 125q^3$$

উদা. (3) বিস্তার সূত্রের ব্যবহার করে 99 এর ঘন নির্ণয় করো।

$$(99)^3 = (100 - 1)^3 = (100)^3 - 3 \times (100)^2 \times 1 + 3 \times 100 \times (1)^2 - 1^3$$

$$= 1000000 - 30000 + 300 - 1 = 9,70,299$$

উদা. (4) সরল করো।

$$(i) (p + q)^3 + (p - q)^3 = p^3 + 3p^2q + 3pq^2 + q^3 + p^3 - 3p^2q + 3pq^2 - q^3$$

$$= 2p^3 + 6pq^2$$

$$(ii) (2x + 3y)^3 - (2x - 3y)^3$$

$$= [(2x)^3 + 3(2x)^2(3y) + 3(2x)(3y)^2 + (3y)^3]$$

$$- [(2x)^3 - 3(2x)^2(3y) + 3(2x)(3y)^2 - (3y)^3]$$

$$= (8x^3 + 36x^2y + 54xy^2 + 27y^3) - (8x^3 - 36x^2y + 54xy^2 - 27y^3)$$

$$= 8x^3 + 36x^2y + 54xy^2 + 27y^3 - 8x^3 + 36x^2y - 54xy^2 + 27y^3$$

$$= 72x^2y + 54y^3$$



আমি এটা বুঝতে পেরেছি।

$$(i) (a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$$

$$(ii) (a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a - b)$$

অনুশীলনী 5.3

1. বিস্তার করো।

$$\begin{array}{llll} (1) (2m - 5)^3 & (2) (4 - p)^3 & (3) (7x - 9y)^3 & (4) (58)^3 \\ (5) (198)^3 & (6) \left(2p - \frac{1}{2p}\right)^3 & (7) \left(1 - \frac{1}{a}\right)^3 & (8) \left(\frac{x}{3} - \frac{3}{x}\right)^3 \end{array}$$

2. সরল করো।

$$\begin{array}{ll} (1) (2a + b)^3 - (2a - b)^3 & (2) (3r - 2k)^3 + (3r + 2k)^3 \\ (3) (4a - 3)^3 - (4a + 3)^3 & (4) (5x - 7y)^3 + (5x + 7y)^3 \end{array}$$

 এসো জেনে নেই।

(IV) $(a + b + c)^2$ এর বিস্তার (Expansion of $(a + b + c)^2$)

$$\begin{aligned} (a + b + c)^2 &= (a + b + c) \times (a + b + c) \\ &= a(a + b + c) + b(a + b + c) + c(a + b + c) \\ &= a^2 + ab + ac + ab + b^2 + bc + ac + bc + c^2 \\ &= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac \end{aligned}$$

$$\therefore (a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac. \quad \text{এই সূত্র পাওয়া যায়।}$$

উদা. (1) বিস্তার করো। $(p + q + 3)^2$

$$\begin{aligned} &= p^2 + q^2 + (3)^2 + 2 \times p \times q + 2 \times q \times 3 + 2 \times p \times 3 \\ &= p^2 + q^2 + 9 + 2pq + 6q + 6p = p^2 + q^2 + 2pq + 6q + 6p + 9 \end{aligned}$$

উদা. (2) বর্গবিস্তারের ধাপগুলির সঠিক পদ খালি ছকে লেখো।

$$\begin{aligned} &(2p + 3m + 4n)^2 \\ &= (2p)^2 + (3m)^2 + \boxed{} + 2 \times 2p \times 3m + 2 \times \boxed{} \times 4n + 2 \times 2p \times \boxed{} \\ &= \boxed{} + 9m^2 + \boxed{} + 12pm + \boxed{} + \boxed{} \end{aligned}$$

উদা. (3) সরল করো। $(l + 2m + n)^2 + (l - 2m + n)^2$

$$\begin{aligned} &= l^2 + 4m^2 + n^2 + 4lm + 4mn + 2ln + l^2 + 4m^2 + n^2 - 4lm - 4mn + 2ln \\ &= 2l^2 + 8m^2 + 2n^2 + 4ln \end{aligned}$$

অনুশীলনী 5.4

1. বিস্তার করো। (1) $(2p + q + 5)^2$ (2) $(m + 2n + 3r)^2$
(3) $(3x + 4y - 5p)^2$ (4) $(7m - 3n - 4k)^2$
2. সরল করো। (1) $(x - 2y + 3)^2 + (x + 2y - 3)^2$
(2) $(3k - 4r - 2m)^2 - (3k + 4r - 2m)^2$ (3) $(7a - 6b + 5c)^2 + (7a + 6b - 5c)^2$

৳৳৳

উত্তরমালা

- অনুশীলনী 5.1** (1) $a^2 + a - 2$ (2) $m^2 + 2m - 24$ (3) $p^2 + 5p - 24$
(4) $169 - x^2$ (5) $9x^2 + 27xy + 20y^2$ (6) $81x^2 - 18xt - 15t^2$
(7) $m^2 - \frac{5}{3}m - \frac{14}{9}$ (6) $x^2 - \frac{1}{x^2}$ (9) $\frac{1}{y^2} - \frac{5}{y} - 36$

- অনুশীলনী 5.2** (1) $k^3 + 12k^2 + 48k + 64$ (2) $343x^3 + 1176x^2y + 1344xy^2 + 512y^3$
(2) $343 + 147m + 21m^2 + m^3$ (4) 140608 (5) 1030301
(6) $x^3 + 3x + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^3}$ (7) $8m^3 + \frac{12m^2}{5} + \frac{6m}{25} + \frac{1}{125}$
(8) $\frac{125x^3}{y^3} + \frac{15x}{y} + \frac{3y}{5x} + \frac{y^3}{125x^3}$

- অনুশীলনী 5.3** 1. (1) $8m^3 - 60m^2 + 150m - 125$ (2) $64 - 48p + 12p^2 - p^3$
(3) $343x^3 - 1323x^2y + 1701xy^2 - 729y^3$ (4) 1,95,112
(5) 77,62,392 (6) $8p^3 - 6p + \frac{3}{2p} - \frac{1}{8p^3}$
(7) $1 - \frac{3}{a} + \frac{3}{a^2} - \frac{1}{a^3}$ (8) $\frac{x^3}{27} - x + \frac{9}{x} - \frac{27}{x^3}$
2. (1) $24a^2b + 2b^3$ (2) $54r^3 + 72rk^2$
(3) $-288a^2 - 54$ (4) $250x^3 + 1470xy^2$

- অনুশীলনী 5.4** 1. (1) $4p^2 + q^2 + 25 + 4pq + 10q + 20p$
(2) $m^2 + 4n^2 + 9r^2 + 4mn + 12nr + 6mr$
(3) $9x^2 + 16y^2 + 25p^2 + 24xy - 40py - 30px$
(4) $49m^2 + 9n^2 + 16k^2 - 42mn + 24nk - 56km$
2. (1) $2x^2 + 8y^2 + 18 - 24y$ (2) $32rm - 48kr$
(3) $98a^2 + 72b^2 + 50c^2 - 120bc$



একটু স্মরণ করি।

পূর্ববর্তী শ্রেণীতে আমরা $ax + ay$ এবং $a^2 - b^2$ এই রূপের বীজগাণিতিক রাশির উৎপাদকে বিশ্লেষণের অধ্যয়ন করেছি।

উদাহরণ স্বরূপে,

$$(1) 4xy + 8xy^2 = 4xy(1 + 2y)$$

$$(2) p^2 - 9q^2 = (p)^2 - (3q)^2 = (p + 3q)(p - 3q)$$



এসো জেনে নেই

বর্গ ত্রিপদের উৎপাদক (Factors of a quadratic trinomial)

$ax^2 + bx + c$ এই বীজগাণিতিক রাশিকে বর্গ ত্রিপদ বলা হয়।

আমরা এটা জানি যে $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$

$\therefore x^2 + (a + b)x + ab$ এর $(x + a)$ এবং $(x + b)$ এই উৎপাদক

$x^2 + 5x + 6$, এই বর্গ ত্রিপদের উৎপাদক বের করার জন্য $x^2 + (a + b)x + ab$

এই ত্রিপদের সাথে তুলনা করে, $a + b = 5$ এবং $ab = 6$. অর্থাৎ 6-এর এমন উৎপাদক করলে তার যোগফল হবে 5 এবং ত্রিপদ $x^2 + (a + b)x + ab$, এই রূপে লিখে তার উৎপাদকে বিশ্লেষণ করি।

$$x^2 + 5x + 6 = x^2 + (3 + 2)x + 3 \times 2 \quad \dots\dots\dots x^2 + (a + b)x + ab$$

$$= \underline{x^2 + 3x} + \underline{2x + 2 \times 3} \quad \dots\dots\dots (3 + 2) \text{ কে } x, \text{ দ্বারা গুণ করি।}$$

প্রাপ্ত চারটি পদের দুটি সমূহ করি এবং উৎপাদকে বিশ্লেষণ করি।

$$= x(x + 3) + 2(x + 3) = (x + 3)(x + 2)$$

প্রদত্ত বর্গত্রিপদের উৎপাদক নির্ণয় করার জন্য নিচের উদাহরণগুলি অধ্যয়ন করো।

উদা. (1) $2x^2 - 9x + 9$ এর উৎপাদক নির্ণয় করো।

সমাধান : বর্গপদের সহগুণক ও ধ্রুবকের গুণক্রিয়া করি, এখানে সেই গুণক্রিয়া $2 \times 9 = 18$ হয়। এখন 18 এর এমন উৎপাদক নির্ণয় করবো যার সমষ্টি মধ্য পদের সহগুণকের সমান হয়, অর্থাৎ -9 হবে।

$$18 = (-6) \times (-3) ; (-6) + (-3) = -9$$

-9x এই পদ $-6x - 3x$ এমন লেখবো

$$2x^2 - 9x + 9$$

$$= \underline{2x^2 - 6x} - \underline{3x + 9}$$

$$= 2x \underline{(x - 3)} - 3 \underline{(x - 3)}$$

$$= (x - 3)(2x - 3)$$

$$\therefore 2x^2 - 9x + 9 = (x - 3)(2x - 3)$$

উদা. (2) $2x^2 + 5x - 18$ এর উৎপাদকে বিশ্লেষণ

সমাধান : $2x^2 + 5x - 18$

$$= \frac{2x^2 + 9x - 4x - 18}{+9 \quad -4}$$

$$= x(2x + 9) - 2(2x + 9)$$

$$= (2x + 9)(x - 2)$$

উদা. (3) $x^2 - 10x + 21$ -এর উৎপাদকে বিশ্লেষণ

সমাধান : $x^2 - 10x + 21$

$$= \frac{x^2 - 7x - 3x + 21}{-7 \quad -3}$$

$$= x(x - 7) - 3(x - 7)$$

$$= (x - 7)(x - 3)$$

উদা. (4) $2y^2 - 4y - 30$ এর উৎপাদকে বিশ্লেষণ

সমাধান : $2y^2 - 4y - 30$

$$= 2(y^2 - 2y - 15) \quad \dots\dots\dots \text{সকল পদ থেকে 2-এই সমাবেশক উৎপাদক বের করে।}$$

$$= 2(\underline{y^2 - 5y} + \underline{3y - 15}) \quad \dots\dots\dots$$

$$= 2[y(y - 5) + 3(y - 5)]$$

$$= 2(y - 5)(y + 3)$$

অনুশীলনী 6.1

1. উৎপাদকে বিশ্লেষণ করো।

(1) $x^2 + 9x + 18$

(2) $x^2 - 10x + 9$

(3) $y^2 + 24y + 144$

(4) $5y^2 + 5y - 10$

(5) $p^2 - 2p - 35$

(6) $p^2 - 7p - 44$

(7) $m^2 - 23m + 120$

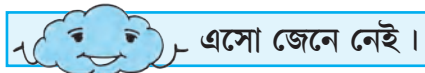
(8) $m^2 - 25m + 100$

(9) $3x^2 + 14x + 15$

(10) $2x^2 + x - 45$

(11) $20x^2 - 26x + 8$

(12) $44x^2 - x - 3$



$a^3 + b^3$ -এর উৎপাদক (Factors of $a^3 + b^3$)

আমরা এটা জানি যে, $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$,

ডান পক্ষের রাশি থেকে $3ab$ সামান্য ধার্য করে উক্ত বিস্তার সূত্রের রচনা নিম্ন প্রকারেও করা যায়।

$$(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$$

এখন, $a^3 + b^3 + 3ab(a + b) = (a + b)^3$ উভয় পক্ষ অদলবদল করে।

$$\therefore a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b) = [(a + b)(a + b)^2] - 3ab(a + b)$$

$$= (a + b)[(a + b)^2 - 3ab] = (a + b)(a^2 + 2ab + b^2 - 3ab)$$

$$= (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$\therefore \boxed{a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)}$$

দুইটি ঘনকের যোগ করে উৎপাদকের প্রদত্ত সূত্র ব্যবহার করে কিছু উদাহরণ সমাধান করি।

$$\begin{aligned}\text{উদা. (1)} \quad x^3 + 27y^3 &= x^3 + (3y)^3 \\ &= (x + 3y) [x^2 - x(3y) + (3y)^2] \\ &= (x + 3y) [x^2 - 3xy + 9y^2]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{উদা. (2)} \quad 8p^3 + 125q^3 &= (2p)^3 + (5q)^3 = (2p + 5q) [(2p)^2 - 2p \times 5q + (5q)^2] \\ &= (2p + 5q) (4p^2 - 10pq + 25q^2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{উদা. (3)} \quad m^3 + \frac{1}{64m^3} &= m^3 + \left(\frac{1}{4m}\right)^3 = \left(m + \frac{1}{4m}\right) \left[m^2 - m \times \frac{1}{4m} + \left(\frac{1}{4m}\right)^2\right] \\ &= \left(m + \frac{1}{4m}\right) \left(m^2 - \frac{1}{4} + \frac{1}{16m^2}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{উদা. (4)} \quad 250p^3 + 432q^3 &= 2(125p^3 + 216q^3) \\ &= 2[(5p)^3 + (6q)^3] = 2(5p + 6q)(25p^2 - 30pq + 36q^2)\end{aligned}$$

অনুশীলনী 6.2

1. উৎপাদকে বিশ্লেষণ করো। (1) $x^3 + 64y^3$ (2) $125p^3 + q^3$ (3) $125k^3 + 27m^3$
 (4) $2l^3 + 432m^3$ (5) $24a^3 + 81b^3$ (6) $y^3 + \frac{1}{8y^3}$
 (7) $a^3 + \frac{8}{a^3}$ (8) $1 + \frac{q^3}{125}$

 এসো জেনে নেই।

$a^3 - b^3$ এর উৎপাদক (Factors of $a^3 - b^3$)

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a - b)$$

$$\text{এখন, } a^3 - b^3 - 3ab(a - b) = (a - b)^3$$

$$\begin{aligned}\therefore a^3 - b^3 &= (a - b)^3 + 3ab(a - b) \\ &= [(a - b)(a - b)^2 + 3ab(a - b)] \\ &= (a - b) [(a - b)^2 + 3ab] \\ &= (a - b) (a^2 - 2ab + b^2 + 3ab) \\ &= (a - b) (a^2 + ab + b^2)\end{aligned}$$

$$\therefore a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

দুইটি ঘনকের বিয়োগের উৎপাদকে বিশ্লেষণ সূত্রের ব্যবহার করে কিছু রাশির উৎপাদকে বিশ্লেষণ করি।

উদা. (1) $x^3 - 8y^3 = x^3 - (2y)^3$

$$\therefore x^3 - 8y^3 = x^3 - (2y)^3 \\ = (x - 2y)(x^2 + 2xy + 4y^2)$$

উদা. (2) $27p^3 - 125q^3 = (3p)^3 - (5q)^3 = (3p - 5q)(9p^2 + 15pq + 25q^2)$

উদা. (3) $54p^3 - 250q^3 = 2[27p^3 - 125q^3] = 2[(3p)^3 - (5q)^3]$
 $= 2(3p - 5q)(9p^2 + 15pq + 25q^2)$

উদা. (4) $a^3 - \frac{1}{a^3} = \left(a - \frac{1}{a}\right) \left(a^2 + 1 + \frac{1}{a^2}\right)$

উদা. (5) সরল রূপ দাও। $(a - b)^3 - (a^3 - b^3)$

সমাধান : $(a - b)^3 - (a^3 - b^3) = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 - a^3 + b^3 = -3a^2b + 3ab^2$

উদা. (6) সরল রূপ দাও। $(2x + 3y)^3 - (2x - 3y)^3$

সমাধান : $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ এই সূত্র অনুযায়ী

$$\therefore (2x + 3y)^3 - (2x - 3y)^3 \\ = [(2x + 3y) - (2x - 3y)][(2x + 3y)^2 + (2x + 3y)(2x - 3y) + (2x - 3y)^2] \\ = [2x + 3y - 2x + 3y][4x^2 + 12xy + 9y^2 + 4x^2 - 9y^2 + 4x^2 - 12xy + 9y^2] \\ = 6y(12x^2 + 9y^2) = 72x^2y + 54y^3$$



আমি এটা বুঝতে পেরেছি।

(i) $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$ (ii) $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

অনুশীলনী 6.3

1. উৎপাদকে বিশ্লেষণ করো। (1) $y^3 - 27$ (2) $x^3 - 64y^3$ (3) $27m^3 - 216n^3$ (4) $125y^3 - 1$

(5) $8p^3 - \frac{27}{p^3}$ (6) $343a^3 - 512b^3$ (7) $64x^3 - 729y^3$ (8) $16a^3 - \frac{128}{b^3}$

2. সরল রূপ দাও।

(1) $(x + y)^3 - (x - y)^3$ (2) $(3a + 5b)^3 - (3a - 5b)^3$

(3) $(a + b)^3 - a^3 - b^3$ (4) $p^3 - (p + 1)^3$

(5) $(3xy - 2ab)^3 - (3xy + 2ab)^3$



এসো জেনে নেই।

যৌক্তিক বীজগাণিতিক রাশি (Rational algebraic expressions)

যদি A এবং B এই দুইটি বীজগাণিতিক রাশি হয় তবে $\frac{A}{B}$ এই রাশিকে যৌক্তিক বীজগাণিতিক রাশি বলা হয়। যৌক্তিক বীজগাণিতিক রাশিকে সরল রূপ দেওয়ার সময় যোগ, বিয়োগ, গুণ, ভাগ ইত্যাদি ক্রিয়া মূলদ সংখ্যার উপর ক্রিয়া করবার মতই হয়ে থাকে।

বীজ গাণিতিক রাশির ভাগক্রিয়া করার সময় হর অথবা ভাজক শূন্য হতে পারে না তাহা মনে রাখবে।

উদা. (1) সরল রূপ দাও। $\frac{a^2 + 5a + 6}{a^2 - a - 12} \times \frac{a - 4}{a^2 - 4}$

সমাধান : $\frac{a^2 + 5a + 6}{a^2 - a - 12} \times \frac{a - 4}{a^2 - 4}$
 $= \frac{(a + 3)(a + 2)}{(a - 4)(a + 3)} \times \frac{(a - 4)}{(a + 2)(a - 2)}$
 $= \frac{1}{a - 2}$

উদা. (2) $\frac{7x^2 + 18x + 8}{49x^2 - 16} \times \frac{14x - 8}{x + 2}$

সমাধান : $\frac{7x^2 + 18x + 8}{49x^2 - 16} \times \frac{14x - 8}{x + 2}$
 $= \frac{(7x + 4)(x + 2)}{(7x + 4)(7x - 4)} \times \frac{2(7x - 4)}{(x + 2)}$
 $= 2$

উদা. (3) সরল রূপ দাও। $\frac{x^2 - 9y^2}{x^3 - 27y^3}$

সমাধান : $\frac{x^2 - 9y^2}{x^3 - 27y^3} = \frac{(x + 3y)(x - 3y)}{(x - 3y)(x^2 + 3xy + 9y^2)} = \frac{x + 3y}{x^2 + 3xy + 9y^2}$

অনুশীলনী 6.4

1. সরল রূপ দাও।

(1) $\frac{m^2 - n^2}{(m + n)^2} \times \frac{m^2 + mn + n^2}{m^3 - n^3}$

(2) $\frac{a^2 + 10a + 21}{a^2 + 6a - 7} \times \frac{a^2 - 1}{a + 3}$

(3) $\frac{8x^3 - 27y^3}{4x^2 - 9y^2}$

(4) $\frac{x^2 - 5x - 24}{(x + 3)(x + 8)} \times \frac{x^2 - 64}{(x - 8)^2}$

(5) $\frac{3x^2 - x - 2}{x^2 - 7x + 12} \div \frac{3x^2 - 7x - 6}{x^2 - 4}$

(6) $\frac{4x^2 - 11x + 6}{16x^2 - 9}$

(7) $\frac{a^3 - 27}{5a^2 - 16a + 3} \div \frac{a^2 + 3a + 9}{25a^2 - 1}$

(8) $\frac{1 - 2x + x^2}{1 - x^3} \times \frac{1 + x + x^2}{1 + x}$



অনুশীলনী 6.1

1. (1) $(x + 6)(x + 3)$ (2) $(x - 9)(x - 1)$ (3) $(y + 12)(y + 12)$
 (4) $5(y + 2)(y - 1)$ (5) $(p - 7)(p + 5)$ (6) $(p + 4)(p - 11)$
 (7) $(m - 15)(m - 8)$ (8) $(m - 20)(m - 5)$ (9) $(x + 3)(3x + 5)$
 (10) $(x + 5)(2x - 9)$ (11) $2(5x - 4)(2x - 1)$ (12) $(11x - 3)(4x + 1)$

অনুশীলনী 6.2

1. (1) $(x + 4y)(x^2 - 4xy + 16y^2)$ (2) $(5p + q)(25p^2 - 5pq + q^2)$
 (3) $(5k + 3m)(25k^2 - 15km + 9m^2)$ (4) $2(l + 6m)(l^2 - 6lm + 36m^2)$
 (5) $3(2a + 3b)(4a^2 - 6ab + 9b^2)$ (6) $\left(y + \frac{1}{2y}\right)\left(y^2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4y^2}\right)$
 (7) $\left(a + \frac{2}{a}\right)\left(a^2 - 2 + \frac{4}{a^2}\right)$ (8) $\left(1 + \frac{q}{5}\right)\left(1 - \frac{q}{5} + \frac{q^2}{25}\right)$

অনুশীলনী 6.3

1. (1) $(y - 3)(y^2 + 3y + 9)$ (2) $(x - 4y)(x^2 + 4xy + 16y^2)$
 (3) $27(m - 2n)(m^2 + 2mn + 4n^2)$ (4) $(5y - 1)(25y^2 + 5y + 1)$
 (5) $\left(2p - \frac{3}{p}\right)\left(4p^2 + 6 + \frac{9}{p^2}\right)$ (6) $(7a - 8b)(49a^2 + 56ab + 64b^2)$
 (7) $(4x - 9y)(16x^2 + 36xy + 81y^2)$ (8) $16\left(a - \frac{2}{b}\right)\left(a^2 + \frac{2a}{b} + \frac{4}{b^2}\right)$
2. (1) $6x^2y + 2y^3$ (2) $270a^2b + 250b^3$ (3) $3a^2b + 3ab^2$
 (4) $-3p^2 - 3p - 1$ (5) $-108x^2y^2ab - 16a^3b^3$

অনুশীলনী 6.4

1. (1) $\frac{1}{m+n}$ (2) $a + 1$ (3) $\frac{4x^2 + 6xy + 9y^2}{2x + 3y}$
 (4) 1 (5) $\frac{(x-1)(x-2)(x+2)}{(x-3)^2(x-4)}$
 (6) $\frac{x-2}{4x+3}$ (7) $5a + 1$ (8) $\frac{1-x}{1+x}$

7 ভেদ



একটু স্মরণ করি।

যদি এক ডর্জন বইয়ের দাম ₹ 240 হয়, তাহলে 3টি বইয়ের দাম কতো? 9টি বইয়ের দাম কতো? 24টি বইয়ের দাম কতো? 50টি বইয়ের দাম কতো? এই নির্ণয় করার জন্য নিম্নলিখিত সারণী পূর্ণ করো।

বইয়ের সংখ্যা (x)	12	3	9	24	50	1
দাম (টাকা) (y)	240					20

উপরোক্ত সারণীর ভিত্তিতে দেখা যায় যে প্রতিটি জোড়ার বইয়ের সংখ্যা (x) এবং তার দাম (y) $\frac{1}{20}$ অনুপাতে আছে এবং তাহা স্থির। বইয়ের সংখ্যা এবং তার দাম সমানুপাতে আছে। এইরকম উদাহরণে যখন দুটি সংখ্যা থেকে একটি সংখ্যা বৃদ্ধি পায় তখন অপর সংখ্যাটিও অনুরূপ বৃদ্ধি পায়।



এসো জেনে নেই।

সরল ভেদ (Direct variation)

x এবং y সমানুপাতে আছে। এই বিবৃতি x এবং y সরলভেদে আছে অথবা x এবং y এর মধ্যে সরল ভেদ আছে, এমন লেখা যেতে পারে। তেমনি এই বিবৃতি চিহ্নের ব্যবহার করে $x \propto y$ এমন লেখা যেতে পারে। [$\propto$ (অঙ্ক্ষা), ভেদের জন্য ব্যবহার করা একটি গ্রীক অঙ্ক্ষর]

$x \propto y$ কে $x = ky$ এই সমীকরণ রূপে লিখতে হয়, এখানে k স্থিরপদ।

$x = ky$ অথবা $\frac{x}{y} = k$ হলো ভেদের সমীকরণ। k হলো ভেদের অশূন্য ধ্রুবক।

প্রদত্ত বিবৃতিগুলি ভেদের চিহ্ন ব্যবহার করে কিভাবে লেখা হয়েছে, তাহা দেখো।

(i) বৃত্তের ক্ষেত্রফল তার ব্যাসার্ধের বর্গের সঙ্গে সমানুপাতে আছে।

বৃত্তের ক্ষেত্রফল = A, ব্যাসার্ধ = r, এই চল নিয়ে উপরোক্ত বিবৃতি $A \propto r^2$ এইভাবে লেখা যেতে পারে।

(ii) দ্রব্যের চাপ (p) তার দ্রব্যের গভীরতা (d) এর সঙ্গে সরল ভেদ আছে, এই বিবৃতি $p \propto d$ এইভাবে লেখা হয়।

সরলভেদের চিহ্নের গঠনের সর্ব ধারণা বোঝার জন্য প্রদত্ত উদাহরণগুলির অভ্যাস করো।

উদা. (1) x এবং y সরলভেদে আছে, $x = 5$ হলে $y = 30$, তাহলে ভেদের ধ্রুবক নির্ণয় করো এবং ভেদের সমীকরণ লেখো।

সমাধান : x, y এর সরল ভেদে আছে, অর্থাৎ $x \propto y$

$\therefore x = ky$ k হলো ভেদের অশূন্য ধ্রুবক।

যখন $x = 5$ তখন $y = 30$ এটা দেওয়া আছে।

$\therefore 5 = k \times 30 \therefore k = \frac{1}{6}$ (ভেদের ধ্রুবক)

$\therefore$ এই ভিত্তিতে $x = ky$ অর্থাৎ $x = \frac{y}{6}$ অথবা $y = 6x$ এই সমীকরণ পেয়ে থাকি।

উদা. (2) বাদামের দাম তার ওজনের সমানুপাতে আছে। 5 কিগ্রা বাদামের দাম ₹ 450 টাকা হলে, 1 কুইন্টাল বাদামের দাম কতো?

(1 কুইন্টাল = 100 কিগ্রা)

সমাধান : ধরে নাও বাদামের দাম x এবং বাদামের ওজন y

x এবং y সরল ভেদে আছে তাহা দেওয়া রয়েছে। অর্থাৎ $x \propto y$ এইজন্য $x = ky$

কিন্তু $x = 450$ হলে $y = 5$ হয়, এই ভিত্তিতে k বের করবো।

$x = ky \therefore 450 = 5k \therefore k = 90$ (ভেদের ধ্রুবক)

$\therefore$ ভেদের সমীকরণ $x = 90y$.

$\therefore y = 100$ হলে $x = 90 \times 100 = 9000$

$\therefore$ 1 কুইন্টাল বাদামের দাম ₹ 9000 টাকা হবে।

অনুশীলনী 7.1

1. ভেদের চিহ্ন ব্যবহার করে লেখো।

(1) বৃত্তের পরিধি (c) তার ব্যাসার্ধ (r) এর সমানুপাতে আছে।

(2) যানবাহনে ভরা পেট্রোল (l) এবং তার দ্বারা ভ্রমণ করা দূরত্ব (d) সরল ভেদে আছে।

2. আপেলের দাম এবং আপেলের সংখ্যা সরল ভেদে আছে। এই ভিত্তিতে প্রদত্ত সারণী পূর্ণ করো।

আপেলের সংখ্যা (x)	1	4	...	12	...
আপেলের দাম (y)	8	32	56	...	160

3. যদি $m \propto n$ এবং $m = 154$ হলে $n = 7$, তবে $n = 14$ হলে m -এর মান বের করো।

4. n, m এর সরল ভেদে আছে, তাহলে প্রদত্ত সারণী পূর্ণ করো।

m	3	5	6.5	...	1.25
n	12	20	...	28	...

5. y, x এর বর্গমূলের সঙ্গে সরল ভেদে পরিবর্তন হয় এবং যখন $x = 16$ তখন $y = 24$ তা হলে, ভেদের ধ্রুবক বের করো ও ভেদের সমীকরণ লেখো।

6. সোয়াবিনের ফসল কাটার জন্য 4 জন শ্রমিককে ₹ 1000, টাকা পারিশ্রমিক দিতে হয়। যদি পারিশ্রমিকের টাকা এবং শ্রমিকের সংখ্যা সরল ভেদে হয়, তাহলে 17 জন শ্রমিককে কতো টাকা পারিশ্রমিক দিতে হবে ?



একটু স্মরণ করি।

শিক্ষার্থীদের ব্যায়ামের জন্য সারি তৈরি করা হয়েছে। প্রত্যেক সারিতে শিক্ষার্থীদের সংখ্যা এবং সারির সংখ্যা নিম্নরূপে দেওয়া হয়েছে।

সারিতে শিক্ষার্থীদের সংখ্যা	40	10	24	12	8
সারির সংখ্যা	6	24	10	20	30

উপরোক্ত সারণীর উপর ভিত্তি করে দেখা যায় যে, প্রত্যেক জোড়ার সারিতে শিক্ষার্থীদের সংখ্যা এবং মোট সারির সংখ্যার গুণফল 240 ; হয়। অর্থাৎ এই গুণফল স্থির হয়। প্রত্যেক সারির শিক্ষার্থীদের সংখ্যা এবং সারির সংখ্যা ব্যস্ত (বিপরীত) অনুপাতে।

যখন দুটি সংখ্যা থেকে একটির মান বৃদ্ধি পায় অপরটির অনুরূপ মান হ্রাস পায়, তখন উভয় সংখ্যা ব্যস্ত (বিপরীত) অনুপাতে আছে। যেমন-একটি সংখ্যা দ্বিগুণ বৃদ্ধি পেলে অপরটি তার অর্ধেক হয়ে যায়।



এসো জেনে নেই।

ব্যস্ত (বিপরীত) ভেদ (Inverse variation)

সংখ্যা x এবং y ব্যস্ত অনুপাতে আছে। এই বিবৃতি x এবং y ব্যস্ত ভেদে আছে, এমন লিখতে হয়। x এবং y ব্যস্ত ভেদে হলে $x \times y$ স্থিরপদ হয়ে থাকে। তাকে k , ধরে নিয়ে উদাহরণ সমাধান করতে সহজ হয়।

x এবং y ব্যস্ত ভেদে আছে। এইজন্য $x \propto \frac{1}{y}$ এইভাবে লিখতে হয়।

$x \propto \frac{1}{y}$ অর্থাৎ $x = \frac{k}{y}$ অথবা $x \times y = k$; হলো ভেদের সমীকরণ। k হলো ভেদের অশূন্য ধ্রুবক।

সমাধান করা উদাহরণ

উদা. (1) যদি a, b এর সঙ্গে ব্যস্ত ভেদে থাকে তাহলে নিচের সারণী পূর্ণ করো।

a	6	12	15	...
b	20	...	...	4
$a \times b$	120	120	...	...

সমাধান : (i) $a \propto \frac{1}{b}$, অর্থাৎ $a \times b = k$

যখন $a = 6$ তখন $b = 20 \therefore k = 6 \times 20 = 120$ (ভেদের ধ্রুবক)

(ii) $a = 12$ তখন $b = ?$ $a \times b = 120$ $\therefore 12 \times b = 120$ $\therefore b = 10$	(iii) $a = 15$ তখন $b = ?$ $a \times b = 120$ $\therefore 15 \times b = 120$ $\therefore b = 8$	(iv) $b = 4$ তখন $a = ?$ $a \times b = 120$ $\therefore a \times 4 = 120$ $\therefore a = 30$
--	--	--

উদা. (2) $f \propto \frac{1}{d^2}$, $d = 5$ তখন $f = 18$

তাহলে (i) $d = 10$ হলে f এর মান বের করো। (ii) $f = 50$ হলে d বের করো।

সমাধান : $f \propto \frac{1}{d^2} \therefore f \times d^2 = k$, $d = 5$ তখন $f = 18$ এই ভিত্তিতে k বের করো।
 $\therefore 18 \times 5^2 = k \therefore k = 18 \times 25 = 450$ (ভেদের ধ্রুবক)

(i) $d = 10$ তাহলে $f = ?$

$$f \times d^2 = 450$$

$$\therefore f \times 10^2 = 450$$

$$\therefore f \times 100 = 450$$

$$\therefore f = 4.5$$

(ii) $f = 50$, তাহলে $d = ?$

$$f \times d^2 = 450$$

$$\therefore 50 \times d^2 = 450$$

$$\therefore d^2 = 9$$

$$\therefore d = 3 \text{ বা } d = -3$$

অনুশীলনী 7.2

1. প্রদত্ত সারণীতে একটি কার্য সম্পন্ন করতে নিযুক্ত শ্রমিকের সংখ্যা এবং কার্য সম্পন্ন করতে লাগা দিন এদের সম্পর্কে তথ্য দেওয়া আছে। এই সারণী পূর্ণ করো।

শ্রমিকের সংখ্যা	30	20		10	
দিন	6	9	12		36

2. প্রদত্ত উদাহরণের ভেদের ধ্রুবক নির্ণয় করো এবং ভেদের সমীকরণ লেখো।

(1) $p \propto \frac{1}{q}$; $p = 15$ তখন $q = 4$ (2) $z \propto \frac{1}{w}$; যখন $z = 2.5$ তখন $w = 24$

(3) $s \propto \frac{1}{t^2}$; যখন $s = 4$ তখন $t = 5$ (4) $x \propto \frac{1}{\sqrt{y}}$; যখন $x = 15$ তখন $y = 9$

3. আপেলের রাশ থেকে সমস্ত আপেলগুলি বাক্সে ভরতে হবে। প্রতিটি বাক্সে 24 টি করে আপেল ভরলে সমস্ত আপেল ভরতে 27 টি বাক্সের প্রয়োজন হয়। যদি প্রতিটি বাক্সে 36 টি করে আপেল ভরা হয়, তাহলে কয়টি বাক্সের প্রয়োজন হবে?

4. নিচে দেওয়া বিধানগুলি ভেদ চিহ্নের ব্যবহার করে লেখো।
- (1) ধ্বনির তরঙ্গ দৈর্ঘ্য (l) এবং গণসংখ্যা (f) এর সঙ্গে ব্যস্ত ভেদ হয়ে থাকে।
- (2) প্রদীপের আলোর তীব্রতা (I) এবং প্রদীপ ও পর্দার মধ্যের দূরত্ব (d)-এর বর্গের সঙ্গে ব্যস্ত ভেদ হয়ে থাকে।
5. $x \propto \frac{1}{\sqrt{y}}$ এবং $x = 40$ তখন $y = 16$, তাহলে $x = 10$ হলে y কতো?
6. x এবং y রাশি ব্যস্ত ভেদে আছে। $x = 15$ তখন $y = 10$, $x = 20$ হলে $y =$ কতো?



সময়, কার্য, বেগ (Time, Work, Speed)

একটি নির্মাণ কার্য শেষ করতে শ্রমিকের নির্দিষ্ট সংখ্যা এবং তাদের কাজ করতে প্রয়োজনীয় সময়, এই ধরনের উদাহরণ ব্যস্ত ভেদের উদাহরণ হয়ে থাকে। এইভাবে যানবাহনের গতিবেগ এবং তাদের দ্বারা নির্দিষ্ট দূরত্ব ভ্রমণ করতে লাগা সময় এদের সম্পর্কিত কিছু উদাহরণগুলিও ব্যস্ত ভেদের উদাহরণ হয়ে থাকে। এমন উদাহরণগুলিকে সময়-কার্য-বেগ এদের সম্পর্কিত উদাহরণ বলা হয়।

এমন উদাহরণ ভেদ চিহ্নের ব্যবহার করে কিভাবে সমাধান করতে হয়, তাহা দেখবো।

উদা. (1) 15 জন মহিলা 8 দিনে একটি জমির বাদামের ফসল সংগ্রহ করার কাজ শেষ করে।
সেই কাজ 6 দিনে শেষ করতে হলে কয়জন মহিলাকে কাজ করতে হবে?

সমাধান : কাজ শেষ করতে লাগা দিন এবং কাজ করা মহিলার সংখ্যা ব্যস্ত ভেদে আছে।

ধরে নাও, দিনের সংখ্যা d এবং মহিলার সংখ্যা n

$$d \propto \frac{1}{n} \quad \therefore d \times n = k \quad (k \text{ হলো অশূন্য ধ্রুবক})$$

$$\text{যখন } n = 15, \text{ তখন } d = 8 \quad \therefore k = d \times n = 15 \times 8 = 120 \text{ (ভেদের ধ্রুবক)}$$

এখন $d = 8$ হলে n কতো তাহা নির্ণয় করবো।

$$d \times n = k$$

$$\therefore d \times n = 120 \quad \therefore 6 \times n = 120, \quad n = 20$$

$\therefore$ 6 দিনে শেষ করতে 20 জন মহিলাকে কাজ করতে হবে।

উদা. (2) একটি যানবাহনের গতিবেগ 48 কিমী / ঘন্টা হলে কিছু দূরত্ব ভ্রমণ করতে তার 6 ঘন্টা সময় লাগে। যদি গতিবেগ 72 কিমী / ঘন্টা হয়, তাহলে ততটুকু দূরত্ব ভ্রমণ করতে কতো সময়ের প্রয়োজন?

সমাধান : ধরে নাও, যানবাহনের গতিবেগ s এবং লাগা সময় t গতিবেগ এবং সময় ব্যস্ত ভেদে আছে।

$$s \propto \frac{1}{t} \quad \therefore s \times t = k \text{ (k হলো অশূন্য ধ্রুবক)}$$

$$k = s \times t = 48 \times 6 = 288 \quad (\text{ভেদের ধ্রুবক}) \text{ এখন } s = 72 \text{ হলে } t \text{ নির্ণয় করবো।}$$

$$s \times t = 288 \quad \therefore 72 \times t = 288 \quad \therefore t = \frac{288}{72} = 4$$

$\therefore$ গতিবেগ 72 কিমী/ ঘন্টা হলে ততটুকু দূরত্ব ভ্রমণ করতে 4 ঘন্টা সময় প্রয়োজন হবে।

অনুশীলনী 7.3

- নিম্নলিখিত থেকে কোন উদাহরণগুলি ব্যস্ত ভেদের উদাহরণ? বলো।
 - শ্রমিকের সংখ্যা এবং তাদের দ্বারা কার্য শেষ করতে লাগা সময়।
 - জলের ট্যাংক ভর্তি করতে সমান আকারের নলের সংখ্যা এবং জলের ট্যাংক ভর্তি করতে লাগা সময়।
 - যানবাহনে ভরা পেট্রোল এবং তার দাম।
 - বৃত্তের ক্ষেত্রফল এবং ঐ বৃত্তের ব্যাসার্ধ।
- যদি 15 জন শ্রমিকের একটি দেওয়াল তৈরি করতে 48 ঘন্টা সময় লাগে, তাহলে 30 ঘন্টায় সেই কাজ শেষ করতে কয়জন শ্রমিকের প্রয়োজন?
- থলেতে দুধ ভরতে 3 মিনিটে যন্ত্রদ্বারা আধা লিটারের 120 টি থলে ভরা হয়, তাহলে 1800টি থলে ভরতে কতো সময়ের প্রয়োজন হবে?
- একটি কারের গতিবেগ গড়ে 60 কিমী/ঘন্টা হলে, কিছু দূরত্ব ভ্রমণ করতে হলে 8 ঘন্টা সময় লাগে, তাহলে ততটুকু দূরত্ব সাড়েসাত ঘন্টায় ভ্রমণ করতে কারের গতিবেগ গড়ে কতোটুকু বাড়াতে হবে?

৯৯৯

উত্তরমালা

অনুশীলনী 7.1 1. (1) $c \propto r$ (2) $l \propto d$ 2. x অনুক্রমে 7 ও 20, $y = 96$ 3. 308

4. $m = 7$, n অনুক্রমে 26 ও 5 5. $k = 6$, $y = 6\sqrt{x}$ 6. ₹ 4250

অনুশীলনী 7.2 1. শ্রমিকের সংখ্যা যথাক্রমে 15 ও 5, দিন = 18

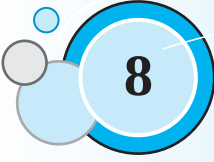
2. (1) $k = 60$, $pq = 60$ (2) $k = 60$, $zw = 60$

(3) $k = 100$, $st^2 = 100$ (4) $k = 45$, $x\sqrt{y} = 45$

3. 18 টি বাস 4. (1) $l \propto \frac{1}{f}$ (2) $I \propto \frac{1}{d^2}$ 5. $y = 256$ 6. $y = 7.5$

অনুশীলনী 7.3 1. ব্যস্ত ভেদ (1), (2) 2. 24 জন শ্রমিক

3. 45 মিনিট 4. 4 কিমী/ঘন্টা



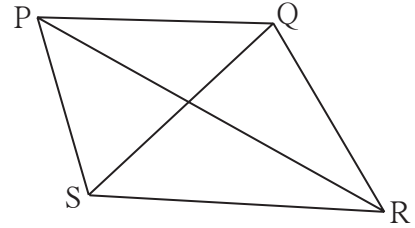
চতুর্ভুজ রচনা ও চতুর্ভুজের প্রকার



একটু স্মরণ করি।

- প্রদত্ত মাপানুসারে ত্রিভুজের রচনা করো।
- (1) $\triangle ABC : l(AB) = 5$ সেমী, $l(BC) = 5.5$ সেমী, $l(AC) = 6$ সেমী,
- (2) $\triangle DEF : m\angle D = 35^\circ$, $m\angle F = 100^\circ$, $l(DF) = 4.8$ সেমী,
- (3) $\triangle MNP : l(MP) = 6.2$ সেমী, $l(NP) = 4.5$ সেমী, $m\angle P = 75^\circ$
- (4) $\triangle XYZ : m\angle Y = 90^\circ$, $l(XY) = 4.2$ সেমী, $l(XZ) = 7$ সেমী,

- যে কোনো চতুর্ভুজের চারটি কোণ, চারটি বাহু এবং দুইটি বিকর্ণ এমন মোট দশটি ঘটক হয়ে থাকে।



এসো জেনে নেই।

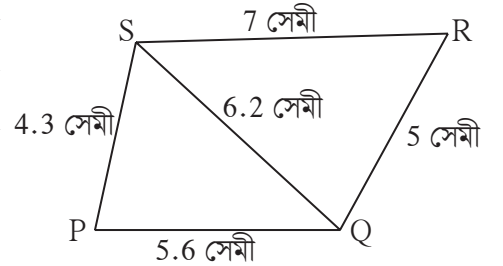
চতুর্ভুজের রচনা (Construction of a quadrilateral)

চতুর্ভুজের দশটি ঘটকের মধ্যে বিশেষ পাঁচটি ঘটকের মাপ জানা থাকলে সেই চতুর্ভুজের রচনা করতে পারা যায়। চতুর্ভুজের রচনা ত্রিভুজের রচনার আধারেই হয়ে থাকে, তাহা নীচে দেওয়া উদাহরণ দ্বারা বুঝে নাও।

(I) চতুর্ভুজের চারটি বাহু এবং একটি বিকর্ণ দেওয়া হলে চতুর্ভুজের রচনা করা।

উদা. $\square PQRS$ এমন আঁকো যার $l(PQ) = 5.6$ সেমী, $l(QR) = 5$ সেমী $l(PS) = 4.3$ সেমী, $l(RS) = 7$ সেমী, $l(QS) = 6.2$ সেমী

সমাধান : প্রথম একটা কাঁচা ছবি আঁকি। ছবিতে চতুর্ভুজের দেওয়া তথ্য দেখিয়ে দেবো। ছবিতে অতি সহজেই দেখা যায় যে, $\triangle SPQ$ -এর এবং $\triangle SRQ$ -এর সকল বাহুর দৈর্ঘ্য আমাদের জানা আছে।

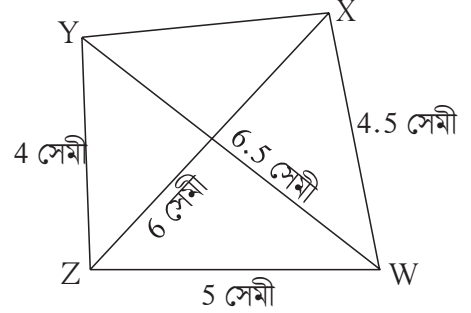


তদানুসারে $\triangle SPQ$ এবং $\triangle SRQ$ আঁকলেই প্রদত্ত মাপানুসারে $\square PQRS$ প্রাপ্ত হবে। এই চতুর্ভুজের রচনা তোমরা নিজেরাই করো।

(II) চতুর্ভুজের তিনটি বাহু এবং দুইটি বিকর্ণ দেওয়া থাকলে চতুর্ভুজের রচনা করা।

উদা. $\square WXYZ$ আঁকো যার, $l(YZ) = 4$ সেমী, $l(ZX) = 6$ সেমী,
 $l(WX) = 4.5$ সেমী, $l(ZW) = 5$ সেমী, $l(YW) = 6.5$ সেমী

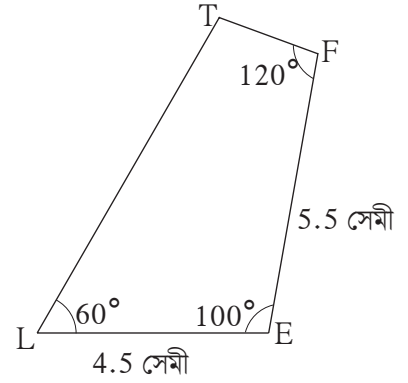
সমাধান : কাঁচা ছবি আঁকি। দেওয়া তথ্য ছবির মধ্যে দেখাই।
 ছবিতে দৃশ্য হচ্ছে যে, $\triangle WXZ$ এবং $\triangle WZY$ -এর
 সকল বাহুর দৈর্ঘ্য আমরা প্রাপ্ত করেছি। তদানুসারে $\triangle$
 WXZ এবং $\triangle WZY$ আঁকি। তারপর রেখাংশ XY
 টানলেই আমরা প্রদত্ত মাপানুসারে $\square WXYZ$ প্রাপ্ত
 করবো। এই চতুর্ভুজের রচনা তোমরা নিজেরাই করো।



(III) চতুর্ভুজের সংলগ্ন দুটি বাহু ও যে কোনো তিনটি কোণ দেওয়া থাকলে চতুর্ভুজের রচনা করা।

উদা. $\square LEFT$ এমন আঁকো যার, $l(EL) = 4.5$ সেমী, $l(EF) = 5.5$ সেমী, $m\angle L = 60^\circ$,
 $m\angle E = 100^\circ$, $m\angle F = 120^\circ$

সমাধান : কাঁচা ছবি ঐক্রে উক্ত ছবিতে দেওয়া তথ্য দেখাই। ছবির দ্বারা বোঝা
 যাবে যে 4.5 সেমী দৈর্ঘ্যের রেখা LE টানলে ও বিন্দু E -এর পাশে
 100° মাপের কোণ তৈরি করবার রেখা EF টানার পর
 চতুর্ভুজের L, E ও F এই তিনটি বিন্দু প্রাপ্ত হবে।
 বিন্দু L -এর উপর 60° মাপের কোণ ও বিন্দু F -এর উপর 120°
 মাপের কোণ তৈরী করবার রশ্মি টানবো। তাদের ছেদক
 বিন্দুটাই বিন্দু T হবে। তোমরা নিজেরাই এই চতুর্ভুজটি রচনা করবে।

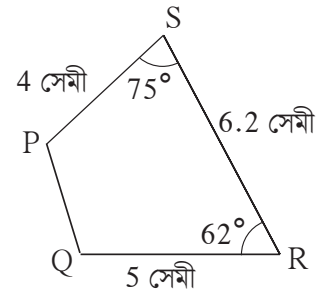


(IV) চতুর্ভুজের তিনটি বাহু ও তাতে অন্তর্ভুক্ত কোণ দেওয়া থাকলে চতুর্ভুজের রচনা করা।

উদা. $\square PQRS$ এমন বানাও, যার $l(QR) = 5$ সেমী, $l(RS) = 6.2$ সেমী $l(SP) = 4$ সেমী,
 $m\angle R = 62^\circ$, $m\angle S = 75^\circ$

সমাধান : চতুর্ভুজের কাঁচা ছবি বানিয়ে তাতে প্রদত্ত তথ্য দেখাই।

তাহাতে বোঝা যাবে যে দেওয়া দৈর্ঘ্যের রেখাংশ QR ঐক্রে
 বিন্দু R -এর উপর 62° মাপের কোণ তৈরি করবার রেখাংশ
 RS টানলে, চতুর্ভুজের Q, R , ও S এই বিন্দুগুলি প্রাপ্ত হবে।
 রেখাংশ RS এর বিন্দু S -এর উপর 75° মাপের কোণ তৈরি



করার রেখাংশ SP টানলে বিন্দু P টি 4 সেমী অন্তরে প্রাপ্ত হবে। রেখাংশ PQ টানলেই প্রদত্ত মাপের $\square$ PQRS প্রাপ্ত হবে। এখন তোমরা এই চতুর্ভূজের রচনা করতে পারবে।

অনুশীলনী 8.1

1. নিচে দেওয়া মাপানুসারে চতুর্ভূজের রচনা করো।

- (1) $\square$ MORE, এ $l(MO) = 5.8$ সেমী, $l(OR) = 4.4$ সেমী, $m\angle M = 58^\circ$, $m\angle O = 105^\circ$, $m\angle R = 90^\circ$.
- (2) $\square$ DEFG এমন আঁকো যার $l(DE) = 4.5$ সেমী, $l(EF) = 6.5$ সেমী, $l(DG) = 5.5$ সেমী, $l(DF) = 7.2$ সেমী, $l(EG) = 7.8$ সেমী।
- (3) $\square$ ABCD, এ $l(AB) = 6.4$ সেমী, $l(BC) = 4.8$ সেমী, $m\angle A = 70^\circ$, $m\angle B = 50^\circ$, $m\angle C = 140^\circ$.
- (4) $\square$ LMNO আঁকো $l(LM) = l(LO) = 6$ সেমী, $l(ON) = l(NM) = 4.5$ সেমী, $l(OM) = 7.5$ সেমী।



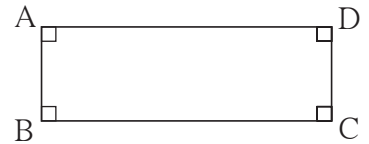
একটু স্মরণ করি।

চতুর্ভূজের বাহু ও কোণের ভিন্ন-ভিন্ন শর্তানুসারে ভিন্ন-ভিন্ন প্রকারের চতুর্ভূজ প্রাপ্ত হয়। সমকোণ চতুর্ভূজ কিংবা আয়তক্ষেত্র ও বর্গ এই প্রকারের চতুর্ভূজের পরিচয় তোমরা পেয়েছো। এই সকল চতুর্ভূজ ও আরোও অন্য প্রকারের কিছু চতুর্ভূজের অধ্যয়ন আমরা কৃতি দ্বারা করবো।

সমকোণ চতুর্ভূজ কিংবা আয়তক্ষেত্র (Rectangle)

যে চতুর্ভূজের চারটি কোণ সমকোণ হয়ে থাকে, সেই চতুর্ভূজকে সমকোণ চতুর্ভূজ কিংবা আয়তক্ষেত্র বলা হয়।

চতুর্ভূজ আঁকার জন্য প্রদত্ত পাঁচটি উপাদানের মধ্যে সংলগ্ন দুইটি বাহু অবশ্যই প্রয়োজন। সংলগ্ন দুটি বাহু এবং তিনটি কোণ জানা থাকলে তোমরা চতুর্ভূজের রচনা করতে পারবে।



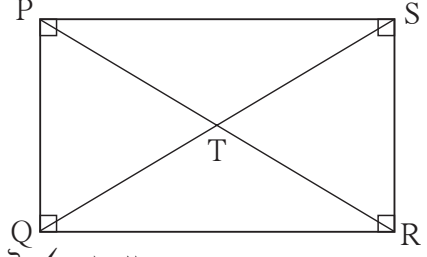
সংজ্ঞানুসারে আয়তক্ষেত্রের সকল কোণ সমকোণ হয়ে থাকে সুতরাং সংলগ্ন দুটি বাহু অবগত হলে তোমরা আয়তক্ষেত্রের রচনা করতে পারবে।

কৃতি I : তোমাদের সুবিধা মতো সংলগ্ন বাহ্যুজ্ঞ একটি আয়তক্ষেত্র PQRS আঁকো।

তার বিকর্ণের ছেদ বিন্দুকে T, নাম দাও।

কাটা কম্পাস ও স্কেল পাটির সাহায্যে।

- (1) বাহু QR ও বাহু PS এই বিপরীত বাহুর দৈর্ঘ্য মাপো।
- (2) বাহু PQ ও বাহু SR-এর দৈর্ঘ্য মাপো।
- (3) বিকর্ণ PR ও বিকর্ণ QS এর দৈর্ঘ্য মাপো।
- (4) বিকর্ণ PR মধ্যে রেখাংশ PT ও রেখাংশ TR এই অংশের দৈর্ঘ্য মাপো।
- (5) রেখাংশ QT ও রেখাংশ TS এই বিকর্ণ QS-এর অংশগুলির দৈর্ঘ্য মাপো।



তোমরা যে মাপ প্রাপ্ত করেছো, তার নিরীক্ষণ করো। শ্রেণীর সকলে নিজ নিজ প্রাপ্ত মাপ একে-অপরকে দেখাও ও চর্চা করো। চর্চার মাধ্যমে নিচে দেওয়া আয়তক্ষেত্রের গুণধর্ম তোমরা লক্ষ্য করতে পারবে।

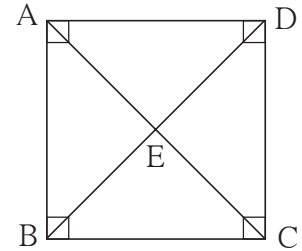
- আয়তক্ষেত্রের বিপরীত বাহু একে-অপরের সমরূপ হয়ে থাকে।
- আয়তক্ষেত্রের বিকর্ণ একরূপ হয়ে থাকে।
- আয়তক্ষেত্রের বিকর্ণ পরস্পরকে দুভাগে বিভাজিত করে।

বর্গ (Square)

যে চতুর্ভুজের সকল বাহুগুলি একরূপ হয়ে থাকে এবং সকল কোণ সমকোণ হয়ে থাকে, সেই চতুর্ভুজকে বর্গ বলা হয়।

কৃতি II : সুবিধাজনক বাহুর দৈর্ঘ্য নিয়ে এমন একটি চতুর্ভুজ ABCD আঁকো, যা'র বিকর্ণের ছেদ বিন্দুকে E নাম দাও। জ্যামিতি বাস্তবের উপকরণের ব্যবহার করে।

- (1) বিকর্ণ AC ও BD এর দৈর্ঘ্য মাপো।
- (2) বিন্দু E দ্বারা বিভক্ত বিকর্ণের প্রত্যেক খণ্ডের দৈর্ঘ্য মাপো।
- (3) E বিন্দুর পার্শ্ববর্তী সকল কোণগুলি মাপো।
- (4) বর্গের বিকর্ণের দ্বারা প্রত্যেক কোণের বিভক্ত অংশের মাপ নাও। (যেমন, $\angle ADB$ ও $\angle CDB$)। তোমার নিজের ও তোমার সহপাঠীদের প্রাপ্ত মাপের নিরীক্ষণ করো ও চর্চা করো।



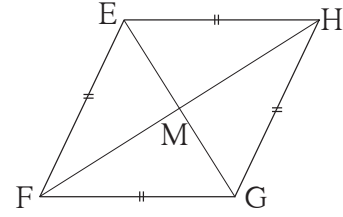
নিচে দেওয়া বর্গের গুণধর্ম তুমি অনুধাবন করতে পারবে।

- বিকর্ণ সমান দৈর্ঘ্যের অর্থাৎ একরূপ হয়ে থাকে।
- বিকর্ণ একে-অপরকে সমান দুই ভাগে বিভক্ত করে।
- বিকর্ণ একে-অপরের সাথে সমকোণ তৈরি করে।
- বিকর্ণ বর্গের বিপরীত কোণকে দ্বিখণ্ডিত করে।

বিষমকোণী সমবাহু চতুর্ভুজ (Rhombus)

যে চতুর্ভুজের সকল বাহুর দৈর্ঘ্য সমান (সর্বসম) হয়ে থাকে, সেই চতুর্ভুজকে বিষমকোণী সমবাহু চতুর্ভুজ বলা হয়।

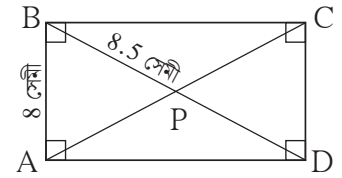
কৃতি III : সুবিধামত যে কোনো একটি বাহুর এবং একটি কোণের মাপ নিয়ে বিষমকোণী সমবাহু চতুর্ভুজ EFGH আঁকো। তা'র বিবর্ণ টেনে তাদের ছেদবিন্দু কে 'M' নাম দাও।



- (1) চতুর্ভুজের বিপরীত কোণ ও বিন্দু 'M' নিকট তৈরী কোণ মাপো।
 - (2) বিকর্ণের কারণে চতুর্ভুজের প্রত্যেক কোণের বিভক্ত ভাগ দুটি মাপো।
 - (3) বিবর্ণ দুটির দৈর্ঘ্য মাপো। বিন্দু 'M' -এর কারণে বিকর্ণের বিভক্ত অংশ মাপো।
- এই মাপ-ঝোকের মধ্যমে বিষমকোণী সমবাহু চতুর্ভুজের নিম্নলিখিত ধর্ম তোমরা বুঝতে পারবে।
- বিপরীত কোণ সর্বসম হয়ে থাকে।
 - বিষমকোণী সমবাহুর বিকর্ণ তার বিপরীত কোণ দ্বিখন্ডিত করে।
 - বিকর্ণ একে-অপরকে দ্বিখন্ডিত করে, ঠিক তেমনি একে-অপরের সঙ্গে সমকোণ তৈরী করে।
- শ্রেণীর সকলেই এই ধর্ম খুঁজে পেয়েছে, তা' দেখতে পাবে।

সমাধান করা উদাহরণ

- উদা. (1)** আয়তক্ষেত্র ABCD-এর বিকর্ণের ছেদবিন্দু P।
- (i) $l(AB) = 8$ সেমি তবে $l(DC) =$ কতো হবে?
 - (ii) $l(BP) = 8.5$ সেমি হলে $l(BD)$ এবং $l(BC)$ নির্ণয় করো।



সমাধান : একটি কাঁচা ছবি এঁকে প্রদত্ত তথ্য দেখাই।

- (i) আয়তক্ষেত্রের বিপরীত বাহু সর্বসম হয়ে থাকে।

$$\therefore l(DC) = l(AB) = 8 \text{ সেমি}$$

- (ii) আয়তক্ষেত্রের বিকর্ণ একে - অপরকে দ্বিখন্ডিত করে।

$$\therefore l(BD) = 2 \times l(BP) = 2 \times 8.5 = 17 \text{ সেমি}$$

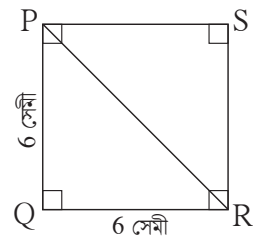
ΔBCD একটি সমকোণ ত্রিভুজ পিথাগোরসের উপপাদ্যানুসারে,

$$l(BC)^2 = l(BD)^2 - l(CD)^2 = 17^2 - 8^2 = 289 - 64 = 225$$

$$\therefore l(BC) = \sqrt{225} = 15 \text{ সেমি}$$

- উদা. (2)** 6 সেমি বাহু যুক্ত বর্গক্ষেত্রের বিকর্ণের দৈর্ঘ্য নির্ণয় করো।

সমাধান : মেনে নাও, ছবিতে দেখানোমুসারে $\square PQRS$ একটি 6 সেমি বাহু যুক্ত বর্গক্ষেত্র। রেখাংশ PR-এর বিকর্ণ।



$$\Delta PQR\text{-এর মধ্যে, পিথাগোরাসের উপপাদ্যানুসারে, } l(PR)^2 = l(PQ)^2 + l(QR)^2 \\ = (6)^2 + (6)^2 = 36 + 36 = 72$$

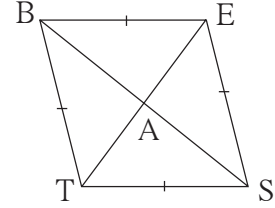
$$\therefore l(PR) = \sqrt{72}, \quad \therefore \text{বিকর্ণের দৈর্ঘ্য } \sqrt{72} \text{ সেমি।}$$

উদা. (3) BEST এই সমবাহু চতুর্ভুজের বিকর্ণ একে-অপরকে A বিন্দুতে ছেদন করে।

(i) যদি $m\angle BTS = 110^\circ$, তাহলে $m\angle TBS$ বের করো।

(ii) যদি $l(TE) = 24$, $l(BS) = 70$, তাহলে $l(TS) =$ কতো?

সমাধান : $\square$ BEST-এর কাঁচা আকৃতি ঐক্যে বিকর্ণের ছেদন বিন্দু A দেখাই।



(i) সমবাহু চতুর্ভুজের বিপরীত কোণ সর্বসম হয়ে থাকে।

$$\therefore m\angle BES = m\angle BTS = 110^\circ$$

$$\text{এখন, } m\angle BTS + m\angle BES + m\angle TBE + m\angle TSE = 360^\circ$$

$$\therefore 110^\circ + 110^\circ + m\angle TBE + m\angle TSE = 360^\circ$$

$$\therefore m\angle TBE + m\angle TSE = 360^\circ - 220^\circ = 140^\circ$$

$$\therefore 2 m\angle TBE = 140^\circ \dots \therefore \text{সমবাহু চতুর্ভুজের সম্মুখ কোণ সর্বসম হয়ে থাকে।}$$

$$\therefore m\angle TBE = 70^\circ$$

$$\therefore m\angle TBS = \frac{1}{2} \times 70^\circ = 35^\circ \dots \therefore \text{সমবাহু চতুর্ভুজের বিকর্ণ সম্মুখ কোণকে দ্বিখণ্ডিত করে।}$$

(ii) সমবাহু চতুর্ভুজের বিকর্ণ একে-অপরকে সমকোণে দ্বিখণ্ডিত করে।

$$\therefore \Delta TAS\text{-এ, } m\angle TAS = 90^\circ$$

$$l(TA) = \frac{1}{2} l(TE) = \frac{1}{2} \times 24 = 12, \quad l(AS) = \frac{1}{2} l(BS) = \frac{1}{2} \times 70 = 35$$

পিথাগোরাসের উপপাদ্যানুসারে,

$$l(TS)^2 = l(TA)^2 + l(AS)^2 = (12)^2 + (35)^2 = 144 + 1225 = 1369$$

$$\therefore l(TS) = \sqrt{1369} = 37$$

অনুশীলনী 8.2

1. $l(AB) = 6.0$ সেমি ও $l(BC) = 4.5$ সেমি এমন আয়তক্ষেত্র ABCD আঁকো।
2. 5.2 সেমি বাহু যুক্ত বর্গ WXYZ আঁকো।
3. 4 সেমি বাহু ও $m\angle K = 75^\circ$ এমন সমবাহু $\square$ KLMN আঁকো।
4. একটি আয়তক্ষেত্রের বিকর্ণ 26 সেমি ও তার একটি বাহু 24 সেমি হলে তার দ্বিতীয় বাহু নির্ণয় করো।

5. সমবাহু $\square$ ABCD-এর বিকর্ণের দৈর্ঘ্য 16 সেমি এবং 12 সেমি, তবে তার বাহু ও পরিসীমা বের করো।
6. 8 সেমি বাহুযুক্ত বর্গের বিকর্ণের দৈর্ঘ্য নির্ণয় করো।
7. একটি সমবাহু চতুর্ভুজের একটি কোণের মাপ 50° , তবে তার অন্য তিনটি কোণের মাপ নির্ণয় করো।

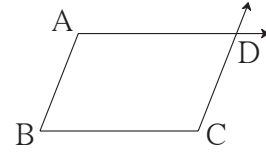
সমান্তরাল চতুর্ভুজ (Parallelogram)

চতুর্ভুজের প্রদত্ত প্রকারের নাম দ্বারা তোমরা সহজেই তার ব্যাখ্যা বুঝতে পারবে।

যে চতুর্ভুজের বিপরীত বাহু একে-অপরের সমান্তরাল হয়, এমন চতুর্ভুজকে সমান্তরাল চতুর্ভুজ বলা হয়।

সমান্তরাল চতুর্ভুজ কেমন করে আঁকা যায়?

পাশে দেওয়া ছবিতে দেখানো অনুসারে রেখাংশ AB এবং রেখাংশ BC যথাক্রমে যে কোনো মাপ তৈরি করে রেখাংশ আঁকো।

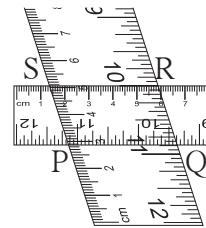


‘রেখার বাইরের বিন্দু থেকে সমান্তরাল রেখা আঁকা’ এই রচনা

তোমরা পূর্বেই করেছো। তার যথা প্রয়োগ করে বিন্দু C থেকে রেখাংশ AB এর সমান্তরাল হয় এমন একটি রেখা টানো। তেমনি বিন্দু A থেকে রেখাংশ BC এর সমান্তরাল হয় এমন একটি রেখা টানো। তাদের ছেদবিন্দুকে D নাম দাও। $\square$ ABCD একটি সমান্তরাল চতুর্ভুজ। সমান্তরাল রেখার ছেদকের দ্বারা তৈরি অন্তঃকোণ পরস্পর সম্পূরক হয়ে থাকে। এটা মনে রাখো। অতএব উক্ত আকৃতির মধ্যে $m\angle A + m\angle B = 180^\circ$, $m\angle B + m\angle C = 180^\circ$, $m\angle C + m\angle D = 180^\circ$ এবং $m\angle D + m\angle A = 180^\circ$ এতদ্বারা সমান্তরাল চতুর্ভুজের কোণের একটি ধর্ম পরবর্তী লাইনে দেওয়া আছে।

● সমান্তরাল চতুর্ভুজের সন্নিহিত কোণের জোড়া দুটি পরস্পর সম্পূরক হয়ে থাকে। উক্ত চতুর্ভুজের কিছু অধিক ধর্ম জেনে নেওয়ার জন্য যে কোণ একটি সমান্তরাল $\square$ PQRS নিম্নানুসারে কৃতি করে আঁকো। বিষম প্রস্থের দুটি মাপন পাটি নাও। তাদের মধ্যে একটি পাটি কাগজের উপরে রেখে তার প্রান্তে একটি রেখা টানো। দ্বিতীয় পাটিটি তার উপরে তেরছা করে রেখে প্রান্তে একটি রেখা টানো। প্রতিফলে সমান্তরাল চতুর্ভুজ তৈরি হবে। তার বিকর্ণ টেনে তাদের ছেদবিন্দুকে T নাম দাও।

- (1) চতুর্ভুজের সম্মুখ কোণের মাপ গণনা করে লেখো।
- (2) সম্মুখ বাহুর জোড়া দুটির দৈর্ঘ্য গণনা করে লেখো।
- (3) বিকর্ণের দৈর্ঘ্য গণনা করে লেখো।
- (4) বিন্দু ‘T’ এর ফলে প্রাপ্ত বিকর্ণের প্রত্যেক অংশের দৈর্ঘ্য গণনা করে লেখো।



মাপজোপ দ্বারা তোমরা সমান্তরাল চতুর্ভুজের নিম্ন ধর্মগুলি জানতে পারবে।

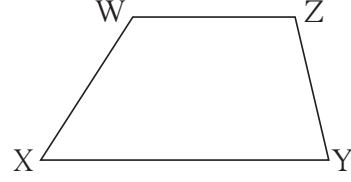
- সম্মুখ কোণের মাপ সমান হয়ে থাকে, অর্থাৎ সম্মুখ কোণ সর্বসম হয়ে থাকে।
- সম্মুখ বাহু সমান দৈর্ঘ্যের অর্থাৎ সর্বসম হয়ে থাকে।
- বিকর্ণ পরস্পরকে দ্বিখণ্ডে বিভাজিত করে।

ভিন্ন - ভিন্ন সমান্তরাল চতুর্ভুজ একে উক্ত ধর্মগুলি যাচাই করে দেখো।

সমলম্ব চতুর্ভুজ (Trapezium)

যে চতুর্ভুজের শুধুমাত্র একটি সম্মুখ বাহুর জোড়া সমান্তরাল হয়ে থাকে, এমন চতুর্ভুজকে সমলম্ব চতুর্ভুজ বলা হয়।

সংলগ্ন আকৃতিতে $\square WXYZ$ -এর মধ্যে, রেখাংশ WZ এবং রেখাংশ XY এই দুটি সম্মুখ বাহুর মাত্র একটি সমান্তরাল জোড়া। ব্যাখ্যানুসারে, $\square WXYZ$ একটি সমলম্ব চতুর্ভুজ হয়।



সমান্তরাল রেখার ছেদকের দ্বারা তৈরি অন্তঃকোণের ধর্ম অনুসারে,
 $m\angle W + m\angle X = 180^\circ$ এবং $m\angle Y + m\angle Z = 180^\circ$

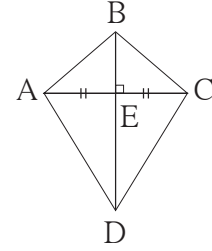
তদানুযায়ী সমলম্ব চতুর্ভুজের চারটি সন্নিহিত কোণের মধ্যে দুটি জোড়া পরস্পর সম্পূরক হয়।

ঘুড়ি (Kite)

সংলগ্ন আকৃতিতে $\square ABCD$ দেখো। এই চতুর্ভুজটির বিকর্ণ BD , বিকর্ণ AC -এর লম্ব সমদ্বিখণ্ডক।

যে সকল চতুর্ভুজের একটি বিকর্ণ অপর বিকর্ণের লম্ব সমদ্বিখণ্ডক হয়ে থাকে, এমন চতুর্ভুজকে ঘুড়ি বলা হয়।

আকৃতিতে রেখাংশ $AB \cong$ রেখাংশ CB এবং রেখাংশ $AD \cong$,
 রেখাংশ CD বিভাজক (কম্পাস কাঁটা) দ্বারা যাচাই করে দেখো।
 তেমনি, $\angle BAD$ ও $\angle BCD$ কোণ দুটি মেপে দেখো তারা সর্বসম কিনা তা যাচাই করো।



- সংলগ্ন বাহুর দুটি জোড়া সর্বসম হয়ে থাকে।
- বিপরীত কোণের একটি জোড়া সর্বসম হয়ে থাকে।

সমাধান করা উদাহরণ

উদা. (1) সমান্তরাল চতুর্ভুজের সন্নিহিত কোণের মাপ যদি $(5x - 7)^\circ$ ও $(4x + 25)^\circ$ হয় তবে কোণ দুটির মাপ নির্ণয় করো।

সমাধান : সমান্তরাল চতুর্ভুজের সন্নিহিত কোণ সম্পূরক হয়।

$$\therefore (5x - 7) + (4x + 25) = 180 \quad \therefore 9x = 180 - 18 = 162$$

$$\therefore 9x + 18 = 180 \quad \therefore x = 18$$

$$\therefore \text{একটি কোণের মাপ} = (5x - 7)^\circ = 5 \times 18 - 7 = 90 - 7 = 83^\circ$$

$$\text{দ্বিতীয় কোণের মাপ} = (4x + 25)^\circ = 4 \times 18 + 25 = 72 + 25 = 97^\circ$$

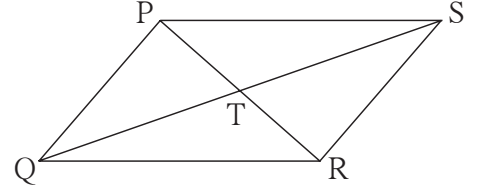
উদা. (2) সংলগ্ন আকৃতিতে □ PQRS একটি সমান্তরাল চতুর্ভুজ। তার বিকর্ণের ছেদবিন্দু T। আকৃতির ভিত্তিতে সামনে দেওয়া প্রশ্নের উত্তর লেখো।

(i) যদি $l(PS) = 5.4$ সেমি হয়, তবে $l(QR) =$ কতো?

(ii) যদি $l(TS) = 3.5$ সেমি হয়, তবে $l(QS) =$ কতো?

(iii) $m\angle QRS = 118^\circ$ তবে $m\angle QPS =$ কতো?

(iv) $m\angle SRP = 72^\circ$, তবে $m\angle RPQ =$ কতো?



সমাধান : সমান্তরাল চতুর্ভুজ PQRS -এর মধ্যে,

(i) $l(QR) = l(PS) = 5.4$ সেমি,

..... সম্মুখ বাহু সর্বসম

(ii) $l(QS) = 2 \times l(TS) = 2 \times 3.5 = 7$ সেমি,

..... বিকর্ণ পরস্পরকে দ্বিখণ্ডিত করে।

(iii) $m\angle QPS = m\angle QRS = 118^\circ$

..... সম্মুখ কোণ সর্বসম

(iv) $m\angle RPQ = m\angle SRP = 72^\circ$

..... একান্তর কোণ সর্বসম

উদা. (3) □ CWPR -এর কোণের মাপের অনুপাত যথাক্রমে 7:9:3:5 তবে সেই চতুর্ভুজের কোণের মাপ জ্ঞাত করো ও চতুর্ভুজের প্রকার বলো।

সমাধান : মেনে নাও, $m\angle C : m\angle W : m\angle P : m\angle R = 7:9:3:5$

$\angle C, \angle W, \angle P$ এবং $\angle R$ -এর মাপ যথাক্রমে

$7x, 9x, 3x, 5x$, মেনে নিই।

$$\therefore 7x + 9x + 3x + 5x = 360^\circ$$

$$\therefore 24x = 360^\circ \therefore x = 15$$

$$\therefore m\angle C = 7 \times 15 = 105^\circ, m\angle W = 9 \times 15 = 135^\circ$$

$$m\angle P = 3 \times 15 = 45^\circ \text{ and } m\angle R = 5 \times 15 = 75^\circ$$

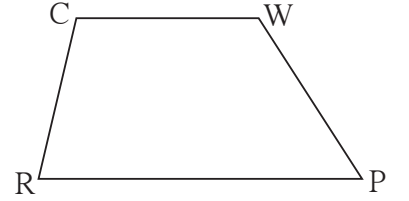
$$\therefore m\angle C + m\angle R = 105^\circ + 75^\circ = 180^\circ \therefore \text{বাহু } CW \parallel \text{বাহু } RP$$

$$m\angle C + m\angle W = 105^\circ + 135^\circ = 240^\circ \neq 180^\circ$$

$\therefore$ বাহু CR টি বাহু WP -এর সমান্তরাল নয়।

$\therefore$ □ CWPR-এর বিপরীত বাহুর জোড়া সমান্তরাল।

$\therefore$ CWPR এটি একটি সমলম্ব চতুর্ভুজ।



অনুশীলনী 8.3

1. একটি সমান্তরাল বাহু চতুর্ভুজের সম্মুখ কোণের মাপ যথাক্রমে $(3x-2)^\circ$ ও $(50-x)^\circ$ দেওয়া আছে, তাহলে চতুর্ভুজের প্রত্যেক কোণের মাপ বের করো।

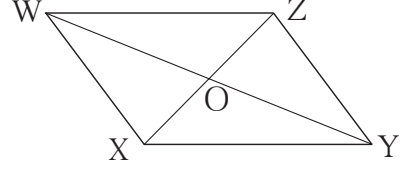
2. সংলগ্ন সমান্তরাল চতুর্ভুজের আকৃতিকে ভিত্তি করে নিচে দেওয়া প্রশ্নের উত্তর লেখো।

(1) যদি $l(WZ) = 4.5$ সেমি হয়, তাহলে $l(XY) = ?$

(2) যদি $l(YZ) = 8.2$ সেমি হয়, তাহলে $l(XW) = ?$

(3) যদি $l(OX) = 2.5$ সেমি হয়, তাহলে $l(OZ) = ?$

(4) যদি $l(WO) = 3.3$ সেমি হয়, তাহলে $l(WY) = ?$



(5) যদি $m\angle WZY = 120^\circ$ সেমি হয়, তাহলে $m\angle WXY = ?$ ও $m\angle XWZ = ?$

3. $\square ABCD$ এমন একটি সমান্তরাল চতুর্ভুজ আঁকো যার $l(BC) = 7$ সেমি, $\angle ABC = 40^\circ$, $l(AB) = 3$ সেমি।

4. একটি চতুর্ভুজের ক্রমাগত চারটি কোণের অনুপাত $1:2:3:4$ দেওয়া আছে, তবে সেটি কোন প্রকারের চতুর্ভুজ হতে পারে? সেই চতুর্ভুজের প্রত্যেক কোণের মাপ জ্ঞাত করো। কারণ লেখো।

5. $\square BARC$ এমন আঁকো যাতে $l(BA) = l(BC) = 4.2$ সেমি, $l(AC) = 6.0$ সেমি, $l(AR) = l(CR) = 5.6$ সেমি।

6*. $\square PQRS$ কে এমন আঁকো যার $l(PQ) = 3.5$ সেমি, $l(QR) = 5.6$ সেমি, $l(RS) = 3.5$ সেমি, $m\angle Q = 110^\circ$, $m\angle R = 70^\circ$ ।

যদি $\square PQRS$ একটি সমান্তরাল চতুর্ভুজ হয় তাহলে উপযুক্ত কোন তথ্যগুলি দেওয়ার প্রয়োজন হয় না তা লেখো।

১১১

উত্তরমালা

অনুশীলনী 8.2

4. 10 সেমি 5. বাহু 10 সেমি এবং পরিসীমা 40 সেমি 6. $\sqrt{128}$ সেমি 7. 130° , 50° , 130°

অনুশীলনী 8.3

1. 37° , 143° , 37° , 143°

2. (1) 4.5 সেমি (2) 8.2 সেমি (3) 2.5 সেমি (4) 6.6 সেমি (5) 120° , 60°

4. 36° , 72° , 108° , 144° , সমলম্ব চতুর্ভুজ



একটু মনে করি।

নিচের খালি ছকে সঠিক সংখ্যা লেখো।

1. $\frac{12}{100} = \square$ শতাংশ = $\square$ %

2. শতকরা 47 = $\frac{\square}{\square}$

3. 86% = $\frac{\square}{\square}$

4. 300-এর শতকরা 4 = $300 \times \frac{\square}{\square} = \square$

5. 1700-এর শতকরা 15% = $1700 \times \frac{\square}{\square} = \square$



এসো চর্চা করি।



তুমি এই ধরনের বিজ্ঞাপন দেখেছো হয়তো সেলে অনেক বস্তুতে ছাড় দেওয়া হয়। আমরা স্বাভাবিক রূপে পরিবেশ দেখতে পাই যে জুলাই মাসে বিশেষ রূপে কাপড়ের সেল শুরু হয়। এর কারণ খোঁজো এবং চর্চা করো।



এসো জেনে নেই।

ছাড় (Discount)

শ্রী সুরেশ দ্বারা জুন এবং জুলাই মাসে শাড়ীর বিক্রি ও লাভের বিবরণ নিচের তালিকায় দেওয়া আছে তাহা দেখো।

মাস	শাড়ির চিহ্নিত মূল্য (টাকা)	শাড়ির বিক্রয় মূল্য (টাকা)	একটি শাড়ির উপর লাভ (টাকায়)	শাড়ির বিক্রির সংখ্যা	(মোট লাভ (টাকায়))
জুন	200	250	50	40	$50 \times 40 = 2000$
জুলাই	200	230	30	100	$30 \times 100 = 3000$

তালিকা থেকে তোমরা বুঝতে পারবে যে জুলাই মাসে শাড়ি বিক্রির ঘোষণায় প্রতিটি শাড়িতে ছাড় দেওয়া হয়েছে। এই কারণে জুন মাসের তুলনায় একটি শাড়িতে লাভ কম হলেও জুলাই মাসে শাড়ি বিক্রি বেশি হওয়ায় মোট লাভ বেড়েছে।

বিক্রয়ের জন্য রাখা বস্তুর পর সেই বস্তুর মূল্য মুদ্রিত করা থাকে, তাকে সেই বস্তুর চিহ্নিত মূল্য ('Marked Price') বলা হয়। দোকানদার মুদ্রিত মূল্যের উপর ছাড় বস্তু বিক্রি করার সময় দোকানদার মুদ্রিত মূল্যের অপেক্ষা যত টাকা কম নেয়, ওই টাকাকে ছাড় বলে। ছাড় দেওয়ার পরে অবশিষ্ট মূল্য হলো বিক্রয় মূল্য।

অর্থাৎ বিক্রয় মূল্য = মুদ্রিত মূল্য - ছাড়

ছাড় সাধারণতঃ শতাংশে দেওয়া হয়। শতকরায় 20 ছাড় এর অর্থ বস্তুর মুদ্রিত মূল্যের 20% টাকা কম নিয়ে বস্তুটি বিক্রী করা। অর্থাৎ বস্তুর মুদ্রিত মূল্য যদি 100 টাকা হয় তাহলে ওর উপর 20 টাকা ছাড় দেওয়া হলে তার বিক্রয় মূল্য $100 - 20 = 80$ টাকা হবে।

এই ধরনের লেনদেন ছাড় যদি $x\%$ হয় তাহলে $\frac{x}{100} = \frac{\text{বস্তুর মুদ্রিত মূল্যের পর ছাড়}}{\text{মুদ্রিত মূল্য}}$ এমন

সম্পর্ক থাকে।

$$\therefore \text{বস্তুর মুদ্রিত মূল্যের পর ছাড়} = \frac{\text{মুদ্রিত মূল্য} \times x}{100}$$

অধিক তথ্যের জন্য :

আজকাল দোকানে না গিয়ে অনলাইনে বই কাপড়, মোবাইল ইত্যাদি অনেক জিনিসপত্র কেনা হয়।

যে কম্পানি অনলাইনে বস্তু বিক্রি করে সে কম্পানির রক্ষণাবেক্ষণ, সাজসজ্জা এবং সেখানের ব্যবস্থাপন প্রভৃতি খরচ কম হয়।

এইজন্য অনলাইন কেনা কাটায় ও ছাড় দেয় এবং বস্তুটি বাড়িতেই পাওয়া যায়।

সমাধান করা উদাহরণ

উদা. (1) একটি বইয়ের মুদ্রিত মূল্য 360 টাকা। দোকানদার যদি সেই বইটি 306 টাকায় বিক্রি করে তাহলে সে শতকরা কতো টাকা ছাড় দিয়েছে?

সমাধান : মুদ্রিত মূল্য = ₹ 360, বিক্রয় মূল্য = ₹ 306. $\therefore$ ছাড় = $360 - 306 = ₹ 54$.

বস্তুর মুদ্রিত মূল্য 360 টাকা, তাহলে ছাড় 54 টাকা।

মেনে নিলাম বস্তুর মুদ্রিত মূল্য 100 টাকা তাহলে ছাড় x টাকা

$$\frac{\text{ছাড়}}{\text{মুদ্রিত মূল্য}} = \frac{x}{100} \quad \therefore \frac{54}{360} = \frac{x}{100} \quad \therefore x = \frac{54 \times 100}{360} = 15$$

$\therefore$ বইয়ের মুদ্রিত মূল্যের পর শতকরা 15 ছাড় দিয়েছে।

উদা. (2) একটি চেয়ারের মুদ্রিত মূল্য 1200 টাকা। এর উপর যদি 10% ছাড় থাকে তবে মোট ছাড় কতো হবে? বস্তুর বিক্রি মূল্য কতো হবে?

সমাধান :

পদ্ধতি I

মুদ্রিত মূল্য = ₹ 1200 টাকা, ছাড় = 10%
 $\frac{\text{ছাড়}}{\text{মুদ্রিত মূল্য}}$ এই অনুপাত বের করবো।

মেনে নিলাম চেয়ারের মূল্যের উপর ₹ x টাকা ছাড় পাওয়া যায়।

$$\begin{aligned}\therefore \frac{x}{1200} &= \frac{10}{100} \\ x &= \frac{10}{100} \times 1200 \\ x &= 120\end{aligned}$$

মোট ছাড় = ₹ 120 টাকা

$$\begin{aligned}\text{বিক্রয় মূল্য} &= \text{মুদ্রিত মূল্য} - \text{ছাড়} \\ &= 1200 - 120 \\ &= 1080\end{aligned}$$

চেয়ারের বিক্রয় মূল্য ₹ 1080 টাকা

পদ্ধতি II

মুদ্রিত মূল্যের উপর 10% ছাড় অর্থাৎ মুদ্রিত মূল্য ₹ 100 হলে বিক্রয় মূল্য ₹ 90 হবে।

∴ মুদ্রিত মূল্য 1200 টাকা হলে
 মেনে নিলাম বিক্রয় মূল্য ₹ x টাকা।

$$\therefore \frac{x}{1200} = \frac{90}{100}$$

$$\therefore x = \frac{90}{100} \times \frac{1200}{1}$$

$$\therefore x = 1080$$

চেয়ারের বিক্রয় মূল্য 1080 টাকা

$$\begin{aligned}\therefore \text{মোট ছাড়} &= 1200 - 1080 \\ &= ₹ 120 \text{ টাকা।}\end{aligned}$$

উদা. (3) একটি শাড়ি মুদ্রিত মূল্যের উপর 20% ছাড় দিয়ে 1120 টাকায় বিক্রি করলো, তাহলে সেই শাড়িটির মুদ্রিত মূল্য কতো ছিলো?

সমাধান : শাড়ির মুদ্রিত মূল্য ধরা যাক 100 টাকা। এর উপর 20% ছাড় দেওয়া হলো। অর্থাৎ গ্রাহককে ওই শাড়ি 100 - 20 = 80 টাকায় বিক্রয় করলো। অর্থাৎ যখন বিক্রয় মূল্য 80 টাকা তখন মুদ্রিত মূল্য 100 টাকা। যখন বিক্রয় মূল্য 1120 টাকা তখন মুদ্রিত মূল্য x টাকা মেনে নেই।

$$\therefore \frac{80}{100} = \frac{1120}{x}$$

$$\begin{aligned}\therefore x &= \frac{1120 \times 100}{80} \\ &= 1400\end{aligned}$$

∴ শাড়ির মুদ্রিত মূল্য 1400 টাকা ছিলো।

উদা. (4) একজন দোকানদার একটি জিনিস বিক্রির জন্য মনে-মনে কিছু মূল্য নির্ধারণ করে। বস্তুর মূল্য সে নির্দিষ্ট মূল্যের চেয়ে 30% বেশি বাড়িয়ে মুদ্রিত করে। বস্তুটি বিক্রি করার সময় গ্রাহককে 20% ছাড় দেওয়া হয়, তারপর দোকানদার নির্ধারিত মূল্য অপেক্ষা কতো শতাংশ বেশি দাম পাবে তা বের করে।

সমাধান : মূল্য বৃদ্ধি এবং মুনাফা বৃদ্ধির শতাংশ নির্ধারিত মূল্যের উপর, সেইজন্য 100 টাকা এর নির্দিষ্ট মূল্য বিবেচনা করলে উদাহরণটি সমাধান করা সহজ হবে।

∴ নির্দিষ্ট মূল্য 100 টাকা মেনে নেই।

এই মূল্য সে 30% বাড়িয়ে মুদ্রিত করে।

∴ মুদ্রিত দাম = 130 টাকা

∴ ছাড় = 130 এর 20% = $130 \times \frac{20}{100} = 26$ টাকা

∴ বিক্রয় মূল্য 130 - 26 = 104 টাকা

∴ নির্ধারিত দাম 100 টাকা হলে সে 104 টাকা পাবে।

অর্থাৎ দোকানদার তার সিদ্ধান্তের থেকে 4% বেশি মূল্য পাবে।

উদা. (5) একটি বস্তুতে দোকানদার গ্রাহককে 8% ছাড় দেয়। তার পরেও দোকানদারের 15% লাভ হয়। যদি ওই বস্তুর মুদ্রিত দাম 1750 টাকা হয় তাহলে ওই বস্তু দোকানদার কতো দামে কিনলো?

সমাধান : বস্তুর মুদ্রিত দাম = 1750 টাকা, শতকরা ছাড় = 8

∴ ছাড় = $1750 \times \frac{8}{100} = 140$ টাকা

∴ বস্তুর বিক্রয় মূল্য = 1750 - 140 = 1610 টাকা

লাভ 15% অর্থাৎ বস্তুর ক্রয় মূল্য যদি 100 টাকা হয় তবে বিক্রয় মূল্য 115 টাকা

অর্থাৎ বিক্রয় মূল্য 115 টাকা হলে, ক্রয় মূল্য 100 টাকা

বিক্রয় মূল্য 1610 টাকা হলে, মেনে নিলাম ক্রয় মূল্য x টাকা।

$$\therefore \frac{x}{100} = \frac{1610}{115} \quad \therefore x = \frac{1610 \times 100}{115} = 1400$$

∴ বস্তুর ক্রয়মূল্য = ₹ 1400 টাকায় কিনেছেন।



• ছাড় = মুদ্রিত মূল্য - বিক্রয় মূল্য

• ছাড় শতকরা x হলে $\frac{x}{100} = \frac{\text{প্রাপ্ত ছাড়}}{\text{মুদ্রিত মূল্য}}$

অনুশীলনী 9.1

1. যদি মুদ্রিত মূল্য = ₹ 1700, বিক্রয় মূল্য = ₹ 1540 তাহলে ছাড় বের করো।
2. যদি মুদ্রিত মূল্য = ₹ 990, শতকরা ছাড় 10 হয়, তাহলে তার বিক্রয় মূল্য বের করো।
3. যদি বিক্রয় মূল্য = ₹ 900, শতকরা ছাড় 20 তাহলে মুদ্রিত মূল্য বের করো।
4. একটি ফ্যানের মুদ্রিত মূল্য হলো 3000 টাকা। দোকানদার যদি শতকরায় 12 ছাড় দিয়ে থাকে তাহলে ফ্যানের উপরে দেওয়া ছাড় এবং ফ্যানের বিক্রয় মূল্য বের করো।
5. একটি মিক্সার গ্রাইন্ডারের মুদ্রিত মূল্য হলো 2300 টাকা। এই মিক্সার গ্রাইন্ডার 1953 টাকায় পাওয়া গেলে, এর শতকরা ছাড় কতো হবে?
6. একজন দোকানদার একটি টি.ভি. সেটে শতকরা 11 ছাড় দেয় সেই কারণে গ্রাহক 22,250 টাকায় সেটটি পান, তাহলে সেই টিভি সেটের মুদ্রিত মূল্য বের করো।
7. যদি মুদ্রিত মূল্য 10% ছাড় থাকে তাহলে গ্রাহক মোট 17 টাকা ছাড় পায়। তবে গ্রাহকের ওই বস্তুটি কতো টাকায় পড়বে এটা বের করার জন্য খালি ছকে সঠিক সংখ্যা লিখে কৃতি পূর্ণ করো।

কৃতি : মেনে নাও বস্তুর মুদ্রিত মূল্য = 100 টাকা।

অর্থাৎ গ্রাহক সেই বস্তুটি - = 90 টাকায় পায়।

অর্থাৎ যখন টাকা ছাড় থাকে তখন বিক্রয় মূল্য টাকা।

যখন টাকা ছাড় থাকে তখন বিক্রয় মূল্য x টাকা।

$$\therefore \frac{x}{\text{}} = \frac{\text{}}{\text{}} \quad \therefore x = \frac{\text{} \times \text{}}{\text{}} = \text{}$$

$\therefore$ গ্রাহক সেই বস্তুটি 153 টাকায় পাবে।

8. একজন দোকানদার একটি নির্ধারিত মূল্যে একটি বস্তু বিক্রি করার সিদ্ধান্ত নেয় এবং বস্তুটিকে নির্ধারিত মূল্য অপেক্ষা 25% অধিক মূল্য মুদ্রিত করে। তিনি বস্তুটি বিক্রি করার সময় 20% ছাড় দেন। তাহলে তার দ্বারা নির্ধারিত মূল্য এবং সরাসরি বিক্রয় মূল্যের মধ্যে শতাংশের পার্থক্য কতো হবে?

 এসো জেনে নেই।

কমিশন (Commission)

যদি বস্তু উৎপাদন কম্পানির কাছে তার মাল বিক্রি করা সম্ভব না হয় তাহলে সেই কম্পানি তার বস্তু

বিক্রির দায়িত্ব একজন ব্যক্তিকে দেয়। (যেমন পুস্তক, কাপড়, সাবান প্রভৃতি) এই সেবার বিনিময়ে তাকে কিছু পারিশ্রমিক দেওয়া হয়, একে কমিশন বলে। এইজন্য এই ধরনের ব্যক্তিকে বিক্রেতা কমিশন এজেন্ট বলা হয়।

জমি (ভূখন্ড), ঘর-বাড়ি, গাই-বাছুড় এদের মালিকদের কাছে এই ধরনের জিনিস বিক্রি করার সময় গ্রাহক পাওয়া এতো সহজ নয়। তাই বিক্রেতা এবং ক্রেতা কাছাকাছি আনার কাজ যে ব্যক্তি করে তাকে মধ্যস্থকারী বা দালাল বা কমিশন এজেন্ট বলা হয়।

যার মাধ্যমে শস্য, শাকসব্জি ফল ও ফুলের মতো কৃষিজাতীয় বস্তু বিক্রি হয় তাকে দালাল বলে। এই কাজের বিনিময়ে মধ্যস্থকারী যে কমিশন পায় তাকে দালাল বলে। যে দালাল বস্তু ক্রয় করেন বা যিনি বস্তু বিক্রি করেন তার কাছ থেকে বা উভয়ের থেকে পাওয়া যেতে পারে।

সমাধান করা উদাহরণ

উদা. (1) শ্রীপতি একটি দালালের মাধ্যমে সদাশিবের কাছে 2,50,000 টাকায় একটি জমি বিক্রি করেছিলো। দালাল যদি উভয় পক্ষ থেকে 2% দালালী নেয় তাহলে সে মোট কতো দালালি পেলো?

সমাধান : জমির মূল্য = ₹ 2,50,000

$$\therefore \text{দালালি} = 250000 \times \frac{2}{100} = 5000$$

উভয় পক্ষ থেকে দালালি নেওয়া হলো।

$$\therefore \text{মোট দালালি} = 5000 + 5000 = 10000 \text{ টাকা}$$

উদা. (2) সুকদেব একজন আড়তিয়ারের মাধ্যমে 4050 টাকা প্রতি কুইন্টাল দরে 10 কুইন্টাল গম বিক্রি করেছেন। যদি তিনি 1% হারে আড়তিয়া দিয়েছেন, তবে গম বিক্রি করার পরে তিনি কতো টাকা পেয়েছেন তা বের করো।

সমাধান : গমের বিক্রি মূল্য = $10 \times 4050 = 40500$ টাকা, 1 শতাংশ হারে আড়ত।

$$\therefore \text{দেওয়া আড়ত} = 40500 \times \frac{1}{100} = 405 \text{ টাকা}$$

$$\therefore \text{গম বিক্রি করে প্রাপ্ত রাশি} = \text{গমের বিক্রয় মূল্য} - \text{আড়ত}$$

$$= 40500 - 405 = 40,095 \text{ টাকা}$$

$$\text{গম বিক্রি করে সুকদেবের প্রাপ্ত রাশি} = 40,095 \text{ টাকা}$$

রিবেট (Rebate)

খাদি গ্রামীণ শিল্পের দোকান, হ্যাণ্ডলুম বস্ত্রের দোকান, হস্তশিল্পের বস্ত্র বিক্রয় কেন্দ্র, মহিলা সঞ্চয়গোষ্ঠী ইত্যাদি সংস্থাগুলি কিছু বিশেষ উপলক্ষ্যে গ্রাহকদের ছাড় দেয়। যেমন গান্ধী জয়ন্তী উপলক্ষ্যে খাদি কাপড়ের ওপর ছাড় দেওয়া হয়।

এমন সময়ে মুদ্রিত মূল্যের চেয়ে যতটা কম রাশি দোকানদার প্রাপ্ত করেন, উদ্বিগ্ন রাশি (মূল্য) সরকার পূরণ করে। এই যোজনার অন্তর্গত গ্রাহক যে ছাড় পান তাকে রিবেট বলে।

যারা আয়কর দেন একটি নির্দিষ্ট সীমা পর্যন্ত তারা আয়কর ছাড় পান, এই ছাড়কেও রিবেট বলা হয়। সংক্ষেপে রিবেট মানে হলো এক ধরনের ছাড়। যা স্বীকৃত প্রতিষ্ঠান বা সরকার নির্দিষ্ট শর্ত অনুযায়ী প্রদান করে।

সমাধান করা উদাহরণ

উদা. সুধীর একটি হ্যাণ্ডলুম প্রতিষ্ঠানের দোকান থেকে নিম্নলিখিত জিনিসগুলি ক্রয় করলো।

(i) 2 টি চাদর, প্রতিটির দাম 375 টাকা (ii) 2টি শতরঞ্চি প্রতিটির দাম 525 টাকা

যদি তিনি এই ক্রয়ের উপর 15 শতাংশ রিবেট পান, তাহলে মোট রিবেটের পরিমাণ কতো হবে? সুধীর দোকানদারকে কতো টাকা দেবে?

সমাধান : 2টি চাদরের দাম = $2 \times 375 = ₹ 750$ ।

2টি শতরঞ্চির দাম = $2 \times 525 = ₹ 1050$ ।

কেনা বস্তুর মোট দাম = $750 + 1050 = ₹ 1800$ টাকা।

প্রাপ্ত মোট রিবেট = $1800 \times \frac{15}{100} = ₹ 270$ টাকা।

∴ দোকানদারকে সুধীর $1800 - 270 = ₹ 1530$ টাকা দেবে।

অনুশীলনী 9.2

1. জোহন এক প্রকাশকের 4500 টাকার বই বিক্রি করেছিলেন। এরজন্য তিনি 15 শতাংশ কমিশন পেয়েছেন। তাহলে জোহনের মোট প্রাপ্ত কমিশন কতো? এটি খুঁজে বের করার জন্য খালি ছকে উপযুক্ত সংখ্যা লেখো।

বইয়ের বিক্রয় মূল্য = কমিশনের হার =

প্রাপ্ত কমিশন = $\frac{\text{}}{\text{}} \times \text{}$ ∴ কমিশন = টাকা

2. রফিক 15,000 টাকার ফুল এক দালালের মাধ্যমে 4% শতাংশ দালালি দিয়ে বিক্রি করলো, তাহলে সে দালালি কতো পেলো। এবং রফিক কতো টাকা পেলো তা বের করো।
3. একজন কৃষক আড়তিয়ার মাধ্যমে 9200 টাকার বস্ত্র বিক্রি করেছেন। যদি তাকে 2% দালালি দিতে হয়। তাহলে আড়তদার কতো টাকা পেলো?

4. উমা দিদি খাদি ভান্ডার থেকে নিম্নলিখিত জিনিসগুলি কিনেছিলেন।

(i) 3টি শাড়ি প্রতিটি 560 টাকা

(ii) 6 বোতল মধু, 90 টাকা প্রতি বোতল

এই কেনাকাটায় তিনি 12 শতাংশ রিবেট পেয়েছেন, তাহলে উমাদিদি এই বস্তুগুলি কতো টাকায় পেয়েছেন?

5. প্রদত্ত তথ্যের ভিত্তিতে নিচের ফাঁকা ছকে সঠিক সংখ্যাটি লেখো।

একজন দালালের মাধ্যমে শ্রীমতী দীপাঞ্জলী শ্রীমতী লীলাবেনের কাছ থেকে 7,500,000 টাকার একটি বাড়ি কিনেছিলেন। দালাল তাদের উভয়ের কাছ থেকে 2% দালালি নিয়েছিলো। তাহলে

(1) শ্রীমতী দীপাঞ্জলি বাড়ি কেনার জন্য $\square \times \frac{\square}{\square} = \square$ টাকা দালালি দিয়েছেন

(2) লীলাবেন বাড়ি বিক্রির জন্য $\square$ টাকা দালালি দিয়েছেন।

(3) দালাল এই লেনদেনে মোট $\square$ টাকা দালালি পেয়েছেন।

(4) শ্রীমতী দীপাঞ্জলি সেই বাড়িটি $\square$ টাকায় পেয়েছেন।

(5) শ্রীমতী লীলাবেন বাড়ি বিক্রি করে $\square$ টাকা পেয়েছেন।

১১১

উত্তরমালা

অনুশীলনী 9.1

1. ₹ 160

2. ₹ 891

3. ₹ 1125

4. ছাড় ₹ 360, বি. মূল ₹ 2640

5. 15%

6. ₹ 25,000

8. 0 %.

অনুশীলনী 9.2

2. দালালি ₹ 600, রাশি ₹ 14400

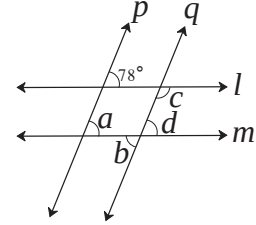
3. ₹ 184

4. ₹ 1953.60

বিক্ষিপ্ত অনুশীলনী 1

1. নিম্নলিখিত প্রতিটি প্রশ্নের জন্য চারটি করে বিকল্প দেওয়া আছে তা থেকে সঠিক বিকল্পটি চয়ন করো।
 - (1) □ PQRS এ $m\angle P = m\angle R = 108^\circ$ এবং $m\angle Q = m\angle S = 72^\circ$ তাহলে নিচের বাহুগুলির মধ্যে কোনগুলি সমান্তরাল?
 - (A) বাহু PQ এবং বাহু QR
 - (B) বাহু PQ এবং বাহু SR
 - (C) বাহু SR এবং বাহু SP
 - (D) বাহু PS এবং বাহু PQ
 - (2) নিচের বিবৃতিটি পড়ো, তার নিচে দেওয়া বিকল্প থেকে সঠিক বিকল্প চয়ন করো।
 - (i) আয়ত ক্ষেত্রের কর্ণগুলি একে অপরের লম্ব দ্বিখন্ডক হয়ে থাকে।
 - (ii) বিষমকোণী সমবাহু চতুর্ভুজের কর্ণগুলি একে-অপরের লম্ব দ্বিখন্ডক হয়ে থাকে।
 - (iii) সমান্তরাল চতুর্ভুজের কর্ণগুলি একে-অপরের লম্ব দ্বিখন্ডক হয়ে থাকে।
 - (iv) ঘূড়ির কর্ণ পরস্পরকে দ্বিখন্ডিত করে।
 - (A) বিবৃতি (ii) এবং (iii) সত্য
 - (B) শুধুমাত্র বিবৃতি (ii) সত্য
 - (C) বিবৃতি (ii) এবং (iv) সত্য
 - (D) বিবৃতি (i), (iii) এবং (iv) সত্য
 - (3) যদি $19^3 = 6859$ হয় তাহলে $\sqrt[3]{0.006859} =$ কতো?
 - (A) 1.9
 - (B) 19
 - (C) 0.019
 - (D) 0.19
2. নিচের সংখ্যাগুলির ঘনমূল নির্ণয় করো।
 - (1) 5832
 - (2) 4096
3. $m \propto n$, যখন $m = 25$ তখন $n = 15$ এর থেকে
 - (1) যখন $n = 87$ তাহলে $m =$ কতো হবে?
 - (2) $m = 155$ তাহলে $n =$?
4. x এবং y এর মধ্যে ব্যস্ত ভেদের সম্বন্ধ রয়েছে। যখন $x = 12$ তখন $y = 30$
 - (1) যদি $x = 15$ তাহলে $y =$ কতো?
 - (2) যদি $y = 18$ তাহলে $x =$ কতো?
5. একটি রেখা l টানো সেই রেখা থেকে 3.5 সেমি দূরত্ব একটি সমান্তরাল রেখা টানো।
6. $(256)^{\frac{5}{7}}$ এই সংখ্যা কোন সংখ্যার কতো ঘাত এবং এই সংখ্যাটির সূচক কতো তা লেখো।
7. বিস্তার করো।
 - (1) $(5x-7)(5x-9)$
 - (2) $(2x-3y)^3$
 - (3) $(a + \frac{1}{2})^3$

8. একটি স্থূলকোণ ত্রিভুজ আঁকো, ওই ত্রিভুজের সকল মধ্যগুলি ঐক্যে তার সংগাম বিন্দু নির্দেশিত করো।
9. একটি ΔABC আঁকো যাতে $l(BC) = 5.5$ সেমি, $m\angle ABC = 90^\circ$, $l(AB) = 4$ সেমি হয় এই ত্রিভুজের শীর্ষলম্ব সংগাম বিন্দু দেখাও।
10. বাসের গতিবেগ প্রতি ঘন্টা 48 কিমি হলে এক গ্রাম থেকে অন্য গ্রামে যেতে 5 ঘন্টা সময় লাগে। বাসের গতিবেগ 4 প্রতি ঘন্টা কিমি। কম করলে ওই যাত্রায় কতো ঘন্টা লাগবে তা বের করো। ভেদের প্রকার চেনো এবং প্রশ্নের সমাধান করো।
11. রেখাংশ AD এবং রেখাংশ BE ΔABC এর মধ্য G মধ্য-এর সংগাম বিন্দু। যদি $l(AG) = 5$ সেমি তাহলে $l(GD) =$ কতো? এবং যদি $l(GE) = 2$ সেমি তাহলে $l(BE) =$ কতো?
12. নিম্নলিখিত মূলদসংখ্যা দশমিক রূপে লেখো।
 (1) $\frac{8}{13}$ (2) $\frac{11}{7}$ (3) $\frac{5}{16}$ (4) $\frac{7}{9}$
13. উৎপাদক বের করো।
 (1) $2y^2 - 11y + 5$ (2) $x^2 - 2x - 80$ (3) $3x^2 - 4x + 1$
14. একটি টেলিভিশন সেটের দাম 50000 টাকা, যদি দোকানদার সেটটি 15% ছাড়ে বিক্রি করে তাহলে সেটের দাম গ্রাহকের জন্য কতো হবে?
15. রাজাভাই তার ফ্ল্যাট দালালের মাধ্যমে 88,00,000 টাকায় বসন্তরাওয়ের কাছে বিক্রি করলো। উভয়ের থেকে দালাল 2% হারে দালালি নিয়েছে। তাহলে দালাল দালালিতে মোট কতো টাকা পেলো?
16. একটি সমান্তরাল চতুর্ভুজ $\square ABCD$ আঁকো যাতে $l(DC) = 5.5$ সেমি, $m\angle D = 45^\circ$, $l(AD) = 4$ সেমি।
17. আকৃতিতে $l \parallel$ রেখা m তেমনি রেখা $p \parallel$ রেখা q তদানুসারে $\angle a$, $\angle b$, $\angle c$ এবং $\angle d$ -এর মান নির্ণয় করো।



উত্তরমালা

1. (i) B (ii) B (iii) D 2. (1) 18 (2) 16 3. (1) 145 (2) 93
4. (1) 24 (2) 20 6. 256-এর সপ্তম মূল্যের পঞ্চম ঘাত
7. (1) $25x^2 - 80x + 63$ (2) $8x^3 - 36x^2y + 54xy^2 - 27y^3$ (3) $a^3 + \frac{3a^2}{2} + \frac{3a}{4} + \frac{1}{8}$
10. ব্যস্ত ভেদ, 6 ঘন্টা 11. $l(GD) = 2.5$ সেমি, $l(BE) = 6$ সেমি
12. (1) $0.\overline{615384}$ (2) $1.\overline{571428}$ (3) 0.3125 (4) $0.\overline{7}$
13. (1) $(y - 5)(2y - 1)$ (2) $(x - 10)(x + 8)$ (3) $(x - 1)(3x - 1)$
14. ₹ 42500 15. ₹ 352000 17. $78^\circ, 78^\circ, 102^\circ, 78^\circ$



একটু স্মরণ করি

আমরা পূর্ব শ্রেণীতে বীজগাণিতিক চলরাশির যোগ, বিয়োগ ও গুণ এই ক্রিয়াগুলি কিভাবে করতে হয়, তাহা শিখেছি।

প্রদত্ত উদাহরণের শূন্যস্থান পূর্ণ করো।

(1) $2a + 3a = \square$

(2) $7b - 4b = \square$

(3) $3p \times p^2 = \square$

(4) $5m^2 \times 3m^2 = \square$

(5) $(2x + 5y) \times \frac{3}{x} = \square$

(6) $(3x^2 + 4y) \times (2x + 3y) = \square$



এসো জেনে নেই।

বহুপদীর পরিচয় (Introduction to polynomial)

একচল বিশিষ্ট বীজগাণিতিক চলরাশির প্রতিটি পদে চলের সূচকটি অখন্ড সংখ্যা হয়, তাহলে সেই রাশি একচল বিশিষ্ট বহুপদী হয়।

যেমন $x^2 + 2x + 3$; $3y^3 + 2y^2 + y + 5$ হলো একচল বিশিষ্ট বহুপদ।

বহুপদী, বিশিষ্ট বীজগাণিতিক চলরাশি হয়ে থাকে। এইজন্য বহুপদীর যোগ, বিয়োগ ও গুণ এই ক্রিয়াগুলি বীজগাণিতিক চলরাশি অনুসারে করা হয়।

$$\begin{aligned} \text{উদা. (1)} \quad & (3x^2 - 2x) \times (4x^3 - 3x^2) \\ &= 3x^2(4x^3 - 3x^2) - 2x(4x^3 - 3x^2) \\ &= 12x^5 - 9x^4 - 8x^4 + 6x^3 \\ &= 12x^5 - 17x^4 + 6x^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(2)} \quad & (4x - 5) - (3x^2 - 7x + 8) \\ &= 4x - 5 - 3x^2 + 7x - 8 \\ &= -3x^2 + 4x + 7x - 8 \\ &= -3x^2 + 11x - 13 \end{aligned}$$

বহুপদীর মাত্রা (Degree of a polynomial)

আগাম উদাহরণে প্রদত্ত বহুপদীতে চলের সবচেয়ে বড়ো সূচক হকে লেখো।

উদা. (1) $3x^2 + 4x$ এই বহুপদীতে চলের সবচেয়ে বড়ো সূচক হলো 2।

উদা. (2) $7x^3 + 5x + 4x^5 + 2x^2$ এই

বহুপদীতে চলের সবচেয়ে বড়ো সূচক হলো 5।

প্রদত্ত বহুপদীতে চলের সবচেয়ে বড়ো সূচককে ঐ বহুপদীর মাত্রা বলা হয়।



আমি এটা বুঝতে পেরেছি।

- একচল বিশিষ্ট বীজগাণিতিক চলরাশির প্রত্যেক পদে চলার সূচক অথবা সংখ্যা হলে, সেই রাশি একচল বিশিষ্ট বহুপদ হয়ে থাকে।
- বহুপদীতে চলার সবচেয়ে বড়ো সূচক অর্থাৎ ওই বহুপদীর মাত্রা হয়ে থাকে।



এসো জেনে নেই।

(I) একপদীকে একপদী দ্বারা ভাগ দেওয়া (To divide a monomial by a monomial)

উদা. (1) ভাগ দাও : $15p^3 \div 3p$

সমাধান : ভাগ হলো গুণের বিপরীত ক্রিয়া

$15p^3 \div 3p$, এই ভাগ করার জন্য, $3p$ এই একপদীকে

কোন একপদী দিয়ে গুণ করলে গুণফল $15p^3$ আসবে

ইহার বিচার করতে হবে।

$$3p \times 5p^2 = 15p^3 \therefore 15p^3 \div 3p = 5p^2$$

এই উদাহরণের গঠন পাশে দেওয়া অনুসারে করা যেতে পারে।

$$\begin{array}{r} 5p^2 \\ 3p \overline{) 15p^3} \\ \underline{15p^3} \\ 0 \end{array}$$

উদা. (2) ভাগ করো এবং ছকে সঠিক পদ লেখো।

(i) $(-36x^4) \div (-9x)$

$$\begin{array}{r} \boxed{} \\ -9x \overline{) -36x^4} \\ \underline{} \\ \boxed{} \end{array}$$

(ii) $(5m^2) \div (-m)$

$$\begin{array}{r} \boxed{} \\ -m \overline{) 5m^2} \\ \underline{} \\ \boxed{} \end{array}$$

(iii) $(-20y^5) \div (2y^3)$

$$\begin{array}{r} \boxed{} \\ 2y^3 \overline{) -20y^5} \\ \underline{} \\ \boxed{} \end{array}$$

বহুপদীকে একপদী দ্বারা ভাগ দেওয়া (To divide a polynomial by a monomial)

নিম্নলিখিত উদাহরণের অভ্যাস করো এবং বহুপদীকে একপদী দ্বারা ভাগ দেওয়ার পদ্ধতি বুঝে নাও।

উদা. (1) $(6x^3 + 8x^2) \div 2x$

$$\begin{array}{r} 3x^2 + 4x \\ 2x \overline{) 6x^3 + 8x^2} \\ \underline{6x^3} \\ 0 + 8x^2 \\ \underline{- 8x^2} \\ 0 \end{array}$$

সমাধান :

বিশ্লেষণ -

(i) $2x \times \boxed{3x^2} = 6x^3$

(ii) $2x \times \boxed{4x} = 8x^2$

$\therefore$ ভাগফল $= 3x^2 + 4x$

অবশিষ্ট $= 0$

উদা. (2) $(15y^4 + 10y^3 - 3y^2) \div 5y^2$

সমাধান :

$$\begin{array}{r} 3y^2 + 2y - \frac{3}{5} \\ 5y^2 \overline{) 15y^4 + 10y^3 - 3y^2} \\ \underline{-15y^4} \\ 0 + 10y^3 - 3y^2 \\ \underline{-10y^3} \\ 0 - 3y^2 \\ \underline{+3y^2} \\ 0 \end{array}$$

$\therefore$ ভাগফল $= 3y^2 + 2y - \frac{3}{5}$ ও অবশিষ্ট $= 0$

বিশ্লেষণ -

(i) $5y^2 \times 3y^2 = 15y^4$

(ii) $5y^2 \times 2y = 10y^3$

(iii) $5y^2 \times \frac{-3}{5} = -3y^2$

উদা. (3) $(12p^3 - 6p^2 + 4p) \div 3p^2$

সমাধান :

$$\begin{array}{r} 4p - 2 \\ 3p^2 \overline{) 12p^3 - 6p^2 + 4p} \\ \underline{-12p^3} \\ 0 - 6p^2 + 4p \\ \underline{+6p^2} \\ 0 + 4p \end{array}$$

$\therefore$ ভাগফল $= 4p - 2$ ও অবশিষ্ট $= 4p$

বিশ্লেষণ -

(i) $3p^2 \times 4p = 12p^3$

(ii) $3p^2 \times -2 = -6p^2$

উদা. (4) $(5x^4 - 3x^3 + 4x^2 + 2x - 6) \div x^2$

সমাধান :

$$\begin{array}{r} 5x^2 - 3x + 4 \\ x^2 \overline{) 5x^4 - 3x^3 + 4x^2 + 2x - 6} \\ \underline{-5x^4} \\ 0 - 3x^3 + 4x^2 + 2x - 6 \\ \underline{+3x^3} \\ 0 + 4x^2 + 2x - 6 \\ \underline{-4x^2} \\ 0 + 2x - 6 \end{array}$$

বিশ্লেষণ -

(i) $x^2 \times 5x^2 = 5x^4$

(ii) $x^2 \times -3x = -3x^3$

(iii) $x^2 \times 4 = 4x^2$

$\therefore$ ভাগফল $= 5x^2 - 3x + 4$ ও অবশিষ্ট $= 2x - 6$

বহুপদীর ভাগ করার সময় যখন অবশিষ্ট শূন্য আসে অথবা অবশিষ্টের মাত্রা ভাজক বহুপদীর মাত্রা অপেক্ষা ছোটো হয়, তখন ভাগের ক্রিয়া সম্পূর্ণ হয়।

উপরোক্ত উদা. (3) -এ, অবশিষ্ট $4p$ -এর মাত্রা ভাজক $3p^2$ এই বহুপদীর মাত্রা অপেক্ষা ছোটো।
তেমনই উদা (4) এ অবশিষ্ট $2x - 6$ -এর মাত্রা ভাজক x^2 এই বহুপদীর মাত্রা অপেক্ষা ছোটো, এটা লক্ষ্য রাখবে।

অনুশীলনী 10.1

1. ভাগ করো। ভাগফল ও অবশিষ্ট লেখো।

$$(1) 21m^2 \div 7m$$

$$(2) 40a^3 \div (-10a)$$

$$(3) (-48p^4) \div (-9p^2)$$

$$(4) 40m^5 \div 30m^3$$

$$(5) (5x^3 - 3x^2) \div x^2$$

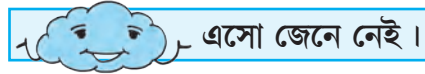
$$(6) (8p^3 - 4p^2) \div 2p^2$$

$$(7) (2y^3 + 4y^2 + 3) \div 2y^2$$

$$(8) (21x^4 - 14x^2 + 7x) \div 7x^3$$

$$(9) (6x^5 - 4x^4 + 8x^3 + 2x^2) \div 2x^2$$

$$(10) (25m^4 - 15m^3 + 10m + 8) \div 5m^3$$



বহুপদীকে দ্বিপদী দ্বারা ভাগ দেওয়া। (To divide a polynomial by a binomial)

বহুপদীকে দ্বিপদী দ্বারা ভাগ দেওয়ার পদ্ধতি এটা বহুপদীকে একপদী দ্বারা ভাগ দেওয়ার পদ্ধতিরই অনুরূপ হয়ে থাকে।

উদা. (1) $(x^2 + 4x + 4) \div (x + 2)$

সমাধান :

বিশ্লেষণ - □

$$\begin{array}{r} x + 2 \\ x + 2 \overline{) x^2 + 4x + 4} \\ \underline{-(x^2 + 2x)} \\ 0 + 2x + 4 \\ \underline{-(2x + 4)} \\ 0 \end{array}$$

(i) প্রথমে ভাজ্য ও ভাজককে সূচকের অধঃক্রমে লিখবে।

ভাজকের প্রথম পদকে x দ্বারা গুণ করলে ভাজ্যের প্রথম পদ প্রাপ্ত হয়।

$\therefore$ ভাজককে x দ্বারা গুণ করবে।

(ii) $(x + 2) \times \boxed{2} = 2x + 4$

$\therefore$ ভাগফল $= x + 2$ ও অবশিষ্ট $= 0$

উদা. (2) $(y^4 + 24y - 10y^2) \div (y + 4)$

সমাধান : এখানে ভাজ্য বহুপদীর মাত্রা হলো 4। এরমধ্যে চল্লের সূচক অধঃক্রমে দেওয়া নেই। তেমনি এখানে সূচক 3 এর পদ ও দেওয়া নেই। তাকে ধরে নাও $0y^3$ এবং ভাজ্য বহুপদী সূচকের অধঃক্রমে লিখবো ও ভাগ করবো।

$$\begin{array}{r}
 y^3 - 4y^2 + 6y \\
 y + 4 \overline{) y^4 + 0y^3 - 10y^2 + 24y} \\
 \underline{-y^4 + 4y^3} \\
 0 - 4y^3 - 10y^2 + 24y \\
 \underline{+ 4y^3 + 16y^2} \\
 0 + 6y^2 + 24y \\
 \underline{- 6y^2 + 24y} \\
 0
 \end{array}$$

বিশ্লেষণ -

(i) $(y + 4) \times y^3 = y^4 + 4y^3$

(ii) $(y + 4) \times -4y^2 = -4y^3 - 16y^2$

(iii) $(y + 4) \times 6y = 6y^2 + 24y$

$\therefore$ ভাগফল $= y^3 - 4y^2 + 6y$ ও অবশিষ্ট $= 0$

উদা. (3) $(6x^4 + 3x^2 - 9 + 5x + 5x^3) \div (x^2 - 1)$

সমাধান :

$$\begin{array}{r}
 6x^2 + 5x + 9 \\
 x^2 - 1 \overline{) 6x^4 + 5x^3 + 3x^2 + 5x - 9} \\
 \underline{- 6x^4 + 6x^2} \\
 0 + 5x^3 + 9x^2 + 5x - 9 \\
 \underline{+ 5x^3 + 5x} \\
 0 + 9x^2 + 10x - 9 \\
 \underline{- 9x^2 + 9} \\
 0 + 10x + 0
 \end{array}$$

বিশ্লেষণ -

(i) $(x^2 - 1) \times 6x^2 = 6x^4 - 6x^2$

(ii) $(x^2 - 1) \times 5x = 5x^3 - 5x$

(iii) $(x^2 - 1) \times 9 = 9x^2 - 9$

$\therefore$ ভাগফল $= 6x^2 + 5x + 9$ ও অবশিষ্ট $= 10x$



আমি এটা বুঝতে পেরেছি।

- বহুপদীর ভাগ করার সময় যখন অবশিষ্ট শূন্য আসে অথবা অবশিষ্টের মাত্রা ভাজক বহুপদীর মাত্রা অপেক্ষা ছোটো হয়, তখন ভাগের ক্রিয়া পূর্ণ হয়ে থাকে।
- ভাজ্য বহুপদীর পদ সূচকের অধঃক্রমে না থাকলে ওই বহুপদীর সূচক অধঃক্রমে লিখবে। এইভাবে লেখার সময় যে সূচকের পদ দেওয়া নেই সেই পদের গুণক 0 ধরে নিয়ে সূচকের অধঃক্রম পূর্ণ করবে।

অনুশীলনী 10.2

1. ভাগ করো। ভাগফল ও অবশিষ্ট লেখো।

(1) $(y^2 + 10y + 24) \div (y + 4)$

(2) $(p^2 + 7p - 5) \div (p + 3)$

(3) $(3x + 2x^2 + 4x^3) \div (x - 4)$

(4) $(2m^3 + m^2 + m + 9) \div (2m - 1)$

(5) $(3x - 3x^2 - 12 + x^4 + x^3) \div (2 + x^2)$

(6*) $(a^4 - a^3 + a^2 - a + 1) \div (a^3 - 2)$

(7*) $(4x^4 - 5x^3 - 7x + 1) \div (4x - 1)$

১১১

উত্তরমালা

অনুশীলনী 10.1

1. $3m, 0$ 2. $-4a^2, 0$ 3. $\frac{-16}{3}p^2, 0$ 4. $\frac{4}{3}m^2, 0$

5. $5x - 3, 0$ 6. $4p - 2, 0$ 7. $y + 2, 3$ 8. $3x, -14x^2 + 7x$

9. $3x^3 - 2x^2 + 4x + 1, 0$ 10. $5m - 3, 10m + 8$

অনুশীলনী 10.2

1. $y + 6, 0$ 2. $p + 4, -17$ 3. $4x^2 + 18x + 75, 300$

4. $m^2 + m + 1, 10$ 5. $x^2 + x - 5, x - 2$

6. $a - 1, a^2 + a - 1$ 7. $x^3 - x^2 - \frac{x}{4} - \frac{29}{16}, \frac{-13}{16}$



একটু স্বরণ করি।

উদা. নিনাদ দ্বারা প্রতিদিন একটি পুস্তকের পঠিত পৃষ্ঠার সংখ্যা হলো 60, 50, 54, 46, 50। তাহলে প্রতিদিন পঠিত পৃষ্ঠার গড় নির্ণয় করো।

সমাধান : গড় = $\frac{\text{পঠিত পৃষ্ঠার যোগফল}}{\text{মোট প্রাপ্ত মানের সংখ্যা}}$

$$= \frac{60 + \boxed{} + \boxed{} + \boxed{} + 50}{\boxed{}} = \frac{\boxed{}}{\boxed{}} = \boxed{}$$

∴ প্রতিদিন পঠিত পৃষ্ঠার গড় $\boxed{}$ হয়।

এই গড়কে মধ্য অথবা মধ্যমান বলা হয়।



এসো জেনে নেই।

উপরের উদাহরণে প্রতিদিন পঠিত পৃষ্ঠার সংখ্যা হলো সংখ্যাসূচক তথ্য। এর থেকে আমরা এই সিদ্ধান্তে পৌঁছালাম যে নিনাদ প্রতিদিন সাধারণত 52টি পৃষ্ঠা পড়েছে।

এইভাবে কোনো ঘটনাবিসয়ে অথবা সমস্যাবিসয়ে সংখ্যাসূচক তথ্য সংগ্রহ করা এবং সেই তথ্যের অনুশীলন করে কিছু সিদ্ধান্ত অর্জন করা, এটা হলো একটা স্বাধীন জ্ঞানশাখা। এই শাখাকে পরিসংখ্যান বলা হয়।

মধ্য (Mean)

আমরা দেখেছি যে 60, 50, 54, 46, ও 50 এই সংখ্যাগুলির গড় 52 হয়। এই গড়কে পরিসংখ্যানের পরিভাষায় মধ্য বলে। সংখ্যাসূচক বিষয়বস্তুর মধ্য বের করার জন্য বিষয়বস্তুর সংখ্যাগুলির যোগফল করা হয়। এই যোগফলকে বিষয়বস্তুর মোট সংখ্যা দিয়ে ভাগ করা হয়।

মধ্য বের করার এই পদ্ধতির সম্বন্ধে এসো আমরা আরো অনুশীলন করি। এর জন্য নীচে দেওয়া উদাহরণগুলি দেখো।

উদা. একটি বিদ্যালয়ের অষ্টম শ্রেণীর 37 জন ছাত্রছাত্রীর গণিত বিষয়ের পরিক্ষায় 10 এর মধ্যে প্রাপ্ত মানগুলি নিচে দেওয়া আছে। এই মানগুলির মধ্য নির্ণয় করো।

2, 4, 4, 8, 6, 7, 3, 8, 9, 10, 10, 8, 9, 7, 6, 5, 4, 6, 7, 8, 4, 8, 9, 7, 6, 5, 10, 9, 7, 9, 10, 9, 6, 9, 9, 4, 7।

সমাধান : এই উদাহরণে বিষয়বস্তুর সংখ্যার যোগ করার জন্য নিরর্থক বহু সময় কেটে যাবে। আমরা এটা জানি যে $7 + 7 + 7 + 7 + 7 = 7 \times 5 = 35$ । এর দ্বারা কোনো একটি সংখ্যার সাথে ওই সংখ্যাকেই যোগ করার ক্রিয়া সহজ হয়। এরই ব্যবহার করে বিষয়বস্তুর সংখ্যার যোগ করা সহজ হবে এই কারণে এসো আমরা বিষয়বস্তুর সংখ্যার পৃথককরণ করে সংখ্যার যোগ করি।

মান X_i (প্রাপ্ত মান)	গণ চিহ্ন	ছাত্রছাত্রীর সংখ্যা (গণসংখ্যা) f_i	$f_i \times X_i$
2		1	$1 \times 2 = 2$
3		1	$1 \times 3 = 3$
4		5	$5 \times 4 = 20$
5		2	$2 \times 5 = 10$
6		5	$5 \times 6 = 30$
7		6	$6 \times 7 = 42$
8		5	$5 \times 8 = 40$
9		8	$8 \times 9 = 72$
10		4	$4 \times 10 = 40$
		$N = 37$	$\Sigma f_i X_i = 259$

$$\begin{aligned}
 \text{মধ্যমান} &= \frac{\Sigma f_i \times X_i}{N} \\
 &= \frac{259}{37} \\
 &= 7
 \end{aligned}$$

উপরে দেওয়া অনুযায়ী তালিকা তৈরী করে প্রদত্ত বিষয়বস্তুর মধ্য নির্ণয় করার জন্য নীচে দেওয়া সোপানগুলি মনে রেখো।

- প্রথম স্তম্ভে $X_1 < X_2 < X_3 \dots$ এইরূপে উর্ধ্বক্রমে প্রাপ্ত মান লেখো, এটা তালিকায় X_i দ্বারা চিহ্নিত করা হয়েছে।
- দ্বিতীয় স্তম্ভে গণ চিহ্ন দাও।
- তৃতীয় স্তম্ভে প্রতিটি মানের সাথে যুক্ত গণচিহ্নের গণনা করে গণসংখ্যা লেখো। এই গণসংখ্যা f_i দ্বারা দেখানো হয়েছে। তার নিচে সমস্ত গণসংখ্যার সমষ্টি লেখো। মোট গণসংখ্যা 'N' দ্বারা চিহ্নিত করা হয়েছে।
- অন্তিম স্তম্ভে $f_i \times X_i$ এই গুণক্রিয়া লেখো। তার নিচে সমস্ত গুণফলের যোগফল লেখো। $f_i \times X_i$ এই গুণের যোগফল $\Sigma f_i \times X_i$ 'Σ' এইরকম দেখানো হয়। (সিমা-গ্রিকবর্ণ) এর অর্থ হলো যোগফল। মধ্য X (এক্স বার) চিহ্ন দ্বারা দেখানো হয়।

$$\therefore \text{মধ্যমান } \bar{X} = \frac{\Sigma f_i \times X_i}{N}$$

উদা. রাজাপুর নামে এক গ্রামের 30 জন কৃষকদের সোয়াবিনের মোট উৎপাদন নিচে কুইন্টালে দেওয়া আছে।
 9, 7.5, 8, 6, 5.5, 7.5, 5, 8, 5, 6.5, 5, 5.5, 4, 4, 8,
 6, 8, 7.5, 6, 9, 5.5, 7.5, 8, 5, 6.5, 5, 9, 5.5, 4, 8.
 এর সাহায্যে গণসংখ্যা বিভাজন তালিকা তৈরী করো এবং সয়াবিনের মোট উৎপাদনের মধ্য নির্ণয় করো।

সমাধান :

মোট উৎপাদন (কুইন্টাল) x_i	গণ চিহ্ন	কৃষক সংখ্যা (গণ সংখ্যা) f_i	$f_i \times x_i$
4		3	12
5		5	25
5.5		4	22
6		3	18
6.5		2	13
7.5		4	30
8		6	48
9		3	27
		$N = 30$	$\sum f_i x_i = 195.$

$$\text{মধ্যমান } \bar{x} = \frac{\sum f_i \times x_i}{N} = \frac{195}{30} = 6.5$$

মোট সয়াবিন উৎপাদনের মধ্য = 6.5 কুইন্টাল।

অনুশীলনী 11.1

- অষ্টম শ্রেণীর 30 জন ছাত্রছাত্রীর মধ্যে প্রত্যেকের দ্বারা লাগানো চারাগাছের সংখ্যাগুলি নিচে গণসংখ্যা বিভাজন তালিকায় দেওয়া আছে। এর সাহায্যে প্রত্যেক ছাত্রছাত্রীর দ্বারা লাগানো চারাগাছের মধ্য নির্ণয় করার জন্য নিচের ছকগুলি পূর্ণ করো।

চারাগাছের সংখ্যা (x_i)	ছাত্রছাত্রীর সংখ্যা (গণসংখ্যা) f_i	$f_i \times x_i$
1	4	4
2	6	
3	12	
4	8	
	$N =$	$\sum f_i x_i =$

$$\begin{aligned} \text{মধ্যমান } \bar{x} &= \frac{\boxed{}}{N} \\ &= \frac{\boxed{}}{\boxed{}} \\ &= \boxed{} \end{aligned}$$

$\therefore$ প্রত্যেকের দ্বারা লাগানো চারাগাছের মধ্য $\boxed{}$ হয়।

2. একলারা নামে একটি গ্রামের 25টি পরিবার দ্বারা মে মাসে উপভোগ করা বিদ্যুৎ নিচের তালিকায় এককে দেওয়া আছে। তালিকা পূর্ণ করে নিম্নলিখিত প্রশ্নগুলির উত্তর দাও।

বিদ্যুৎ উপভোগ (একক) (প্রাপ্ত মান) x_i	পরিবারের সংখ্যা (গণসংখ্যা) f_i	$f_i \times x_i$
30	7	
45	2	
60	8	
75	5	
90	3	
	$N = \dots\dots\dots$	$\sum f_i x_i = \dots\dots\dots$

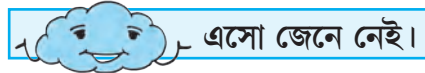
- (1) 45 একক বিদ্যুৎ উপভোগ করে এমন মোট পরিবার কয়টি ?
 (2) কোন প্রাপ্ত মানের গণসংখ্যা 5 নির্দেশ করে ?
 (3) $N =$ কতো ? $\sum f_i x_i =$ কতো ?
 (4) তালিকা অনুসারে মে মাসে প্রত্যেক পরিবার দ্বারা উপভোগ করা বিদ্যুতের মধ্য নির্ণয় করো।

3. ভিলারে 40টি পরিবারের সদস্য সংখ্যা হলো :

1, 6, 5, 4, 3, 2, 7, 2, 3, 4, 5, 6, 4, 6, 2, 3, 2, 1, 4, 5, 6, 7, 3, 4, 5, 2, 4, 3, 2, 3, 5, 5, 4, 6, 2, 3, 5, 6, 4, 2। গণসংখ্যা বিভাজন তালিকার ব্যবহার করে এই 40টি পরিবারের সদস্য সংখ্যার মধ্য নির্ণয় করো।

4. ‘মডেল হায়স্কুল, নান্দপূর’ দ্বারা রাজ্য স্তরের বিজ্ঞান প্রদর্শনীতে বিগত 20 বছরে অংশী হওয়া বিজ্ঞান ও গণিত প্রকল্পের সংখ্যা নিচে দেওয়া আছে। এর সাহায্যে গণসংখ্যা বিভাজন তালিকা তৈরী করে বিষয়বস্তুর মধ্য নির্ণয় করো।

2, 3, 4, 1, 2, 3, 1, 5, 4, 2, 3, 1, 3, 5, 4, 3, 2, 2, 3, 2.



সপ্তম শ্রেণীতে আমরা সাধারণ স্তম্ভলেখ ও দ্বি-স্তম্ভলেখের অনুশীলন করেছি। এসো আরো কিছু স্তম্ভলেখের অনুশীলন করি।

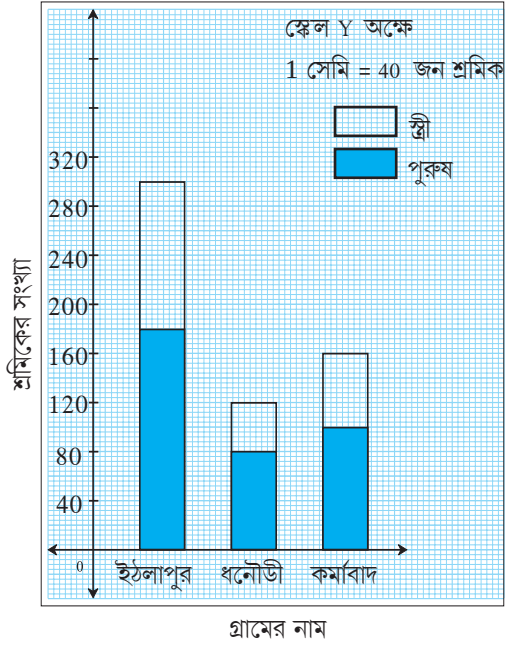
বিভক্ত স্তম্ভলেখ (Subdivided bar graph/diagram)

বিষয়বস্তুর তথ্যের তুলনামূলক বিশ্লেষণ দ্বি স্তম্ভলেখের ন্যায় বিভক্ত স্তম্ভলেখের দ্বারাও করা যায়। ইহাতে দুটি বা তার থেকে বেশি উপাদানের তথ্য একই স্তম্ভে দেখানো হয়। এসো আমরা বিভক্ত স্তম্ভলেখ তৈরী করার ক্রমগুলি দেখি।

গ্রামের নাম	ইঠলাপূর	ধনোড়ী	কর্মাবাদ
পুরুষ শ্রমিক	180	80	100
মহিলা শ্রমিক	120	40	60
মোট শ্রমিক	300		

- প্রথমে উপরে দেওয়া অনুযায়ী বিষয়বস্তুর তথ্যের একটি তালিকা তৈরী করো।

- ছক কাগজে X- অক্ষ ও Y- অক্ষ আঁকো।
- সমান দূরত্ব রেখে X- অক্ষে গ্রামের নাম লেখো।
- Y-অক্ষে শ্রমিকের সংখ্যা লেখো। 1 সেমি = 40 জন শ্রমিক নাও।
- ইঠলাপুর গ্রামে মোট 300 শ্রমিক আছে। শ্রমিকের এই সংখ্যা একটি স্তম্ভে দেখাও।

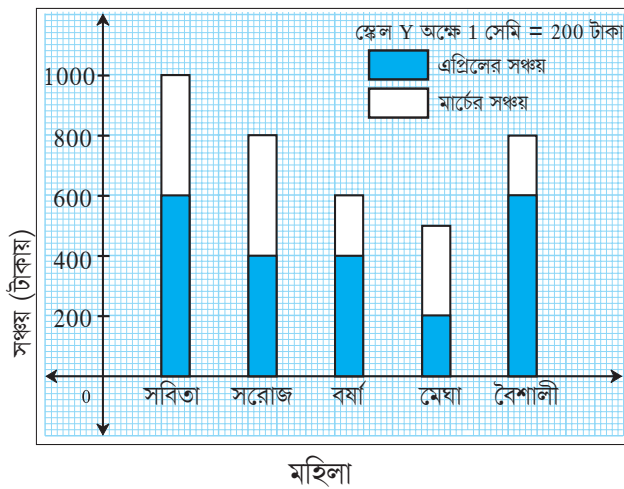


- এর মধ্যে পুরুষ শ্রমিক মোট শ্রমিক স্তম্ভের একটি ভাগ, এটা একটি চিহ্নের দ্বারা দেখাও।
- স্তম্ভে বেঁচে থাকা ভাগ স্বাভাবিকভাবে স্ত্রী শ্রমিকের সংখ্যা নির্দেশ করবে। সেটা একটি ভিন্ন চিহ্নের দ্বারা দেখাও।
- এইভাবে ধনৌড়ী ও কর্মাবাদ গ্রামের জন্য বিভক্ত স্তম্ভ আঁকো।

উপরে দেওয়া সোপানগুলির পরে ভিত্তি করে এই বিভক্ত স্তম্ভলেখ পাশে একে দেখানো হয়েছে, এর পর্যবেক্ষণ করো।

অনুশীলনী 11.2

1. নিচের আকৃতির পর্যবেক্ষণ করে প্রশ্নগুলির সঠিক উত্তর লেখো।



- (1) এই আকৃতিটি কোন প্রকারের স্তম্ভলেখ?
- (2) বৈশাখী এপ্রিল মাসে কতো টাকা সঞ্চয় করলো?
- (3) সরোজের মার্চ ও এপ্রিল মাসের মোট সঞ্চয় কতো?
- (4) মেঘার মোট সঞ্চয় অপেক্ষা সবিতার মোট সঞ্চয় কতো টাকা বেশী?
- (5) এপ্রিল মাসে কাহার সঞ্চয় সবথেকে কম?

2. একটি জেলা পরিষদ বিদ্যালয়ে অধ্যয়নরত পঞ্চম শ্রেণী থেকে অষ্টম শ্রেণীর ছেলে এবং মেয়ের সংখ্যা নিচের তালিকায় দেওয়া আছে। এর সাহায্যে একটি বিভক্ত স্তম্ভলেখ আঁকো।
(স্কেল: Y অক্ষে 1 সেমি = 10 জন শিক্ষার্থী নাও।)

শ্রেণী	পঞ্চম	ষষ্ঠ	সপ্তম	অষ্টম
ছেলে	34	26	21	25
মেয়ে	17	14	14	20

3. নিচের তালিকায় চারটি গ্রাম দ্বারা 2016 এবং 2017 সালে রোপণ করা চারাগাছের সংখ্যা দেওয়া আছে। তালিকার তথ্যগুলি বিভক্ত স্তম্ভলেখ দেখাও।

গ্রাম বছর	কর্জত	বডগাও	শিবাপুর	খন্ডালা
2016	150	250	200	100
2017	200	300	250	150

4. নিচের তালিকায় তিনটি শহরের অষ্টম শ্রেণীর কিছু ছেলেমেয়েরা বিদ্যালয়ে যাওয়ার জন্য যানবাহনের ব্যবহার করে, আবার কিছু ছেলেমেয়েরা পায়ে হেঁটে যায় এই তথ্য দেওয়া আছে। এই তথ্য নির্দেশ করে এমন একটি বিভক্ত স্তম্ভলেখ তৈরী করো।
(স্কেল: Y অক্ষে-1 সেমি = 500 ছাত্রছাত্রী নাও।)

শহর →	পেঠন	এওলা	শহাপুর
সাধন ↓			
সাইকেল	3250	1500	1250
বাস ও অটোরিক্সা	750	500	500
পায়ে হেঁটে	1000	1000	500

 এসো জেনে নেই।

শতাংশ স্তম্ভলেখ (Percentage bar graph/diagram)

আর্বী এই গ্রামে লাগানো 60টি গাছ থেকে 42টি গাছ এবং মোর্শী গ্রামে লাগানো 75টি গাছ থেকে 45টি গাছ জীবিত আছে। বার্ষী এই গ্রামে রোপণ করা 90টি গাছ থেকে 45টি গাছ জীবিত আছে।

কোন গ্রামের বৃক্ষারোপণ অধিক সফল হয়েছে তাহা বোঝার জন্য শুধুমাত্র সংখ্যাই যথেষ্ট নয়। তার জন্য শতকরা জীবিত গাছের সংখ্যা নির্ণয় করতে হবে।

$$\text{আর্বী গ্রামে শতকরা জীবিত গাছের সংখ্যা} = \frac{42}{60} \times 100 = 70 \text{ ।}$$

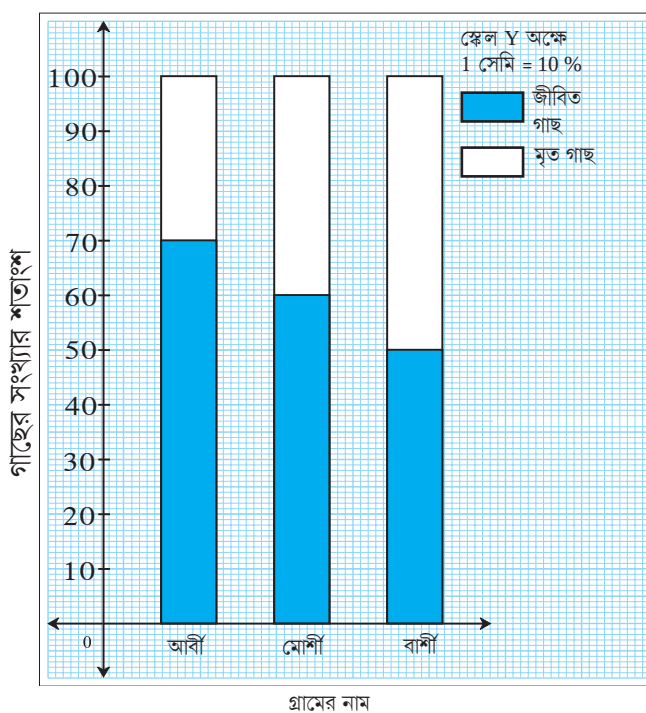
$$\text{মোর্শী গ্রামে শতকরা জীবিত গাছের সংখ্যা} = \frac{45}{75} \times 100 = 60 \text{ ।}$$

এই শতাংশগুলির বিশেষভাবে অবলোকন করার পর এই তাৎপর্যে পৌঁছালাম যে আর্বী গ্রামে জীবিত গাছের সংখ্যা কম থাকা সত্ত্বেও তাদের শতকরা সংখ্যা বেশী। এর মানে শতাংশ থেকে একটু ভিন্ন ধরনের তথ্য পাওয়া যায়।

প্রদত্ত তথ্য শতকরায় রূপান্তরিত করে যে বিভক্ত স্তম্ভলেখ আঁকা হয়, তাকে শতাংশ স্তম্ভলেখ বলা হয়। অর্থাৎ শতাংশ স্তম্ভলেখ বিভক্ত স্তম্ভলেখের একটি বিশেষ রূপ। নিচে দেওয়া সোপানগুলির সাহায্যে এসো আমরা শতাংশ স্তম্ভলেখ অঙ্কন করি।

- প্রথমে নিম্ন অনুসারে একটি তালিকা তৈরী করবো।

গ্রাম	আবী	মোশী	বাশী
রোপণ করা মোট গাছ	60	75	90
জীবিত গাছ	42	45	45
জীবিত গাছের শতাংশ	$\frac{42}{60} \times 100 = 70$	$\frac{45}{75} \times 100 = 60$	$\frac{45}{90} \times 100 = 50$



- শতাংশ স্তম্ভলেখে প্রতিটি স্তম্ভের উচ্চতা 100 একক নেওয়া হয়।
- প্রতিটি স্তম্ভে জীবিত গাছের শতাংশ প্রদর্শিত করা হয়। অবশিষ্ট শতাংশ হলো মৃত গাছের।
- শতাংশ স্তম্ভলেখ এক প্রকারে বিভক্ত স্তম্ভলেখ হওয়ার কারণে বাকি সব কৃতিগুলি বিভক্ত স্তম্ভলেখের কৃতির অনুরূপ হয়।

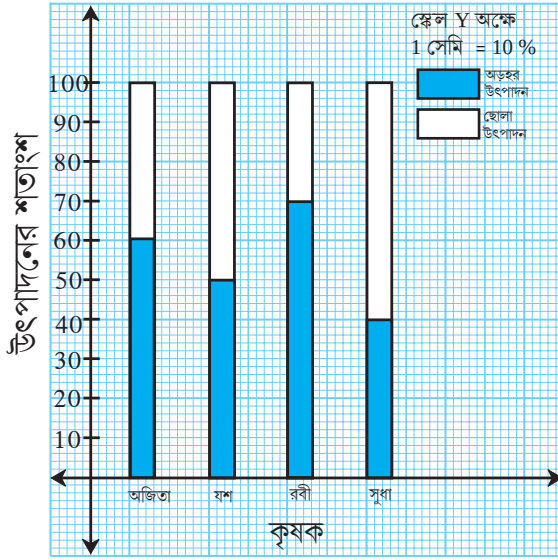
উপরে দেওয়া সোপান অনুসারে পাশে স্তম্ভলেখ আঁকা হয়েছে। এর পর্যবেক্ষণ করো।

অনুশীলনী 11.3

1. নিচের তালিকায় যে তথ্যগুলি দেওয়া আছে তার সাহায্যে শতাংশ স্তম্ভলেখ আঁকো।

অষ্টম শ্রেণীর বিভাগ	A	B	C	D
গণিত বিষয়ে A শ্রেণী প্রাপ্ত ছাত্রছাত্রী	45	33	10	15
মোট ছাত্রছাত্রী	60	55	40	75

2. নীচে দেওয়া স্তম্ভলেখের পর্যবেক্ষণ করে প্রশ্নগুলির উত্তর লেখো।



- (1) পাশের স্তম্ভলেখটি কোন প্রকারের স্তম্ভলেখ?
- (2) অজিতার ক্ষেত্রে অড়হর ডালের উৎপাদন, মোট উৎপাদনের কতো শতাংশ?
- (3) যশ এবং রবি এদের মধ্যে কাহার ছোলার উৎপাদনের শতাংশ কতো বেশী?
- (4) অড়হর ডালের উৎপাদনে সবচেয়ে কম শতাংশ কাহার?
- (5) সুধার অড়হর ডাল এবং ছোলা উৎপাদনের শতাংশ কতো?

3. কিছু বিদ্যালয়ের দশম শ্রেণীর ছাত্রছাত্রীদের পর্যবেক্ষণ থেকে প্রাপ্ত তথ্যগুলি নিচের তালিকায় দেওয়া হয়েছে। এই তথ্যগুলি শতাংশ স্তম্ভলেখের দ্বারা দেখাও।

বিদ্যালয়	প্রথম	দ্বিতীয়	তৃতীয়	চতুর্থ
বিজ্ঞান শাখায় রুচি	90	60	25	16
বাণিজ্য শাখায় রুচি	60	20	25	24

উপক্রম : শতাংশ স্তম্ভলেখ এবং বিভক্ত স্তম্ভলেখের মধ্যে তুলনাত্মক চর্চা করো। এর ব্যবহার করে বিজ্ঞান, ভূগোল মতো বিষয়ে এইরকম লেখচিত্র সম্পর্কে তথ্য জেনে নাও।

৯৯৯

উত্তরমালা

অনুশীলনী 11.1 2. (1) 2 (2) 75 (3) $N = 25, \sum f_i \times x_i = 1425$ (4) 57

3. 3.9 4. 2.75

অনুশীলনী 11.2 1. (1) বিভক্ত স্তম্ভলেখ (2) ₹ 600 (3) ₹ 800
(4) ₹ 500 (5) মেঘার

অনুশীলনী 11.3 2. (1) শতাংশ স্তম্ভলেখ (2) 60%
(3) যশের উৎপাদন 20% বেশী (4) সুধার
(5) 40% এবং 60%



একটু স্মরণ করি।

পূর্ব শ্রেণীতে আমরা একচল সমীকরণের অধ্যয়ন করেছি।

- সমীকরণে প্রদত্ত চল্লের জন্য যে মূল্য রাখলে সমীকরণের উভয় পক্ষ সমান হয় ওই মূল্য অর্থাৎ ওই সমীকরণের সমাধান হয়ে থাকে।
- সমীকরণ হল করা অর্থাৎ তাহার সমাধান খোঁজ করা।
- সমীকরণের উভয় পক্ষে একই ক্রিয়া করলে প্রাপ্ত হওয়া সমীকরণ সত্য হয়ে থাকে। এই বৈশিষ্ট্যের ব্যবহার করে আমরা নতুন সরল সমীকরণ তৈরী করে প্রদত্ত সমীকরণ সমাধান করি।
- সমীকরণের উভয় পক্ষের ক্রিয়া।
 - (i) উভয় পক্ষে সমান সংখ্যা যোগ করা।
 - (ii) উভয় পক্ষে থেকে সমান সংখ্যা বিয়োগ করা।
 - (iii) উভয় পক্ষে সমান সংখ্যা দ্বারা গুণ করা।
 - (iv) উভয় পক্ষে সমান শূন্যত্তর সংখ্যা দ্বারা ভাগ করা।

নিম্নলিখিত সমীকরণগুলি সমাধান করতে শূন্যস্থান পূর্ণ করো।

উদা. (1) $x + 4 = 9$

$$x + 4 - \square = 9 - \square$$

$$\therefore x = \square$$

উদা. (3) $\frac{x}{3} = 4$

$$\frac{x}{3} \times \square = 4 \times \square$$

$$\therefore x = \square$$

উদা. (2) $x - 2 = 7$

$$x - 2 + \square = 7 + \square$$

$$\therefore x = \square$$

উদা. (4) $4x = 24$

$$\frac{4x}{\square} = \frac{24}{\square}$$

$$\therefore x = \square$$



এসো জেনে নেই।

একচল সমীকরণের সমাধান (Solution of equations in one variable)

কখনো-কখনো একটি সমীকরণ সমাধান করার জন্য একাধিক ক্রিয়া করা লাগে। এরকম সমীকরণের উভয় পক্ষে ক্রিয়া করে সমাধান করার কিছু প্রকার দেখবো।

উদা. (1) নিচের সমীকরণগুলি সমাধান করো।

(i) $2(x - 3) = \frac{3}{5}(x + 4)$

সমাধান : উভয় পক্ষে 5 দ্বারা গুণ করে,

$$10(x - 3) = 3(x + 4)$$

$$\therefore 10x - 30 = 3x + 12$$

উভয় পক্ষে 30 যোগ করে,

$$\therefore 10x - 30 + 30 = 3x + 12 + 30$$

$$10x = 3x + 42$$

উভয় পক্ষ থেকে $3x$ বিয়োগ করে,

$$\therefore 10x - 3x = 3x + 42 - 3x$$

$$\therefore 7x = 42$$

উভয় পক্ষে 7 দ্বারা ভাগ করে,

$$\frac{7x}{7} = \frac{42}{7}$$

$$\therefore x = 6$$

(ii) $9x - 4 = 6x + 29$

সমাধান : উভয় পক্ষে 4 যোগ করে,

$$9x - 4 + 4 = 6x + 29 + 4$$

$$\therefore 9x = 6x + 33$$

উভয় পক্ষ থেকে $6x$ বিয়োগ করে,

$$\therefore 9x - 6x = 6x + 33 - 6x$$

$$\therefore 3x = 33$$

উভয় পক্ষে 3 দ্বারা ভাগ করে,

$$\therefore \frac{3x}{3} = \frac{33}{3}$$

$$\therefore x = 11$$

(iii) $\frac{2}{3} + 5a = 4$

সমাধান : পদ্ধতি I

$$\frac{2}{3} + 5a = 4$$

উভয় পক্ষে 3 দ্বারা গুণ করে,

$$3 \times \frac{2}{3} + 3 \times 5a = 4 \times 3$$

$$\therefore 2 + 15a = 12$$

$$\therefore 15a = 12 - 2$$

$$\therefore 15a = 10$$

$$\therefore a = \frac{10}{15}$$

$$\therefore a = \frac{2}{3}$$

পদ্ধতি II

উভয় পক্ষ থেকে $\frac{2}{3}$ বিয়োগ করে,

$$\frac{2}{3} + 5a - \frac{2}{3} = 4 - \frac{2}{3}$$

$$\therefore 5a = \frac{12-2}{3}$$

$$\therefore 5a = \frac{10}{3}$$

উভয় পক্ষে 5 দ্বারা ভাগ করে,

$$\frac{5a}{5} = \frac{10}{3} \times \frac{1}{5}$$

$$\therefore a = \frac{2}{3}$$

যদি A, B, C, D এই শূন্যস্তর রাশির জন্য $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ হয় তাহলে উভয় পক্ষে $B \times D$ দ্বারা গুণ করে

$AD = BC$ এই সমীকরণ প্রাপ্ত হয়। এটি ব্যবহার করে উদাহরণগুলি সমাধান করবো।

$$(iv) \quad \frac{(x-7)}{(x-2)} = \frac{5}{4}$$

$$\text{সমাধান : } \frac{(x-7)}{(x-2)} = \frac{5}{4}$$

$$\therefore 4(x-7) = 5(x-2)$$

$$\therefore 4x - 28 = 5x - 10$$

$$\therefore 4x - 5x = -10 + 28$$

$$\therefore -x = 18 \quad \therefore x = -18$$

$$(v) \quad \frac{8m-1}{2m+3} = 2$$

$$\text{সমাধান : } \frac{8m-1}{2m+3} = \frac{2}{1}$$

$$1(8m-1) = 2(2m+3)$$

$$\therefore 8m - 1 = 4m + 6$$

$$\therefore 8m - 4m = 6 + 1$$

$$\therefore 4m = 7 \quad \therefore m = \frac{7}{4}$$

অনুশীলনী 12.1

1. প্রতিটি সমীকরণের পরে চলের জন্য প্রদত্ত মান ওই সমীকরণের সমাধান কি না তাহা নির্ধারণ করো।

$$(1) x - 4 = 3, \quad x = -1, 7, -7$$

$$(2) 9m = 81, \quad m = 3, 9, -3$$

$$(3) 2a + 4 = 0, \quad a = 2, -2, 1$$

$$(4) 3 - y = 4, \quad y = -1, 1, 2$$

2. নিম্নলিখিত সমীকরণগুলি সমাধান করো।

$$(1) 17p - 2 = 49$$

$$(2) 2m + 7 = 9$$

$$(3) 3x + 12 = 2x - 4$$

$$(4) 5(x-3) = 3(x+2) \quad (5) \frac{9x}{8} + 1 = 10$$

$$(6) \frac{y}{7} + \frac{y-4}{3} = 2$$

$$(7) 13x - 5 = \frac{3}{2}$$

$$(8) 3(y+8) = 10(y-4) + 8$$

$$(9) \frac{x-9}{x-5} = \frac{5}{7}$$

$$(10) \frac{y-4}{3} + 3y = 4$$

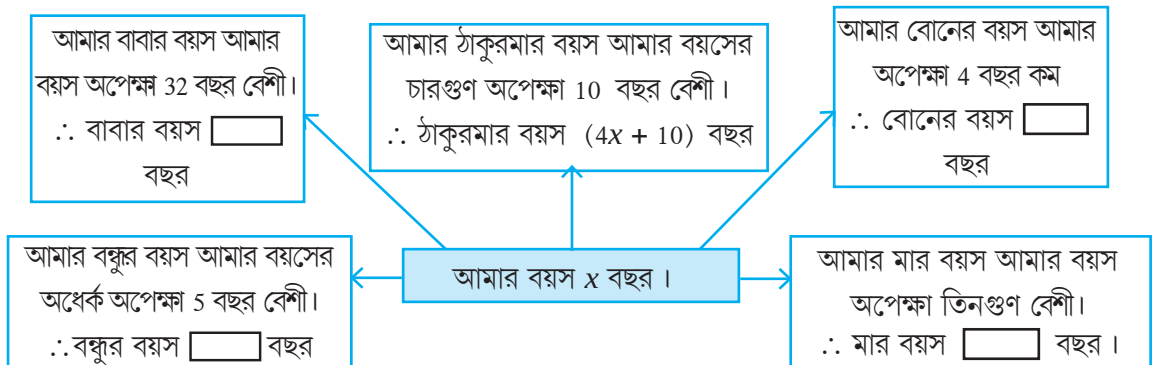
$$(11) \frac{b+(b+1)+(b+2)}{4} = 21$$



এসো জেনে নেই।

শাব্দিক উদাহরণ (Word Problems)

শাব্দিক উদাহরণের প্রদত্ত তথ্যের জন্য চল ব্যবহার করে সেই তথ্যটি বীজগাণিতিক রাশিতে কিভাবে লিখতে হয় তাহা দেখবো।



পূর্বে দেওয়া তথ্য অনুযায়ী আমার বন্ধুর বয়স যদি 12 বছর হয়, তাহলে আমার বয়স কতো ?

$$\text{আমার বয়স} = x \text{ বছর।} \quad \therefore \text{বন্ধুর বয়স} = \frac{x}{2} + 5$$

$$\frac{x}{2} + 5 = 12 \quad \dots\dots (\text{দেওয়া আছে})$$

$$\therefore x + 10 = 24 \quad \dots\dots (\text{প্রত্যেক পদে 2 দ্বারা গুণ করে})$$

$$\therefore x = 24 - 10$$

$$\therefore x = 14$$

$\therefore$ আমার বয়স 14 বছর। এই ভিত্তি অনুযায়ী উপরের তথ্যের দ্বারা অন্য ব্যক্তির বয়স বের করো।

কৃতি : ছকে সঠিক সংখ্যা লেখো।

প্রস্থের তিনগুণ দৈর্ঘ্য

আমি একটি আয়তক্ষেত্র
আমার পরিসিমা
40 সেমি

প্রস্থ
 x

আয়তক্ষেত্রের পরিসিমা = 40

$$2(\square x + \square x) = 40$$

$$2 \times \square x = 40$$

$$\square x = 40$$

$$x = \square$$

$$\therefore \text{আয়তক্ষেত্রের প্রস্থ} = \square \text{ সেমি এবং আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য} = \square \text{ সেমি}$$

সমাধান করা উদাহরণ

উদা. (1) জোসেফের ওজন তার ছোট ভাইয়ের ওজনের দ্বিগুণ। উভয়ের ওজন মিলে 63 কি.গ্রা., তাহলে জোসেফের ওজন বের করো।

সমাধান : মনে করি জোসেফের ছোট ভাইয়ের ওজন x কি. গ্রা.

$$\therefore \text{জোসেফের ওজন তার ভাইয়ের ওজনের দ্বিগুণ} = 2x$$

$$\therefore \text{প্রদত্ত তথ্য অনুযায়ী } x + 2x = 63$$

$$\therefore 3x = 63 \quad \therefore x = 21$$

$$\therefore \text{জোসেফের ওজন} = 2x = 2 \times 21 = 42 \text{ কি.গ্রা.}$$

উদা. (2) একটি ভগ্নাংশের লব তার হর অপেক্ষা 5 বড়। লব এবং হর এদের প্রত্যেকটিতে 4 যুক্ত করলে $\frac{6}{5}$ -এই ভগ্নাংশ প্রাপ্ত হয়, তাহলে সেই ভগ্নাংশটি নির্ণয় করো।

সমাধান : মনে করি ভগ্নাংশের হর x ।

$$\therefore \text{ওই ভগ্নাংশের লব, হর অপেক্ষা 5 বেশী অর্থাৎ } x + 5 \text{।}$$

$$\therefore \text{ওই ভগ্নাংশ হলো } \frac{x+5}{x} \text{।}$$

তার লব এবং হরে 4 যুক্ত করলে নতুন ভগ্নাংশ $\frac{6}{5}$ হবে।

$$\therefore \frac{x+5+4}{x+4} = \frac{6}{5}$$

$$\therefore \frac{x+9}{x+4} = \frac{6}{5}$$

$$\therefore 5(x+9) = 6(x+4)$$

$$\therefore 5x + 45 = 6x + 24$$

$$\therefore 45 - 24 = 6x - 5x$$

$$\therefore 21 = x$$

$$\therefore \text{ভগ্নাংশের হর} = 21, \text{ লব} = 21 + 5 = 26$$

$$\therefore \text{ওই ভগ্নাংশ} = \frac{26}{21}$$

উদা. (3) রত্নার কাছে টাকা রফিকের কাছে টাকার তিনগুণ অপেক্ষা 200 টাকা বেশী। রত্নার কাছ থেকে 300 টাকা নিয়ে রফিককে দিলো, তাহলে রত্নার কাছে টাকা রফিকের কাছে টাকার $\frac{7}{4}$ গুণ হবে, তাহলে রফিকের কাছে আসল কতো টাকা ছিলো?

আসল টাকা বের করার জন্য নিম্নলিখিত কৃতিগুলি পূর্ণ করো।

সমাধান : রত্নার কাছে টাকা, রফিকের কাছে টাকার তিনগুণ অপেক্ষা 200 টাকা বেশী।

মনে করি রফিকের কাছে x টাকা। $\therefore$ রত্নার কাছে টাকা

$\therefore$ রত্নার কাছে 300 টাকা নিয়ে রফিককে দিলো,

$\therefore$ এইজন্য রত্নার কাছে বেঁচে থাকলো টাকা

$\therefore$ এখন রফিকের কাছে হলো $(x + 300)$ টাকা।

রত্নার কাছে নতুন জমা টাকা রফিকের কাছে টাকার $\frac{7}{4}$ গুণ হয়েছে।

$$\frac{\text{রত্নার কাছে টাকা}}{\text{রফিকের কাছে টাকা}} = \frac{\text{input}}{\text{input}}$$

$$\frac{3x - 100}{x + 300} = \frac{\text{input}}{\text{input}}$$

$$4 \text{ input} = 7 \text{ input}$$

$$12x - 400 = 7x + 2100$$

$$12x - 7x = \text{input}$$

$$5x = \text{input}$$

$$x = \text{input}$$

$\therefore$ রফিকের কাছে টাকা হবে।

অনুশীলনী 12.2

1. মায়ের বয়স ছেলের বয়স অপেক্ষা 25 বছর বেশী। 8 বছর পর ছেলের বয়স মায়ের বয়সের $\frac{4}{9}$ অনুপাত হবে, তাহলে ছেলের বয়স বের করো।
2. একটি ভগ্নাংশের হর লবের অপেক্ষা 12 গুণ বড়ো। তার লব থেকে 2 বিয়োগ করে এবং হরে 7 যোগ করে তৈরি হওয়া ভগ্নাংশ $\frac{1}{2}$ এর সমমূল্য হয়, তাহলে ওই ভগ্নাংশ কোনটি?

3. পিতলের সংমিশ্রণে তামা ও দস্তার অনুপাত 13:7 থাকলে 700 গ্রাম ওজনের পিতলের একটি পাত্রে দস্তা কতো হবে ?
- 4*. তিনিটি ক্রমাগত পূর্ণসংখ্যার যোগফল 45 অপেক্ষা বেশী কিন্তু 54 অপেক্ষা কম, তাহলে ওই সংখ্যা নির্ণয় করো।
5. দুই অঙ্কের সংখ্যার দশক স্থানের অঙ্ক একক স্থানের অঙ্কের দ্বিগুণ। অঙ্কের অদল-বদল করে প্রাপ্ত সংখ্যা এবং আসল সংখ্যা এদের যোগফল 66 হয়, তাহলে সেই সংখ্যা কোনটি ?
- 6*. একটি থিয়েটারে নাটকের জন্য 200 টাকা এবং 100 টাকা হারে কিছু টিকিট বিক্রি হয়েছিলো। 200 টাকা হারের টিকিটের সংখ্যা 100 টাকার টিকিটের সংখ্যা অপেক্ষা 20টি টিকিট বেশী বিক্রি হয়েছিলো। উভয় টিকিটের বিক্রি থেকে 37000 টাকা প্রাপ্ত হয়, তাহলে 100 টাকার কতো টিকিট বিক্রি করা হয়েছিলো ?
7. তিনটি ক্রমাগত স্বাভাবিক সংখ্যা থেকে সবচেয়ে ছোট সংখ্যার পাঁচগুণ সবচেয়ে বড় সংখ্যার চারগুণের অপেক্ষা 9 বেশী হয়, তাহলে ওই সংখ্যাগুলি কোনটি ?
8. রাজু একটি সাইকেল 8% লাভে অমিতকে বিক্রি করলো। অমিত 54 টাকা ব্যয় করে ওটাকে ঠিক করে নিলো ওই সাইকেল সে নিখিলকে 1134 টাকায় বিক্রি করলো। তখন অমিতের কোনো লাভ অথবা হানি হয় নাই। তাহলে রাজু ওই সাইকেলটিকে কতো টাকায় ক্রয় করেছিলো ?
9. একজন ক্রিকেটার এক ম্যাচে 180 রান করেছিলো। দ্বিতীয় ম্যাচে 257 রান করেছিলো। তৃতীয় ম্যাচে সে কতো রান করলে তার ম্যাচের রান গড়ে 230 হবে ?
10. সুধিরের বয়স বিরুর বয়সের তিনগুণ অপেক্ষা 5 বেশী। অনিলের বয়স সুধিরের বয়সের অর্ধেক। সুধির ও বিরুর বয়সের যোগফল এবং অনিলের বয়সের তিনগুণ এদের অনুপাত হলো 5:6। তাহলে বিরুর বয়স নির্ণয় করো।

৯৯৯

উত্তরমালা

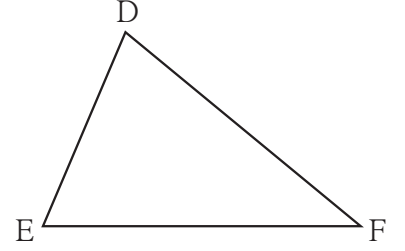
- অনুশীলনী 12.1** 1. সমীকরণের সমাধান করা মূল্য (1) $x = 7$ (2) $m = 9$ (3) $a = -2$
 (4) $y = -1$ 2. (1) $p = 3$ (2) $m = 1$ (3) $x = -16$ (4) $x = \frac{21}{2}$ (5) $x = 8$ (6) $y = 7$
 (7) $x = \frac{1}{2}$ (8) $y = 8$ (9) $x = 19$ (10) $y = \frac{8}{5}$ (11) $b = 27$
- অনুশীলনী 12.2** 1. 12 বছর 2. $\frac{23}{35}$ 3. 245 গ্রাম
 4. 15, 16, 17 অথবা 16, 17, 18 5. 42 6. 110
 7. 17, 18, 19 8. ₹ 1000 9. 253 10. 5 বছর



একটু স্মরণ করি।

সংলগ্ন আকৃতির সাহায্যে নিম্নলিখিত প্রশ্নের উত্তর খোঁজ করো।

- বাহু DE-এর সম্মুখ কোণ কোনটি?
- $\angle E$ কোন বাহুর সম্মুখ কোণ?
- বাহু DE এবং বাহু DF দ্বারা অন্তর্ভুক্ত কোণ কোনটি?
- $\angle E$ এবং $\angle F$ দ্বারা অন্তর্ভুক্ত বাহু কোনটি?
- বাহু DE এর সম্বিহিত কোণ কোনটি?



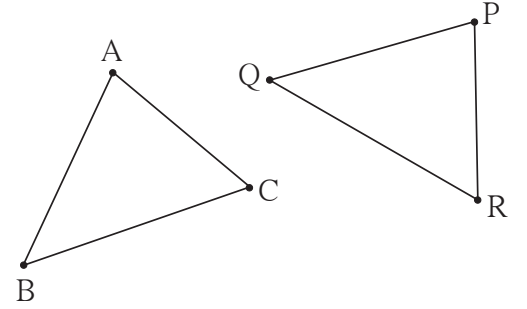
- যে চিত্রগুলি একে অপরের সাথে সম্পূর্ণভাবে মিলে যায়। সেই আকৃতিগুলিকে সর্বসম আকৃতি বলে।
- যে রেখাংশের দৈর্ঘ্য সমান হয়, সেই রেখাংশগুলি সর্বসম হয়ে থাকে।
- যে কোণের মাপ সমান হয়, সেই কোণ সর্বসম হয়ে থাকে।



এসো জেনে নেই।

ত্রিভুজের সর্বসমতা (Congruence of triangles)

কৃতি : সংলগ্ন আকৃতিগুলি দেখো। পারদর্শক ট্রেসিং পেপারে ΔABC তৈরী করে ওই কাগজ ΔPQR -এর উপরে রেখে দেখো। বিন্দু A, বিন্দু P-এর উপরে, বিন্দু B বিন্দু Q-এর উপরে এবং বিন্দু C বিন্দু R-এর উপরে রেখে দেখো। উভয় ত্রিভুজ একে অপরের সাথে সম্পূর্ণভাবে মিলে যায় অর্থাৎ উভয় ত্রিভুজ সর্বসম হয়, তাহা দেখা যায়।

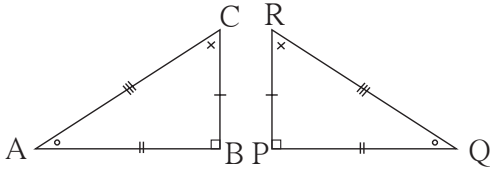


কৃতিতে ΔABC কে ΔPQR -এর উপর রাখার একটি পদ্ধতি দেওয়া হলো। কিন্তু বিন্দু A কে Q-এর উপর, বিন্দু B কে R-এর উপর এবং বিন্দু C কে P-এর উপর রাখলে, ওই ত্রিভুজ একে-অপরের সাথে সম্পূর্ণভাবে মিলবে না। অর্থাৎ বিশিষ্ট পদ্ধতি দ্বারা তারা একে অপরের সাথে মেলা প্রয়োজন। এই মিলানোর পদ্ধতিকে পরস্পর সংগতি দ্বারা দেখানো হয়। বিন্দু A-এর সংগতি হলো বিন্দু P-এর সঙ্গে, $A \leftrightarrow P$ এইভাবে লিখতে হয়। এখানে, $A \leftrightarrow P$, $B \leftrightarrow Q$, $C \leftrightarrow R$ এই সংগতি দ্বারা ত্রিভুজ সর্বসম হয়। এই পদ্ধতিতে ত্রিভুজ সর্বসম হলে $\angle A \cong \angle P$, $\angle B \cong \angle Q$, $\angle C \cong \angle R$, তেমনিভাবে রেখাংশ $AB \cong$ রেখাংশ PQ , রেখাংশ $BC \cong$ রেখাংশ QR ,

রেখাংশ $CA \cong$ রেখাংশ RP এমন ছয়টি সর্বসমতা প্রাপ্ত হয়। এইজন্য $\triangle ABC$ এবং $\triangle PQR$ এটা $ABC \leftrightarrow PQR$ এই সংগতি দ্বারা সর্বসম হয় এটা বলা যায় এবং $\triangle ABC \cong \triangle PQR$ এইভাবে লিখতে হয়। এইরূপ লেখার সময় $A \leftrightarrow P$, $B \leftrightarrow Q$, $C \leftrightarrow R$ এই শীর্ষবিন্দুর পরস্পর সংগতি এবং তাদের দ্বারা প্রাপ্ত হওয়া ছয়টি সর্বসমতা জড়িত থাকে। এইজন্য দুটি ত্রিভুজ সর্বসম আছে তাহা লেখার সময় শীর্ষবিন্দুর ক্রম সর্বসমতার পরস্পর সংগতির অনুসারে তৈরি করে, এর দিকে লক্ষ্য রাখবে।



$\triangle ABC$ এবং $\triangle PQR$ এই সর্বসম ত্রিভুজের সর্বসম অংশগুলি সমান চিহ্ন দ্বারা দেখানো হয়েছে।



অনিলের লেখন : $\triangle ABC \cong \triangle QPR$

রোহানার লেখন : $\triangle BAC \cong \triangle PQR$

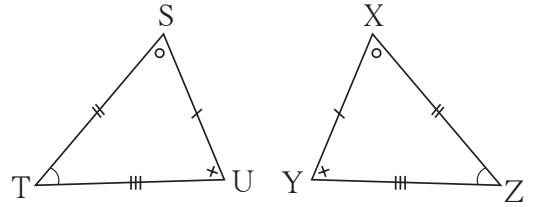
সুরজিৎ এর লেখন : $\triangle ABC \cong \triangle PQR$

অনিল, রেহানা এবং সুরজিৎ এই ত্রিভুজ গুলির সর্বসমতার লেখন নিম্নরূপে করেছিলো।

এই লেখনগুলি থেকে কোনটি ঠিক বা কোনটি ভুল? তাহা চর্চা করো।

সমাধান করা উদাহরণ

উদা. (1) সংলগ্ন আকৃতির ত্রিভুজে সমান চিহ্ন দ্বারা দেখানো অংশগুলি সর্বসম। শীর্ষবিন্দুর যে পরস্পর সংগতি দ্বারা এই ত্রিভুজ সর্বসম হয় ওই সংগতিতে ত্রিভুজের সর্বসমতা দুই প্রকারে লেখো।



(ii) $\triangle XYZ \cong \triangle STU$ এই লেখন ঠিক বা ভুল, কারণসহিত লেখো।

সমাধান : পর্যবেক্ষণের ভিত্তিতে দেওয়া ত্রিভুজ $STU \leftrightarrow XZY$ পরস্পর সংগতি দ্বারা সর্বসম।

(i) প্রথম প্রকারঃ $\triangle STU \cong \triangle XZY$, দ্বিতীয় প্রকারঃ $\triangle UST \cong \triangle YXZ$ এই সর্বসমতাকে আরও আলাদা-আলাদা প্রকারে লেখার চেষ্টা করো।

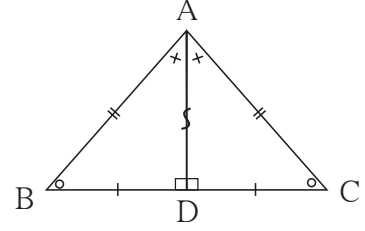
(ii) এই ত্রিভুজের সর্বসমতা $\triangle XYZ \cong \triangle STU$ এইরূপ লিখলে বাহু $ST \cong$ বাহু XY এরকম অর্থ হবে কিন্তু এটা ভুল।

$\therefore \triangle XYZ \cong \triangle STU$ এইরূপ লেখা ভুল হবে।

($\Delta XYZ \cong \Delta STU$ এই লেখন দ্বারা আরও কিছু ভুল হতে পারে। তাহা শিক্ষার্থীদের খোঁজ করতে হবে। কিন্তু উত্তরটি কেনো ভুল হলো এই বলারজন্য যে কোনো একটি ভুল দেখানোই যথেষ্ট।)

উদা. (2) নিচে দেওয়া আকৃতিতে, ত্রিভুজের জোড়ায় সমান চিহ্নে দেখানো অংশগুলি সর্বসম। ওই ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুর কোন পরস্পর সংগতি দ্বারা ত্রিভুজ সর্বসম হবে তাহা বলো এবং ত্রিভুজের সর্বসমতা চিহ্ন দ্বারা দেখাও।

সমাধান : ΔABD এবং ΔACD এদের মধ্যে বাহু AD হলো সামান্য রেখাংশ। প্রতিটি রেখাংশ তার নিজের সঙ্গে সর্বসম হয়।



সংগতি : $A \leftrightarrow A, B \leftrightarrow C, D \leftrightarrow D$ $\Delta ABD \cong \Delta ACD$

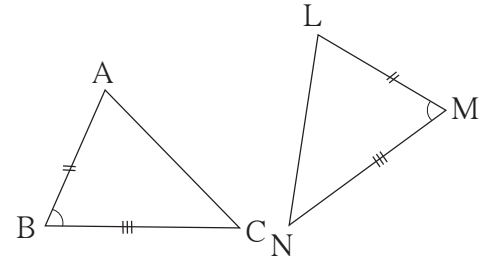
বিঃদ্র : সামান্য বাহুতে ‘ ’ ’ এই চিহ্ন দেওয়ার নিয়ম আছে।



যে কোনো জোড়ার ত্রিভুজ সর্বসম আছে কি না? তাহা দেখানোর জন্য সর্ব ছয়টি অংশগুলির সর্বসমতা দেখানোর কোনো প্রয়োজন হয় না। একটি ত্রিভুজের তিনটি বিশিষ্ট অংশ অপর একটি ত্রিভুজের অনুরূপ অংশের সাথে সর্বসম হলে, অবশিষ্ট তিনটি অংশের জোড়াও একে-অপরের সাথে সর্বসম হয়ে থাকে। অর্থাৎ ওই বিশিষ্ট তিনটি অংশ সর্বসমতার শর্ত নির্দিষ্ট করে।

আমরা কিছু ত্রিভুজ আঁকতে শিখেছি। যে কোনো তিনটি অংশ দেওয়া থাকলে ত্রিভুজ সহজে তৈরী করা যেতে পারে। ওই অংশগুলি যে সর্বসমতার শর্ত নির্দিষ্ট করে, তাহা আমরা যাচাই করে দেখবো।

(1) দুটি বাহু এবং তাদের অন্তর্ভুক্ত কোণঃ বাহু-কোণ-বাহু শর্ত দুটি সর্বসম বাহুর জোড়া এবং তাদের অন্তর্ভুক্ত কোণও সর্বসম হয়, এমনভাবে ΔABC এবং ΔLMN আঁকো। ΔABC এবং ΔLMN -এর মধ্যে $l(AB) = l(LM)$, $l(BC) = l(MN)$, $m\angle ABC = m\angle LMN$



ΔABC কে ট্রেসিং পেপারে তৈরী করে ট্রেসিং পেপার ΔLMN -এর উপর এমনভাবে রাখো যে, শীর্ষবিন্দু A এটা শীর্ষবিন্দু L -এর উপর, বাহু AB এটা বাহু LM -এর উপর, $\angle B$ এটা $\angle M$ -এর উপর এবং বাহু BC এটা বাহু MN -এর উপর যেনো সঠিক ভাবে পড়ে। তাহলে দেখা যাবে যে $\Delta ABC \cong \Delta LMN$ ।

(2) তিনটি সন্নিহিত বাহুঃ বাহু-বাহু-বাহু শর্ত

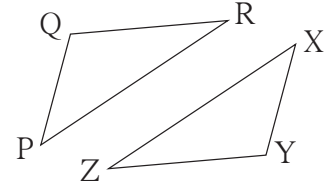
$$l(PQ) = l(XY), l(QR) = l(YZ), (RP) = l(ZX)$$

এইভাবে ΔPQR এবং ΔXYZ আঁকো।

ট্রেসিং পেপারে ΔPQR তৈরি করে ΔXYZ -এর

উপর $P \leftrightarrow X, Q \leftrightarrow Y, R \leftrightarrow Z$ এইভাবে

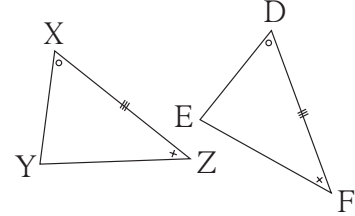
পরস্পর সংগতি অনুসারে রাখো। তাহলে দেখা যাবে যে $\Delta PQR \cong \Delta XYZ$ ।



(3) দুটি কোণ এবং তাদের অন্তর্ভুক্ত বাহুঃ কোণ-বাহু-কোণ শর্ত

ΔXYZ এবং ΔDEF এমনভাবে আঁকো যে,

$$l(XZ) = l(DF), \angle X \cong \angle D \text{ এবং } \angle Z \cong \angle F$$



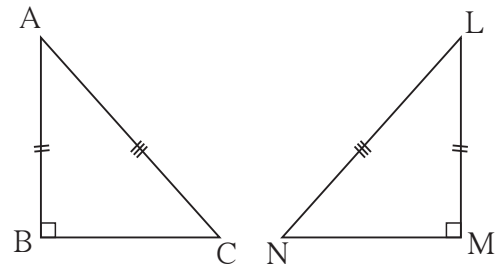
ট্রেসিং পেপারে ΔXYZ তৈরি করে ওই পেপার ΔDEF -এর উপর রাখো। $X \leftrightarrow D, Y \leftrightarrow E, Z \leftrightarrow F$ । এই সংগতি দ্বারা দেখা যাবে যে $\Delta XYZ \cong \Delta DEF$

(4) কোণ-কোণ-বাহু (অথবা বাহু-কোণ-কোণ) শর্ত

দুটি ত্রিভুজের সন্নিহিত কোণের দুটি জোড়া সর্বসম হলে, অবশিষ্ট কোণও সর্বসম হয়ে থাকে। কারণ প্রত্যেক ত্রিভুজের তিনটি কোণের মাপের যোগফল 180° হয়ে থাকে। এইজন্য যে কোনো দুটি কোণ ও একটি কোণের সন্নিহিত বাহু অপর একটি ত্রিভুজের অনুরূপ দুটি কোণ ও সন্নিহিত বাহু একে অপরের সাথে সর্বসম হলে, কোণ-কোণ বাহু শর্তের নিয়ম পূর্ণ হয়ে থাকে এবং উভয় ত্রিভুজ সর্বসম হয়ে থাকে।

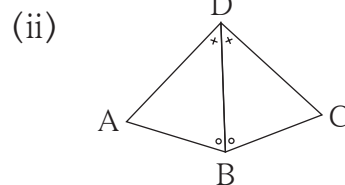
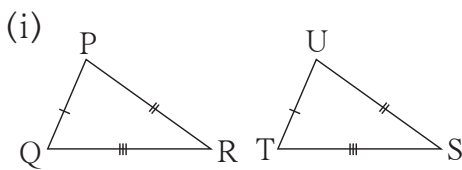
(5) সমকোণ ত্রিভুজের কর্ণ (অতিভুজ) বাহু শর্ত

সমকোণ ত্রিভুজের কর্ণ এবং একটি বাহু দেওয়া থাকলে সঠিক ত্রিভুজ তৈরি করা যেতে পারে। একটি সমকোণ ত্রিভুজের কর্ণ এবং একটি বাহু অপর একটি সমকোণ ত্রিভুজের সন্নিহিত অংশগুলি একে অপরের সাথে সর্বসম হয় এমন দুটি সমকোণ ত্রিভুজ তৈরি করো। উপরোক্ত নিয়ম অনুসারে তাহা সর্বসম আছে কি? তাহা যাচাই করে দেখো।



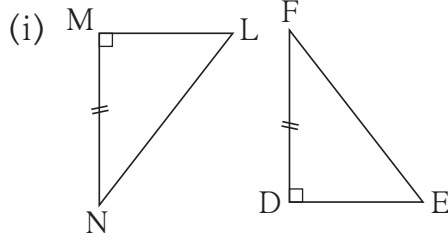
সমাধান করা উদাহরণ

উদা. (1) নিচে দেওয়া ত্রিভুজের প্রত্যেক জোড়ার সমান চিহ্ন দ্বারা দেখানো অংশগুলি সর্বসম হয়। প্রত্যেক জোড়ার ত্রিভুজ কোন শর্তানুসারে এবং শীর্ষবিন্দুর কোন পরস্পর সংগতি দ্বারা সর্বসম হয়, তাহা লেখো।

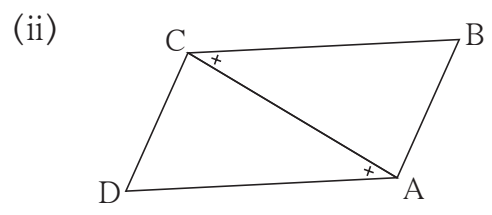


সমাধান : (i) বাহু-বাহু-বহু শর্তদ্বারা $PQR \leftrightarrow UTS$ এই সংগতি অনুসারে
(ii) কোণ-বাহু-কোণ শর্তদ্বারা $DBA \leftrightarrow DBC$ এইসংগতি অনুসারে

উদা. (2) নিচে দেওয়া ত্রিভুজের প্রত্যেক জোড়ার সমান চিহ্ন দ্বারা দেখানো অংশগুলি সর্বসম হয়। প্রত্যেক আকৃতির নিচে ত্রিভুজের সর্বসমতার শর্ত লেখা আছে। ওই শর্তদ্বারা ত্রিভুজ সর্বসম হওয়ার জন্য আরও কোন তথ্যের প্রয়োজন এবং ওই তথ্যকে ভিত্তি করে ত্রিভুজ শীর্ষবিন্দুর কোন পরস্পর সংগতি দ্বারা সর্বসম হবে, তাহা লেখো।



কর্ণবাহু শর্ত



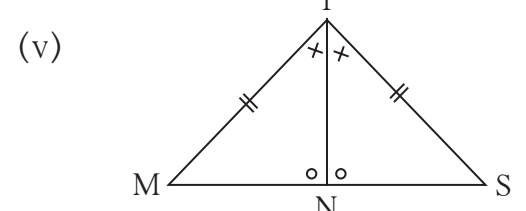
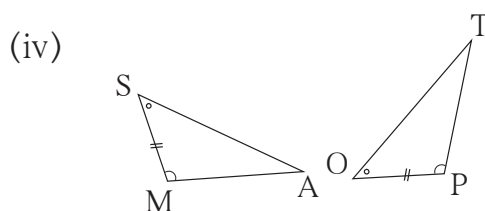
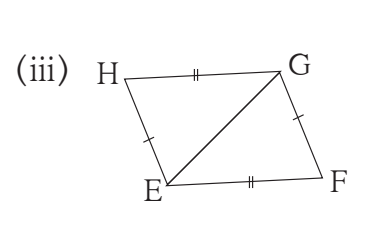
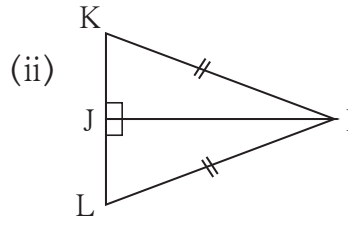
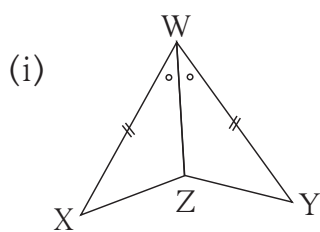
কোণ-বাহু-কোণ শর্ত

সমাধান : (i) দেওয়া ত্রিভুজ হলো সমকোণ ত্রিভুজ। তার এক-একটি বাহু সর্বসম। এইজন্য তার রেখাংশ LN এবং কর্ণ EF সর্বসম। এই তথ্য অনুসারে $LMN \leftrightarrow EDF$ এই সংগতি দ্বারা ত্রিভুজ সর্বসম হবে।

(ii) আকৃতিতে দেওয়া ত্রিভুজের রেখাংশ CA হলো সামান্য বাহু। এইজন্য $\angle DCA \cong \angle BAC$ এই তথ্য অনুসারে $DCA \leftrightarrow BAC$ এই সংগতি দ্বারা ত্রিভুজ সর্বসম হবে।

অনুশীলনী 13.1

1. নিচে দেওয়া ত্রিভুজের প্রত্যেক জোড়ার সমান চিহ্ন দ্বারা দেখানো অংশগুলি সর্বসম। প্রত্যেক জোড়ার ত্রিভুজ কোন শর্ত দ্বারা এবং শীর্ষবিন্দুর কোন পরস্পর সংগতি দ্বারা সর্বসম হবে, তাহা লেখো।





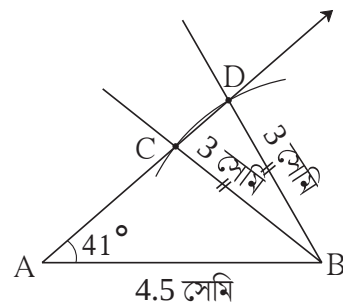
আমি এটা বুঝতে পেরেছি।

- (1) বাহু-কোণ-বাহু শর্ত: যদি একটি ত্রিভুজের দুটি বাহু ও তাদের অন্তর্ভুক্ত কোণ অপর একটি ত্রিভুজের অনুরূপ দুটি সন্নিহিত বাহু এবং তাদের অন্তর্ভুক্ত কোণ সর্বসম হয়, তাহলে উভয় ত্রিভুজ একে-অপরের সাথে সর্বসম হয়ে থাকে।
- (2) বাহু-বাহু-বাহু শর্ত: যদি একটি ত্রিভুজের তিনটি বাহু অপর একটি ত্রিভুজের অনুরূপ সন্নিহিত তিনটি বাহু সর্বসম হয়, তাহলে উভয় ত্রিভুজ দুটি একে-অপরের সাথে সর্বসম হয়ে থাকে।
- (3) কোণ - বাহু - কোণ শর্ত: যদি একটি ত্রিভুজের দুটি কোণ এবং তাদের অন্তর্ভুক্ত বাহু অপর একটি ত্রিভুজের অনুরূপ দুটি সন্নিহিত কোণ এবং তাদের অন্তর্ভুক্ত বাহু সর্বসম হয়, তাহলে উভয় ত্রিভুজ দুটি একে - অপরের সাথে সর্বসম হয়ে থাকে।
- (4) কোণ-কোণ-বাহু শর্ত: যদি একটি ত্রিভুজের দুটি কোণ এবং তাদের অন্তর্ভুক্ত না হওয়া একটি বাহু অপর একটি ত্রিভুজের অনুরূপ সন্নিহিত কোণ এবং তাদের অন্তর্ভুক্ত না হওয়া এমন সন্নিহিত বাহু সর্বসম হয়, তাহলে উভয় ত্রিভুজ দুটি একে অপরের সাথে সর্বসম হয়ে থাকে।
- (5) কর্ণ (অতিভুজ) বাহু শর্ত: যদি একটি সমকোণ ত্রিভুজের কর্ণ এবং একটি বাহু অপর একটি সমকোণ ত্রিভুজের অনুরূপ কর্ণ এবং সন্নিহিত বাহু সর্বসম হয়, তাহলে উভয় ত্রিভুজ দুটি একে-অপরের সাথে সর্বসম হয়ে থাকে।

অধিক তথ্যের জন্য

একটি ত্রিভুজের দুটি বাহু এবং তাদের অন্তর্ভুক্ত না হওয়া কোণ অপর একটি ত্রিভুজের সন্নিহিত অংশগুলির সাথে সর্বসম হয়, তাহলে উভয় ত্রিভুজ দুটি একে-অপরের সাথে সর্বসম হবে কি?

সংলগ্ন আকৃতি দেখো। $\triangle ABC$ এবং $\triangle ABD$ -এর মধ্যে বাহু AB হলো সামান্য বাহু। বাহু $BC \cong$ বাহু BD , $\angle A$ হলো সামান্য কোণ, কিন্তু সর্বসম বাহু দ্বারা অন্তর্ভুক্ত হওয়া ওই কোণ নয়। অর্থাৎ একটি ত্রিভুজের তিনটি অংশ অপর একটি ত্রিভুজের সন্নিহিত অংশগুলির সাথে সর্বসম হয়, কিন্তু উভয় ত্রিভুজ দুটি সর্বসম নয়।

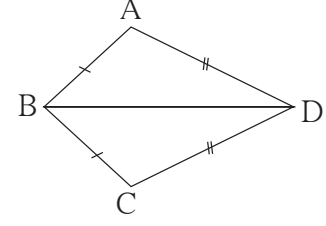


এই ভিত্তিতে, একটি ত্রিভুজের দুটি বাহু এবং তাদের অন্তর্ভুক্ত না হওয়া কোণ অপর একটি ত্রিভুজের সন্নিহিত অংশগুলির সাথে সর্বসম হয়, তাহলে ত্রিভুজ দুটি সর্বসম হবে এমন নয়।

সমাধান করা উদাহরণ

উদা. (1) আকৃতিতে, $\square ABCD$ -এর সর্বসম বাহু সমান চিহ্ন দ্বারা দেখানো হয়েছে। এই আকৃতিতে সর্বসম কোণের জোড়া আছে কি? তাহা খোঁজ করো।

সমাধান : $\triangle ABD$ এবং $\triangle CBD$ -এর মধ্যে,
 বাহু $AB \cong$ বাহু CB (দেওয়া আছে)
 বাহু $DA \cong$ বাহু DC (দেওয়া আছে))
 বাহু BD সামান্য বাহু।

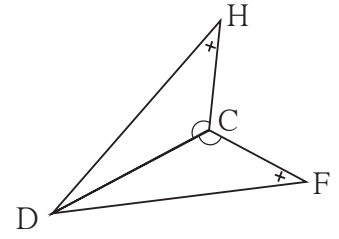
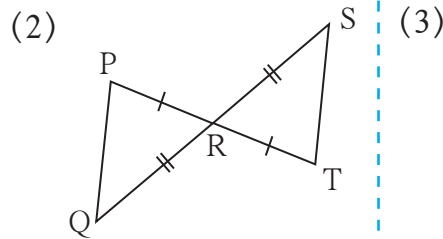
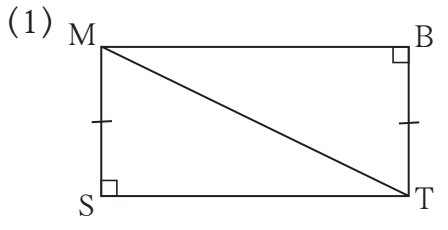


$\therefore \triangle ABD \cong \triangle CBD$ (বাহু-বাহু-বাহু শর্তানুসার)

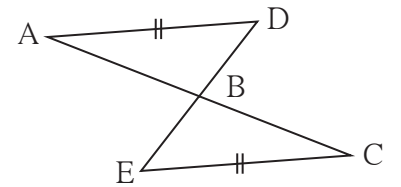
$\therefore \angle ABD \cong \angle CBD$
 $\angle ADB \cong \angle CDB$
 $\angle BAD \cong \angle BCD$ }(সর্বসম ত্রিভুজের সন্নিহিত কোণ)

অনুশীলনী 13.2

1. নিচে দেওয়া প্রত্যেক জোড়ার ত্রিভুজগুলিতে সমান চিহ্ন দ্বারা দেখানো অংশগুলি সর্বসম। প্রত্যেক জোড়ার ত্রিভুজ, শীর্ষবিন্দুর কোন সংগতি এবং কোন শর্তদ্বারা সর্বসম হয়, তাহা লেখো। প্রত্যেক জোড়ার ত্রিভুজগুলির অবশিষ্ট সন্নিহিত সর্বসম অংশগুলি লেখো।



2*. সংলগ্ন আকৃতিতে, রেখাংশ $AD \cong$ রেখাংশ EC । আরও কোন তথ্যের প্রয়োজন হলে $\triangle ABD$ এবং $\triangle ECB$ বাহু-কোণ-কোণ শর্তানুসার সর্বসম হবে?



৳৳৳

উত্তরমালা

অনুশীলনী 13.1 1. (i) বাকোবা, $XWZ \leftrightarrow YWZ$

(ii) কর্ণবাহু $KJI \leftrightarrow LJI$

(iii) বাবাবা $HEG \leftrightarrow FGE$ (iv) কোবাকো $SMA \leftrightarrow OPT$ (v) বাকোকা অথবা কোবাকো $MTN \leftrightarrow STN$

অনুশীলনী 13.2

1. (1) $\triangle MST \cong \triangle TBM$ - কর্ণবাহু, বাহু $ST \cong$ বাহু MB ,

$\angle SMT \cong \angle BTM$, $\angle STM \cong \angle BMT$ (2) $\triangle PRQ \cong \triangle TRS$ - বাকোবা,

বাহু $PQ \cong$ বাহু TS , $\angle RPQ \cong \angle RTS$, $\angle PQR \cong \angle TSR$

(3) $\triangle DCH \cong \triangle DCF$ - বাকোকা অথবা কোবাকো, $\angle DHC \cong \angle DFC$, বাহু $HC \cong$ বাহু FC

2. $\angle ADB \cong \angle CEB$ এবং $\angle ABD \cong \angle CBE$

অথবা $\angle DAB \cong \angle ECB$ এবং $\angle ABD \cong \angle CBE$



একটু স্মরণ করি।

একজন ব্যক্তি ব্যাংক, ছোটো প্রতিষ্ঠান (পতসংস্থা) এই জাতীয় প্রতিষ্ঠান থেকে একটি নির্দিষ্ট সুদের হারে ঋণ নেয় এবং কিছু দিন পরে নেওয়া টাকা ফেরৎ দেয়। এই টাকার ব্যবহারের বিনিময়ে সে আরও কিছু টাকা বেশি দেয়, তাকে সুদ বলে সাধারণ সুদ নির্ণয় করার জন্য $I = \frac{PNR}{100}$ এই সূত্রটি শিখেছি। এই সূত্রে $I =$ সুদ, $P =$ আসল $N =$ সময় (বছর) এবং $R =$ প্র.শ.প্র.ব. সুদের হার।



এসো জেনে নেই।

চক্রবৃদ্ধি সুদ (Compound Interest)

আমরা জানব কেনো এবং কিভাবে ব্যাংক মেয়াদী বা ঋণের উপর চক্রবৃদ্ধি সুদ নেয়।

শিক্ষিকা : সজ্জনরাও একটি ব্যাংক থেকে 10 প্র.শ.প্র.ব. সুদের হার হিসাবে 1 বছরে ফেরৎ দেওয়ার শর্তে দিয়ে 10,000 টাকা ঋণ নিলো, তাহলে বছর শেষে তাকে কতো টাকা সুদ সহ ফেরৎ দিতে হবে ?

শিক্ষার্থী : এখানে $P = 10,000$ টাকা, ; $R = 10$; $N = 1$ বছর

$$\therefore I = \frac{PNR}{100} = \frac{10000 \times 10 \times 1}{100} = 1000 \text{ টাকা}$$

$\therefore$ সজ্জনরাওকে বছরের শেষে $10,000 + 1000 = 11,000$ টাকা সুদ সহ দিতে হবে।

শিক্ষার্থী : কিন্তু, যদি একজন ঋণগ্রহীতা বছর শেষে সুদের টাকা পরিশোধ করতে না পারে ?

শিক্ষিকা : ব্যাংক প্রতি বছরের শেষে সুদ গণনা করে এবং প্রতি বছর ঋণগ্রহীতা সুদের পরিমাণ ব্যাংকে জমা করবে বলে আশা করে যদি ঋণগ্রহীতা প্রথম বছরের পর সুদ না দেয় তাহলে ব্যাংক দ্বিতীয় বছরের জন্য আসল টাকা এবং প্রথম বছরের সুদ মিলে হওয়া টাকাকে ঋণ হিসাবে মেনে নেয়। এইজন্য আসল এবং প্রথম বছরের সুদ মিলে যে সর্বদ্বিমূল হয়, দ্বিতীয় বছর সেই টাকা আসল মেনে নিয়ে সামনের (পরবর্তী) সুদ হিসাবে গণনা করা হয়। অর্থাৎ দ্বিতীয় বছরের সুদ গণনা করার সময় আসল টাকা প্রথম বছরের রাশির সমান হয়ে থাকে। এই পদ্ধতি দ্বারা যে সুদ গণনা করা হয় তাকে চক্রবৃদ্ধি সুদ বলা হয়।

শিক্ষার্থী : সজ্জনরাও যদি ঋণপরিশোধের সময় আরও 1 বছর বাড়িয়ে দেয় তাহলে ?

শিক্ষিকা : তাহলে দ্বিতীয় বছরের জন্য আসল 11,000 টাকা ধরে নিয়ে তার উপর সুদ এবং সর্বদ্বিমূল বের করতে হবে।

শিক্ষার্থী : এর জন্য পূর্ব শ্রেণীতে শেখা $\frac{\text{সর্বদ্বিমূল}}{\text{আসল}} = \frac{110}{100}$ এই অনুপাত ব্যবহার করলে চলবে কি ?

শিক্ষিকা : ঠিক ! প্রতি বছরের জন্য $\frac{\text{সর্বদ্বিমূল}}{\text{আসল}}$ এই অনুপাত স্থির হয়। চক্রবৃদ্ধি সুদ গণনা করার সময় প্রতি বছর গত বছরের সর্বদ্বিমূল, আগামী বছরের আসল হয়ে থাকে। এই জন্য সুদের পরিবর্তে সরাসরি সর্বদ্বিমূল বের করতে সহজ হবে। প্রথম বছরের পর সর্বদ্বিমূল A_1 , দ্বিতীয় বছরের পর সর্বদ্বিমূল A_2 , তৃতীয় বছরের পর সর্বদ্বিমূল A_3 এই ভাবে লিখবো।

প্রথম আসল P ছিলো।

$$\therefore \frac{A_1}{P} = \frac{110}{100} \therefore A_1 = P \times \frac{110}{100}$$

দ্বিতীয় বছরের সর্বদ্বিমূল বের করার জন্য

$$\therefore \frac{A_2}{A_1} = \frac{110}{100} \therefore A_2 = A_1 \times \frac{110}{100} = P \times \frac{110}{100} \times \frac{110}{100}$$

শিক্ষার্থী : তারপর তৃতীয় বছরের সর্বদ্বিমূল A_3 বের করার সময়

$$\therefore \frac{A_3}{A_2} = \frac{110}{100} \therefore A_3 = A_2 \times \frac{110}{100} = P \times \frac{110}{100} \times \frac{110}{100} \times \frac{110}{100}$$

শিক্ষিকা : খুব ভালো! এই হলো চক্রবৃদ্ধি সুদ দ্বারা সর্বদ্বিমূল বের করার সূত্র।

মনে রাখবে যে $\frac{110}{100}$ হলো 1 টাকার বছরের শেষের সর্বদ্বিমূল। যত বছরের সর্বদ্বিমূল বের করতে হবে তত বার আসল কে এই অনুপাত দ্বারা গুণ করতে হবে।

শিক্ষার্থী : আর্থাৎ মেনে নিলাম প্রথম বছরের শেষে $\frac{\text{সর্বদ্বিমূল}}{\text{আসল}}$ এই অনুপাতকে M এবং P কে আসল, তাহলে বছরের শেষে সর্বদ্বিমূল $P \times M$, দ্বিতীয় বছরের শেষে সর্বদ্বিমূল $P \times M^2$ এবং তৃতীয় বছরের শেষে সর্বদ্বিমূল $P \times M^3$ হয়। এই নিয়ম দ্বারা যতই বছরের হোক না কেনো তার সর্বদ্বিমূল বের করা যেতে পারে।

শিক্ষিকা : একদম ঠিক! যদি সুদের হার R প্র.শ.প্র.ব. হয়, তাহলে

$$\therefore 1 \text{ টাকার } 1 \text{ বছরে হওয়া সর্বদ্বিমূল} = 1 \times M = 1 \times \frac{100+R}{100} = 1 \times \left(1 + \frac{R}{100}\right)$$

$$\therefore P \text{ টাকার } 1 \text{ বছরের সর্বদ্বিমূল} = P \times \frac{100+R}{100} = P \times \left(1 + \frac{R}{100}\right)$$

$\therefore$ যদি আসল P, সুদের হার R প্র.শ.প্র.ব., সময় N বছর হয়, তাহলে N বছর পরে

$$\text{সর্বদ্বিমূল, } A = P \times \left(\frac{100+R}{100}\right)^N = P \times \left(1 + \frac{R}{100}\right)^N$$

❖ সমাধান করা উদাহরণ ❖

উদা. (1) $12\frac{1}{2}$ প্র.শ.প্র.ব. সুদের হারে 4000 টাকার 3 বছরের চক্রবৃদ্ধি সুদ বের করো।

সমাধান : এখানে, P = 4000 টাকা; R = $12\frac{1}{2}\%$; N = 3 বছর

$$A = P \left(1 + \frac{R}{100}\right)^N = P \left(1 + \frac{12.5}{100}\right)^3 \quad A = 4000 \left(\frac{1125}{1000}\right)^3 = 4000 \left(\frac{9}{8}\right)^3$$

$$= 4000 \left(1 + \frac{125}{1000}\right)^3 = 5695.31 \text{ টাকা}$$

∴ তিন বছরের চক্রবৃদ্ধি সুদ = সবৃদ্ধিমূল - আসল
 = 5695.31 - 4000 = 1695.31 টাকা

অনুশীলনী 14.1

1. চক্রবৃদ্ধি সুদ দ্বারা প্রাপ্ত সবৃদ্ধিমূল এবং চক্রবৃদ্ধি সুদ নির্ণয় করো।

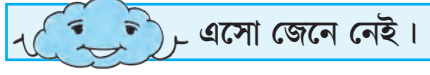
অ.ক্র.	আসল (টাকা)	সুদের হার (প্র.শ.প্র.ব.)	সময় (বছর)
1	2000	5	2
2	5000	8	3
3	4000	7.5	2

2. 12 প্র.শ.প্র.ব. সুদের হারে সমীররাও একটি সহকারি সংস্থা থেকে 3 বছরের জন্য 12500 টাকা ঋণ নিয়েছিলো। তাহলে চক্রবৃদ্ধি সুদের হিসাব করে তাকে তৃতীয় বছরের শেষে কতো টাকা ফেরৎ দিতে হবে ?
3. ব্যবসা শুরু করার উদ্দেশ্যে শলাকা $10\frac{1}{2}$ প্র.শ.প্র.ব. সুদের হার হিসাবে 8000 টাকা ঋণ নিয়েছে। তাহলে 2 বছর পর ঋণ ফেরৎ দেওয়ার সময় চক্রবৃদ্ধি সুদের হিসাবে তাকে কতো টাকা সুদ দিতে হবে ?

আরও তথ্যের জন্য

- কিছু আর্থিক ব্যবহারে প্রতি ছয় মাসে সুদের হিসাব করা হয়। N বছরের সময়ের জন্য সুদের হার R হয় তাহলে ছয় মাসের সুদের হিসাবে দেওয়া আসলের সুদের হার $\frac{R}{2}$ নেওয়া হয়। N বছরের জন্য ছয় মাসের 2N কালাবধি লক্ষ রেখে সুদ নির্ধারণ করা হয়।
- অনেক বিভাগসংস্থা মাসিক সুদের হিসাব দ্বারা চক্রবৃদ্ধি সুদ নির্ণয় করে। তখন সুদের মাসিক হার $\frac{R}{12}$ নেয় এবং সময় $12 \times N$ মোট মাস নিয়ে সুদের হিসাব করে।
- বেশ কিছুদিন আগে থেকে ব্যাংক দৈনিক সুদ হিসাব করে চক্রবৃদ্ধি সুদ নির্ধারণ করে।

উপক্রম : তোমাদের কাছাকাছি ব্যাংকে গিয়ে সেখানের বিভিন্ন স্কিম সম্পর্কে তথ্য জানুন। সেই স্কিমগুলির (যোজনাগুলির) সুদের হারের একটি তালিকা তৈরী করে শ্রেণীতে লাগাও।



চক্রবৃদ্ধি সুদের সূত্রের প্রয়োগ (Application of formula for compound interest)

চক্রবৃদ্ধি সুদ দ্বারা সবৃদ্ধিমূল নির্ণয়ের জন্য সূত্রের ব্যবহার দৈনিক জীবনে অন্যান্য ক্ষেত্রের উদাহরণ সমাধান করার জন্য করা যেতে পারে, যেমন লোকসংখ্যা বৃদ্ধি, প্রতি বছর যে কোনো যানবাহনের মূল্যে হ্রাস হওয়া প্রভৃতি।

কিছু সময়ের জন্য ব্যবহার করার পর যখন কোনো জিনিস বিক্রি করা হয়, তখন তার মূল্য ক্রয়মূল্যের অপেক্ষা কম হয়। কম হওয়া মূল্যকে হ্রাস অথবা মূল্য হ্রাস (depreciation) বলা হয়। মূল্যের হ্রাস একটি নিশ্চিত সময়ে নির্ধারিত হারে হয়ে থাকে। উদা. যন্ত্রের মূল্য প্রতি বছর নির্দিষ্ট শতাংশে কম হয়। কিছু বিশিষ্ট সময়ের পরে হ্রাস হওয়া মূল্য নির্ণয় করার জন্য চক্রবৃদ্ধি সুদের সূত্রের ব্যবহার করা হয়।

এই মূল্য নির্ণয় করার জন্য হ্রাসমূল্যের হার জানা থাকা প্রয়োজন। বস্তুর মূল্য কম হওয়ার কারণে হ্রাস মূল্যের হার R এই ঋণ নেওয়া হয়।

সমাধান করা উদাহরণ

উদা. (1) একটি শহরের লোকসংখ্যা ৪% হারে বৃদ্ধি হয়। ২০১০ সালে যদি ওই শহরের লোকসংখ্যা ২,৫০,০০০ হয়ে থাকে তাহলে ২০১২ সালে ওই শহরের লোকসংখ্যা কতো ছিলো?

সমাধান : এখানে, $P = ২০১০$ সালের লোকসংখ্যা = ২,৫০,০০০

$A = ২০১২$ সালের লোকসংখ্যা,

$R =$ লোকসংখ্যা বৃদ্ধির হার = প্রতি বছর ৪%

$N = ২$ বছর

$A = ২০১২$ সালে অর্থাৎ ২ বছরে বৃদ্ধি হওয়া লোকসংখ্যা

$$\begin{aligned} A &= P \times \left(1 + \frac{R}{100}\right)^N = 250000 \times \left(1 + \frac{4}{100}\right)^2 \\ &= 250000 \times \left(\frac{104}{100}\right)^2 \\ &= 250000 \times \left(\frac{104}{100}\right) \times \left(\frac{104}{100}\right) \\ &= 2,68,160 \end{aligned}$$

∴ ২০১২ সালে শহরের লোকসংখ্যা ২,৬৮,১৬০ ছিলো।

উদা. (2) রেহানা 2015 সালে একটি স্কুটার 60000 টাকায় ক্রয় করেছিলো। প্র.শ.প্র.ব. 20 টাকা হার হিসাবে হ্রাস হয়, তাহলে 2 বছর পর স্কুটারের দাম কতো হবে?

সমাধান : এখানে $P = 60000$ টাকা $A = 2$ বছর পর পাওয়া দাম

$R =$ হ্রাসের হার $= -20\%$ প্রতি বছর $N = 2$ প্রতি বছর

$A = 2$ বছর পর পাওয়া দাম।

$$\begin{aligned} A &= P \times \left(1 + \frac{R}{100}\right)^N \\ &= 60000 \times \left(1 - \frac{1}{5}\right)^2 \\ &= 60000 \times \frac{4}{5} \times \frac{4}{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A &= 60000 \times \left(1 + \frac{-20}{100}\right)^2 \\ &= 60000 \times \left(\frac{4}{5}\right)^2 \\ A &= 38400 \text{ টাকা} \end{aligned}$$

∴ দুই বছর পর স্কুটারের দাম 38400 টাকা হবে।

চক্রবৃদ্ধি সুদের নিয়ম অনুসারে সুদ গণনার সূত্রে A, P, N, R এই চারটি বিষয় থেকে যে কোনো তিনটি বিষয় দেওয়া থাকলে চতুর্থ বিষয়টি কি করে নির্ণয় করতে হবে? তাহা প্রদত্ত উদাহরণে অভ্যাস করবো।

উদা. (3) 10 প্র.শ.প্র.ব সুদের হার হিসাবে একটি রাশির তিন বছরে চক্রবৃদ্ধি সুদ হিসাবে সর্বদ্বিমূল 6655 টাকা হয়, তাহলে ওই রাশি নির্ণয় করো।

সমাধান : এখানে, $A = 6655$ টাকা, $R = 10$ প্র.শ.প্র.ব., $N = 3$ বছর

$$\begin{aligned} A &= P \times \left(1 + \frac{R}{100}\right)^N \\ \therefore 6655 &= P \times \left(1 + \frac{10}{100}\right)^3 = P \times \left(\frac{110}{100}\right)^3 = P \times \left(\frac{11}{10}\right)^3 \\ \therefore P &= \frac{6655 \times 10^3}{11 \times 11 \times 11} \quad P = 5 \times 10^3 = 5000 \\ \therefore \text{ওই রাশি হলো } 5000 \text{ টাকা।} \end{aligned}$$

উদা. (4) 10 প্র.শ.প্র.ব. সুদের হারে 9000 টাকার কতো বছরে চক্রবৃদ্ধি সুদ 1890 টাকা হবে?

সমাধান : এখানে, $R = 10\%$; $P = 9000$; চক্রবৃদ্ধি সুদ $= 1890$

সর্বপ্রথমে চক্রবৃদ্ধি সুদের প্রাপ্ত সর্বদ্বিমূল নির্ণয় করবো।

$$A = P + I = 9000 + 1890 = ₹ 10890$$

চক্রবৃদ্ধি সুদের প্রাপ্ত সর্বদ্বিমূলের সূত্র লিখে তার মধ্যে তার মান রাখবো।

$$A = 10890 = P \times \left(1 + \frac{R}{100}\right)^N = 9000 \times \left(1 + \frac{10}{100}\right)^N = 9000 \times \left(\frac{11}{10}\right)^N$$

$$\therefore \left(\frac{11}{10}\right)^N = \frac{10890}{9000} = \frac{121}{100} \quad \therefore \left(\frac{11}{10}\right)^N = \frac{121}{100} \quad \therefore N = 2$$

$\therefore$ 2 বছরে চক্রবৃদ্ধি সুদ 1890 টাকা হবে।

অনুশীলনী 14.2

1. একটি সেতু নির্মাণ কাজে প্রথমে 320 জন শ্রমিক ছিলো। যদি প্রতি বছর 25% শ্রমিক বৃদ্ধি করা হয়, তাহলে দুই বছর পরে সেই কাজে কয়জন শ্রমিক থাকবে?
2. একটি মেঘপালকের কাছে যদি 200টি মেঘ থাকে এবং প্রতি বছরে মেঘের সংখ্যায় 10% বৃদ্ধি পেয়ে থাকলে 2 বছর পরে তার কাছে মোট কয়টি মেঘ থাকবে?
3. একটি অভয়ারণে 40,000 বৃক্ষ আছে। প্রতি বছর 5% হারে বৃক্ষ বৃদ্ধির উদ্দেশ্যে নির্দিষ্ট করলে 3 বছর পরে ওই অভয়ারণে বৃক্ষের সংখ্যা কতো হতে পারে?
4. আজ একটি মেশিন 2,50,000 টাকায় ক্রয় করলাম। মূল্য হ্রাসের হার প্রতি বছর 10% হলে দুই বছর পরে মেশিনের মূল্য ক্রয় মূল্যের থেকে কতো টাকা কম হবে?
5. কোনো একটি আসলের 16 প্র.শ.প্র.ব. সুদের হারে চক্রবৃদ্ধি সুদে দুই বছরে সবৃদ্ধিমূল 4036.80 টাকা হলো। তাহলে দুই বছরে মোট কতো টাকা সুদ হলো?
6. চক্রবৃদ্ধি সুদে 15000 টাকা 12 প্র.শ.প্র.ব. হারে ধার নেওয়া হলো, তবে 3 বছর পরে ঋণ শোধ করার সময় কতো টাকা দিতে হবে?
7. 18 প্র.শ.প্র.ব. সুদের হারে চক্রবৃদ্ধি সুদে কোনো একটি আসলের 2 বছরে সবৃদ্ধিমূল 13,924 টাকা হলো, তবে আসল কতো?
8. শহরের একটি উপনগরের জনসংখ্যা বিশিষ্ট হারে বৃদ্ধি হয়। আজ এবং দুই বছর পরের জনসংখ্যা যথাক্রমে 16000 ও 17640 হলে, জনসংখ্যা বৃদ্ধির হার নির্ণয় করো।
9. 700 টাকা 10 প্র.শ.প্র.ব. সুদের হারে কতো বছরে সবৃদ্ধিমূল 847 টাকা হবে?
10. 20,000 টাকার 8 প্র.শ.প্র.ব. সুদের হারে 2 বছরের সরল সুদ এবং চক্রবৃদ্ধি সুদের অন্তর নির্ণয় করো।

৯৯৯

উত্তরমালা

অনুশীলনী 14.1

1. (1) ₹ 2205, ₹ 205 (2) ₹ 6298.56, ₹ 1298.56
(3) ₹ 4622.5, ₹ 622.5 2. ₹ 17561.60 3. ₹ 1768.2

অনুশীলনী 14.2

1. 500 2. 252 মেঘ 3. 46,305 বৃক্ষ
4. ₹ 47500 5. ₹ 1036.80 6. ₹ 21073.92 7. ₹ 10,000
8. 5 প্র.শ.প্র.ব. 9. 2 বছরে 10. ₹ 128



একটু স্মরণ করি।

আমরা জানি যে বন্ধ বহুভূজাকৃতির বাহু সেন্টিমিটার, মিটার, কিলোমিটার এই এককে দেওয়া হলে তার ক্ষেত্রফল যথাক্রমে বর্গ সেমি, বর্গমিটার, বর্গ কিমি এই এককে দেওয়া হয়, কারণ ক্ষেত্রফল সর্বদা বর্গে মাপন করা হয়।

(1) বর্গের ক্ষেত্রফল = বাহু²

(2) আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = দৈর্ঘ্য $\times$ প্রস্থ

(3) সমকোণ ত্রিভূজের ক্ষেত্রফল
 $= \frac{1}{2} \times$ সমকোণ তৈরি করা বাহুর গুণফল

(4) ত্রিভূজের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times$ আধার $\times$ উচ্চতা



এসো জেনে নেই।

সমান্তরাল চতুর্ভূজের ক্ষেত্রফল (Area of a parallelogram)

কৃতি :

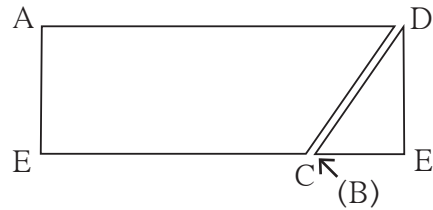
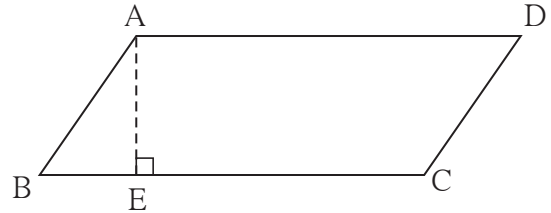
- একটি কাগজের উপর একটি যথেষ্ট আকারের সমান্তরাল চতুর্ভূজ ABCD আঁকো।

বিন্দু A থেকে বাহু BC-এর উপর লম্ব টানো।

ΔAEB এই সমকোণ ত্রিভূজটি কাঁটো।

ত্রিভূজটি দ্বিতীয় ছবিতে নির্দেশিত করা অনুযায়ী

$\square ABCD$ -এর শেষ ভাগে জুড়ে ধরো। তৈরি হওয়া আকৃতিটি আয়তক্ষেত্রাকার, এটা লক্ষ্য করো।



- আয়তক্ষেত্রটি সমান্তরাল চতুর্ভূজের দ্বারা তৈরি হয়েছে, অতএব উভয় আকৃতি দুটির ক্ষেত্রফল সমান।
- সমান্তরাল চতুর্ভূজের আধার অর্থাৎ আয়তক্ষেত্রের একটি বাহু (দৈর্ঘ্য) ও তার উচ্চতা অর্থাৎ আয়তক্ষেত্রের অপর বাহু (প্রস্থ)।

$$\therefore \text{সমান্তরাল চতুর্ভূজের ক্ষেত্রফল} = \text{আধার} \times \text{উচ্চতা}$$

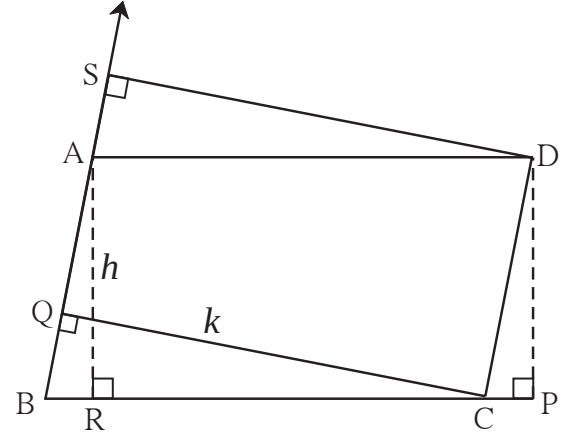
মনে রাখবে যে, সমান্তরাল চতুর্ভুজের সমান্তরাল বাহু থেকে যে কোনো একটি বাহুকে আধার মেনে নিলে সেই চতুর্ভুজের আধার সঙ্গত উচ্চতা অর্থাৎ সমান্তরাল বাহু দুটির মধ্যের অন্তর।

□ ABCD একটি সমান্তরাল চতুর্ভুজ।

রেখাংশ $DP \perp$ বাহু BC, রেখাংশ $AR \perp$ বাহু BC। বাহু BC-কে আধার মেনে নিলে উচ্চতা $l(AR) = l(DP) = h$ ।

যদি রেখাংশ $CQ \perp$ বাহু AB হয় ও AB এই বাহুটিকে আধার মেনে নিলে, ওই আধারের সঙ্গত উচ্চতা অর্থাৎ $l(QC) = k$ হয়।

$$\therefore A(\square ABCD) = l(BC) \times h = l(AB) \times k।$$



সমাধান করা উদাহরণ

উদা. (1) একটি সমান্তরাল চতুর্ভুজের আধার 8 সেমি ও উচ্চতা 5 সেমি হলে চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।

সমাধান : সমান্তরাল চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল = আধার $\times$ উচ্চতা = $8 \times 5 = 40$

$\therefore$ সমান্তরাল চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল = 40 বর্গ সেমি

উদা. (2) একটি সমান্তরাল চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল 112 বর্গ সেমি ও তার আধার 10 সেমি হলে তার উচ্চতা নির্ণয় করো।

সমাধান : সমান্তরাল চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল = আধার $\times$ উচ্চতা $\therefore 112 = 10 \times$ উচ্চতা

$$\frac{112}{10} = \text{উচ্চতা}$$

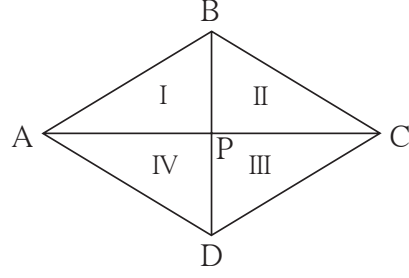
$\therefore$ সমান্তরাল চতুর্ভুজের উচ্চতা 11.2 সেমি

অনুশীলনী 15.1

- একটি সমান্তরাল চতুর্ভুজের আধার 18 সেমি ও উচ্চতা 11 সেমি, তাহলে ওই চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।
- একটি সমান্তরাল চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল 29.6 বর্গ সেমি ও আধার 8 সেমি, তাহলে চতুর্ভুজটির উচ্চতা নির্ণয় করো।
- একটি সমান্তরাল চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল 83.2 বর্গ সেমি, তার উচ্চতা 6.4 সেমি হলে তার আধারটির দৈর্ঘ্য কতো হবে?

বিষম-কোণী সমবাহু চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল (Area of a rhombus)

কৃতি : নির্দেশিত আকৃতি অনুযায়ী একটি বিষম-কোণী সমবাহু চতুর্ভুজ আঁকো। আমাদের জানা আছে যে বিষম-কোণী সমবাহু চতুর্ভুজের কর্ণ পরস্পর লম্ব দ্বিখন্ডক হয়ে থাকে।



ধরে নাও $l(AC) = d_1$ এবং $l(BD) = d_2$

□ ABCD একটি বিষম-কোণী সমবাহু চতুর্ভুজ। তার কর্ণ P বিন্দুতে ছেদন করে। প্রতিফলে আমরা চারটি সর্বসম সমকোণ ত্রিভুজ পেয়ে থাকি। প্রত্যেক সমকোণ ত্রিভুজের বাহু $\frac{1}{2} l(AC)$ এবং $\frac{1}{2} l(BD)$ এতটুকু হয়। চারটিই ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল সমান।

$$l(AP) = l(PC) = \frac{1}{2} l(AC) = \frac{d_1}{2},$$

$$\text{তদ্রূপ } l(BP) = l(PD) = \frac{1}{2} l(BD) = \frac{d_2}{2}$$

$$\therefore \text{বিষম-কোণী সমবাহু চতুর্ভুজ ABCD-এর ক্ষেত্রফল} = 4 \times A(\Delta APB)$$

$$= 4 \times \frac{1}{2} \times l(AP) \times l(BP)$$

$$= 2 \times \frac{d_1}{2} \times \frac{d_2}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \times d_1 \times d_2$$

$$\therefore \text{বিষম-কোণী সমবাহু চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল} = \frac{1}{2} \times \text{কর্ণের দৈর্ঘ্যের গুণফল}$$

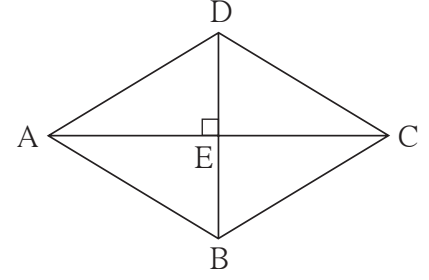
সমাধান করা উদাহরণ

উদা. (1) একটি বিষম-কোণী সমবাহু চতুর্ভুজের দুটি কর্ণের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 11.2 সেমি ও 7.5 সেমি, তাহলে ওই চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।

$$\begin{aligned} \text{সমাধান : } \text{বিষম-কোণী সমবাহু চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল} &= \frac{1}{2} \times \text{কর্ণ দুটির দৈর্ঘ্যের গুণফল} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{11.2}{1} \times \frac{7.5}{1} = 5.6 \times 7.5 \\ &= 42 \text{ বর্গ সেমি} \end{aligned}$$

উদা. (2) একটি বিষম-কোণী সমবাহু চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল 96 বর্গ সেমি। তার একটি কর্ণের দৈর্ঘ্য 12 সেমি হয়, তাহলে তার বাহুর দৈর্ঘ্য নির্ণয় করো।

সমাধান : মনে করো, $\square ABCD$ একটি বিষম-কোণী সমবাহু চতুর্ভুজ। তার কর্ণ BD-এর দৈর্ঘ্য 12 সেমি। ওই চতুর্ভুজটির ক্ষেত্রফল 96 সেমি। এই ভিত্তিতে প্রথমে কর্ণ AC -এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় করবো।



বিষম-কোণী সমবাহু চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times$ কর্ণের দৈর্ঘ্যের গুণফল

$$\therefore 96 = \frac{1}{2} \times 12 \times l(AC) = 6 \times l(AC)$$

$$\therefore l(AC) = 16 \text{ সেমি}$$

মনে করো কর্ণের ছেদক বিন্দু E। বিষম-কোণী সমবাহু চতুর্ভুজের কর্ণ পরস্পর সমকোণে দ্বিখন্ডক হয়।

$$\therefore \triangle ADE\text{-এর মধ্যে, } m\angle E = 90^\circ,$$

$$l(DE) = \frac{1}{2} l(DB) = \frac{1}{2} \times 12 = 6; \quad l(AE) = \frac{1}{2} l(AC) = \frac{1}{2} \times 16 = 8$$

পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে,

$$\begin{aligned} l(AD)^2 &= l(AE)^2 + l(DE)^2 = 8^2 + 6^2 \\ &= 64 + 36 = 100 \end{aligned}$$

$$\therefore l(AD) = 10 \text{ সেমি}$$

$\therefore$ বিষম-কোণী সমবাহু চতুর্ভুজের বাহুর দৈর্ঘ্য 10 সেমি।

অনুশীলনী 15.2

1. একটি বিষম-কোণী সমবাহু চতুর্ভুজের দুটি কর্ণের দৈর্ঘ্য 15 ও 24 সেমি, তাহলে তার ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।
2. একটি বিষম-কোণী সমবাহু চতুর্ভুজের দুটি কর্ণের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 16.5 সেমি ও 14.2 সেমি, তাহলে ওই চতুর্ভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।
3. একটি বিষম-কোণী সমবাহু চতুর্ভুজের পরিসীমা 100 সেমি ও তার একটি কর্ণের দৈর্ঘ্য 48 সেমি, তাহলে ওই চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল কতো হবে?
4. একটি বিষম-কোণী সমবাহু চতুর্ভুজের একটি কর্ণের দৈর্ঘ্য 30 সেমি ও তার ক্ষেত্রফল 240 বর্গ সেমি। তাহলে ওই চতুর্ভুজটির পরিসীমা নির্ণয় করো।

সমলম্ব চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল (Area of a trapezium)

কৃতি : রেখাংশ AB $\parallel$ রেখাংশ DC হয় এমন একটি সমলম্ব

$\square$ ABCD কাগজের উপর আঁকো।

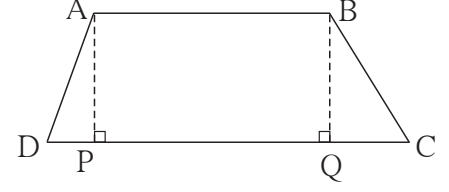
রেখাংশ AP $\perp$ বাহু DC এবং

রেখাংশ BQ $\perp$ বাহু DC আঁকো।

ধরে নাও $l(AP) = l(BQ) = h$

সমলম্ব চতুর্ভুজের উচ্চতা h , অর্থাৎ সমান্তরাল রেখার মঝের অন্তর,

লম্ব দ্বারা $\square$ ABCD-এই চতুর্ভুজাকৃতি ক্ষেত্রের সমান 3টি ভাগ হলো। তার থেকে $\triangle$ APD এবং $\triangle$ BQC সমকোণ ত্রিভুজ। $\square$ ABQP একটি আয়তক্ষেত্র। বিন্দু P এবং Q রেখাংশ DC -এর উপর আছে।



সমলম্ব চতুর্ভুজ ABCD-এর ক্ষেত্রফল

$$= A(\triangle APD) + A(\square ABQP) + A(\triangle BQC)$$

$$= \frac{1}{2} \times l(DP) \times h + l(PQ) \times h + \frac{1}{2} \times l(QC) \times h$$

$$= h \left[\frac{1}{2} l(DP) + l(PQ) + \frac{1}{2} l(QC) \right]$$

$$= \frac{1}{2} \times h [l(DP) + 2l(PQ) + l(QC)]$$

$$= \frac{1}{2} \times h [l(DP) + l(PQ) + l(AB) + l(QC)] \dots \therefore l(PQ) = l(AB)$$

$$= \frac{1}{2} \times h [l(DP) + l(PQ) + l(QC) + l(AB)]$$

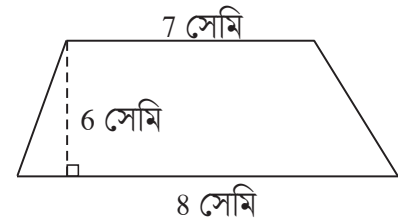
$$= \frac{1}{2} \times h [l(DC) + l(AB)]$$

$$A(\square ABCD) = \frac{1}{2} (\text{সমান্তরাল বাহুর দৈর্ঘ্যের সমষ্টি}) \times h$$

$$\therefore \text{সমলম্ব চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল} = \frac{1}{2} \times \text{সমান্তরাল বাহুর দৈর্ঘ্যের সমষ্টি} \times \text{উচ্চতা}$$

সমাধান করা উদাহরণ

উদা. (1) সমলম্ব চতুর্ভুজের সম্মুখ বাহুর একটি জোড়া পরস্পর সমান্তরাল। ওই বাহুর মঝের অন্তর 6 সেমি ও সমান্তরাল বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 7 সেমি ও 8 সেমি, তাহলে ওই চতুর্ভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।

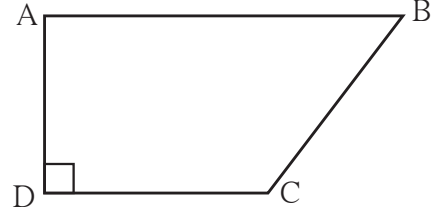


সমাধান : সমান্তরাল বাহুর মাঝের অন্তর = সমলম্ব চতুর্ভুজের উচ্চতা = 6 সেমি

$$\begin{aligned}\text{সমলম্ব চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল} &= \frac{1}{2} \times (\text{সমান্তরাল বাহুর দৈর্ঘ্যের সমষ্টি}) \times \text{উচ্চতা} \\ &= \frac{1}{2} (7 + 8) \times 6 = 45 \text{ বর্গ সেমি}\end{aligned}$$

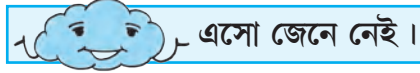
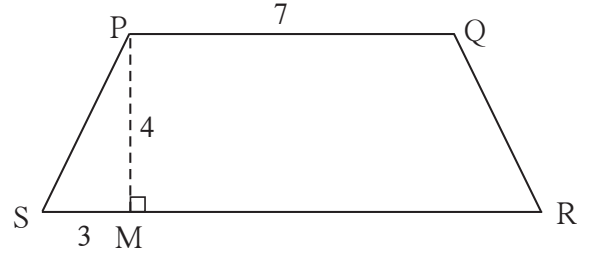
অনুশীলনী 15.3

1. চতুর্ভুজ $\square ABCD$ -এর মধ্যে $l(AB) = 13$ সেমি, $l(DC) = 9$ সেমি, $l(AD) = 8$ সেমি, তাহলে $\square ABCD$ -এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।



2. একটি সমলম্ব চতুর্ভুজের সমান্তরাল বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 8.5 সেমি ও 11.5 সেমি। তার উচ্চতা 4.2 সেমি তাহলে ওই চতুর্ভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।

- 3*. $\square PQRS$ হলো একটি সমদ্বিবাহু সমলম্ব চতুর্ভুজ। $l(PQ) = 7$ সেমি, রেখাংশ $PM \perp$ বাহু SR , $l(SM) = 3$ সেমি, সমান্তরাল বাহুর মাঝের অন্তর 4 সেমি, তাহলে $\square PQRS$ -এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।

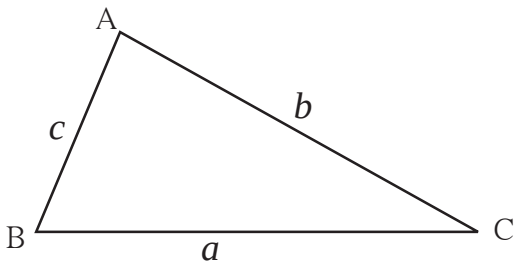


এসো জেনে নেই।

ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল (Area of a Triangle)

ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল = $\frac{1}{2} \times$ আধার $\times$ উচ্চতা এটা আমরা সকলেই জানি।

এখন ত্রিভুজের উচ্চতা দেওয়া নেই অথচ ত্রিভুজের তিনটি বাহুর দৈর্ঘ্য দেওয়া আছে। তাহলে ওই ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল কিভাবে নির্ণয় করা হয় তা দেখবো।



ΔABC -এর বাহুর দৈর্ঘ্য হলো a, b, c ।

প্রথমে ওই ত্রিভুজটির অর্ধ পরিসীমা নির্ণয় করি।

$$\text{অর্ধ পরিসীমা} = s = \frac{1}{2} (a + b + c)$$

$$\text{ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

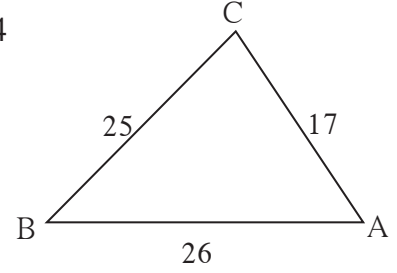
এই সূত্রটিকে হিরোনের সূত্র (Heron's Formula) বলা হয়।

উদা. (1) একটি ত্রিভুজের বাহু 17 সেমি, 25 সেমি ও 26 সেমি, তাহলে ওই ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।

সমাধান : $a = 17, b = 25, c = 26$

$$\text{অর্ধপরিসীমা} = s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{17+25+26}{2} = \frac{68}{2} = 34$$

$$\begin{aligned}\text{ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল} &= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \\ &= \sqrt{34(34-17)(34-25)(34-26)} \\ &= \sqrt{34 \times 17 \times 9 \times 8} \\ &= \sqrt{17 \times 2 \times 17 \times 3 \times 3 \times 2 \times 2 \times 2} \\ &= \sqrt{17^2 \times 2^2 \times 2^2 \times 3^2} \\ &= 17 \times 2 \times 2 \times 3 = 204 \text{ বর্গ সেমি}\end{aligned}$$

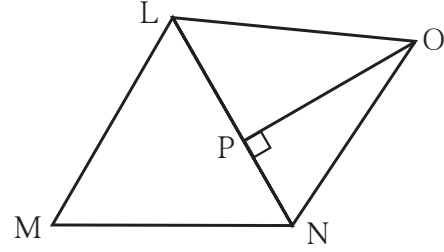


উদা. (2) একটি ভূখন্ডের আকৃতি ও তার মাপ দেওয়া আছে।

$$l(LM) = 60 \text{ মি. } l(MN) = 60 \text{ মি.}$$

$$l(LN) = 96 \text{ মি. } l(OP) = 70 \text{ মি.}$$

তাহলে এই ভূখন্ডের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।



সমাধান : এই আকৃতিতে ΔLMN এবং ΔLON তৈরি হয়ে আছে। ΔLMN -এর সকল বাহুর দৈর্ঘ্য জানা আছে, অতএব হিরোনের সূত্র ব্যবহার করে তার ক্ষেত্রফল নির্ণয় করি। ΔLON -এর মধ্যে বাহু LN হলো আধার এবং $l(OP)$ -এই উচ্চতা নিয়ে ΔLON -এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় করি।

$$\Delta LMN\text{-এর অর্ধ পরিসীমা, } s = \frac{60+60+96}{2} = \frac{216}{2} = 108 \text{ মি.}$$

$$\begin{aligned}\therefore \Delta LMN\text{-এর ক্ষেত্রফল} &= \sqrt{108(108-60)(108-60)(108-96)} \\ &= \sqrt{108 \times 48 \times 48 \times 12} \\ &= \sqrt{12 \times 9 \times 48 \times 48 \times 12}\end{aligned}$$

$$A(\Delta LMN) = 12 \times 3 \times 48 = 1728 \text{ বর্গ মিটার}$$

$$\begin{aligned}A(\Delta LNO) &= \frac{1}{2} \text{ আধার} \times \text{উচ্চতা} \\ &= \frac{1}{2} \times 96 \times 70 \\ &= 96 \times 35 = 3360 \text{ বর্গ মিটার}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{ভূখন্ড LMNO-এর ক্ষেত্রফল} &= A(\Delta LMN) + A(\Delta LNO) \\ &= 1728 + 3360 \\ &= 5088 \text{ বর্গ মিটার}\end{aligned}$$



এটা আমি বুঝতে পেরেছি

সমান্তরাল চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল = আধার $\times$ উচ্চতা

বিষম-কোণী সমবাহু চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল = $\frac{1}{2} \times$ কর্ণ দুটির দৈর্ঘ্যের গুণ

সমলম্ব চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল = $\frac{1}{2} \times$ সমান্তরাল বাহু দুটির দৈর্ঘ্যের সমষ্টি $\times$ উচ্চতা

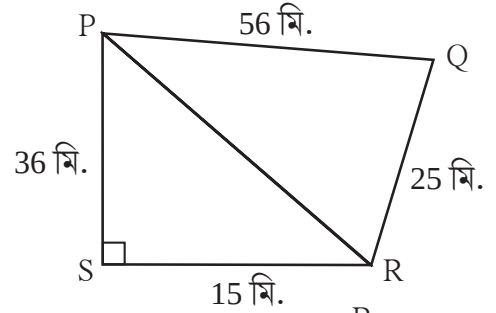
ΔABC ত্রিভুজের বাহু যদি a, b, c হয় তাহলে ওই ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয়ের জন্য

হিরোনের সূত্র $A(\Delta ABC) = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$; $s = \frac{a+b+c}{2}$

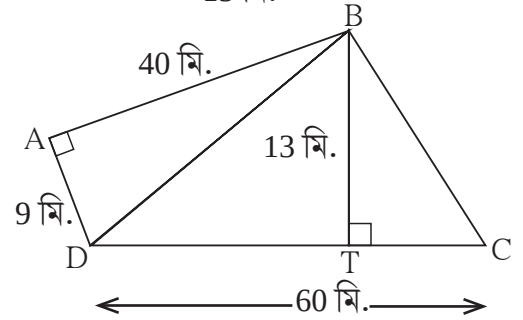
অনুশীলনী 15.4

1. একটি ত্রিভুজের বাহু 45 সেমি, 39 সেমি এবং 42 সেমি, তাহলে এই ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।

2. আকৃতিতে দেখানো অনুযায়ী মাপগুলি লক্ষ্য করো ও $\square PQRS$ -এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।



3. সংলগ্ন আকৃতিতে কিছু মাপ নির্দেশিত করা আছে, তদানুসারে $\square ABCD$ -এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।

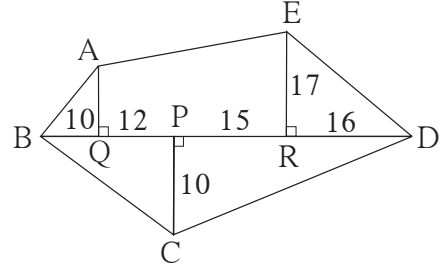


এসো জেনে নেই।

অনিয়মিত আকার বিশেষ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল (Area of figures having irregular shape)

ভূখন্ড, ক্ষেত খামারের আকার সাধারণ রূপে অনিয়মিত আকারের বহুভুজাকৃতি হয়ে থাকে। তাদের বিভাজন ত্রিভুজ কিম্বা বিশেষ চতুর্ভুজে করে নেওয়া যায়। এইরূপ বিভাজন করে তার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কি ভাবে করা হয়, তা আগাম উদাহরণগুলির মাধ্যমে বুঝে নাও।

উদা. সংলগ্ন আকৃতিতে ABCDE একটি বহুভূজ আকৃতি। আকৃতিটির সকল মাপগুলি মিটার এককে দেওয়া আছে। এই আকৃতিটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।



সমাধান : এখানে ΔAQB , ΔERD এগুলি সমকোণ ত্রিভূজ। $\square AQR$ হলো একটি সমলম্ব চতুর্ভূজ। ΔBCD -এর আধার BD এবং উচ্চতা PC দেওয়া আছে। প্রত্যেকটি আকৃতির ক্ষেত্রফল নির্ণয় করি।

$$A(\Delta AQB) = \frac{1}{2} \times l(BQ) \times l(AQ) = \frac{1}{2} \times 10 \times 13 = 65 \text{ বর্গ মি.}$$

$$A(\Delta ERD) = \frac{1}{2} \times l(RD) \times l(ER) = \frac{1}{2} \times 16 \times 17 = 136 \text{ বর্গ মি.}$$

$$\begin{aligned} A(\square AQR) &= \frac{1}{2} [l(AQ) + l(ER)] \times l(QR) \\ &= \frac{1}{2} [13 + 17] \times (12 + 15) \\ &= \frac{1}{2} \times 30 \times 27 = 15 \times 27 = 405 \text{ বর্গ মি.} \end{aligned}$$

$$l(BD) = l(BP) + l(PD) = 10 + 12 + 15 + 16 = 53 \text{ মি.}$$

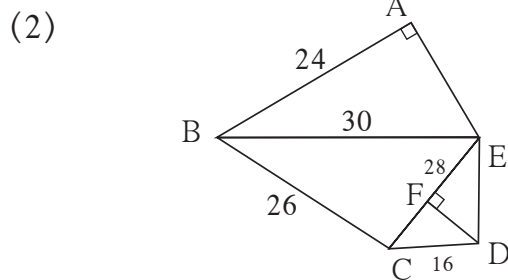
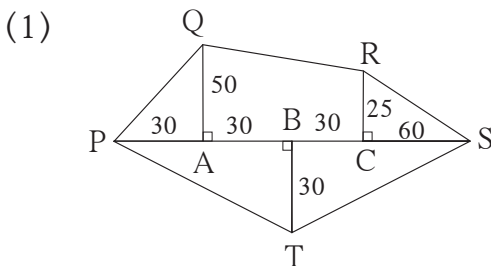
$$A(\Delta BCD) = \frac{1}{2} \times l(BD) \times l(PC) = \frac{1}{2} \times 53 \times 10 = 265 \text{ বর্গ মি.}$$

$\therefore$ অতএব বহুভূজাকৃতি ABCDE -এর ক্ষেত্রফল

$$\begin{aligned} &= A(\Delta AQB) + A(\square AQR) + A(\Delta ERD) + A(\Delta BCD) \\ &= 65 + 405 + 136 + 265 \\ &= 871 \text{ বর্গ মি.} \end{aligned}$$

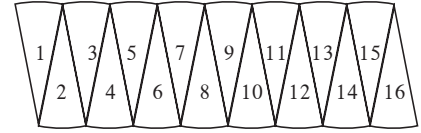
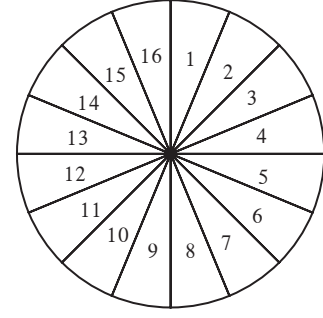
অনুশীলনী 15.5

1. নিচের ভূখন্ডের রূপরেখা অনুসারে তার ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো। (সকল মাপজোপ মিটারে দেওয়া আছে।)



বৃত্তের ক্ষেত্রফল (Area of a circle)

কৃতি : একটি মোটা কাগজের উপর একটি বৃত্ত আঁকো। বৃত্তাকার অংশ কেটে আলাদা করো। ভাঁজ করে তার 16 টি কিন্না 32 টি সমান ভাগে বিভক্ত করো। অথবা 360° -এর সমান অংশ তৈরি করে বৃত্তটির 18 বা 20 টি অংশে সমান ভাগ করো। তারপর বিভিন্ন পাপড়ি পেতে ব্যাসার্ধের সেই অংশগুলি কেটে নাও। চিত্রে দেখানো হিসাবে তাদের সংযুক্ত করো। আমরা দেখতে পাচ্ছি যে কাছাকাছি আয়তক্ষেত্রের মতো একটি আকৃতি তৈরি হলো। বৃত্তের সমান অংশের সংখ্যা যত বেশি হবে, আকৃতিটি ততো বেশি আয়তক্ষেত্রাকার হবে।



$$\text{বৃত্তের পরিধি} = 2\pi r$$

$\therefore$ আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য πr , অর্থাৎ অর্ধপরিধির সমান এবং প্রস্থ r -এর সমান।

$\therefore$ বৃত্তের ক্ষেত্রফল = আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = দৈর্ঘ্য $\times$ প্রস্থ = $\pi r \times r = \pi r^2$

সমাধান করা উদাহরণ

উদা. (1) যদি একটি বৃত্তের ব্যাসার্ধ 21 সেমি হয় তাহলে তার ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।

সমাধান : বৃত্তের ক্ষেত্রফল = πr^2

$$= \frac{22}{7} \times 21^2$$

$$= \frac{22}{7} \times \frac{21}{1} \times \frac{21}{1} = 66 \times 21 = 1386 \text{ বর্গ সেমি}$$

উদা. (2) একটি বৃত্তাকার মাঠের ক্ষেত্রফল হলো 3850 বর্গ মিটার, তাহলে ওই মাঠের ব্যাসার্ধ নির্ণয় করো।

সমাধান : বৃত্তের ক্ষেত্রফল = πr^2

$$3850 = \frac{22}{7} \times r^2$$

$$r^2 = \frac{3850 \times 7}{22}$$

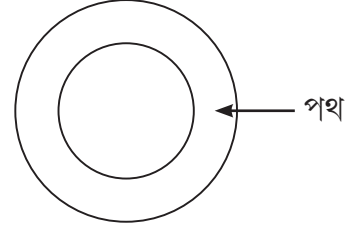
$$r^2 = 1225$$

$$r = 35 \text{ মি.}$$

$\therefore$ মাঠের ব্যাসার্ধ 35 মিটার।

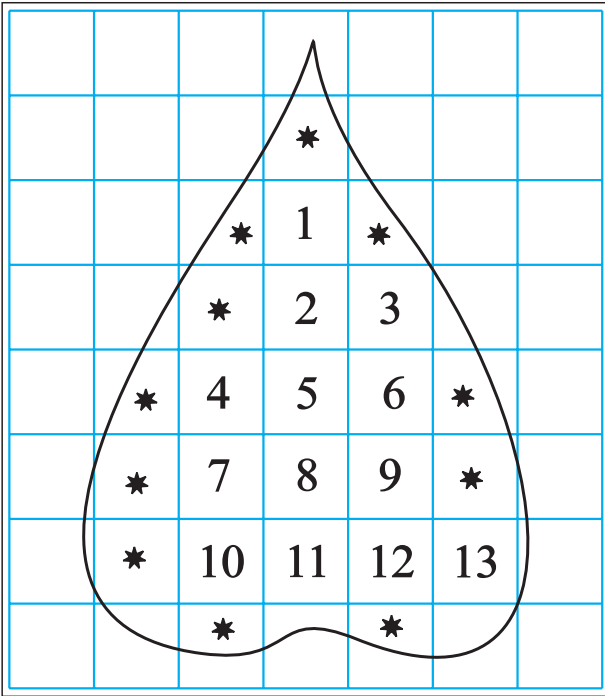
অনুশীলনী 15.6

1. নিচে বৃত্তের ব্যাসার্ধ দেওয়া আছে। ওই বৃত্তের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।
 (1) 28 সেমি (2) 10.5 সেমি (3) 17.5 সেমি
2. নিচে কয়েকটি বৃত্তের ক্ষেত্রফল দেওয়া আছে। ওই বৃত্তগুলির ব্যাস নির্ণয় করো।
 (1) 176 বর্গ সেমি (2) 394.24 বর্গ সেমি (3) 12474 বর্গ সেমি
3. একটি বৃত্তাকার বাগিচার ব্যাস 42 মিটার। ওই বাগিচার চারপাশে 3.5 মিটার প্রশস্ত একটি পথ আছে। পথটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।
4. একটি বৃত্তের পরিধি 88 সেমি, তাহলে বৃত্তের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।



অনিয়মিত আকার বিশেষ আকৃতির অনুমানিক ক্ষেত্রফল নির্ণয় করা।

ছক কাগজের সাহায্যে যে কোনো বন্ধ আকৃতির ক্ষেত্রফল নির্ণয় করা যায়। প্রদত্ত আকৃতি বা বস্তুর একটি পৃষ্ঠা ছক কাগজের উপর রেখে তার প্রান্তে পেন্সিল ঘুরিয়ে নাও। ছক কাগজের উপর প্রদত্ত আকৃতির ক্ষেত্রফল নির্ণয় করার জন্য বর্গের সংখ্যা ক্রিপ গণনা করা হয় ও ক্ষেত্রফল ক্রিপ নির্ণয় করা হয় তা নিচের কৃতি দ্বারা বুঝে নাও।



- (1) আকৃতিতে 1 বর্গ সেমি ক্ষেত্রফল হয় এমন পূর্ণ বর্গের সংখ্যা = 13
 $\therefore$ তাদের ক্ষেত্রফল 13 বর্গ সেমি
- (2) আকৃতিতে $\frac{1}{2}$ বর্গ সেমি থেকে বেশি অথচ 1 বর্গ সেমি থেকে কম ক্ষেত্রফল হয় এমন ভাগের সংখ্যা = 11
 $\therefore$ তাদের ক্ষেত্রফল = অনুমানিক 11 বর্গ সেমি
- (3) আকৃতিতে $\frac{1}{2}$ বর্গ সেমি ক্ষেত্রফল হয় এমন অংশের সংখ্যা = 0
 $\therefore$ তাদের ক্ষেত্রফল = 0 বর্গ সেমি

(4) আকৃতিতে $\frac{1}{2}$ বর্গ সেমি অপেক্ষা কম ক্ষেত্রফল হয় এমন অংশের ক্ষেত্রফলের বিচার করবো না।

∴ তার মোট ক্ষেত্রফল = 0 বর্গ সেমি

∴ প্রদত্ত আকৃতির অনুমানিক ক্ষেত্রফল = 13 + 11 + 0 + 0 = 24 বর্গ সেমি

কৃতি : ছক কাগজের উপর 28 মিমি ব্যাসার্ধের একটি বৃত্ত যে কোনো একটি ত্রিভুজ এবং একটি সমলম্ব চতুর্ভুজ আঁকো। এই সকল আকৃতিগুলির ক্ষেত্রফল ছক কাগজের ছোট-ছোট বর্গক্ষেত্র গণনা করে নির্ণয় করো। সূত্রের দ্বারা প্রাপ্ত ক্ষেত্রফলের সঙ্গে তা যাচাই করে দেখো।

গণনা করার জন্য ব্যবহৃত বর্গের ক্ষেত্রফল যতোটা কম হবে ততোটাই ক্ষেত্রফল অনুমান করা অধিক সঠিক হয়।

উত্তরমালা

অনুশীলনী 15.1	1. 198 বর্গ সেমি	2. 3.7 সেমি	3. 13 সেমি
অনুশীলনী 15.2	1. 180 বর্গ সেমি	2. 117.15 বর্গ সেমি	3. 336 বর্গ সেমি 4. 68 সেমি
অনুশীলনী 15.3	1. 88 বর্গ সেমি	2. 42 সেমি	3. 40 বর্গ সেমি
অনুশীলনী 15.4	1. 756 বর্গ সেমি	2. 690 বর্গ সেমি	3. 570 বর্গ সেমি
অনুশীলনী 15.5	1. 6000 বর্গ মি.	2. 776 বর্গ মি.	
অনুশীলনী 15.6	1. (1) 2464 বর্গ সেমি	(2) 346.5 বর্গ সেমি	(3) 962.5 বর্গ সেমি
	2. (1) $2\sqrt{56}$ সেমি	(2) 22.4 সেমি	(3) 126 সেমি
	3. 500.50 বর্গ মি.	4. 616 বর্গ সেমি	

অধিক তথ্যের জন্য

মাপনের জন্য দশমিক পদ্ধতিকে আমাদের দেশে স্বীকার করা হয়েছে। সরকারী দলিলপত্রে জায়গার ক্ষেত্রফল আর, হেক্টর এই দশমিক এককে নথিভুক্ত করা হয়ে থাকে।

100 বর্গ মি. = 1 আর, 100 আর = 1 হেক্টর = 10,000 বর্গ মি.

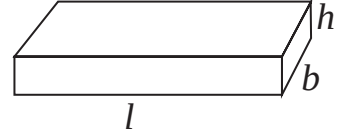
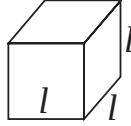
অথচ সাধারণরূপে জায়গার ক্ষেত্রফল বিঘা, একর এমন এককে গণনা করার পদ্ধতি আজও প্রচলিত আছে। এক বিঘা ক্ষেত্রফল অর্থাৎ কাছাকাছি 16 আর, অর্থাৎ কাছাকাছি 1600 বর্গ মিটার হয়। 1 একর ক্ষেত্রফল কাছাকাছি 0.4 হেক্টর হয়ে থাকে।



একটু স্মরণ করি।

আয়তঘনের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল = $2(l \times b + b \times h + l \times h)$

ঘনকের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল = $6l^2$



1 মি. = 100 সেমি

1 বর্গ মি. = 100×100 বর্গ সেমি = 10000 বর্গ সেমি = 10^4 বর্গ সেমি

1 সেমি = 10 মি.মি

1 বর্গ সেমি = 10×10 বর্গ মি.মি. = 100 বর্গ মি.মি. = 10^2 বর্গ মি.মি.



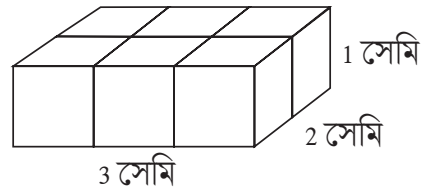
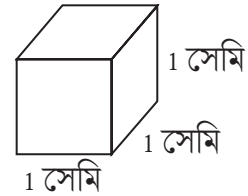
এসো জেনে নেই।

আয়তঘন ঘনক এবং লম্ববৃত্তাকার চোঙ এগুলি ত্রিমাত্রিক আকার অতএব ঘনকাকৃতি। এই ঘনকাকৃতিগুলি অবকাশের স্থান দখল করে। যে কোনো ঘনকাকৃতি দ্বারা অবকাশের দখলকৃত স্থানের পরিমাপ অর্থাৎ ঘনকাকৃতির আয়তন হয়ে থাকে।

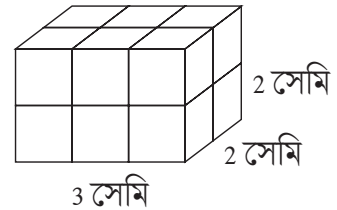
আয়তনের প্রত্যয়িত একক (Standard unit of volume)

সংলগ্ন আকৃতিতে ঘনকের প্রত্যেকটি বাহু 1 সেমি। এই ঘনকের দ্বারা দখলকৃত জায়গা, আয়তন পরিমাপের একটি প্রত্যয়িত একক। তা ঘন সেন্টিমিটার, সংক্ষেপে 1 ঘ সেমি অথবা 1 সেমি^3 এমন লেখা হয়।

কৃতি I: প্রত্যেকটি বাহু 1 সেমি হয় এমন অনেক ঘনক সংগ্রহ করো আকৃতিতে দেখানো অনুসারে 6 টি ঘনক একে অপরের সাথে লাগিয়ে রাখো। একটি আয়তঘন তৈরি হবে। এই আয়তঘনের দৈর্ঘ্য 3 সেমি, প্রস্থ 2 সেমি ও উচ্চতা 1 সেমি। যার বাহু 1 সেমি এমন 6 টি ঘনক মিলে এই আয়তঘনটি তৈরি হয়েছে। এই আয়তঘনের আয়তন $3 \times 2 \times 1 = 6$ ঘসেমি হয়, এটা লক্ষ্য রাখবে।

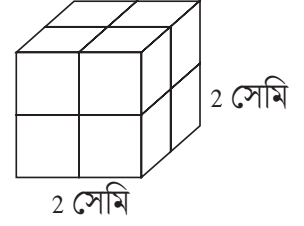


কৃতি II: সংলগ্ন আয়তঘনের দৈর্ঘ্য 3 সেমি, প্রস্থ 2 সেমি ও উচ্চতা 2 সেমি। এই আয়তঘনের মধ্যে 1 ঘসেমি আয়তন হয় এমন $3 \times 2 \times 2 = 12$ টি ঘনক অন্তর্ভুক্ত। অতএব এই আয়তঘনের আয়তন 12 ঘসেমি। এই ভিত্তিতে, আয়তঘনের আয়তন = দৈর্ঘ্য $\times$ প্রস্থ $\times$ উচ্চতা এই সূত্রটি প্রাপ্ত হয়।



দৈর্ঘ্যের জন্য l প্রস্থের জন্য b এবং উচ্চতার জন্য h এই অক্ষরগুলি নিয়ে আয়তঘনের আয়তন = $l \times b \times h$

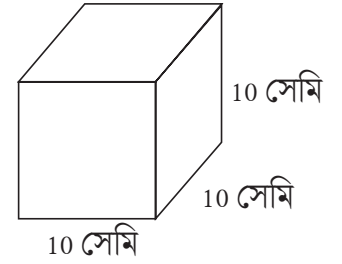
কৃতি III : পাশের আকৃতিতে 1 ঘনসেমি আয়তনসহ 8 টি ঘনক একে অপরের সাথে লাগিয়ে রাখা হয়েছে। এর থেকে তৈরি ঘনকাকৃতি হলো 2 সেমি বাহু সহ একটি ঘনক। এই ঘনকের আয়তন $= 2 \times 2 \times 2 = 2^3$ এটা মনে রেখো।



অর্থাৎ ঘনকের বাহু যদি l হয় তাহলে ঘনকের আয়তন $= l \times l \times l = l^3$ হয়।

তরলের আয়তন : কোন একটি পাত্রে তরল দ্বারা দখলকৃত স্থান মানাই তরলের আয়তন। তরলের আয়তন মাপার জন্য মিলিমিটার এবং লিটার এই প্রমাণিত এককের ব্যবহার হয় এটা আমরা জানি।

সংলগ্ন আকৃতিতে 10 সেমি বাহু সহ একটি খালি ঘনক দেওয়া আছে। এর আয়তন $= 10 \times 10 \times 10 = 1000$ ঘন সেমি। এই ঘনকটি যদি জল দিয়ে ভরা হয় তাহলে জল দ্বারা দখলকৃত স্থান মানাই ওই জলের আয়তন 1000 ঘনসেমি হবে। এই আয়তনকেই 1 লিটার বলা হয়।



$\therefore$ 1 লিটার = 1000 মিলি, এটা আমরা জানি।

$\therefore$ 1 লিটার = 1000 ঘনসেমি = 1000 মিলি অর্থাৎ 1 ঘনসেমি = 1 মিলি এটাও মনে রেখো।

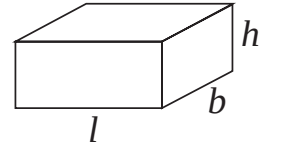
অর্থাৎ 1 সেমি বাহু সহ ঘনকের মধ্যে দখলকৃত জলের আয়তন 1 মিলি হয়।

সমাধান করা উদাহরণ

উদা. (1) আয়তঘন আকারের যদি মাছ রাখার একটি কাঁচের বাক্সের দৈর্ঘ্য 1 মিটার, প্রস্থ 40 সেমি এবং উচ্চতা 50 সেমি হয়, তাহলে ওই কাঁচের বাক্সে কতো লিটার জল ধরবে তাহা বের করো।

সমাধান : বাক্সে নিহিত জলের আয়তন ওই বাক্সের আয়তনের সমান হবে।

বাক্সের দৈর্ঘ্য 1 মিটার = 100 সেমি, প্রস্থ = 40 সেমি ও উচ্চতা 50 সেমি।



বাক্সের আয়তন $= l \times b \times h = 100 \times 40 \times 50 = 200000$ ঘন সেমি,

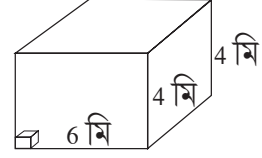
200000 ঘন সেমি $= \frac{200000}{1000} = 200$ লিটার। ($\therefore$ 1000 ঘন সেমি = 1 লিটার)

$\therefore$ ওই বাক্সে 200 লিটার জল ধরবে।

উদা. (2) একটি আয়তঘন আকারের গুদামের দৈর্ঘ্য 6 মিটার, প্রস্থ 4 মিটার এবং উচ্চতা 4 মিটার। এই গুদামে 40 সেমি বাহু সহ ঘনকাকৃতি বাক্স অধিকাধিক কয়টি ধরবে?

সমাধান : যখন গুদামটি ঘনকাকৃতি বাক্সে যথাসাধ্য ভরে যাবে তখন সমস্ত ঘনকাকৃতি বাক্সের মোট আয়তন, গুদামের আয়তনের সমান হবে। উদাহরণটি সমাধান করার জন্য এসো নিম্নলিখিত ধাপগুলির বিবেচনা করি।

- (1) গুদামের আয়তন নির্ণয় করবো।
- (2) একটি ঘনকাকৃতি বাক্সের আয়তন নির্ণয় করবো।
- (3) ঘনকাকৃতি বাক্সের সংখ্যা নির্ণয় করবো।



ধাপ (1): গুদামের দৈর্ঘ্য 6 মিটার = 600 সেমি, প্রস্থ = উচ্চতা = 4 মিটার = 400 সেমি
 গুদামের আয়তন = দৈর্ঘ্য $\times$ প্রস্থ $\times$ উচ্চতা = $600 \times 400 \times 400$ ঘনসেমি।

ধাপ (2): একটি ঘনকাকৃতি বাক্সের আয়তন = বাহু³ = $(40)^3 = 40 \times 40 \times 40$ ঘনসেমি।

ধাপ (3): ঘনকাকৃতি বাক্সের সংখ্যা = $\frac{\text{গুদামের আয়তন}}{\text{একটি ঘনকাকৃতি বাক্সের আয়তন}} = \frac{600 \times 400 \times 400}{40 \times 40 \times 40} = 1500$

$\therefore$ ওই গুদামে অধিকাধিক 1500 টি ঘনকাকৃতি বাক্স ধরবে।

উদা. (3) বর্ষি তৈরি করার জন্য খাওয়া ও চিনির দ্রবীভূত মিশ্রণ 5 লিটার আয়তঘন আকারের ট্রেতে রাখলে ট্রেটা পূর্ণ ভরে যায়। ট্রের প্রস্থ 40 সেমি ও উচ্চতা 2.5 সেমি হলে তার দৈর্ঘ্য নির্ণয় করো।

সমাধান : উদাহরণ সমাধান করার জন্য নিচের ছকে সঠিক সংখ্যা লেখো।

ধাপ (1) : ট্রের ধারণ ক্ষমতা (আয়তন) = 5 লিটার = ঘন সেমি ($\because$ 1 লিটার = 1000 ঘন সেমি)

ধাপ (2) : মিশ্রণের আয়তন = ঘন সেমি

ধাপ (3) : আয়তঘন আকারের ট্রের আয়তন = মিশ্রণের আয়তন

দৈর্ঘ্য $\times$ প্রস্থ $\times$ উচ্চতা = ঘন সেমি

দৈর্ঘ্য $\times$ 40 $\times$ 2.5 = ঘন সেমি $\therefore$ ট্রের দৈর্ঘ্য = $\frac{\text{$ }{100} = 50 সেমি



আমি এটা বুঝতে পেরেছি।

- আয়তঘনের আয়তন = দৈর্ঘ্য $\times$ প্রস্থ $\times$ উচ্চতা = $l \times b \times h$
- ঘনকের আয়তন = বাহু³ = l^3

অনুশীলনী 16.1

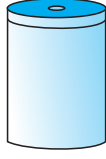
1. একটি বাক্সের দৈর্ঘ্য 20 সেমি, প্রস্থ 10.5 সেমি ও উচ্চতা 8 সেমি হইলে ওই বাক্সের আয়তন নির্ণয় করো।
2. একটি আয়তঘন আকারের সাবানের আয়তন 150 ঘন সেমি। তার দৈর্ঘ্য যদি 10 সেমি ও প্রস্থ 5 সেমি হয় তাহলে তার পুরুতা কতো হবে?
3. 6 মিটার দৈর্ঘ্য, 2.5 মিটার উচ্চতা ও 0.5 মিটার প্রস্থ এই মাপের একটি প্রাচীর বাঁধতে হলে 25 সেমি দৈর্ঘ্য, 15 সেমি প্রস্থ ও 10 সেমি উচ্চতার কয়টি ইঁট লাগবে?

4. এক বসতি বৃষ্টির জল সঞ্চয় করার জন্য 10 মিটার দৈর্ঘ্য, 6 মিটার প্রস্থ ও 3 মিটার গভীর একটি ট্যাঙ্ক তৈরি করলো। তাহলে ওই ট্যাঙ্কের ধারণ ক্ষমতা কতো হবে? ট্যাঙ্কিতে কতো লিটার জল ধরবে?

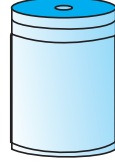
এসো জেনে নেই।

লম্ব বৃত্তাকার চোঙের পার্শ্বতলের ক্ষেত্রফল (Surface area of cylinder)

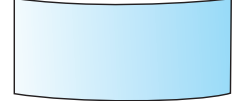
লম্ব বৃত্তাকার চোঙের আকারের একটি পাত্র নাও। তার উচ্চতার সমান প্রস্থ সহ একটি আয়তক্ষেত্রাকার কাগজ নাও। ওই পাত্রের বাইরের চারপাশের গা ঢেকে যাবে এইভাবে কাগজ পেঁচাও। কাগজের বেঁচে থাকা ভাগটিকে কেটে ফেলো।



লম্ব বৃত্তাকার চোঙ



কাগজ পেঁচানো



বৃত্তের পরিধি = দৈর্ঘ্য

পেঁচানো কাগজটি আলাদা করো। ওই কাগজটি আয়তক্ষেত্রাকারের মতো দেখতে পাবে। এই আয়তের ক্ষেত্রফল মানেই লম্ব বৃত্তাকার চোঙের বক্রাকার ভাগের ক্ষেত্রফল অর্থাৎ লম্ব বৃত্তাকার চোঙের বক্রতলের ক্ষেত্রফল।

আয়তের দৈর্ঘ্য অর্থাৎ বৃত্তাকার তলের পরিধি এবং আয়তের প্রস্থ অর্থাৎ চোঙের উচ্চতা লম্ব বৃত্তাকার চোঙের বক্রতলের ক্ষেত্রফল = আয়তের ক্ষেত্রফল = দৈর্ঘ্য $\times$ প্রস্থ

$$= \text{লম্ব বৃত্তাকার চোঙের তলের পরিধি} \times \text{চোঙের উচ্চতা}$$

$$\text{লম্ব বৃত্তাকার চোঙের বক্রতলের ক্ষেত্রফল} = 2\pi r \times h = 2\pi rh$$

বদ্ধ লম্ব বৃত্তাকার চোঙের নিচের তল এবং উপরের তল বৃত্তাকার হয়।

$\therefore$ বদ্ধ লম্ব বৃত্তাকার চোঙের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল = বক্রতলের ক্ষেত্রফল + উপরের বৃত্তাকার তলের ক্ষেত্রফল + নিচের বৃত্তাকার তলের ক্ষেত্রফল

$\therefore$ লম্ব বৃত্তাকার চোঙের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল = চোঙের বক্রতলের ক্ষেত্রফল + $2 \times$ বৃত্তের ক্ষেত্রফল

$$= 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi r (h + r)$$

সমাধান করা উদাহরণ

উদা. (1) একটি লম্ব বৃত্তাকার চোঙ আকারের জলের ট্যাঙ্কের ব্যাস 1 মিটার এবং উচ্চতা 2 মিটার। ট্যাঙ্কে ঢাকনা লাগানো আছে। ঢাকনাসহ ট্যাঙ্কের ভিতরের ও বাইরের ভাগে রঙ করতে হবে। রঙ করার খরচ হলো 80 টাকা প্রতি বর্গমিটার।

তাহলে ওই ট্যাঙ্কটি রঙ করার জন্য কতো টাকা খরচ হবে? ($\pi = 3.14$)

সমাধান : ট্যাঙ্কের ভিতরে ও বাইরের ভাগে রঙ করতে হবে। অর্থাৎ রঙ করা ভাগের ক্ষেত্রফল ওই ট্যাঙ্কের বাইরের সমগ্রতলের দ্বিগুণ।

লম্ব বৃত্তাকার চোঙের তলের ব্যাস 1 মিটার

∴ ব্যাসার্ধ 0.5 মিটার এবং লম্ব বৃত্তাকার চোঙের উচ্চতা 2 মিটার।

$$\begin{aligned}\therefore \text{লম্ব বৃত্তাকার চোঙের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল} &= 2\pi r (h + r) = 2 \times 3.14 \times 0.5 (2.0 + 0.5) \\ &= 2 \times 3.14 \times 0.5 \times 2.5 = 7.85 \text{ বর্গ মিটার}\end{aligned}$$

$$\therefore \text{রঙ করা ভাগের ক্ষেত্রফল} = 2 \times 7.85 = 15.70 \text{ বর্গ মিটার}$$

$$\therefore \text{ট্যাক্স রঙ করার জন্য মোট খরচ} = 15.70 \times 80 = 1256 \text{ টাকা।}$$

উদা. (2) একটি আয়তাকার দস্তার চাদরের দৈর্ঘ্য যদি 3.3 মিটার ও প্রস্থ 3 মিটার হয় তাহলে এই চাদর থেকে 3.5 সেমি ব্যাসার্ধ এবং 30 সেমি দৈর্ঘ্যের অধিকাধিক কতোগুলি নল তৈরি করা যাবে?

সমাধান : আয়তাকার চাদরের ক্ষেত্রফল = দৈর্ঘ্য $\times$ প্রস্থ

$$= 3.3 \times 3 \text{ বর্গমিটার} = 330 \times 300 \text{ বর্গসেমি}$$

একটি নলের দৈর্ঘ্য অর্থাৎ চোঙের উচ্চতা = $h = 30$ সেমি

নলের ব্যাসার্ধ = লম্ব বৃত্তাকার চোঙের তলের ব্যাসার্ধ = $r = 3.5$ সেমি,

একটি নল তৈরি করার জন্য প্রয়োজনীয় চাদর = একটি নলের বক্রতলের ক্ষেত্রফল

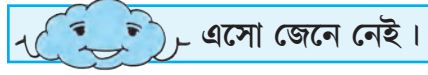
$$\begin{aligned}&= 2\pi rh = 2 \times \frac{22}{7} \times \frac{35}{10} \times \frac{30}{1} \\ &= 2 \times 22 \times 15 = 660 \text{ বর্গসেমি}\end{aligned}$$

$$\text{চাদর থেকে তৈরি হওয়া নলের সংখ্যা} = \frac{\text{চাদরের ক্ষেত্রফল}}{\text{একটি নলের বক্রতলের ক্ষেত্রফল}} = \frac{330 \times 300}{660} = 150$$

অনুশীলনী 16.2

- নিচের প্রতিটি উদাহরণে লম্ব বৃত্তাকার চোঙের আধারের ব্যাসার্ধ r ও উচ্চতা h দেওয়া আছে, এর সাহায্যে লম্ব বৃত্তাকার চোঙের বক্রতলের ক্ষেত্রফল ও সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।
(1) $r = 7$ সেমি, $h = 10$ সেমি (2) $r = 1.4$ সেমি, $h = 2.1$ সেমি (3) $r = 2.5$ সেমি, $h = 7$ সেমি
(4) $r = 70$ সেমি, $h = 1.4$ সেমি (5) $r = 4.2$ সেমি, $h = 14$ সেমি
- উভয় পাশ বদ্ধ একটি পাইপের ব্যাস যদি 50 সেমি ও উচ্চতা 45 সেমি হয় তাহলে ওই পাইপের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো। ($\pi = 3.14$)

3. একটি লম্ব বৃত্তাকার চোঙের বক্রতলের ক্ষেত্রফল যদি 660 বর্গসেমি এবং উচ্চতা 21 সেমি হয়, তাহলে এর ব্যাসার্ধ ও বৃত্তাকার তলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।
4. একটি লম্ব বৃত্তাকার চোঙ আকারের চাদরের বাস্তব ব্যাস 28 সেমি ও তার উচ্চতা 20 সেমি। ওর একপাশ উন্মুক্ত তারজন্য প্রয়োজনীয় চাদরের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো। ওই বাস্তবের জন্য 2 সেমি উচ্চতা ঢাকনা তৈরি করার জন্য প্রায় কতো বর্গসেমি চাদর লাগবে তাহা নির্ণয় করো।



লম্ব বৃত্তাকার চোঙের আয়তন (Volume of a cylinder)

লম্ব বৃত্তাকার চোঙ আকারের একটি জলের ট্যাক্সিতে কতোটা জল ধরবে এটা নির্ণয় করতে হলে ওই ট্যাক্সির আয়তন বের করতে হয়।

যে কোন চোঙের আয়তন = বৃত্তাকার তলের ক্ষেত্রফল $\times$ উচ্চতা, এটি সাধারণ সূত্র।

লম্ব বৃত্তাকার চোঙের তল বৃত্তাকার হয়। লম্ব বৃত্তাকার চোঙের আয়তন = $\pi r^2 h$

সমাধান করা উদাহরণ

উদা. (1) একটি লম্ব বৃত্তাকার চোঙের তলের ব্যাসার্ধ যদি 5 সেমি ও উচ্চতা 10 সেমি হয় তাহলে ওই লম্ব বৃত্তাকার চোঙের আয়তন নির্ণয় করো। ($\pi = 3.14$)

সমাধান : লম্ব বৃত্তাকার চোঙের তলের ব্যাসার্ধ $r = 5$ সেমি এবং উচ্চতা $h = 10$ সেমি

লম্ব বৃত্তাকার চোঙের আয়তন = $\pi r^2 h = 3.14 \times 5^2 \times 10 = 3.14 \times 25 \times 10 = 785$ ঘন সেমি।

উদা. (2) লম্ব বৃত্তাকার চোঙ আকারের একটি ট্যাক্সির উচ্চতা 56 সেমি। ওই ট্যাক্সির ধারণ ক্ষমতা 70.4 লিটার। তাহলে ওই ট্যাক্সির ব্যাসার্ধ নির্ণয় করো। ($\pi = \frac{22}{7}$)

সমাধান : মনে করো লম্ব বৃত্তাকার চোঙ আকারের ট্যাক্সির ব্যাসার্ধ = r

ট্যাক্সির ধারণ ক্ষমতা = ট্যাক্সির আয়তন = 70.4×1000 ঘন সেমি = 704×100 ঘনসেমি

1লিটার = 1000 মিলি $\therefore 70.4$ লিটার = 70400 মিলি

$$\therefore \text{ট্যাক্সির আয়তন} = \pi r^2 h = 70400$$

$$\therefore r^2 = \frac{70400}{\pi h} = \frac{70400 \times 7}{22 \times 56} = \frac{70400}{22 \times 8} = \frac{8800}{22} = 400$$

$$\therefore r = 20, \quad \therefore \text{ট্যাক্সির ব্যাসার্ধ হলো } 20 \text{ সেমি।}$$

উদা. (3) তামার একটি শক্ত বৃত্তাকার চোঙের তলের ব্যাসার্ধ 4.2 সেমি ও তার উচ্চতা 16 সেমি।
চোঙটিকে গলিয়ে 1.4 সেমি ব্যাস ও 0.2 সেমি পুরু কতোগুলি চাকতি তৈরি করা যাবে ?

সমাধান : লম্ব বৃত্তাকার চোঙের তলের ব্যাসার্ধ = $R = 4.2$ সেমি উচ্চতা = $H = 16$ সেমি

$$\text{লম্ব বৃত্তাকার চোঙের আয়তন} = \pi R^2 H = \pi \times 4.2 \times 4.2 \times 16.0$$

$$\text{চাকতির তলের ব্যাসার্ধ} = 1.4 \div 2 = 0.7 \text{ সেমি}$$

$$\text{চাকতির পুরু} = \text{লম্ব বৃত্তাকার চোঙের উচ্চতা} = 0.2 \text{ সেমি}$$

$$\text{চাকতির আয়তন} = \pi r^2 h = \pi \times 0.7 \times 0.7 \times 0.2$$

তামা গলানো লম্ব বৃত্তাকার চোঙ থেকে মনে করো n চাকতি তৈরি হবে।

$$\therefore n \times \text{একটি চাকতির আয়তন} = \text{লম্ব বৃত্তাকার চোঙের আয়তন}$$

$$\begin{aligned} n &= \frac{\text{লম্ব বৃত্তাকার চোঙের আয়তন}}{\text{একটি চাকতির আয়তন}} = \frac{\pi R^2 H}{\pi r^2 h} = \frac{R^2 H}{r^2 h} = \frac{4.2 \times 4.2 \times 16}{0.7 \times 0.7 \times 0.2} \\ &= \frac{42 \times 42 \times 160}{7 \times 7 \times 2} = 6 \times 6 \times 80 = 2880 \end{aligned}$$

$\therefore 2880$ চাকতি তৈরি করা যাবে।



$$\begin{aligned} \text{লম্ব বৃত্তাকার চোঙের বক্রতলের ক্ষেত্রফল} &= 2\pi rh \\ \text{লম্ব বৃত্তাকার চোঙের সমগ্রতলের ক্ষেত্রফল} &= 2\pi r(h + r) \\ \text{লম্ব বৃত্তাকার চোঙের আয়তন} &= \pi r^2 h \end{aligned}$$

অনুশীলনী 16.3

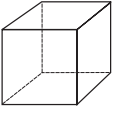
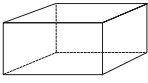
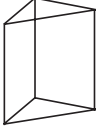
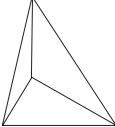
- নিচে লম্ব বৃত্তাকার চোঙের তলের ব্যাসার্ধ (r) এবং উচ্চতা (h) দেওয়া আছে। এর সাহায্যে লম্ব বৃত্তাকার চোঙের আয়তন নির্ণয় করো।

(1) $r = 10.5$ সেমি, $h = 8$ সেমি	(2) $r = 2.5$ মিটার, $h = 7$ মিটার
(3) $r = 4.2$ সেমি, $h = 5$ সেমি	(4) $r = 5.6$ সেমি, $h = 5$ সেমি
- 90 সেমি দৈর্ঘ্য এবং 1.4 সেমি ব্যাসের একটি লোহার ছড় তৈরি করার জন্য প্রয়োজনীয় লোহার আয়তন নির্ণয় করো।
- লম্ব বৃত্তাকার চোঙ আকারের একটি ট্যাঙ্কের অন্তর্ব্যাস 1.6 মিটার ও তার গভীরতা যদি 0.7 মিটার হয় তাহলে ওই ট্যাঙ্কে অধিকাধিক কতোটা জল ধরবে ?
- একটি লম্ব বৃত্তাকার চোঙের নিচের তলের পরিধি 132 সেমি এবং উচ্চতা 25 সেমি। তাহলে ওই লম্ব বৃত্তাকার চোঙের আয়তন কতো হবে ?

আয়লরের সূত্র (For more information) :

পৃষ্ঠ (F), শীর্ষবিন্দু (V) এবং ধার (E) যুক্ত ঘনকাকৃতি সম্বন্ধী একটা মনোরঞ্জক সূত্র খুব ছোটো বয়সে লিওনার্ডো আয়লর এই মহান গণিতিজ্ঞ খোঁজ করেছেন।

নিচের তালিকায় ঘনকাকৃতির ধার, কোণা এবং পৃষ্ঠফল গণনা করে তালিকা পূর্ণ করো ও $V + F = E + 2$ এই আয়লরের সূত্র যাচাই করে দেখো।

নাম	ঘনক	আয়তঘন	প্রিজম	প্রিজম সূচী	পঞ্চকোণী সূচী	ষষ্ঠকোণী
আকার						
পৃষ্ঠ (F)	6					8
শীর্ষবিন্দু (V)	8					12
ধার (E)		12			10	

৯৯৯

উত্তরমালা

অনুশীলনী 16.1

1. 1680 ঘন সেমি 2. 3 সেমি 3. 2000 ইঁট 4. 1,80,000 লি.

অনুশীলনী 16.2

1. (1) 440 বর্গসেমি, 748 বর্গসেমি (2) 18.48 বর্গসেমি, 30.80 বর্গসেমি
 (3) 110 বর্গসেমি, 149.29 বর্গসেমি (4) 616 বর্গসেমি, 31416 বর্গসেমি
 (5) 369.60 বর্গসেমি, 480.48 বর্গসেমি
 2. 10,990 বর্গসেমি 3. 5 সেমি, 78.50 বর্গসেমি
 4. 2376 বর্গসেমি, ঢক্কনের জন্য অনুমানিক 792 বর্গসেমি চাদর প্রয়োজন।

অনুশীলনী 16.3

1. (1) 2772 ঘন সেমি (2) 137.5 ঘন সেমি (3) 277.2 ঘন সেমি (4) 492.8 ঘন সেমি
 2. 138.6 ঘন সেমি 3. 1408 লি 4. 34650 ঘন সেমি

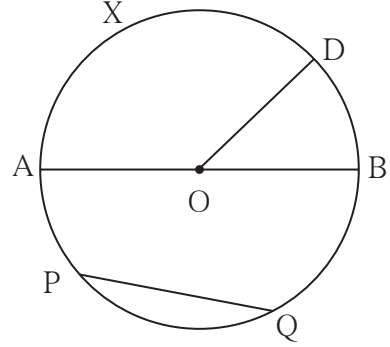


একটু স্মরণ করি।

সংলগ্নে চিত্রে বিন্দু O হলো বৃত্তের কেন্দ্র।

চিত্র দ্বারা সম্পর্কিত প্রদত্ত বিবৃতিগুলির শূন্যস্থান পূর্ণ করো।

- রেখাংশ OD হলো বৃত্তের।
- রেখাংশ AB হলো বৃত্তের।
- রেখাংশ PQ হলো বৃত্তের।
- হলো কেন্দ্রীয় কোণ।
- উপচাপ : চাপ AXD, চাপ BD,,,
- দীর্ঘচাপ : চাপ PAB, চাপ PDQ,
- $m(\text{চাপ DB}) = m\angle \dots\dots\dots$
- অর্ধবৃত্তের চাপ : চাপ ADB,
- $m(\text{চাপ DAB}) = 360^\circ - m\angle \dots\dots\dots$

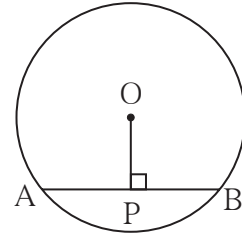


এসো জেনে নেই।

বৃত্তের জ্যা এর বৈশিষ্ট্য (Properties of chord of a circle)

কৃতি I :

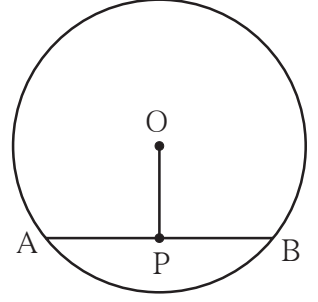
- O কেন্দ্রের বৃত্তে রেখাংশ AB এই জ্যা আঁকো।
- O কেন্দ্রের জ্যা AB-এর উপর লম্ব রেখাংশ OP আঁকো।
- রেখাংশ AD এবং রেখাংশ PB এর দৈর্ঘ্য মাপো।



এইভাবে ভিন্ন-ভিন্ন ব্যাসার্ধের পাঁচটি বৃত্ত কাগজের উপর আঁকো। প্রতিটি বৃত্তের একটি জ্যা আঁকো এবং কেন্দ্র থেকে ওই জ্যার উপর লম্ব আঁকো। জ্যার সমান দুটি ভাগ হয়েছে কি? তাহা কাঁটা কম্পাসের সাহায্যে যাচাই করে দেখো।

তোমরা নিম্নলিখিত বৈশিষ্ট্য পাবে। এটা অনুভব করে দেখো। বৃত্তের কেন্দ্র থেকে জ্যার উপর আঁকা লম্ব ওই জ্যাকে সমদ্বিখন্ডিত করে।

কৃতি II: একটি কাগজের উপর ভিন্ন-ভিন্ন ব্যাসার্ধের 5 টি বৃত্ত আঁকো। প্রতিটি বৃত্তে একটি জ্যা আঁকো। ওই জ্যার মধ্যবিন্দু নির্দিষ্ট করো। বৃত্তের কেন্দ্র O এবং জ্যার মধ্য সংযুক্ত করো। সংলগ্ন আকৃতিতে দেখানো অনুসারে প্রতিটি জ্যাকে AB এবং জ্যার মধ্যবিন্দুকে P নাম দাও। $\angle APO$ এবং $\angle BPO$ সমকোণ ত্রিভুজ তাহা চাঁদার অথবা কোণ মাপকের সাহায্যে যাচাই করে দেখো।



এই অনুভব বৃত্তের প্রতিটি জ্যা থেকে পাওয়া হয় তাহা দেখো। এই ভিত্তিতে নিম্নলিখিত বৈশিষ্ট্য পাবে।

বৃত্তের কেন্দ্র এবং বৃত্তে অবস্থিত জ্যার মধ্যবিন্দুকে মিলানো রেখাংশ ওই জ্যার উপর লম্ব হয়ে থাকে।

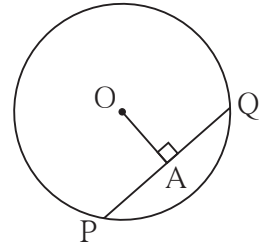
সমাধান করা উদাহরণ

উদা. (1) ‘O’ কেন্দ্র বৃত্তের জ্যা PQ-এর দৈর্ঘ্য 7 সেমি।

রেখাংশ OA $\perp$ জ্যা PQ হয়, তাহলে I(AP) নির্ণয় করো।

সমাধান : রেখাংশ OA $\perp$ জ্যা PQ, $\therefore$ বিন্দু A জ্যা PQ-এর মধ্যবিন্দু।

$$\therefore I(PA) = \frac{1}{2} I(PQ) = \frac{1}{2} \times 7 = 3.5 \text{ সেমি}$$



উদা. (2) ‘O’ কেন্দ্রবিন্দু বৃত্তের ব্যাসার্ধ 10 সেমি। ওই বৃত্তের একটি জ্যা কেন্দ্র বিন্দু থেকে 6 সেমি দূরত্ব আছে, তাহলে ওই জ্যার দৈর্ঘ্য নির্ণয় করো।

সমাধান : বৃত্তের জ্যা থেকে কেন্দ্রবিন্দুর দূরত্ব অর্থাৎ কেন্দ্রবিন্দু থেকে ওই জ্যার উপর টানা লম্ব রেখাংশের দৈর্ঘ্য।

রেখাংশ AB হলো ‘O’ কেন্দ্রবিন্দু বৃত্তের জ্যা।

রেখাংশ OP $\perp$ জ্যা AB।

বৃত্তের ব্যাসার্ধ = $I(OB) = 10$ সেমি।

$I(OP) = 6$ সেমি। এখানে সমকোণ ΔOPB তৈরি হয়।

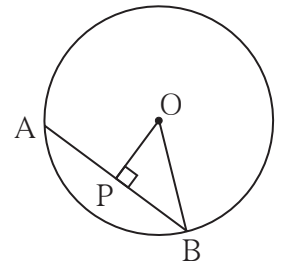
পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে,

$$[I(OP)]^2 + [I(PB)]^2 = [I(OB)]^2$$

$$\therefore 6^2 + [I(PB)]^2 = 10^2$$

$$\therefore [I(PB)]^2 = 10^2 - 6^2$$

$$\therefore [I(PB)]^2 = (10 + 6)(10 - 6) = 16 \times 4 = 64$$



$$\therefore l(PB) = 8 \text{ সেমি.}$$

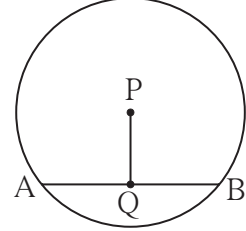
আমরা জানি যে, বৃত্তের কেন্দ্র থেকে জ্যার উপর আঁকা লম্ব ওই জ্যাকে সমদ্বিখন্ড করে থাকে।

$$\therefore l(AB) = 2 l(PB) = 2 \times 8 = 16$$

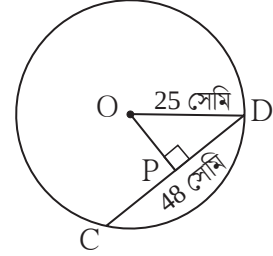
$\therefore$ জ্যা AB-এর দৈর্ঘ্য 16 সেমি।

অনুশীলনী 17.1

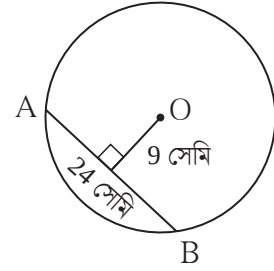
1. 'O' কেন্দ্রে বিন্দু বৃত্তের জ্যা AB-এর দৈর্ঘ্য 13 সেমি।
রেখাংশ $PQ \perp$ জ্যা AB হয় তাহলে $l(QB)$ নির্ণয় করো।



2. 'O' কেন্দ্রবিন্দু বৃত্তের ব্যাসার্ধ 25 সেমি। এই বৃত্ত 48 সেমি দৈর্ঘ্যের একটি জ্যা আঁকা হয়, তাহলে ওই জ্যা বৃত্তের কেন্দ্রবিন্দু থেকে কতো দূরে হবে?



3. 'O' কেন্দ্রবিন্দু বৃত্তের একটি জ্যার দৈর্ঘ্য 24 সেমি এবং ওই জ্যা বৃত্ত কেন্দ্র থেকে 9 সেমি দূরত্বে আছে, তাহলে ওই বৃত্তের ব্যাসার্ধ নির্ণয় করো।



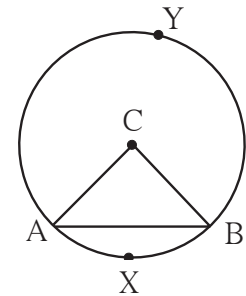
4. একটি বৃত্তের কেন্দ্রবিন্দু 'C' এবং তার ব্যাসার্ধ 10 সেমি। ওই বৃত্তের একটি জ্যার দৈর্ঘ্য 12 সেমি ওই জ্যার কেন্দ্রবিন্দু থেকে কতো দূরে হবে?



এসো জেনে নেই।

বৃত্তের জ্যার সম্বন্ধিত চাপ (Arcs corresponding to the chord of a circle)

সংলগ্ন আকৃতিতে রেখাংশ AB, 'O' কেন্দ্রবিন্দু বৃত্তের জ্যা।
চাপ AXB উপচাপ এবং চাপ AYB অধিচাপ এই উভয় চাপকে জ্যা AB -এর সম্বন্ধিত চাপ বলে। এদের বিপরীত জ্যা AB চাপ AXB এবং চাপ AYB এর সম্বন্ধিত জ্যা।



সর্বসম চাপ (Congruent arcs)

যদি একই বৃত্তের দুটি চাপের পরিমাপ সমান হয়, তাহলে উভয় চাপ সর্বসম হয়ে থাকে।

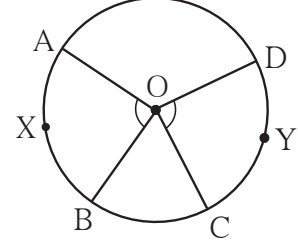
‘O’ কেন্দ্র বিন্দুওয়ালা বৃত্তে

$$\therefore m\angle AOB = m\angle COD$$

$$\therefore m(\text{চাপ } AXB) = m(\text{চাপ } CYD)$$

$$\therefore \text{চাপ } AXB \cong \text{চাপ } CYD$$

এটা ট্রেসিং পেপারের সাহায্যে যাচাই করে দেখো।



বৃত্তের জ্যা এবং সন্নিহিত চাপের বৈশিষ্ট্য প্রদত্ত কৃতিতে খোঁজ করো এবং মনে রেখো।

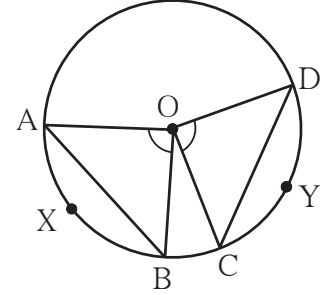
কৃতি I :

(1) ‘O’ কেন্দ্রের একটি বৃত্ত আঁকো।

(2) বৃত্তে সমান মাপের $\angle COD$ ও $\angle AOB$ কোণ আঁকো। এই ভিত্তিতে চাপ AXB এবং CYD এই সর্বসম চাপ প্রাপ্ত হবে।

(3) জ্যা AB এবং জ্যা CD আঁকো।

(4) কাঁটা কম্পাসের সাহায্যে জ্যা AB এবং CD-এর দৈর্ঘ্য সমান তা অনুভব করে দেখো।



কৃতি II :

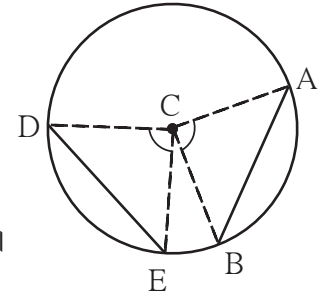
(1) ‘C’ কেন্দ্রের একটি বৃত্ত আঁকো।

(2) এই বৃত্তের সর্বসম জ্যা রেখাংশ AB এবং DE আঁকো।

রেখাংশ CA, রেখাংশ CB, রেখাংশ CD, রেখাংশ CE এই ব্যাসার্ধগুলি আঁকো।

(3) $\angle ACB$ এবং $\angle DCE$ সর্বসম, তাহা দেখাও।

(4) এই ভিত্তিতে চাপ AB এবং চাপ DE-এর পরিমাপ সমান, অর্থাৎ এই চাপগুলি সর্বসম, তাহা দেখাও।

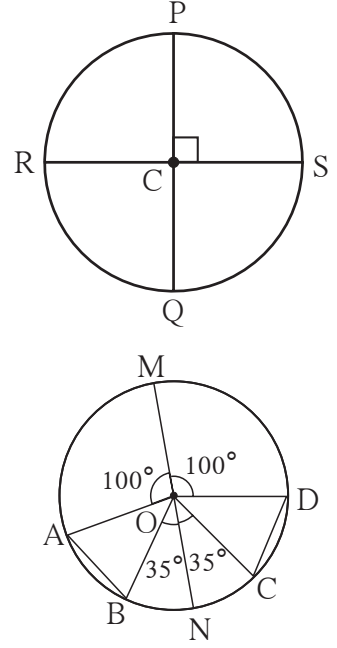


এটা আমি বুঝতে পেরেছি।

একটি বৃত্তের সর্বসম চাপের সন্নিহিত জ্যা সর্বসম হয়ে থাকে। একটি বৃত্তের দুটি জ্যা সর্বসম হয়, তাহলে তাদের সম্পর্কিত সন্নিহিত উপচাপ এবং অধিচাপ সর্বসম হয়ে থাকে।

অনুশীলনী 17.2

- ‘C’ কেন্দ্র বৃত্তে রেখাংশ PQ এবং রেখাংশ RS এই ব্যাসগুলি সমকোণে একে-অপরে ছেদ করে। তাহলে (1) চাপ PS এবং চাপ SQ সর্বসম আছে কি না তা বলো? (2) চাপ PS-এর সঙ্গে সর্বসম হয় এমন অন্য চাপের নাম লেখো।
- আকৃতিতে ‘O’ কেন্দ্র বৃত্তে রেখাংশ MN হলো ব্যাস। কিছু কেন্দ্রীয় কোণের পরিমাপ দেওয়া আছে।
এই ভিত্তিতে (1) $m\angle AOB$ এবং $m\angle COD$ -এর পরিমাপ নির্ণয় করো।
(2) চাপ $AB \cong$ চাপ CD দেখাও।
(3) জ্যা $AB \cong$ জ্যা CD দেখাও।



১১১

উত্তরমালা

অনুশীলনী 17.1

- 6.5 সেমি
- 7 সেমি
- 15 সেমি
- 8 সেমি

অনুশীলনী 17.2

- (1) কারণ চাপের সন্নিহিত কেন্দ্রীয় কোণ সমান পরিমাপের অর্থাৎ প্রতিটি 90° ।
(2) চাপ $PS \cong$ চাপ $PR \cong$ চাপ RQ
- (1) $m\angle AOB = m\angle COD = 45^\circ$
(2) চাপ $AB \cong$ চাপ CD কারণ চাপের সন্নিহিত কেন্দ্রীয় কোণ সমান পরিমাপের অর্থাৎ প্রতিটি 45° ।
(3) জ্যা $AB \cong$ জ্যা CD কারণ সর্বসম চাপের সন্নিহিত জ্যা সর্বসম হয় থাকে।

বিক্ষিপ্ত অনুশীলনী - 2

- নিচের প্রশ্নের জন্য উত্তরের বিকল্প দেওয়া হয়েছে। তার থেকে উচিত বিকল্পটি চয়ন করো।
 (1) একটি বৃত্তের ক্ষেত্রফল 1386 বর্গসেমি হলে তার পরিধি কতো হবে?
 (A) 132 বর্গসেমি (B) 132 সেমি (C) 42 সেমি (D) 21 বর্গসেমি
 (2) একটি ঘনকের বাহু 4 মিটার। তাকে দ্বিগুণ করলে তার ঘনফল কতোগুণ বৃদ্ধি পাবে?
 (A) দুই গুণ (B) তিন গুণ (C) চার গুণ (D) আট গুণ
- প্রণালী 100 মিটার দৌড় প্রতিযোগিতার অভ্যাস করতেন। সেইজন্য সে 100 মিটার দূরত্ব 20 বার দৌড়েছিলেন। প্রত্যেক বার প্রয়োজনীয় সময় নিচে সেকেন্ডে দেওয়া আছে।
 18, 17, 17, 16, 15, 16, 15, 14, 16, 15,
 15, 17, 15, 16, 15, 17, 16, 15, 14, 15 দৌড়ানোর জন্য তার লাগা সময়ের মধ্য নির্ণয় করো।
- $\triangle DEF$ এবং $\triangle LMN$ এই ত্রিভুজ $EDF \leftrightarrow LMN$ এই পরস্পর সংগতিতে সর্বসম। তাহলে এই সংগতিনুসারে হওয়া সর্বসম বাহু ও সর্বসম কোণের জোড়া লেখো।
- একটি যন্ত্রের মূল্য 2,50,000 টাকা। এই মূল্য প্রতি বছর 4% হারে কমে যায়। তবে যন্ত্র ক্রয় করবার তিন বছর পর সেই যন্ত্রের মূল্য কতো হবে?
- $\square ABCD$ -এর মধ্যে বাহু $AB \parallel$ বাহু DC , রেখাংশ $AE \perp$ বাহু DC যদি $l(AB) = 9$ সেমি, $l(AE) = 10$ সেমি, $A(\square ABCD) = 115$ সেমি², তাহলে $l(DC)$ নির্ণয় করো।
- লম্ব বৃত্তাকার চোঙের আকারের একটি টাকির তলের ব্যাস 1.75 মিটার এবং উচ্চতা 3.2 মিটার। তাহলে সেই টাকির ক্ষমতা কতো লিটার? ($\pi = \frac{22}{7}$)
- 9.1 সেমি থাকা বৃত্তের একটি জ্যার দৈর্ঘ্য 16.8 সেমি। তাহলে সেই জ্যাটি কেন্দ্র হতে কতো দূরে অবস্থিত?
- রোজগার হমী যোজনার অন্তর্গত A, B, C, D এই গ্রামে শুরু থাকা কাজে পুরুষ ও স্ত্রী শ্রমিকের সংখ্যা নিম্ন তালিকায় দেওয়া আছে।

গ্রাম	A	B	C	D
স্ত্রী	150	240	90	140
পুরুষ	225	160	210	110

- এই তথ্য বিভক্ত স্তম্ভলেখ দ্বারা দেখাও।
- এই তথ্য শতাংশ স্তম্ভলেখের দ্বারা দেখাও।

9. নিম্ন সমীকরণগুলি সমাধান করো।

(1) $17(x+4) + 8(x+6) = 11(x+5) + 15(x+3)$

(2) $\frac{3y}{2} + \frac{y+4}{4} = 5 - \frac{y-2}{4}$

(3) $5(1-2x) = 9(1-x)$

10. নিম্ন কৃতিগুলি প্রদত্ত ধাপ অনুসারে করো।

(1) বিষম-কোণী সমবাহু ABCD এবং তার কর্ণ AC আঁকো।

(2) সর্বসম অংশগুলি সমান চিহ্নে দেখাও।

(3) $\triangle ADC$ ও $\triangle ABC$ কোন সংগতি ও কোন শর্তে সর্বসম হয় তা লেখো।

(4) $\angle DCA \cong \angle BCA$, তেমনি $\angle DAC \cong \angle BAC$ দেখানোর জন্য উচিত কারণ লেখো।

(5) উক্ত ধাপের দ্বারা অবগত বিষম-কোণী সমবাহু চতুর্ভুজের ধর্ম লেখো।

11. একটি জমি চতুর্ভুজাকার। তার চারটি কোণকে P, Q, R, S নাম দিয়ে তাদের পরিমাপ নিম্নানুসারে দেওয়া হয়েছে।

$\angle(PQ) = 170$ মিটার $\angle(QR) = 250$ মিটার, $\angle(RS) = 100$ মিটার, $\angle(PS) = 240$ মিটার, $\angle(PR) = 260$ মিটার

উক্ত জমির ক্ষেত্রফল হেক্টরে নির্ণয় করো। (1 হেক্টর = 10,000 বর্গ মিটার)

12. একটি গ্রন্থালয়ের মোট বইয়ের 50% বই মারাতী মাধ্যমের। মারাতী বইয়ের $\frac{1}{3}$ ইংরেজি বই এবং ইংরেজি বইয়ের 25% বই গণিতের। অবশিষ্ট 560 টি বই অন্যান্য বিষয়ের। তাহলে ওই গ্রন্থালয়ে মোট কয়টি বই আছে?

13. $(2x + 1)$ এই দ্বিপদীর দ্বারা $(6x^3 + 11x^2 - 10x - 7)$ এই বহুপদীকে ভাগ করো। ভাগফল এবং অবশিষ্ট লেখো।

উত্তরমালা

1. (1) B (2) D 2. 15.7 সেকণ্ড

3. বাহু $ED \cong$ বাহু LM , বাহু $DF \cong$ বাহু MN , বাহু $EF \cong$ বাহু LN ,

$\angle E \cong \angle L$, $\angle D \cong \angle M$, $\angle F \cong \angle N$

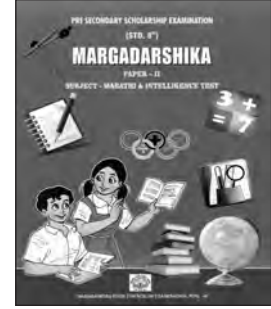
4. ₹ 2,21,184 5. 14 সেমি 6. 7700

7. 3.5 সেমি

9. (1) $x = 16$, (2) $y = \frac{9}{4}$ (3) $x = -4$ 11. 3.24 হেক্টর

12. 1920 13. ভাগফল $3x^2 + 4x - 7$; অবশিষ্ট 0

इयत्ता ५ वी, ८ वी शिष्यवृत्ती परीक्षा मार्गदर्शिका



- मराठी, इंग्रजी, उर्दू, हिंदी माध्यमामध्ये उपलब्ध
- सरावासाठी विविध प्रश्न प्रकारांचा समावेश

- घटकनिहाय प्रश्नांचा समावेश
- नमुन्यादाखल उदाहरणांचे स्पष्टीकरण



पुस्तक मागणीसाठी www.ebalbharati.in, www.balbhharati.in संकेत स्थळावर भेट द्या.

साहित्य पाठ्यपुस्तक मंडळाच्या विभागीय भांडारांमध्ये विक्रीसाठी उपलब्ध आहे.



ebalbharati

विभागीय भांडारे संपर्क क्रमांक : पुणे - ☎ २५६५९४६५, कोल्हापूर - ☎ २४६८५७६, मुंबई (गोरेगाव) - ☎ २८७७९८४२, पनवेल - ☎ २७४६२६४६५, नाशिक - ☎ २३९७५११, औरंगाबाद - ☎ २३३२७७९, नागपूर - ☎ २५४७७९६/२५२३०७८, लातूर - ☎ २२०९३०, अमरावती - ☎ २५३०९६५



মহারাষ্ট্র রাজ্য পাঠ্যপুস্তক নির্মিতি ও অভ্যাসক্রম সংশোধন মণ্ডল,
পুণে - ৪১১ ০০৮

গণিত ইয়ত্তা আঠবী (বংগালী মাধ্যম)

₹ 48.00