গণিত

সপ্তম শ্রেণী

ভারতের সংবিধান

ভাগ 4 ক

মৌলিক কর্তব্য

অনুচ্ছেদ 51 ক

মৌলিক কর্তব্য - ভারতের প্রতিটি নাগরিকের এই কর্তব্য থাকবে যে সে-

(ক) সংবিধানকে মান্য করতে হবে এবং সংবিধানের আদর্শ, প্রতিষ্ঠানসমূহ, জাতীয় পতাকা এবং জাতীয় সংগীতের প্রতি শ্রদ্ধা জানাতে হবে ;

(খ) যে সকল মহান আদর্শ দেশের স্বাধীনতার জন্য জাতীয় সংগ্রামকে অনুপ্রাণিত করেছিল, সেগুলিকে পোষণ এবং অনুসরণ করতে হবে;

(গ) ভারতের সার্বভৌমিকতা, ঐক্য এবং সংহতিকে সমর্থন ও সংরক্ষণ করতে হবে;

(ঘ) দেশরক্ষা ও জাতীয় সেবাকার্যে আত্মনিয়োগের জন্য আহ্বত হলে সাড়া দিতে হবে ;

(ঙ) ধর্মগত, ভাষাগত, অঞ্চলগত বা শ্রেণীগত বিভেদের ঊর্ধ্বে থেকে সমস্ত ভারতবাসীর মধ্যে ঐক্য ও ভ্রাতৃত্ববোধকে সম্প্রসারিত করতে হবে এবং নারীজাতির মর্যাদাহানিকর সকল প্রথাকে পরিহার করতে হবে;

(চ) আমাদের দেশের বহুমুখী সংস্কৃতির গৌরবময় ঐতিহ্যকে মূল্যপ্রদান ও সংরক্ষণ করতে হবে;

(ছ) বনভূমি, হ্রদ, নদী, বন্যপ্রাণী-সহ প্রাকৃতিক পরিবেশের সংরক্ষণ ও উন্নতি এবং জীবজন্তুর প্রতি মমত্ববোধ প্রকাশ করতে হবে;

(জ) বৈজ্ঞানিক দৃষ্টিভঙ্গি, মানবিকতাবোধ, অনুসন্ধিসা, সংস্কারমূলকমনোভাবের প্রসার ঘটাতে হবে;

(ঝ) জাতীয় সম্পত্তি রক্ষণাবেক্ষণ ও হিংসার পথ পরিহার করতে হবে;

(ঞ) সকল ক্ষেত্রে জাতীয় উন্নতির উকর্ষ এবং গতি বজায় রাখার উদ্দেশ্যে ব্যক্তিগত ও সমষ্টিগত সকল কাজে চরম উকর্ষের জন্য সচেষ্ট হতে হবে;

(ট) মাতা-পিতা বা অভিভাবকদের ছয় থেকে চৌদ্দ বছর বযসেরপ্রত্যেক শিশুকে শিক্ষাদানের ব্যবস্থা করতে হবে।

শাসন নির্ণয় ক্রমাঙ্ক : অভ্যাস-২১১৬ / (প্র.ক্র. ৪৩ / ১৬) এসডী-৪ তারিখ ২৫.০৪.২০১৬ অনুযায়ী স্থাপিত করা সমন্বয় সমিতির তারিখ ২৯.০৪.২০২২ এর সভায় এই পাঠ্যপুস্তক সন ২০২২-২০২৩ এই শৈক্ষণিক বর্ষ থেকে নির্ধারিত করার জন্য মান্যতা দেওয়া হয়েছে।

গণিত

সপ্তম শ্রেণী

মহারাষ্ট্র রাজ্য পাঠ্যপুস্তক নির্মিতী ও অভ্যাসক্রম সংশোধন মণ্ডল, পুণে - ৪১১ ০০৪

D3D8W3

আপনার স্মার্টফোনে DIKSHA APP দ্বারা পাঠ্যপুস্তকের প্রথম পৃষ্ঠার Q.R. Code-এর মাধ্যমে ডিজিটাল পাঠ্যপুস্তক এবং পাঠের সম্বন্ধে অধ্যয়ন-অধ্যাপনের জন্য উপযুক্ত দৃক-শ্রাব্য সাহিত্য উপলব্ধ হবে।

First Edition : 2022

© **মহারাষ্ট্র রাজ্য পাঠ্যপুস্তক নির্মিতী ও অভ্যাসক্রম সংশোধন মণ্ডল, পুণে - ৪১১ ০০৪**

এই বইয়ের সর্ব অধিকার মহারাষ্ট্র রাজ্য পাঠ্যপুস্তক নির্মিতী ও অভ্যাসক্রম সংশোধন মণ্ডলের অধিনে সুরক্ষিত আছে। এই পাঠ্যপুস্তকের কোনো ভাগ সঞ্চালক মহারাষ্ট্র রাজ্য পাঠ্যপুস্তক নির্মিতী ও অভ্যাসক্রম সংশোধন মণ্ডলের লিখিত অনুমতি ছাড়া উদ্ধিতি করা যাবে না।

গণিত বিশেষজ্ঞ সমিতি

ডা. মঙ্গলা নারড়ীকর (অধ্যক্ষ)
ডা. জয়শ্রী অত্রে (সদস্য)
শ্রী রমাকান্ত সরোদে (সদস্য)
শ্রী দাদাসো সরডে (সদস্য)
শ্রী সন্দীপ পঞ্চভাই (সদস্য)
শ্রীমতী লতা টিড়েকর (সদস্য)
শ্রীমতী উজ্জ্বলা গোডবোলে (সদস্য সচিব)

গণিত বিষয় - রাজ্য অভ্যাসগট সদস্য

শ্রীমতী পূজা জাধব
শ্রী গণেশ কোলতে
শ্রী রামা হ্বান্যাড়কর
শ্রীমতী সুবর্ণা দেশপান্ডে
শ্রী উমেশ রেড়ে
শ্রী আন্নাপা পরীট
শ্রী শ্রীপাদ দেশপান্ডে
শ্রী রাজেন্দ্র চৌধুরী
শ্রী চন্দন কুলকর্ণী
শ্রীমতী অনিতা জাওয়ে
শ্রীমতী বাগেশ্রী চহ্বান
শ্রী কল্যাণ কড়েকর
শ্রী সন্দেশ সোনাওয়ানে
শ্রী সুজিত শিন্দে
ডা. হনুমন্ত জগতাপ
শ্রী প্রতাপ কাশিদ
শ্রী কাশিরাম বাওয়িসানে
শ্রী পপ্পু গাডে
শ্রী আন্সার শেখ
শ্রী প্রমোদ ঠোম্বরে
শ্রী প্রকাশ ঝেণ্ডে
শ্রী বন্সী হাওড়ে
শ্রী শ্রীকান্ত রত্নপারখী
শ্রী সূর্যকান্ত শহানে
শ্রী সুরেশ দাতে
শ্রী প্রকাশ কাপসে
শ্রী সলীম হাস্মী
শ্রীমতী আর্যা ভিড়ে
শ্রী মিলিন্দ ভাকরে
শ্রী জ্ঞানেশ্বর মাশাড়কর
শ্রী লক্ষ্মণ দাওয়ানকর
শ্রী সুধীর পাটীল
শ্রী রাজারাম বন্ডগর
শ্রীমতী রোহিনী শির্কে
শ্রী সাগর সকুডে
শ্রী প্রদীপ গোডসে
শ্রী রবীন্দ্র খন্দারে

শ্রীমতী প্রাজক্তী গোখলে (নিমন্ত্রিত সদস্য)

প্রকাশক

বিবেক উত্তম গোসাবী, নিয়ন্ত্রক
পাঠ্যপুস্তক নির্মিতি মণ্ডল, প্রভাদেবী, মুম্বই-২৫

প্রমুখ সংযোজক : **উজ্জ্বলা শ্রীকান্ত গোডবোলে**
প্র. বিশেষাধিকারী গণিত,
পাঠ্যপুস্তক মণ্ডল, পুণে

মুখপৃষ্ঠ ও রূপায়ন : ধনশ্রী মোকাশী, পুণে
কম্পিউটার আরেখন : সন্দীপ কোড়ী, মুম্বই
চিত্রকার : ধনশ্রী মোকাশী

ভাষান্তরকার : শ্রী বিশ্বজিৎ সন্তোষ বাইন
শ্রী বিদুর শিশির অধিকারী
সমিক্ষক : শ্রী জনক গোপাল সরকার
শ্রী সুজিত শঙ্কর দাস
বিষয় তজ্ঞ : শ্রী নিত্যানন্দ রঞ্জন বালা
শ্রী প্রকাশ রনজীত দেবনাথ
ভাষান্তর সংযোজক : ডা. অলকা পোতদার
বিশেষাধিকারী হিন্দী
পাঠ্যপুস্তক মণ্ডল, পুণে
সংযোজক সহায়ক : সৌ. সন্ধ্যা বি উপাসনী
সহায়ক বিশেষাধিকারী, হিন্দী
পাঠ্যপুস্তক মণ্ডল, পুণে

নির্মিতি : সচীন মেহতা
মুখ্য নির্মিতি অধিকারী
সঞ্জয় কাংবড়ে
নির্মিতি অধিকারী
অক্ষরাঙ্কন : গণিত বিভাগ,
পাঠ্যপুস্তক মণ্ডল, পুণে
কাগজ : ৭০ জী.এস.এম. ক্রিমবোভ
মুদ্রণাদেশ :
মুদ্রক :

ভারতের সংবিধান

উদ্দেশিকা

''আমরা, ভারতের জনগণ, ভারতকে সার্বভৌম, সমাজতান্ত্রিক, ধর্মনিরপেক্ষ, গণতান্ত্রিক, সাধারণতন্ত্র রূপে গড়ে তুলতে এবং তার সকল নাগরিকই যাতে

সামাজিক, অর্থনৈতিক ও রাজনৈতিক ন্যায়,
বিচার, মতপ্রকাশ, বিশ্বাস, ধর্ম
এবং উপাসনার স্বাধীনতা,
সামাজিক প্রতিষ্ঠা অর্জন
ও সুযোগের সমতা প্রতিষ্ঠা
এবং তাদের সকলের মধ্যে

ব্যক্তির মর্যাদা এবং জাতীয় ঐক্য
ও সংহতি সুনিশ্চিতকরণের মাধ্যমে
তাদের মধ্যে যাতে ভ্রাতৃত্বের ভাব

গড়ে ওঠে তার জন্য

সত্যনিষ্ঠার সঙ্গে শপথ গ্রহণ করে আমাদের গণপরিষদে, আজ ১৯৪৯, সালের ২৬ শে নভেম্বর, (তিথি মাঘ শুক্ল সপ্তমী, সম্বত দুই হাজার ছয় বিক্রমী) এতদ্দ্বারা এই সংবিধান গ্রহণ, বিধিবদ্ধ এবং নিজেদের অর্পণ করছি।''

রাষ্ট্রগীত

জনগণমন-অধিনায়ক জয় হে
ভারত-ভাগ্যবিধাতা।
পাঞ্জাব সিন্ধু গুজরাত মরাঠা
দ্রাবিড় উৎকল বঙ্গ,
বিন্ধ্য হিমাচল যমুনা গঙ্গা
উচ্ছল জলধিতরঙ্গ
তব শুভ নামে জাগে, তব শুভ আশিষ মাগে,
গাহে তব জয়গাথা।
জনগণ মঙ্গলদায়ক জয় হে,
ভারত-ভাগ্যবিধাতা।
জয় হে, জয় হে, জয় হে,
জয় জয় জয় জয় হে।।

প্রতিজ্ঞা

ভারত আমার দেশ । সমস্ত ভারতবাসী আমার ভাই-বোন।

আমি আমার দেশকে ভালবাসি আমার দেশের সমৃদ্ধি এবং বিবিধতায় বিভূষিত পরম্পরার উপর আমার গর্ব।

ওই পরম্পরার সফলতা অনুসারে চলার জন্য আমি সর্বদা ক্ষমতা অর্জন করতে চেষ্টা করবো।

আমি আমার মা-বাবা, গুরুজন এবং বড়দের প্রতি সম্মান ও সৌজন্যপূর্ণ ব্যবহার করবো।

আমি প্রতিজ্ঞা করছি যে, আমি আমার দেশ ও দেশবাসীর প্রতি নিষ্ঠাবান থাকবো। তাদের কল্যাণ এবং সমৃদ্ধিতেই আমার সুখ নিহিত।

প্রস্তাবনা

প্রিয় ছাত্র বন্ধুরা,

সপ্তম শ্রেণীতে তোমাদের সকলকে স্বাগত জানাই। গণিত বিষয়ের প্রথম শ্রেণী হতে ষষ্ঠ শ্রেণীর পাঠ্যপুস্তকের অধ্যয়ন তোমরা অবশ্যই করেছো। বাঙালী শিক্ষার্থীদের চাহিদা মাথায় রেখে প্রথম বার সপ্তম শ্রেণীর বাংলা মাধ্যমের গণিত পাঠ্যপুস্তকটির নির্মিতি করা হয়েছে। অথচ মারাঠী গণিত পাঠ্যপুস্তকের নির্মিতি বর্ষ ২০১৭ তে করা হয়েছে। সপ্তম শ্রেণীর গণিত পাঠ্যপুস্তকটি তোমাদের হাতে তুলে দিতে আমরা বিশেষ আনন্দ বোধ করছি।

উক্ত বিষয়টি তোমরা ভালোভাবে আয়ত্ত করতে পারো, বিষয়টি মনোরঞ্জক হউক, নতুন জ্ঞানার্জনের ও নতুন সমস্যা সমাধানের আনন্দ পাও এটাই আমাদের দৃঢ় ইচ্ছা। এরজন্য পাঠ্যপুস্তকে কিছু কৃতি ও রচনার আবির্ভাব আছে, সেগুলি অবশ্যই করে দেখবে। প্রতিফলে কিছু গাণিতিক ধাঁধা, নতুন গাণিতিক ধর্ম প্রাপ্ত করা যায় কিনা তা দেখো। আপসে চর্চা করে নতুন ধারণা শিখতে পারবে। চিত্র, ভেন ডায়াগ্রাম ও ইন্টারনেটের সাহায্যে গণিত আয়ত্ত করা সহজ হয়ে থাকে। ধারণা ঠিক আয়ত্ত করতে পারলে গণিত কখনো কঠিন হয় না। পাঠ্যপুস্তকের প্রত্যেকটি পর্ব তোমরা মনোযোগ সহকারে পঠন করবে এটাই আশা। পাঠ্যপুস্তকের কোনো অংশ বুঝতে কঠিন বোধ হলে শিক্ষক, অভিভাবক কিম্বা তোমাদের সহপাঠী শিক্ষার্থীদের সাহায্যে বুঝে নেবে। গাণিতিক প্রক্রিয়া সমাধানের পদ্ধতি তেমনি গাণিতিক সূত্রাবলী কেনো ও কিরূপ তৈরি হয়েছে এর ব্যাখ্যা এই পাঠ্যপুস্তকে দেওয়া হয়েছে। উক্ত সকল পদ্ধতির ব্যবহার করে অনুশীলন সমাধানের অভ্যাস করবে। এটা খুবই গুরুত্বপূর্ণ। অনুশীলন সংগ্রহে প্রদত্ত উদাহরণের ন্যায় অধিকাধিক উদাহরণ তোমরা নিজেরা তৈরি করো। অধিক আহ্বানাত্মক উদাহরণকে এই পাঠ্যপুস্তকে তারকা চিহ্নিত করে রাখা হয়েছে। 'অধিক তথ্যের জন্য' শীর্ষনামে ছকে দেওয়া পাঠ্যবস্তু আগাম পড়াশোনার জন্য নিশ্চয়ই উপযুক্ত হবে। প্রথম শ্রেণী থেকে আয়ত্ত করা গণিত ভবিষ্যতেও নিরন্তর ব্যবহার করতে হবে। যেমন, যোগ, বিয়োগ, গুণ, ভাগ কখনো ভুলবে না, ঠিক তো! এর অনুশীলন নিরন্তর করতে থাকবে। এই সকল ক্রিয়া উদাহরণ সমাধানের জন্য প্রায়শ ব্যবহার করতে হয়।

সপ্তম শ্রেণীর গণিত পাঠ্যপুস্তকে অনেক মৌলিক ধারণা আছে। ধারণাগুলি ঠিক আয়ত্ত করতে পারলে আগাম শ্রেণীর অধ্যয়ন নিশ্চয়ই সহজ হবে। অবশেষে দেখা যাক যে এই বইটি গণিত আয়ত্ত করতে তোমাদের বন্ধু হতে পারে কিনা!

(বিবেক গোসাবী)
সঞ্চালক
মহারাষ্ট্র রাজ্য পাঠ্যপুস্তক নির্মিতী ও অভ্যসক্রম
সংশোধন মণ্ডল, পুণে

পুণে
তারিখ : ৭ অক্টোবর ২০২১
ভারতীয় সৌর তারিখ : ১৫ আশ্বিন ১৯৪৩

গণিত সপ্তম শ্রেণী অধ্যয়ন ফলাফল

অধ্যয়নের জন্য নির্দেশিত শিক্ষণ প্রক্রিয়া

শিক্ষার্থীদের ব্যক্তিগতভাবে / যুগ্মভাবে / দলগতভাবে সুযোগ পদান করে কৃতি করতে উৎসাহিত করা।

প্রদত্ত প্রসঙ্গানুযায়ী পূর্ণ সংখ্যার গুণ এবং ভাগ ক্রিয়ার নিয়ম খোঁজ করা। এটা সংখ্যা রেখা কিম্বা সংখ্যা আকৃতিপ্রবাহের সাহায্যে করা যাবে।

উদাহরণ স্বরূপ : $3 \times 2 = 6$

$3 \times 1 = 3$

$3 \times 0 = 0$

$3 \times (-1) = -3$

$3 \times (-2) = -6$

উক্ত সংখ্যাটি ক্রমে-ক্রমে 1 কম করা হলো — উক্ত সংখ্যাটি ক্রমে-ক্রমে 3 কম হয়ে গেলো

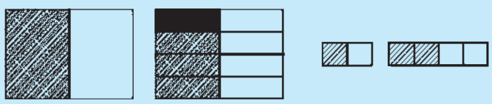
অর্থাৎ $3x(-3) = -9$

অতএব ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যাকে ঋণাত্মক পূর্ণ সংখ্যা দ্বারা গুণ করলে গুণফল ঋণাত্মক পূর্ণ সংখ্যা প্রাপ্ত হয়।

উদাহরণ স্বরূপ

(a) $\frac{1}{4} \times \frac{1}{2}$ এটা $\frac{1}{2}$ এর $\frac{1}{4}$ অর্থাৎ $\frac{1}{8}$

(b) $\frac{1}{2} \div \frac{1}{4}$ এটা $\frac{1}{2}$ এর মধ্যে দুইটি $\frac{1}{4}$ আছে।



দৈনন্দিন জীবনে সমস্যা সমাধানের জন্য ছবি এঁকে কিম্বা কাগজে ভাঁজ করে ভগ্নাংশের অথবা দশমিক ভগ্নাংশের গুণ ও ভাগ প্রদর্শিত করা।

- গাছের দশ পূর্ণ এক হর দুই মিটার ডানদিকে কিম্বা পনেরো পূর্ণ দুই হর তিন মিটার বামদিকে এইরূপ পরস্পর বিপরীত দিকে পূর্ণসংখ্যার প্রয়োজনীয় পরিস্থিতির সম্বন্ধে চর্চা করা।
- একই সংখ্যার বারংবার গুণকে সংক্ষেপে ব্যক্ত করা যেতে পারে তা চর্চার মাধ্যমে ছাত্রদের নজরে তুলে ধরা। যেমন: 2x2x2x2x2x2 কে 2^6এমনও ব্যক্ত করা যায়।
- চল সংখ্যা এবং স্থিরাঙ্ক এর সমষ্টীকরণ করে তথা ভিন্ন-ভিন্ন ক্রিয়ার ব্যবহার করে, বিভিন্ন প্রসঙ্গে বীজগাণিতিক রাশি গঠন করা।
- সমীকরণ গঠনের জন্য দৈনিক জীবনের বিভিন্ন পরিস্থিতির পূর্তি করা এবং উভয় পক্ষ সমান হয় এমন চলের যোগ্য মূল্য নির্ধারণ করা।
- দৈনিক জীবনে ব্যবহৃত সমান ধরনের বস্তুর যোগ/ বিয়োগের কৃতি করা। উদা. 3টি খাতা এবং 5টি খাতা এর সমষ্টিতে খাতার সংখ্যা।

অধ্যয়ন ফলাফল

শিক্ষার্থীরা

07.71.01 দুইটি পূর্ণ সংখ্যার গুণ ও ভাগ করে।

07.71.02 পূর্ণ সংখ্যার গুণ ও ভাগের অর্থ বিমোচন করে। উদাহরণ স্বরূপ, $\frac{2}{3} \times \frac{4}{5}$ এর অর্থ $\frac{4}{5}$ এর $\frac{2}{3}$

তেমনি $\frac{1}{2} \div \frac{1}{4}$ এর অর্থ কতো বার $\frac{1}{4}$ অর্থাৎ $\frac{1}{2}$?

07.71.03 সাধারণ ও দশমিক ভগ্নাংশের গুণ ও ভাগ করার জন্য প্রদত্ত নিয়মের ব্যবহার করে।

07.71.04 মূলদ সংখ্যা সম্বন্ধে দৈনন্দিন জীবনের সমস্যা সমাধান করে।

07.71.05 বড় সংখ্যার গুণ ও ভাগ করার জন্য সংখ্যা সূচকের ব্যবহার করে।

07.71.06 দৈনন্দিন জীবনের বিভিন্ন পরিস্থিতিকে সরল সমীকরণে গঠিত করে ও সমীকরণের সমাধান করে।

07.71.07 বীজগাণিতিক রাশির যোগ ও বিয়োগ করে।

07.71.08 অনুপাতের রাশি তথা অনুপাতে না থাকা রাশি (সংখ্যা) চিনতে পারে। উদাহরণ স্বরূপ, $\frac{15}{45}$ এবং $\frac{40}{120}$ সংখ্যাদুটি সমান। অতএব 15,45,40,120 এই সংখ্যাগুলি অনুপাতে আছে এমন বিষদ করে।

07.71.09 শতকরাকে সাধারণ ও দশমিক ভগ্নাংশে পরিবর্তন করার প্রশ্ন ও বিপরীত প্রশ্নের সমাধান করে।

07.71.10 গাণিতিক ধর্মের আধারে রৈখিক যুগ্ম কোণ, সম্পূরক কোণের জোড়া, পূরক কোণের জে ড়া, সন্নিহিত কোণের জোড়া এবং বিপ্রতীপ কোণের জোড়া এই সকল জোড়ার পৃথককরণ করে। প্রত্যেক জোড়ার একটি কোণের মাপ দেওয়া হলে অপর কোণের মাপ নির্ধারিত করে।

07.71.11 ত্রিভূজের প্রদত্ত দুটি কোণের মাপের দ্বারা তৃতীয় কোণের মাপ বের করে।

07.71.12 বর্গাক্ষেত্রাকার তথা আয়তক্ষেত্রাকার আকারের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করে।

07.71.13 দৈনন্দিন ব্যবহারিক অনুভবের মাধ্যমে সঞ্চয়ীত তথ্যের দ্বারা মধ্য (গড়) নিরুপণ করে।

07.71.14 স্তম্ভালেখের তথ্যের দ্বারা অর্থ বিমোচন করে। উদাহরণ স্বরূপ, গ্রীষ্মকাল অপেক্ষা শীতকালে বিদ্যুতের ব্যবহার বেশি হয়। প্রথম দশ ওভারে যে কোনো একটি টিমের দ্বারা করা রানের সংখ্যা ইত্যাদি।

গণিত সপ্তম শ্রেণী অধ্যয়ন ফলাফল

<table>
<tr><th>অধ্যয়নের জন্য নির্দেশিত শিক্ষণ প্রক্রিয়া</th><th colspan="2">অধ্যয়ন ফলাফল</th></tr>
<tr><td rowspan="18">
• অনুপাত এবং শতকরা ধারণা বিকশিত করার জন্য চর্চা করা (অনুপাতের সমানতা)
• লাভ / হানি, সাধারণ সুদের ভিত্তিতে দৈনিক জীবনের প্রসঙ্গ পূর্তি করা, শতকরা প্রয়োজন বোধ করে দেওয়া।
• সাধারণ শীর্ষবিন্দু আছে এমন কোণের জোড়া দৈনিক জীবনের ভিন্ন-ভিন্ন উদাহরণ খোঁজ করা। (কাঁচি, জোড়া রাস্তা, X ও T এই অক্ষর ইত্যাদি)।
• কোণের জোড়ার আকৃতি এঁকে বিভিন্ন ধর্ম যাচাই করা। (এক সমূহের শিক্ষার্থী একটি কোণের মাপ বলবে তখন অপর সমূহের শিক্ষার্থী অপর কোণের মাপ কী তা বলবে)।
• বিভিন্ন কোণের জোড়ার মধ্যে সম্পর্কের তেমনি ত্রিভুজের কোণ ও তার বাহুর মধ্যে সম্পর্কের ধর্ম জ্যামিতি বাক্সের নানাবিধ উপকরণ ব্যবহার করে প্রাত্যক্ষিক করা।
• ভিন্ন - ভিন্ন আকারের ত্রিভূজ আঁকা ও সকল কোণের মাপন করে নেওয়া ও যাচাই করে দেখা।
• ত্রিভুজের বর্হিকোণের ধর্ম এবং পিথাগোরাসের উপপাদ্য খোঁজ করা।
• প্রথমে সর্বসমতার ধর্ম নির্ধারিত করে পরে একে অপরের উপরে রেখে সর্বসমতার ধর্ম যাচাই করে নেওয়া।
• পেন্সিল কম্পাস ও মাপন পাটির ব্যবহার করে সরল ত্রিভূজ অঙ্কন করা।
• দেওয়া তথ্যের মধ্যমা বের করা অর্থাৎ এলোমেলো সামগ্রীর গড় তালিকায় লেখা এবং তা স্তম্ভালেখ দ্বারা দেখানোর জন্য প্রবৃত্ত করা।
• একত্রিত করা সামগ্রী দ্বারা ভবিষ্যতের ঘটনাগুলির অনুমান করা।
• ত্রিভূজের দুটি বাহুর দৈর্ঘ্যের সমষ্টি, তৃতীয় বাহুর দৈর্ঘ্যের অপেক্ষা বেশি হয়ে থাকে এই ধর্মটি বুঝে নেওয়া।
</td><td colspan="2">শিক্ষার্থীরা</td></tr>
<tr><td>07.71.15</td><td>ত্রিভূজের কোন দ্বিখন্ডক ও তার বাহুর লম্ব সম দ্বিখন্ডক অঙ্কন করে ও তারা সংগামী হয় তা যাচাই করে দেখে।</td></tr>
<tr><td>07.71.16</td><td>বিশিষ্ট বাহু ও কোণ দেওয়া হলে ত্রিভূজ অঙ্কন করে দেখায়।</td></tr>
<tr><td>07.71.17</td><td>কোণ, রেখাংশ ও বৃত্ত এর সর্ব সমতার ধর্ম কী তা বুঝতে পারে।</td></tr>
<tr><td>07.71.18</td><td>মৌলিক উৎপাদকে বিশ্লেষণ করে সংখ্যার ল.সা.গু. ও গ.সা.গু. বের করে।</td></tr>
<tr><td>07.71.19</td><td>ত্রিভূজের বর্হিকোণ নিরুপণ করে।</td></tr>
<tr><td>07.71.20</td><td>বহুভূজের অন্ত:কোণের সমষ্টির সূত্র তৈরি করে।</td></tr>
<tr><td>07.71.21</td><td>মৌলিক উৎপাদকে বিশ্লেষণ করে সংখ্যার বর্গমূল বের করে।</td></tr>
<tr><td>07.71.22</td><td>প্রদত্ত তথ্যের দ্বারা জোড় স্তম্ভালেখ অঙ্কন করে ও তার পঠন করে।</td></tr>
<tr><td>07.71.23</td><td>অংশীদারী ব্যবহারের সময় অনুপাতের ব্যবহার করে।</td></tr>
<tr><td>07.71.24</td><td>বৃত্তের পরিধির সূত্র নির্ণয় করে ও তার ব্যবহার করে।</td></tr>
<tr><td>07.71.25</td><td>বৃত্তের উপচাপ, অধিচাপ চিনতে পারে ও চাপের মাপ নির্ণয় করতে পারে।</td></tr>
<tr><td>07.71.26</td><td>ত্রিভূজের ক্ষেত্রফলের সূত্র তৈরি করে।</td></tr>
<tr><td>07.71.27</td><td>ঘনক ও আয়তঘনের পার্শ্বতলের ক্ষেত্রফল বের করে।</td></tr>
<tr><td>07.71.28</td><td>পিথাগোরাসের উপপাদ্যের ব্যবহার করে সমকোণ ত্রিভূজের বাহু সন্ধান করে।</td></tr>
<tr><td>07.71.29</td><td>বর্গ বিস্তারের সূত্র ব্যবহার করে।</td></tr>
<tr><td>07.71.30</td><td>দ্বিপদীর বর্গ করে।</td></tr>
<tr><td>07.71.31</td><td>দ্বিপদীর উৎপাদকে বিশ্লেষণ করে।</td></tr>
</table>

শিক্ষক মহাশয়ের জন্য মার্গদর্শক তথ্য

সপ্তম শ্রেণীর পাঠ্যপুস্তকের ব্যবহার শ্রেণী কক্ষে প্রশ্ন - উত্তর, কৃতি, চর্চা ও শিক্ষার্থীদের সঙ্গে বার্তালাপ এই বিভিন্ন মাধ্যমে হওয়া উচিৎ এর জন্য পাঠ্যপুস্তকের মনোযোগ সহকারে পঠন করবেন। পাঠ্যপুস্তকে আমাদের পরিবেশ, ভূগোল, বিজ্ঞান, অর্থশাস্ত্র এই সকল বিষয়ের গণিতের সঙ্গে সমন্বয় করা হয়েছে। এমন অনেক বিষয়ে গণিতের ধারণার ব্যবহার হয়ে থাকে তা শিক্ষক মহাশয় শিক্ষার্থীদের নজরে এনে দেবেন। গাণিতিক ধারণার আয়ত্ত করার জন্য সহজ ভাষার ব্যবহার করা হয়েছে। অনুশীলনীর উদাহরণের ন্যায় উদাহরণ তৈরি করে শিক্ষার্থীদের সমাধান করতে দেবেন তথা শিক্ষার্থী যাতেকরে এই রকম উদাহরণ তৈরি করে তারজন্য উৎসাহিত করবেন। শিক্ষার্থীদের জন্য কিছু আহ্বানাত্মক প্রশ্ন তারকা চিহ্নিত করে রাখা হয়েছে। ‘অধিক তথ্যের জন্য’ শীর্ষকের নিচে একটু অধিক তথ্যের ব্যবহার করা হয়েছে। এই তথ্য আগাম শ্রেণীর অধ্যয়নের জন্য শিক্ষার্থীদের অবশ্যই ব্যবহার হবে।

সূচিপত্র

প্রথম বিভাগ

১. জ্যামিতিক রচনা... ১ থেকে ১০

২. পূর্ণসংখ্যার গুণ ও ভাগ .... ১১ থেকে ১৪

৩. গ.সা.গু. - ল.সা.গু. .... ১৫ থেকে ২৩

৪. কোণ ও কোণের জোড়া .... ২৪ থেকে ৩৩

৫. মূলদ সংখ্যা ও তার উপর ক্রিয়া .... ৩৪ থেকে ৪২

৬. সূচক .... ৪৩ থেকে ৫০

৭. দ্বি-স্তম্ভ লেখ .... ৫১ থেকে ৫৪

৮. বীজগণিতিক চলরাশি ও তার উপর ক্রিয়া .... ৫৫ থেকে ৬০

বিক্ষিপ্ত অনুশীলনী ১ .... ৬১ থেকে ৬২

দ্বিতীয় বিভাগ

৯. সমানুপাত ও ব্যস্ত অনুপাত .... ৬৩ থেকে ৬৮

১০. ব্যাঙ্ক ও সরল সুদ .... ৬৯ থেকে ৭৪

১১. বৃত্ত .... ৭৫ থেকে ৭৯

১২. পরিসীমা ও ক্ষেত্রফল .... ৮০ থেকে ৮৬

১৩. পিথাগোরাসের উপপাদ্য .... ৮৭ থেকে ৯০

১৪. বীজগাণিতিক সূত্রাবলী .... ৯১ থেকে ৯৪

১৫. পরিসাংখ্যান .... ৯৫ থেকে ৯৯

বিক্ষিপ্ত অনুশীলনী ২ .... ১০০

উত্তর মালা .... ১০১ থেকে ১০৪

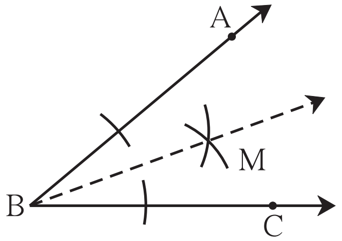
1 জ্যামিতিক রচনা

প্রথম বিভাগ

একটু স্মরণ করি।

- আমরা গত শ্রেণীতে রেখা, রেখাংশ, কোণ, কোণ দ্বিখন্ডক ইত্যাদি অধ্যয়ন করেছি। আমরা কোণের মাপন ডিগ্রীতে করি। $\angle ABC$-এর মাপ যদি 40° হয়, তাহলে আমরা $m\angle ABC = 40^\circ$ এমন লিখি।

কোণ দ্বিখন্ডক (Angle bisector)



সংলগ্ন আকৃতিতে $\angle ABC$ দেওয়া আছে । কোণ দ্বিখন্ডক কোণকে সমান দুটি ভাগে বিভক্ত করে। রশ্মি BM, $\angle ABC$ -এর দ্বিখন্ডক কিনা তাহা বলো ?

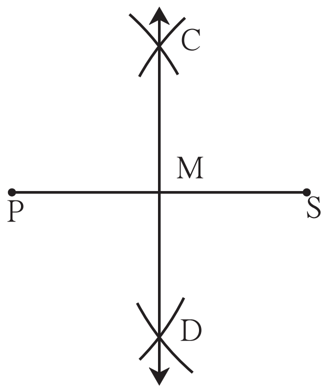
সরলরেখাংশের লম্ব দ্বিখন্ডক (Perpendicular bisector of a line segment)

4 সেমি দৈর্ঘ্যের সরলরেখাংশ PS টানো ও তার লম্ব দ্বিখন্ডক আঁকো। তাকে রেখা CD নাম দাও।

- রেখা CD লম্ব দ্বিখন্ডক কিনা তা যাচাই করার জন্য তুমি কি করবে ?

  $m\angle CMS =$ ☐°

- l(PM) = l(SM) আছে কি ?

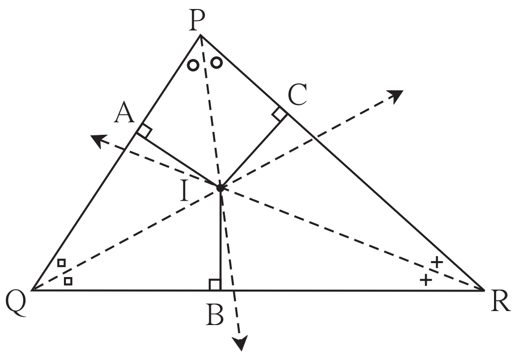


এসো জেনে নেই।

ত্রিভূজের কোণের দ্বিখন্ডকের ধর্ম

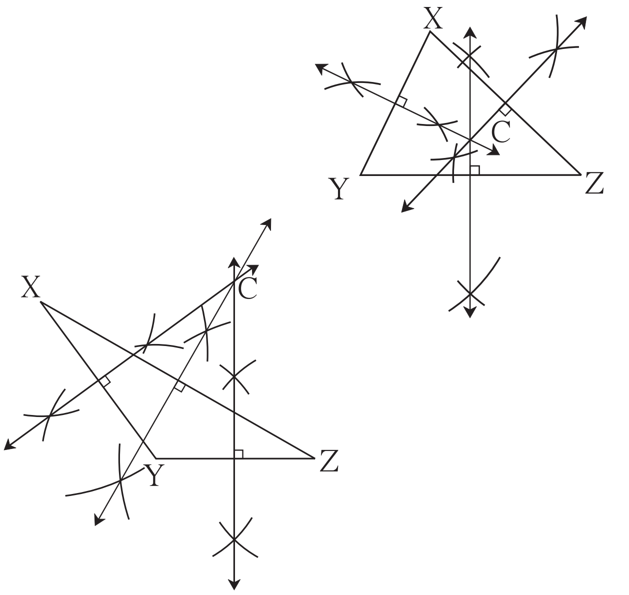
কৃতি

1. যে কোনো একটি ত্রিভূজ PQR আঁকো।
2. পেন্সিল কম্পাসের সাহায্যে দ্বিখন্ডক টানো। (দ্বিখন্ডকগুলি যথেষ্ট দৈর্ঘ্যের না হলে, প্রান্তে বৃদ্ধি করে একে-অপরকে ছেদ করে এমন ব্যবস্থা করো।)
3. উভয় তিনটি কোণ-দ্বিখন্ডক একই বিন্দু থেকে গমন করে, অর্থাৎ তারা সংগামী হয়। ওই সংগমন বিন্দুকে I নাম দাও।
4. ত্রিভূজে I থেকে ত্রিভূজের বাহু PQ, QR ও PR এর উপর যথাক্রমে IA, IB, IC লম্বগুলি আঁকো। উভয় তিনটি লম্বের দৈর্ঘ্য মাপন করো। কি দেখা যায় ? IA = IB = IC এর অনুভব হাতে কলমে করে নাও।



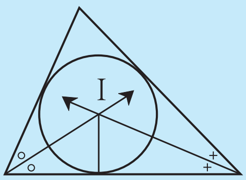
ত্রিভূজের বাহু লম্ব দ্বিখন্ডকের ধর্ম

কৃতি



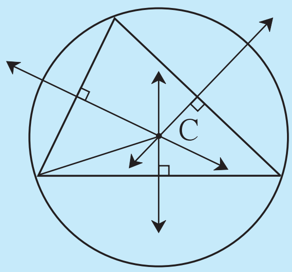
1. স্কেলের সাহায্যে একটি লঘুকোণ ত্রিভূজ এবং একটি বৃহৎকোণ ত্রিভূজ আঁকো। প্রত্যেক ত্রিভূজের বাহুর লম্ব-দ্বিখন্ডক অঙ্কন করো।
2. প্রত্যেক ত্রিভূজের বাহুর লম্ব-দ্বিখন্ডক সংগামী হয় তা অনুভব করো।
3. ত্রিভূজের বাহুর লম্ব দ্বিখন্ডক যে বিন্দুতে মিলাপ করে, ওই বিন্দুকে C নাম দাও। C বিন্দু থেকে ত্রিভূজের প্রত্যেক শীর্ষবিন্দুর দৈর্ঘ্য মাপন করো। কী দেখা যায়?
   CX = CY = CZ এটা অনুভব করো।
4. লম্ব দ্বিখন্ডকের সংগমন বিন্দু কোথায় আছে তার নিরীক্ষণ করো।

✸ **অধিক তথ্যের জন্য**



(1) ত্রিভূজের কোণ-দ্বিখন্ডক **সংগামী** (concurrent) হয়ে থাকে। তাদের সংগম বিন্দুকে **অন্তঃকেন্দ্র** (incentre) বলা হয়। তা I অক্ষর দ্বারা নির্দিষ্ট করা হয়েছে।

(2) ত্রিভূজের বাহুর লম্ব-দ্বিখন্ডক **সংগামী** হয়ে থাকে। তাদের সংগম বিন্দুকে **পরিকেন্দ্র** (circumcentre) বলা হয়। তা 'C' অক্ষর দ্বারা নির্দিষ্ট করা হয়েছে।



অনুশীলনী-1

1. প্রদত্ত মাপের রেখাংশ টানো ও তার লম্ব-দ্বিখন্ডক আঁকো।
   (1) 5.3 সেমি (2) 6.7 সেমি (3) 3.8 সেমি কোথায় আছে?
2. প্রদত্ত মাপের কোণ আঁকো ও তার দ্বিখন্ডক টানো।
   (1) 105° (2) 55° (3) 90°
3. একটি বৃহৎকোণ ত্রিভূজ ও একটি সমকোণ ত্রিভূজ আঁকো। প্রত্যেক ত্রিভূজের অন্তর্নিহিত কোণ-দ্বিখন্ডকের সংগমন বিন্দু আঁকো। প্রত্যেক ত্রিভূজের সংগমন বিন্দু কোথায় আছে?
4. একটি সমকোণ ত্রিভূজ আঁকো। তার প্রত্যেক বাহুর লম্ব-দ্বিকন্ডক টানো। তাদের সংগমন বিন্দু কোথায় আছে?

5*. মৈথিলী, শৈলা ও অজয় উভয় বন্ধু-বান্ধবীরা একই শহরে ভিন্ন-ভিন্ন স্থানে বসবাস করছে ও তাদের ঘর থেকে সমান অন্তরে খেলনার একটি দোকান আছে। এটা আকৃতির সাহায্যে নির্দিষ্ট করার জন্য কোন জ্যামিতিক রচনাটির ব্যবহার করা যায়? ব্যাখ্যা দাও?

এসো জেনে নেই।

ত্রিভূজ রচনা

কৃতি

প্রদত্ত কয়েকটি কোণ ও বাহুর মাপের আধারে ত্রিভূজ অঙ্কন করতে পারো কিনা তা দেখো।

ΔABC এইরূপ আঁকো যাতে $l(AB) = 4$ সেমি, $l(BC) = 3$ সেমি হয়।

- এমন ত্রিভূজ আঁকা যাবে কি?
- উক্ত শর্ত পালন করে অনেক ত্রিভূজ আঁকা যায়, তা অনুভব করো।
- উক্ত তথ্যের মাধ্যমে শুধুমাত্র একটি ত্রিভূজ আঁকা যাবে, তারজন্য কী-কী শর্তের অধিক প্রয়োজন?

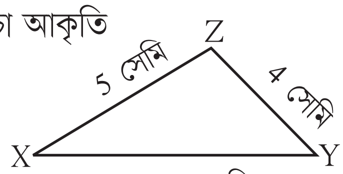
যে কোনো ইমারত গড়ে তোলার পূর্বে সর্বপ্রথমে ইমারতের রচনা কাগজের উপরে করতে হয়। তৈরী ইমারতের ছোটো প্রতিরূপও তোমরা দেখেছো হয়তো। নকশার আধারে ইমারত গড়া সহজ হয়। তদ্রূপ যে কোনো জ্যামিতিক আকৃতি রচনা করার পূর্বে তার কাঁচা আকৃতি এঁকে নেওয়া হলে প্রদত্ত আকৃতি রচনা করতে সাহায্য হয়। রচনার ক্রিয়াক্রম নির্ণয় করা যায়।

(I) ত্রিভূজের উভয় তিনটি বাহুর প্রদত্ত দৈর্ঘ্যের দ্বারা ত্রিভূজ আঁকা।

উদা. ΔXYZ এইরূপ আঁকো যাতে $l(XY) = 6$ সেমি, $l(YZ) = 4$ সেমি, $l(XZ) = 5$ সেমি

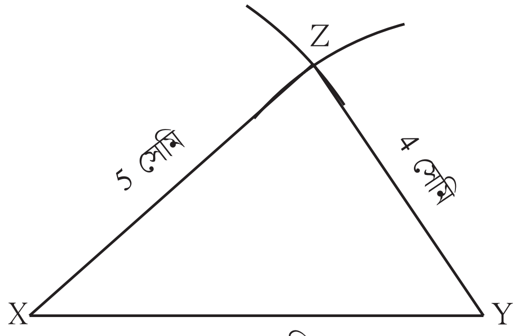
কাঁচা আকৃতি অঙ্কনের সময় প্রদত্ত তথ্যগুলি চট্‌করে ও যথাসম্ভব যোগ্য প্রমাণে দেখাই। উদাহরণে বাহু XY বড়, অতএব কাঁচা আকৃতিতেও তা তেমনই হওয়া উচিৎ।

কাঁচা আকৃতি

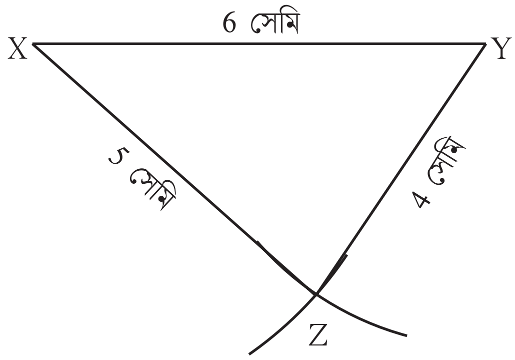


আকৃতি অঙ্কনের ক্রমিক বিধি

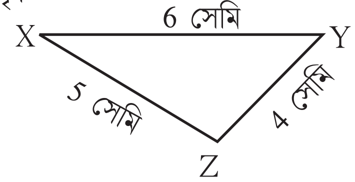
1. কাঁচা আকৃতি অনুসারে রেখাংশ XY 6 সেমি দৈর্ঘ্যের আধার নেওয়া হয়েছে।
2. রেখাংশ XZ-এর দৈর্ঘ্য 5 সেমি, তাই কম্পাসে 5 সেমি দৈর্ঘ্যের অন্তর নিয়ে ও কম্পাসের কাটা X-এর উপর রেখে রেখা XZ-এর একপাশে একটি চাপ আঁকলাম।
3. কম্পাসের অন্তর 4 সেমি নিয়ে কম্পাসের কাটা Y-এর উপর রেখে পূর্বে টানা চাপে ছেদ করে এইরূপ আরো একটি চাপ আঁকো। ছেদ বিন্দুকে Z নাম দিলাম। রেখাংশ XZ ও রেখাংশ YZ আঁকলাম।



আধারের অপর পাশে চাপ টেনে একই রকম ত্রিভূজ রচনা করে দেখানো হয়েছে।



কাঁচা আকৃতি



অনুশীলনী-2

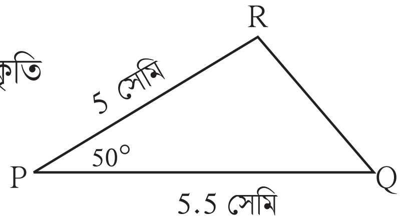
1. প্রদত্ত মাপানুসারে ত্রিভূজ আঁকো।
   (a) ΔABC-এর মধ্যে $l(AB)$ = 5.5 সেমি, $l(BC)$ = 4.2 সেমি, $l(AC)$ = 3.5 সেমি
   (b) ΔSTU-এর মধ্যে $l(ST)$ = 7 সেমি, $l(TU)$ = 4 সেমি, $l(SU)$ = 5 সেমি
   (c) ΔPQR-এর মধ্যে $l(PQ)$ = 6 সেমি, $l(QR)$ = 3.8 সেমি, $l(PR)$ = 4.5 সেমি
2. আধার 5 সেমি ও অবশিষ্ট প্রত্যেক বাহুর দৈর্ঘ্য 3.5 সেমি নিয়ে সম দ্বিবাহু ত্রিভূজ আঁকো।
3. 6.5 সেমি দৈর্ঘ্যের সমবাহু ত্রিভূজের রচনা করো।
4. বাহুর নিজস্ব মাপ নিয়ে একটি সমবাহু ত্রিভূজ, একটি সম দ্বি-বাহু ত্রিভূজ ও একটি বিষমবাহু ত্রিভূজ অঙ্কন করো।

(II) ত্রিভূজের প্রদত্ত দুটি বাহু ও তাদের অন্তর্নিহিত কোণ দ্বারা ত্রিভূজ আঁকা।

উদা. ΔPQR এইরূপ আঁকো যাতে $l(PQ)$ = 5.5 সেমি, $m\angle P = 50^\circ$, $l(PR)$ = 5 সেমি,

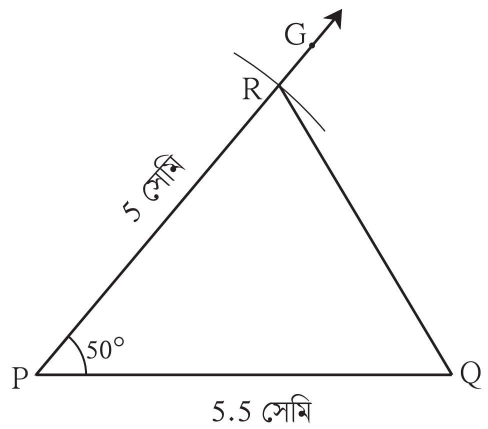
(কাঁচা আকৃতি এঁকে প্রত্যাশিত তথ্য দেখানো হয়েছে। $\angle P$ একটি লঘুকোণ। তদ্রুপ কাঁচা আকৃতিতেও আঁকা হয়েছে।)

কাঁচা আকৃতি



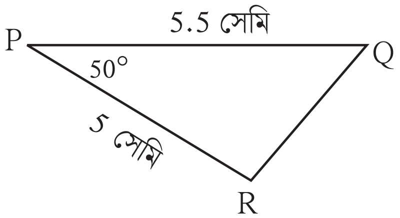
আকৃতি অঙ্কনের ক্রমিক বিধি

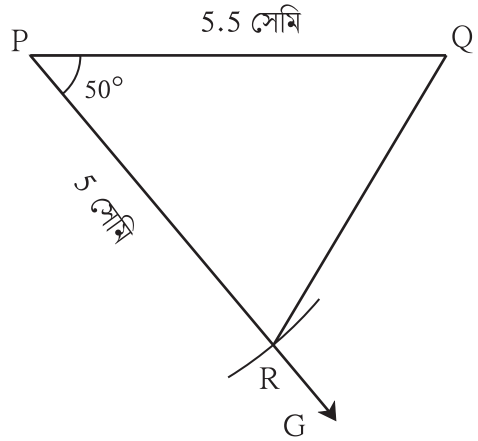
1. কাঁচা আকৃতি অনুযায়ী রেখাংশ PQ 5.5 সেমি দৈর্ঘ্যের আধার নিলাম।
2. রশ্মি PG এইরূপ নিলাম যাতে করে $m\angle GPQ = 50^\circ$ হয়।
3. কম্পাসে 5 সেমি দৈর্ঘ্যের অন্তর নাও। কম্পাসের কাটা P-এর উপর রেখে PG-এর উপর চাপ আঁকলাম। এই ছেদ বিন্দুকে R নাম দিলাম। বিন্দু Q ও বিন্দু R-কে সরলরেখা টেনে মিলাও। প্রত্যাশিত ΔPQR তৈরি হয়ে গেলো।



রশ্মি PG টি রেখাংশ PQ-এর অপর পাশেও টানা যায়। এখন কাঁচা আকৃতি নিম্নানুসারে আঁকি। তদানুসারে ΔPQR এঁকে নিলাম।

কাঁচা আকৃতি





অনুশীলনী–3

⊙ প্রদত্ত মাপ অনুযায়ী ত্রিভূজ আঁকো।

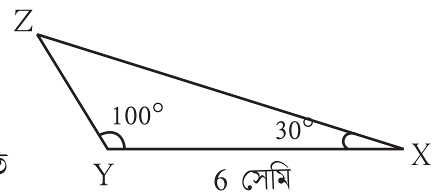
1. ΔMAT -এর $l(MA) = 5.2$ সেমি, $m\angle A = 80^\circ$, $l(AT) = 6$ সেমি
2. ΔNTS -এর $m\angle T = 40^\circ$, $l(NT) = l(TS) = 5$ সেমি
3. ΔFUN -এর $l(FU) = 5$ সেমি, $l(UN) = 4.6$ সেমি, $m\angle U = 110^\circ$
4. ΔPRS -এর $l(RS) = 5.5$ সেমি, $l(RP) = 4.2$ সেমি, $m\angle R = 90^\circ$

(III) দুটি কোণ এবং তার অন্তর্নিহিত বাহুর প্রদত্ত দৈর্ঘ্যের দ্বারা ত্রিভূজ আঁকা।

উদা. ΔXYZ এইরূপ আঁকো যাতে করে $l(YX) = 6$ সেমি, $m\angle ZXY = 30^\circ$, $m\angle XYZ = 100^\circ$ হয়। $\angle XYZ$ একটি বৃহৎকোণ।

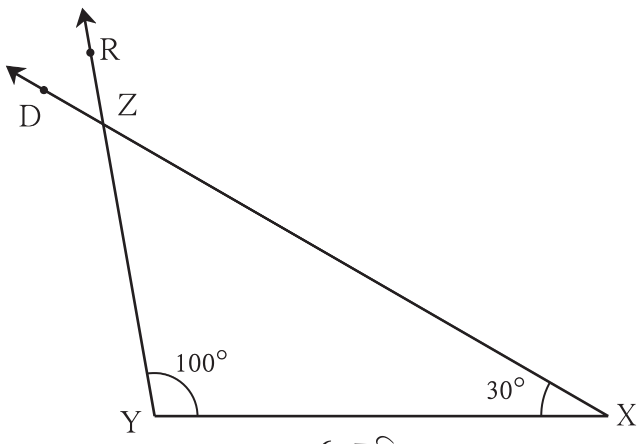
তদ্রুপ কাঁচা আকৃতিতেও দেখানো হয়েছে।

কাঁচা আকৃতি



আকৃতি অঙ্কনের ক্রমিক বিধি

1. কাঁচা আকৃতি অনুযায়ী রেখাংশ YX 6 সেমি আধার অনুসারে নিলাম।
2. রশ্মি YR এইরূপ আঁকলাম যাতে করে $m\angle XYR = 100^\circ$ হয়।
3. রেখাংশ XY -এর যে পাশে বিন্দু R অবশিষ্ট ঠিক ওই পাশে রশ্মি XDএইরূপ আঁকলাম যাতে $m\angle YXD = 30^\circ$ হয়। YR ও XD উভয় রশ্মি দুটির ছেদ বিন্দুর নাম Z দিলাম। প্রত্যাশিত ΔXYZ তৈরি হয়ে গেলো।
4. আধারের অপর পাশেও তদ্রুপ ত্রিভূজ আঁকা যায় কিনা তা অনুভব করো।



একটু চিন্তন করো।

উদা. ΔABC এর $m\angle A = 60^\circ$, $m\angle B = 40^\circ$ এবং $l(AC) = 6$সেমি। তবে তোমরা ΔABC এর রচনা করতে পারবে কি? ত্রিভূজের রচনার জন্য অধিকাধিক প্রত্যাশিত তথ্য কী? উক্ত তথ্য প্রাপ্তির জন্য ত্রিভূজের কোন ধর্মের ব্যবহার করা যেতে পারে? কাঁচা আকৃতি এঁকে নিশ্চয় করো।

ত্রিভূজের উভয় তিনটি কোণের মাপের সমষ্টি সম্বন্ধে ধর্মটি স্মরণ করো। উক্ত ধর্মটি ব্যবহার করে রেখাংশ AC -কে সংশ্লিষ্ট $\angle A$ এবং $\angle C$ -এর মাপ পাওয়া যাবে কি?

অনুশীলনী-4

⊙ প্রদত্ত মাপের ত্রিভূজ আঁকো।

1. ΔSAT-এর $l(AT) = 6.4$ সেমি, $m\angle A = 45^\circ$, $m\angle T = 105^\circ$
2. ΔMNP-এর $l(NP) = 5.2$ সেমি, $m\angle N = 70^\circ$, $m\angle P = 40^\circ$
3. ΔEFG-এর $l(EG) = 6$ সেমি, $m\angle F = 65^\circ$, $m\angle G = 45^\circ$
4. ΔXYZ-এর $l(XY) = 7.3$ সেমি, $m\angle X = 34^\circ$, $m\angle Y = 95^\circ$

(IV) প্রদত্ত বিকর্ণ ও একটি বাহুর দৈর্ঘ্যের দ্বারা সমকোণ ত্রিভূজ আঁকা

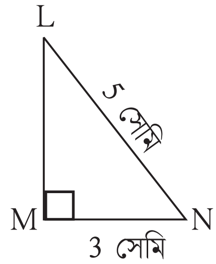
ত্রিভূজের একটি কোণ সমকোণ হলে ত্রিভূজটি সমকোণ ত্রিভূজ হয় এটা আমরা জানি। এইরূপ ত্রিভূজের সমকোণের সম্মুখ বাহুকে বিকর্ণ বলা হয়।

উদা. ΔLMN এইরূপ আঁকো যাতে করে $m\angle LMN = 90^\circ$, বিকর্ণ = 5 সেমি, $l(MN) = 3$ সেমি হয়।

প্রদত্ত তথ্যানুসারে, কাঁচা আকৃতি আঁকো।

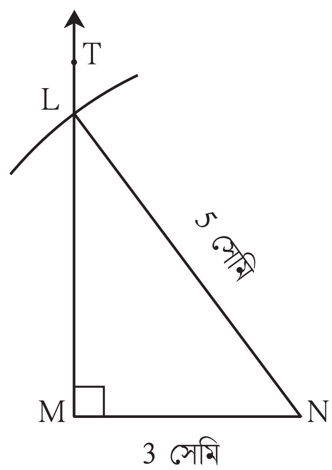
$m\angle LMN = 90^\circ$ অতএব অনুমানিত সমকোণ ত্রিভূজ আঁকলাম ও তাতে সমকোণের চিহ্ন দেখালাম। অর্থাৎ প্রদত্ত তথ্যগুলি কাঁচা-আকৃতিতে দেখালাম।

কাঁচা আকৃতি



আকৃতি অঙ্কনের ক্রমিক বিধি :

1. কাঁচা আকৃতি অনুযায়ী রেখাংশ MN 3 সেমি দৈর্ঘ্যের আধার নিলাম।
2. রেখাংশ MN-এর প্রান্ত বিন্দু M-এর উপর 90° মাপের তৈরি করা রশ্মি MT টানলাম।
3. কম্পাসের অন্তর 5 সেমি নিয়ে কম্পাসের কাটাটি বিন্দু N-এর উপর রেখে রশ্মি MT-কে যাতে ছেদ করে এমন একটি চাপ আঁকলাম। ছেদ বিন্দুকে L নাম দিলাম। ΔLMN তৈরি হলো।
4. আধারের অপর পাশেও তদ্রুপ আকৃতি অঙ্কন করা যায় তা লক্ষ্য রেখো।



অনুশীলনী-5

⊙ **প্রদত্ত মাপের ত্রিভূজ আঁকো।**

1. ΔMAN-এর $m\angle MAN = 90^\circ$, $l(AN) = 8$ সেমি, $l(MN) = 10$ সেমি।
2. সমকোণ ত্রিভূজ STU -এর বিকর্ণ SU = 5 সেমি ও $l(ST) = 4$ সেমি।
3. ΔABC-এর $l(AC) = 7.5$ সেমি, $m\angle ABC = 90^\circ$, $l(BC) = 5.5$ সেমি।
4. ΔPQR-এর $l(PQ) = 4.5$ সেমি, $l(PR) = 11.7$ সেমি, $m\angle PQR = 90^\circ$.
5. শিক্ষার্থীগণ ত্রিভূজের রচনার জন্য নানাবিধ উদাহরণ তৈরি করে অনুশীলন করবে।

কৃতি

প্রদত্ত তথ্য অনুসারে ত্রিভূজ অঙ্কনের প্রচেষ্টা করো।

1. ΔABC-এর $m\angle A = 85^\circ$, $m\angle B = 115^\circ$ $l(AB) = 5$ সেমি
2. ΔPQR-এর $l(QR) = 2$ সেমি, $l(PQ) = 4$ সেমি, $l(PR) = 2$ সেমি

উক্ত ত্রিভূজ দুটি তোমরা আঁকতে পেরেছো কি? আঁকা না যেতে পারলে তার কারণ খোঁজো।

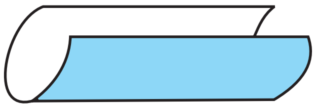
✸ অধিক তথ্যের জন্য কৃতি

উদা. ΔABC এইরূপ আঁকো যাতে করে, $l(BC) = 8$ সেমি, $l(CA) = 6$ সেমি, $m\angle ABC = 40^\circ$ হয়। 8 সেমি দৈর্ঘ্যের আধার BC-এর উপর 40°মাপের কোণ তৈরি হয় এমন রশ্মি টানো। তার উপর $l(AC) = 6$ সেমির হয় এমন A-এর জন্য দুইটি বিন্দু প্রাপ্ত হয়, তা' কাটা কম্পাসের সাহায্যে অনুভব করো। অর্থাৎ প্রদত্ত মাপের দুইটি ভিন্ন-ভিন্ন ত্রিভূজ প্রাপ্ত হয়। যদি ত্রিভূজের তিনটি কোণের মাপ দেওয়া হয় অথচ কোনো বাহুর মাপ না দেওয়া হয় তাহলে ত্রিভূজ আঁকা সম্ভব হবে কি? এমন কয়টি ত্রিভূজ আঁকা যাবে?

এসো জেনে নেই।

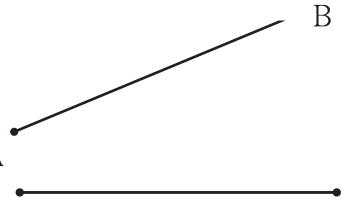
রেখাংশের সর্বসমতা (Congruence of segments)

কৃতি I একটি আয়তক্ষেত্রাকার কাগজ নাও। কাগজটির সম্মুখ বাহু দুটি একত্র করো। তারা একে অপরে হুবহু মেলে কিনা, তার অনুভব করো।



কৃতি II মাপন পাটির সাহায্যে রেখাংশ AB -এর দৈর্ঘ্য ও রেখাংশ PQ -এর দৈর্ঘ্য মাপো ও লেখো।

$l(AB)$ = ... $l(PQ)$ = ...



রেখাংশ AB ও রেখাংশ PQ-এর দৈর্ঘ্য সমান আছে না? উভয় রেখাংশ দুটিকে একের উপর এক রাখা সম্ভব নয়। একটি আলোকভেদ্য কাগজ AB-এর উপর রেখে কাগজটির উপর রেখাংশ AB টি বিন্দুর নাম সহ আঁকো। আলোকভেদ্য কাগজের উপর তৈরি নতুন রেখাংশটি PQ-এর উপর রেখে যাচাই করে দেখো। বিন্দু A-কে P-এর উপর রাখা হলে বিন্দু B, বিন্দু Q-এর উপর সহজে এসে যায় তার অনুভব করো। তদানুসারে রেখাংশ AB টি রেখাংশ PQ-এর সঙ্গে সর্বসম হয় এটা বোঝা যায়।

এটা দ্বারা উপসংহার হয়, যদি দুইটি রেখাংশের দৈর্ঘ্য সমান হয় তাহলে উভয় রেখাংশ দুটি এক অপরে ঠিক মেলে অর্থাৎ তারা সর্বসম হয়। যদি রেখাংশ AB ও রেখাংশ PQ সর্বসম হয় তাহলে তাকে রেখাংশ AB $\cong$ রেখাংশ PQ এমন লেখা হয়।

আমি এটা বুঝতে পেরেছি।

- যদি প্রদত্ত রেখাংশের দৈর্ঘ্য সমান হয় তাহলে তারা সর্বসম হয়।

❁ রেখাংশ AB $\cong$ রেখাংশ PQ অর্থাৎ রেখাংশ PQ $\cong$ রেখাংশ AB।

❁ যদি রেখাংশ AB $\cong$ রেখাংশ PQ, রেখাংশ PQ $\cong$ রেখাংশ MN হয় তাহলে রেখাংশ AB $\cong$ রেখাংশ MN হয় এটা জেনে রাখো।

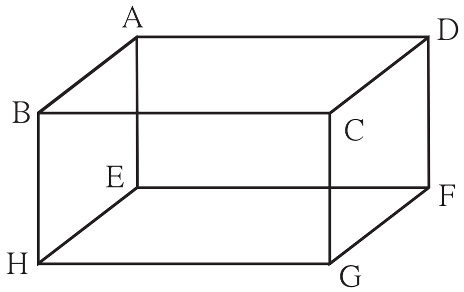
অর্থাৎ যদি একটি রেখাংশ অপরটিকে ও অপরটি তৃতীয় রেখাংশটির সঙ্গে সর্বসম হয় তাহলে প্রথমটি, তৃতীয় রেখাংশের সঙ্গেও সর্বসম হয় থাকে।

কৃতি I

একটি বাক্স নাও। তার প্রত্যেকটি ধারের দৈর্ঘ্য মাপন করো। কোন ধারগুলি সমরূপ তাহা দেখো।

কৃতি II

নিচে দেওয়া আকারের দ্বারা সমরূপ রেখাংশের জোড়া লেখো।



(1) রেখাংশ AB ≅ রেখাংশ DC

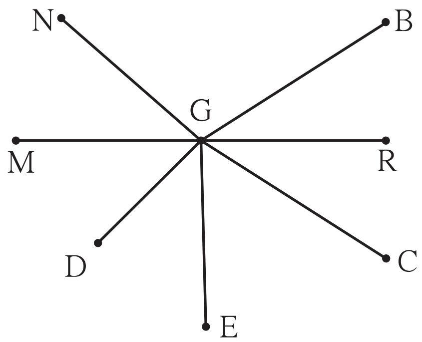
(2) রেখাংশ AE ≅ রেখাংশ BH

(3) রেখাংশ EF ≅ রেখাংশ ....

(4) রেখাংশ DF ≅ রেখাংশ ....

অনুশীলনী 6

1. প্রদত্ত আকৃতিতে সমরূপ রেখাংশের জোড়া লেখো। (কাটা কম্পাসের ব্যবহার করে তার খোঁজ করো।)



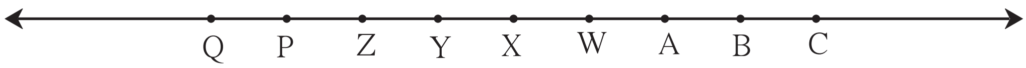
(i) ....

(ii) ....

(iii) ....

(iv) ....

2. নিচের রেখার উপর সন্নিহিত যে কোনো দুইটি বিন্দুর মধ্যে সমান দূরত্ব আছে। তদানুসারে শূন্যস্থান পূরণ করো।



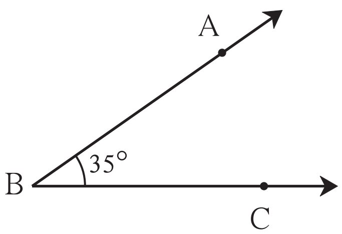
(i) রেখাংশ AB ≅ রেখাংশ....... (ii) রেখাংশ AP ≅ রেখাংশ....... (iii) রেখাংশ AC ≅ রেখাংশ.......

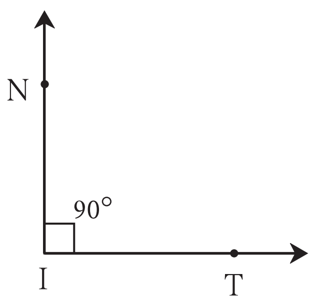
(iv) রেখাংশ....... ≅ রেখাংশ BY (v) রেখাংশ .... ≅ রেখাংশ YQ (vi) রেখাংশ BW ≅ রেখাংশ ....

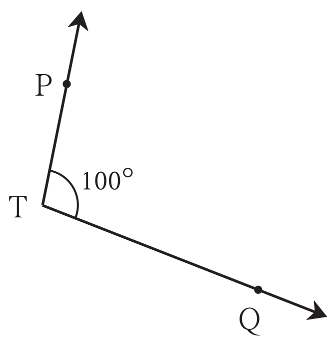
এসো জেনে নেই।

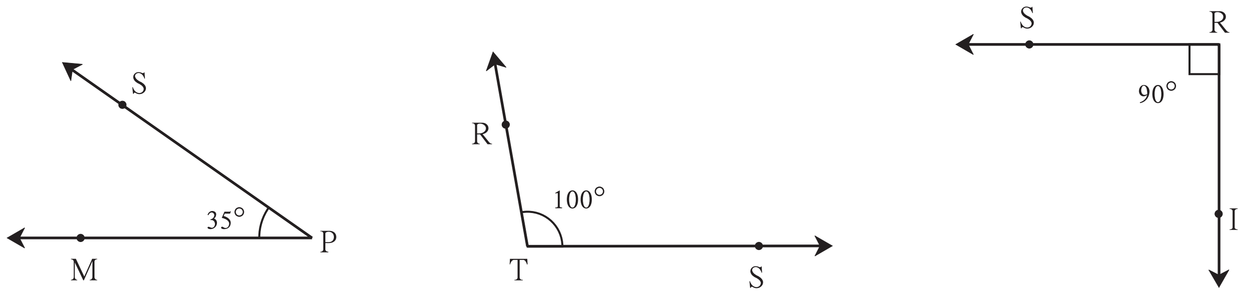
কোণের সর্বসমতা (Congruence of angles)

নিচে দেওয়া কোণের নিরীক্ষণ করে সমান মাপের কোণের জোড়া লেখো।

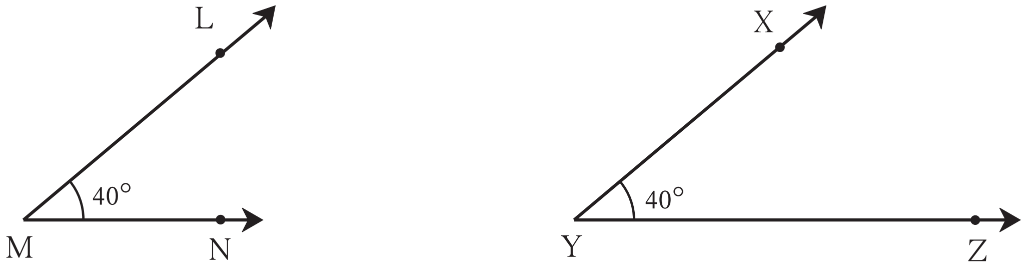








কৃতি



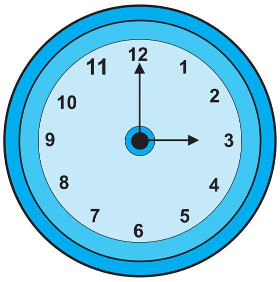
আকৃতিতে দেখানো অনুসারে 40° মাপের ∠LMN ও ∠XYZ আঁকো। একটি আলোকভেদ্য কাগজ ∠LMN-এর উপর রেখে বিন্দুর নামসহ কোণের ভুজা দুটি আঁকো। এখন আলোকভেদ্য কাগজের উপর অঙ্কিত কোণটি ∠XYZ-এর উপর রাখো। বিন্দু M বিন্দু Y-এর উপর, রশ্মি MN রশ্মি YZ-এর উপর রাখা হলে রশ্মি ML রশ্মি YZ-এর উপর পড়ে তা অনুভব করো। তদানুসারে সমান মাপের কোণ সর্বসম হয়ে থাকে এটা বোঝা যায়। কোণের সর্বসম হওয়াটা কোণের বাহুর দৈর্ঘ্যের উপর নির্ভরশীল না হয়ে কোণের মাপের উপর নির্ভরশীল হয়। ∠LMN ও ∠XYZ সর্বসম, এটাকে ∠LMN ≅ ∠XYZ এইরূপ লেখা হয়।

আমি এটা বুঝতে পেরেছি।

- যে সকল কোণের মাপ সমান হয়, তারা সর্বসম হয়।

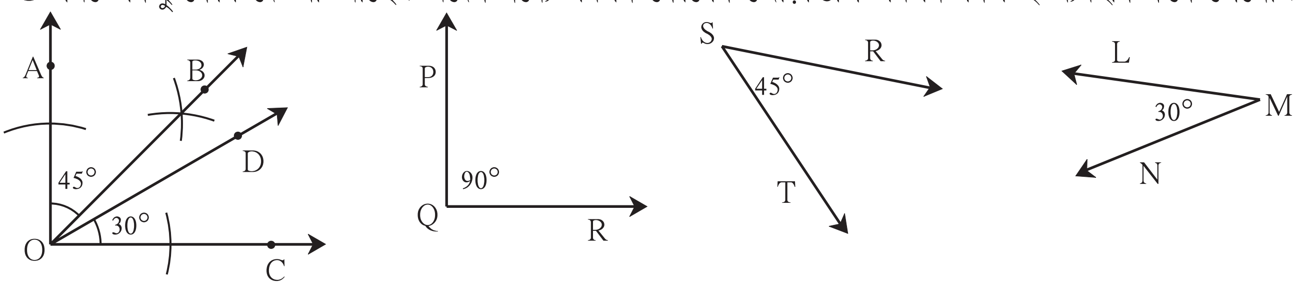
- যদি ∠LMN ≅ ∠XYZ হয়, তবে ∠XYZ ≅ ∠LMN
- যদি ∠LMN ≅ ∠ABC এবং ∠ABC ≅ ∠XYZ হয়, তবে ∠LMN ≅ ∠XYZ

এসো, চর্চা করি।



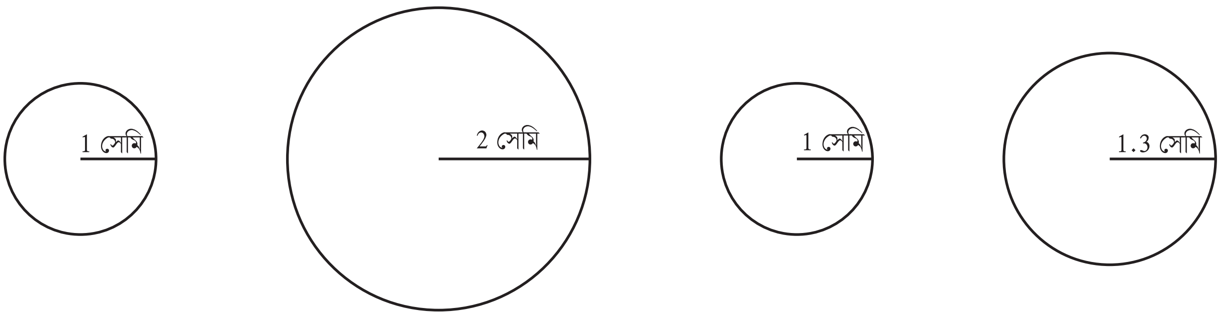
- ঘড়িতে ক'টা বেজেছে? ☐
- ঘড়িটির দুটি কাঁটার মাঝে কতো ডিগ্রী মাপের কোণ হয়ে আছে? ☐
- প্রদত্ত কোণের সর্বসম কোণ ঘড়িতে পুনরায় কয়টার সময় তৈরি হয়? ☐

⦿ নিচে কিছু কোণ দেওয়া আছে। এদের মধ্যে সর্বসম কোণের জোড়াগুলি সর্বসমতার চিহ্ন ব্যবহার করে লেখো।



এসো জেনে নেই।

বৃত্তের সর্বসমতা (Congruence of circles)



(a) (b) (c) (d)

কৃতি I উপরোক্ত আকৃতির মধ্যে সকল বৃত্তের নিরীক্ষণ করো।
উপরে দেওয়া অনুসারে 1 সেমি, 2 সেমি, 1 সেমি, 1.3 সেমি ব্যাসার্ধের বৃত্ত একটি কাগজের উপর আঁকো ও বৃত্তের পরিধি প্রান্তে কেটে নিয়ে কাগজের চাকা তৈরি করো চাকাগুলি এক-অপরের উপর রেখে দেখো যে, কোন চাকাগুলি একে-অপরে হুবেহু মেল খায়।

পর্যবেক্ষণ : 1. আকৃতি (a) ও (c) অন্তর্গত বৃত্ত দুটি একে-অপরে মেল খায়।
2. আকৃতি (b) ও (c) অন্তর্গত বৃত্ত তেমনী আকৃতি (a) ও আকৃতি (d) অন্তর্গত বৃত্তগুলি একে-অপরে মেল খায় না।

যে বৃত্তগুলি **একে-অপরে** হুবেহু মেল খায় তারা সর্বসম হয়।

কৃতি II সমান আকারের অথচ ভিন্ন বেধের চুড়ি এনে তারমধ্যে কোন চুড়িগুলি সর্বসম তা যাচাই করে দেখো।

কৃতি III দৈনিক ব্যবহারে তোমরা সর্বসম বৃত্ত কোথায় দেখতে পাও তা খোঁজো।

কৃতি IV ঘরে রাখা বৃত্তাকার ধারওয়ালা থালা কিম্বা বাটি নাও। উক্ত কোন বস্তুগুলির বৃত্তাকার ধার একে-অপরে সর্বসম হয় তা দেখো।

আমি এটা বুঝতে পেরেছি।

- যে বৃত্তগুলির ব্যাসার্ধ সমান থাকে, ওই সকল বৃত্তগুলি সর্বসম হয়।

ICT Tools or Links

Geogebra Software অন্তর্গত Construction tools -এর ব্যবহার করে ত্রিভূজ ও বৃত্ত অঙ্কন করো।

2 পূর্ণসংখ্যার গুণ ও ভাগ

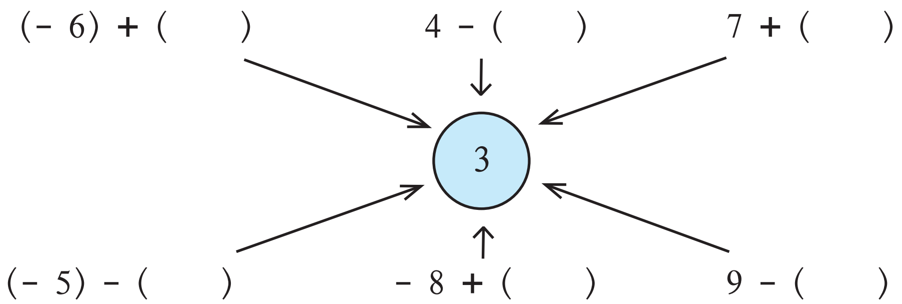
একটু স্মরণ করি।

- পূর্ব শ্রেণীতে আমরা পূর্ণসংখ্যার যোগ ও বিয়োগ করা শিখেছি। তার ব্যবহার করে নিচের খালি ছক পূরণ করো।

(1) 5 + 7 = ☐ (2) 10 + (– 5) = ☐ (3) – 4 + 3 = ☐

(4) (– 7) + (– 2) = ☐ (5) (+ 8) – (+ 3) = ☐ (6) (+ 8) – (– 3) = ☐

- নিচের প্রত্যেক ক্রিয়ার উত্তর 3 আসবে এমন সংখ্যা বন্ধনীতে লেখো।



এসো জেনে নেই।

পূর্ণসংখ্যার গুণ

ময়ূরী বিদ্যালয় থেকে ঘরে ফিরবার সময় তার সাইকেল পাঞ্চার হয়ে গেছে। পাঞ্চার ঠিক করার জন্য তার কাছে পর্যাপ্ত ধনরাশি ছিলো না। তখন সুশাংত, স্নেহল ও কল্পনা প্রত্যেকে তাকে পাঁচ টাকা ধার দেওয়ায় তার কাছে 15 টাকা ধার সঞ্চয় হয়েছে ও তাঁর সাইকেল ঠিক হয়ে গেছে। আমরা ধার ধনরাশি কিংবা ঋণ '–' চিহ্ন দ্বারা দেখাই অর্থাৎ ময়ূরীর উপর 15 টাকা ঋণ ছিলো কিংবা তাঁর নিকট –15 টাকা ছিলো।

এখানে (– 5) + (– 5) + (– 5) = – 15 এটা জেনে নিলাম।

তদানুসারে (– 5) × 3 = 3 × (– 5) = – 15 এটা লক্ষ্য করা যায়।

পরদিন ময়ূরী মায়ের কাছ থেকে 15 টাকা নিয়ে এসে প্রত্যেকের টাকা ফেরত করে ঋণ শোধ করলো কিংবা কম করলো। ধার (ঋণ) পরিশোধ করা অর্থাৎ ঋণরাশি প্রাপ্ত করা এটা বুঝে নিয়ে – (– 15) = +15 হয় এটা মনে রাখো।

আমরা পূর্ণসংখ্যার গুন ও ভাগ শিখেছি। এই ক্রিয়া করার জন্য নামতাও তৈরি করা হয়েছে। এখন পূর্ণসংখ্যার অধ্যায়ন করি অর্থাৎ ঋণাত্মক সংখ্যা, ধনাত্মক সংখ্যা ও শূন্য মিলে যে সংখ্যা সমূহ তৈরি হয় তার গুন করে দেখি।

(– 3) + (– 3) + (– 3) + (– 3) এই যোগ অর্থাৎ (– 3)-কে এই সংখ্যা 4 বার নিয়ে যোগ করা। তা'–12 হয়। এই যোগ ক্রিয়াটি আমরা (– 3) × 4 = – 12 এমন লিখতে পারি। ঠিক তেমনী (– 5) × 6 = – 30, (– 7) × 2 = – 14, 8 × (– 7) = – 56

এখন (− 4)-এর নামতা তৈরি করি।

(− 4) × 0 = 0
(− 4) × 1 = − 4
(− 4) × 2 = − 8
(− 4) × 3 = − 12

এখানে চিত্র প্রবাহের নিরীক্ষণ করো। এখানে (−4)-এর গুণক এক একক দ্বারা বৃদ্ধি করলে গুণফল 4-এ কম হতে দেখা যায়।

এই চিত্র প্রবাহকে স্থির রেখে (−4)-এর নামতা উপরের দিকে গুনক কম করে যদি বৃদ্ধি করা হয়, তাহলে এমন হবে।

(− 4) × (− 2) = 8
(− 4) × (− 1) = 4
(− 4) × 0 = 0

(− 4)-এর গুনক এক এককে কম হলে গুণফল 4-এ বৃদ্ধি হয় এটা লক্ষ করো।

নিম্ন তালিকায় (−5)-এর নামতা দেওয়া আছে। তালিকায় (−6) ও (−7)-এর নামতা পূর্ণ করো।

(− 5) × (− 3) = 15	(− 6) × (− 3) = ☐	(− 7) × (− 3) = ☐
(− 5) × (− 2) = 10	(− 6) × (− 2) = ☐	(− 7) × (− 2) = ☐
(− 5) × (− 1) = 5	(− 6) × (− 1) = ☐	(− 7) × (− 1) = ☐
(− 5) × 0 = 0	(− 6) × 0 = ☐	(− 7) × 0 = ☐
(− 5) × 1 = − 5	(− 6) × 1 = ☐	(− 7) × 1 = ☐
(− 5) × 2 = − 10	(− 6) × 2 = ☐	(− 7) × 2 = ☐
(− 5) × 3 = − 15	(− 6) × 3 = ☐	(− 7) × 3 = ☐
(− 5) × 4 = − 20	(− 6) × 4 = ☐	(− 7) × 4 = ☐

আমি এটা বুঝতে পেরেছি।

- দুটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যার গুণফল ধনাত্মক পূর্ণ হয়ে থাকে।
- একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা ও একটি ঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যার গুণফল ঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা হয়ে থাকে।
- দুটি ঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যার গুণফল ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা হয়ে থাকে।

(ধনাত্মক সংখ্যা) X (ধনাত্মক সংখ্যা) = (ঋণাত্মক সংখ্যা)
(ধনাত্মক সংখ্যা) X (ঋণাত্মক সংখ্যা) = (ঋণাত্মক সংখ্যা)
(ঋণাত্মক সংখ্যা) X (ধনাত্মক সংখ্যা) = (ঋণাত্মক সংখ্যা)
(ঋণাত্মক সংখ্যা) X (ঋণাত্মক সংখ্যা) = (ধনাত্মক সংখ্যা)

অনুশীলন-8

⊙ গুণ করো।

(i) (− 5) × (− 7) (ii) (− 9) × (6) (iii) (9) × (− 4) (iv) (8) × (− 7)

(v) (− 124) × (− 1) (vi) (− 12) × (− 7) (vii) (− 63) × (− 7) (viii) (−7) × (15)

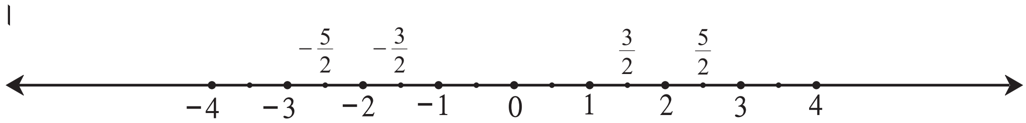
এসো জেনে নেই।

পূর্ণসংখ্যার ভাগ

এক ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যাকে অপর ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা দ্বারা ভাগ করার ক্রিয়া আমাদের অবগত আছে। এমন ভাগ পূর্ণসংখ্যা কিংবা ভগ্নাংশ হয়ে থাকে, এটাও আমাদের জানা আছে।

যেমন, $6 \div 2 = \frac{6}{2} = 3$, $5 \div 3 = \frac{5}{3} = 1 + \frac{2}{3}$

সংখ্যা রেখার উপর শূন্যের বামদিকে ঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা দেখাতে পারি। ঠিক তেমনি তার ভাগও দেখাতে পারি।



এখানে $-\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}$ সংখ্যাগুলি সংখ্যা রেখার উপর দেখানো হয়েছে।

$\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{3}{2}, \frac{-3}{2}\right)$, $\left(\frac{-5}{2}, \frac{5}{2}\right)$ এগুলি পরস্পর বিপরীত সংখ্যার জোড়, তাহা লক্ষ্য করো।

অর্থাৎ $\frac{1}{2} + \frac{-1}{2} = 0$, $\frac{3}{2} + \frac{(-3)}{2} = 0$, $-\frac{5}{2} + \frac{5}{2} = 0$

বিপরীত সংখ্যার জোড়াকে যোগ ব্যস্ত সংখ্যার জোড় এমনও বলা হয়।

$(-1) \times (-1) = 1$ এটা আমরা দেখেছি। এই সমীকরণের উভয় পক্ষে (-1) দ্বারা ভাগ দিলে $(-1) = \frac{1}{(-1)}$ এই সমীকরণ প্রাপ্ত হয়। তাই $\frac{1}{(-1)}$ এই ভাগ অর্থাৎ (-1) এটা জেনে নাও।

তদানুসারে $6 \times (-1) = 6 \times \frac{1}{(-1)} = \frac{6}{(-1)}$ এমন বোঝা যায়।

ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যাকে ঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা দ্বারা ভাগ

$$\frac{7}{-2} = \frac{7\times1}{(-1)\times2} = 7 \times \frac{1}{(-1)} \times \frac{1}{2} = \frac{7}{1} \times (-1) \times \frac{1}{2} = \frac{(7)\times(-1)}{2} = \frac{-7}{2}$$

ঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যাকে ঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা দ্বারা ভাগ

$$\frac{-13}{-2} = \frac{(-1)\times13}{(-1)\times2} = \frac{(-1)}{(-1)}\times13\times\frac{1}{2} = (-1)\times\frac{(-1)}{1}\times\frac{13}{2} = 1\times\frac{13}{2} = \frac{13}{2}$$

তেমনি $\frac{-25}{-4} = \frac{25}{4}$, $\frac{-18}{-2} = \frac{18}{2} = 9$ ইত্যাদি যাচাই করে দেখো।

এতদ্বারা ঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যার ভাগ ক্রিয়াটি বোঝা যায়।

এক পূর্ণসংখ্যাকে অপর শুন্যত্তর পূর্ণসংখ্যা দ্বারা ভাগ দিলে প্রাপ্ত ভাগফল লেখবার সময় হরটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা হওয়া চাই এমন নির্দেশ আছে।

তাই $\frac{7}{-2} = \frac{-7}{2}$, $\frac{-11}{-3} = \frac{11}{3}$ এমন লেখা হয়।

আমি এটা বুঝতে পেরেছি।

পূর্ণসংখ্যার ভাগ করবার নিয়ম গুন করবার নিয়মের মতই।

- দুটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যার ভাগফল, ধনাত্মক সংখ্যা হয়ে থাকে।
- দুটি ঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যার ভাগফল, ধনাত্মক সংখ্যা হয়ে থাকে।
- ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা ও ঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যার ভাগফল, সর্বদা-ঋণাত্মক সংখ্যা হয়ে থাকে।

অনুশীলন-9

1. নিচের উদাহরণ সমাধান করো।

   (i) (– 96) ÷ 16 (ii) 98 ÷ (– 28) (iii) (– 51) ÷ 68 (iv) 38 ÷ (– 57)

   (v) (– 85) ÷ 20 (vi) (–150) ÷ (– 25) (vii) 100 ÷ 60 (viii) 9 ÷ (– 54)

   (ix) 78 ÷ 65 (x) (– 5) ÷ (– 315)

2*. যার উত্তর $\frac{24}{5}$ আসবে এমন তিনটি পূর্ণসংখ্যার ভাগ তৈরি করো।

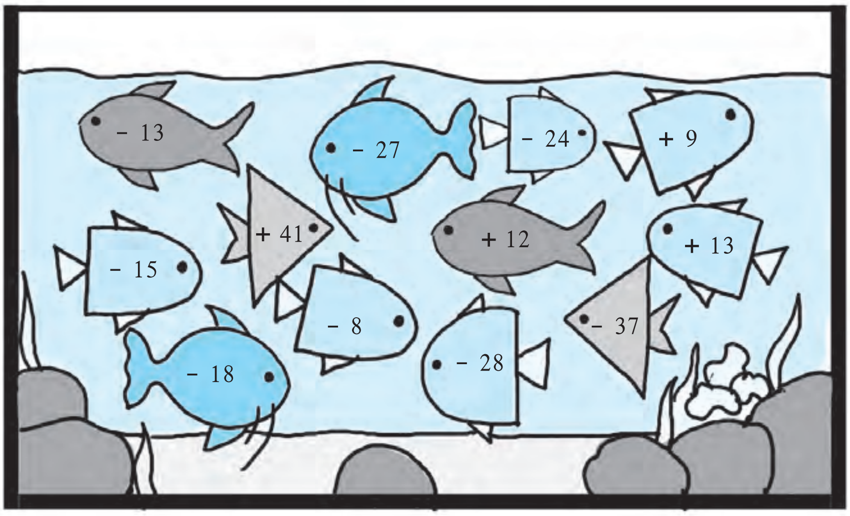
3*. যার উত্তর $\frac{-5}{7}$ আসবে এমন তিনটি পূর্ণসংখ্যার ভাগ তৈরি করো।

4. নিচে একটি পুকুরে কিছু মাছ সংখ্যা ধারন করে আছে। যে কোনো 4টি জোড়া নিয়ে তাদের সংখ্যার গুণ করো। তেমনি ভিন্ন চারটি জোড় নিয়ে তাঁদের সংখ্যার ভাগ করো।

উদাহরণার্থ

1. $(-13) \times (-15) = 195$

2. $(-24) \div 9 = \frac{-24}{9} = \frac{-8}{3}$



❑❑❑

3 গ.সা.গু. - ল.সা.গু.

একটু স্মরণ করি।

- সবথেকে ছোট মৌলিক সংখ্যা (prime number) কোনটি?
- 1 থেকে 50-এর মধ্যে মৌলিক সংখ্যা কয়টি? তার সূচি তৈরি করো।
- নিচে দেওয়া সংখ্যাগুলির মধ্যে যেগুলি মৌলিক সংখ্যা, সেই সংখ্যাগুলি গোল করো।

  17, 15, 4, 3, 1, 2, 12, 23, 27, 35, 41, 43, 58, 51, 72, 79, 91, 97

সহমৌলিক সংখ্যা (coprime numbers) : যে দুই সংখ্যার সাধারণ বিভাজক শুধুমাত্র 1 হয়ে থাকে, সেই সংখ্যা দুটি একে-অপরের **সহমৌলিক সংখ্যা** বলা হয়। সহমৌলিক সংখ্যাকে সাপেক্ষ **মৌলিক সংখ্যা** (relatively prime numbers) এমন-ও বলা হয়।

যেমন : 10 ও 21 এই সংখ্যা দুটি সহমৌলিক সংখ্যা। কারণ 10-এর বিভাজক : 1,2,5,10 ও 21-এর বিভাজক 1, 3, 7, 21। এই সংখ্যার বিভাজকের মধ্যে 1 ই একমাত্র সাধারণ বিভাজক। (3, 8) ; (4, 9); (21, 22) ; (22, 23) ; (23,24) কিছু সহমৌলিক সংখ্যা। দুটি ক্রমাগত সংখ্যা সহমৌলিক সংখ্যা হয়ে থাকে তার যাচাই করো।

এসো জেনে নেই।

যুক্ত মৌলিক সংখ্যা (Twin prime numbers)

যে দুইটি মৌলিক সংখ্যার মধ্যে শুধুমাত্র ২-এর পার্থক্য, এমন দুইটি মৌলিক সংখ্যাকে যুক্ত মৌলিক সংখ্যা বলা হয়।

যেমন : (3, 5) ; (5, 7) ; (11, 13) ; (29, 31) প্রভৃতি।

অনুশীলন 10

1. যে সংখ্যা মৌলিক সংখ্যা নয় এবং সং যৌগিক ও নয়, এমন সংখ্যা কোনটি?
2. নিচে দেওয়া জোড়ার মধ্যে সহ মৌলিক সংখ্যার জোড়া চেনো।

   (i) 8, 14 (ii) 4, 5 (iii) 17, 19 (iv) 27, 15
3. 25 থেকে 100 পর্যন্ত সকল মৌলিক সংখ্যার সূচি তৈরি করো। কয়টি সংখ্যা তা লেখো।
4. 51 থেকে 100 পর্যন্ত সকল সহ মৌলিক সংখ্যা লেখো।
5. 1 থেকে 50-এর মধ্যে সহ মৌলিক সংখ্যার 5টি জোড়া লেখো।
6. মৌলিক সংখ্যার মধ্যে সম সংখ্যা কোনগুলি?

এসো জেনে নেই।

মৌলিক সংখ্যার উৎপাদকে বিশ্লেষণ (Prime factorisation of a number)

সংখ্যার গ.সা.গু. ও ল.সা.গু নির্ণয় করার জন্য যুক্লিডের এক সরল ও মহত্ত্বপূর্ণ নিয়ম অনেকবার ব্যবহার করা হয়। **"যে কোনো যৌগিক সংখ্যাকে মৌলিক সংখ্যার গুণন রূপে লেখা যেতে পারে।"** এটাই সেই নিয়ম।

সংখ্যার মৌলিক উৎপাদকে বিশ্লেষণ কিরূপ করা হয়, তা দেখি।

উদা. 24-এই সংখ্যাকে মৌলিক উৎপাদকের গুণন রূপে লেখো।

মৌলিক উৎপাদক নির্ণয় করার পদ্ধতি

ঊর্দ্ধ বিন্যাস

2	24
2	12
2	6
3	3
	1

$24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3$

অনুভূমিক বিন্যাস

$24 = 2 \times 12$

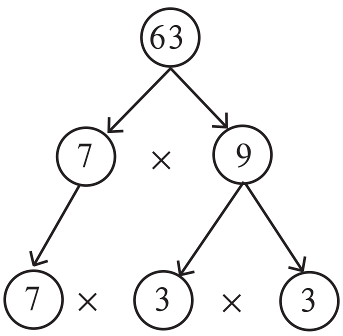
$= 2 \times 2 \times 6$ ...12-এর উৎপাদকে বিশ্লেষণ করা হয়েছে।

$= 2 \times 2 \times 2 \times 3$ ...6-এর উৎপাদকে বিশ্লেষণ করা হয়েছে।

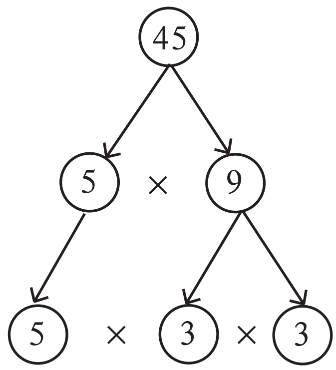
2 ও 3 মৌলিক উৎপাদক।

> **মনে রেখো :**
> **দেওয়া সংখ্যাকে তার মৌলিক উৎপাদকের গুণন রূপে লেখা অর্থাৎ সেই সংখ্যার মৌলিক উৎপাদকে বিশ্লেষণ করা হয়।**

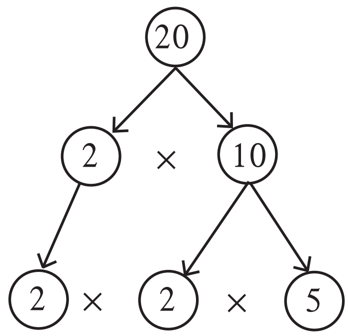
উদা. নিচে দেওয়া সংখ্যা মৌলিক উৎপাদকের গুণন স্বরূপে লেখো।



$63 = 7 \times 3 \times 3$



$45 = 5 \times 3 \times 3$



$20 = 2 \times 2 \times 5$

উদা. 117 -এর মৌলিক উৎপাদকে বিশ্লেষণ করো।

3	117
3	39
13	13
	1

$117 = 13 \times 9$

$= 13 \times 3 \times 3$

$117 = 3 \times 3 \times 13$

250 -এর মৌলিক উৎপাদকে বিশ্লেষণ করো।

2	250
5	125
5	25
5	5
	1

$250 = 2 \times 125$

$= 2 \times 5 \times 25$

$= 2 \times 5 \times 5 \times 5$

$250 = 2 \times 5 \times 5 \times 5$

উদা. 40 -এর মৌলিক উৎপাদকে বিশ্লেষণ করো।

ঊর্দ্ধ বিন্যাস

2	40
2	20
2	10
5	5
	1

40 = 2 × 2 × 2 × 5

$40 = 10 \times 4$
$= 5 \times 2 \times 2 \times 2$

অনুভূমিক বিন্যাস

$40 = 8 \times 5$
$= 2 \times 2 \times 2 \times 5$

অনুশীলন-11

⊙ নিচে দেওয়া সংখ্যার মৌলিক উৎপাদকে বিশ্লেষণ করো।

(i) 32 (ii) 57 (iii) 23 (iv) 150 (v) 216
(vi) 208 (vii) 765 (viii) 342 (ix) 377 (x) 559

একটু স্মরণ করি।

গরিষ্ঠ সাধারণ গুণনীয়ক (গ.সা.গু)

[Greatest Common Divisor, (GCD) or Highest Common Factor (HCF)]

আমরা ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যার গ.সা.গু. এবং ল.সা.গু. অধ্যয়ন করেছি। এখন তার আরোও একটু অধ্যয়ন করি। দেওয়া সংখ্যার গ.সা.গু. অর্থাৎ সেই সংখ্যার সবথেকে বড়ো সাধারণ গুণনীয়ক।

- নিচে দেওয়া প্রত্যেক উদাহরণে দেওয়া সংখ্যার সকল গুণনীয়ক লেখো ও গ.সা.গু. নির্ণয় করো।

(i) 28, 42 (ii) 51, 27 (iii) 25, 15, 35

এসো জেনে নেই।

মৌলিক উৎপাদক পদ্ধতি : মৌলিক উৎপাদকে বিশ্লেষণ করে গ.সা.গু. বের করা সহজ হয়।

উদা. মৌলিক উৎপাদক পদ্ধতি দ্বারা 24 ও 32-এর গ.সা.গু বের করো।

2	24
2	12
2	6
3	3
	1

$24 = 4 \times 6$
$= \underline{2} \times \underline{2} \times \underline{2} \times 3$

2	32
2	16
2	8
2	4
2	2
	1

$32 = 8 \times 4$
$= \underline{2} \times \underline{2} \times \underline{2} \times 2 \times 2$

প্রত্যেক সংখ্যার 2 এই সাধারন উৎপাদকটি 3 বার এসেছে তাই গ.সা.গু. = 2 × 2 × 2 = 8

উদা. 195, 312 ও 546 এর গ.সা.গু. বের করো।

$195 = 5 \times 39$
$= 5 \times \underline{3} \times \underline{13}$

$312 = 4 \times 78$
$= 2 \times 2 \times 2 \times 39$
$= 2 \times 2 \times 2 \times \underline{3} \times \underline{13}$

$546 = 2 \times 273$
$= 2 \times 3 \times 91$
$= 2 \times \underline{3} \times 7 \times \underline{13}$

প্রত্যেক সংখ্যায় 3 ও 13-এর সাধারন উৎপাদক এক-বার এসেছে।

∴ গ.সা.গু. = 3 × 13 = 39

উদা. 10, 15 ব 12–এর গ.সা.গু. জ্ঞাত করো।

$10 = 2 \times 5$ $15 = 3 \times 5$ $12 = 2 \times 2 \times 3$

এই সংখ্যাগুলির মধ্যে একটিও মৌলিক সাধারন গুণনীয়ক নেই। 1-ই একমাত্র সাধশরণ গুণনীয়ক।

অর্থাৎ গ.সা.গু. = 1

উদা. 60, 12 ও 36 এর গ.সা.গু. জ্ঞাত করো।

$60 = 4 \times 15$
$= \underline{2} \times \underline{2} \times \underline{3} \times 5$

$12 = 2 \times 6$
$= \underline{2} \times \underline{2} \times \underline{3}$

$36 = 3 \times 12$
$= 3 \times 3 \times 4$
$= \underline{2} \times \underline{2} \times \underline{3} \times 3$

∴ গ.সা.গু. = 2 × 2 × 3 = 12

এই উদাহরণকে ঊর্দ্ধ বিন্যাসে কসে দেখি। একই সময়ে সকল সংখ্যাগুলি লিখে মৌলিক উৎপাদক নির্ণয় করি।

2	60	12	36
2	30	6	18
3	15	3	9
	5	1	3

∴ গ.সা.গু. = 2 × 2 × 3 = 12

লক্ষ্য করো, 12 এটা 36 ও 60 এর উৎপাদক

আমি এটা বুঝতে পেরেছি।

- প্রদত্ত সংখ্যার মধ্যে কোনো একটি সংখ্যা যদি অন্য সংখ্যার উৎপাদক হয়, তাহলে সেই সংখ্যাটি প্রদত্ত সংখ্যার গ.সা.গু. হয়ে থাকে।
- প্রদত্ত সংখ্যার মধ্যে যদি একটিও মৌলিক সাধারণ উৎপাদক না হয়, তাহলে সেই সংখ্যার গ.সা.গু. 1 হয়ে থাকে। কারণ 1-ই তাদের একমাত্র সাধারণ উৎপাদক হয়ে থাকে।

* **অধিক তথ্যের জন্য**

দুটি ক্রমিক সম সংখ্যার গ.সা.গু. 2 হয় এবং দুটি ক্রমিক সংখ্যার গ.সা.গু. 1 হয়।
নিয়মটি বিভিন্ন উদাহরণ নিয়ে যাচাই করে দেখো।

গ.সা.গু. জ্ঞাত করবার ভাগ পদ্ধতি

উদা. 144 এবং 252 এর গ.সা.গু জ্ঞাত করো।

```
144)252( 1
   -144
   108)144( 1
      -108
        36)108(3
          -108
           000
```

(1) বড়ো সংখ্যাকে ছোটো সংখ্যা দিয়ে ভাগ করো।

(2) এই ভাগ ক্রিয়ায় প্রাপ্ত বিয়োগফল দ্বারা পূর্বের ভাজককে ভাগ করো।

(3) দ্বিতীয় বারের ভাগক্রিয়ায় প্রাপ্ত বিয়োগফল দ্বারা দ্বিতীয় বারে প্রাপ্ত ভাজককে ভাগ করো ও বিয়োগফল জ্ঞাত করো।

(4) বিয়োগফল '0' (শূন্য) প্রাপ্ত হওয়া পর্যন্ত এইরূপ ক্রিয়া করতে থাকো। যে ভাগ ক্রিয়ায় ভাগফল শূন্য প্রাপ্ত হবে সেই ভাগক্রিয়ার ভাজকটাই প্রদত্ত সংখ্যার গ.সা.গু. হবে।

$\therefore$ 144 ও 252-এর গ.সা.গু. = 36

উদা. $\frac{209}{247}$ এই সংখ্যার সংক্ষিপ্ত রূপ দাও।

```
209)247 ( 1
   -209
    38)209 (5
      -190
       19)38(2
         -38
          00
```

এরজন্য ২৪৭ ও ২০৯-এদের গ.সা.গু. ভাগ পদ্ধতিতে জ্ঞাত করবো। সংক্ষিপ্ত রূপ দেওয়ার জন্য দুইটি সংখ্যার সাধারণ উৎপাদক খুঁজি। এখানে 19 এটা গ.সা.গু. অর্থাৎ লব স্থানে ও হর স্থানে স্থিত সংখ্যাকে 19 দ্বারা ভাগ করা সম্ভব।

$\therefore \quad \frac{209}{247} = \frac{209 \div 19}{247 \div 19} = \frac{11}{13}$

অনুশীলন-12

1. গ.সা.গু. জ্ঞাত করো।

(i) 25, 40 (ii) 56, 32 (iii) 40, 60, 75 (iv) 16, 27

(v) 18, 32, 48 (vi) 105, 154 (vii) 42, 45, 48 (viii) 57, 75, 102

(ix) 56, 57 (x) 777, 315, 588

2. ভাগ পদ্ধতি দ্বারা গ.সা.গু. জ্ঞাত করো ও সংক্ষিপ্ত রূপ দাও।

(i) $\frac{275}{525}$ (ii) $\frac{76}{133}$ (iii) $\frac{161}{69}$

একটু স্মরণ করি।

লঘুতম সাধারণ গুণিতক (ল.সা.গু.) [Least common multiple (LCM)]

প্রদত্ত সংখ্যার ল.সা.গু. অর্থাৎ তাদের মধ্যে প্রত্যেক সংখ্যা দ্বারা বিভক্ত এমন ছোটো-থেকে - ছোট সংখ্যা।

- নিচে দেওয়া সংখ্যার নামতা লেখো ও তাঁদের ল.সা.গু. বের করো।

(i) 6, 7 (ii) 8, 12 (iii) 5, 6, 15

এসো জেনে নেই।

উদা. 60 ও 48 এর ল.সা.গু. বের করো।

প্রত্যেক সংখ্যার মৌলিক উৎপাদক দেখি।

60 = 2 × 2 × 3 × 5   48 = 2 × 2 × 2 × 2 × 3

উক্ত উৎপাদকের প্রত্যেক মৌলিক সংখ্যাগুলি দেখি।

2 এই সংখ্যাটি অধিকাধিক 4 বার এসেছে। (48-এর উৎপাদকের মধ্যে)

3 এই সংখ্যাটি অধিকাধিক 1 বার এসেছে। (60-এর উৎপাদকের মধ্যে)

5 এই সংখ্যাটি অধিকাধিক 1 বার এসেছে। (60-এর উৎপাদকের মধ্যে)

∴ ল.সা.গু. = 2 × 2 × 2 × 2 × 3 × 5 = 10 × 24 = 240

উদা. 18, 30 ও 50 -এর ল.সা.গু. জ্ঞাত করি এসো।

18 = 2 × 9
= 2 × 3 × 3

30 = 2 × 15
= 2 × 3 × 5

50 = 2 × 25
= 2 × 5 × 5

উক্ত উৎপাদকে 2,3 ও 5 এই মৌলিক সংখ্যা প্রাপ্ত হয়েছে।

2 এই সংখ্যা অদিকাধিক □ বার, 3 এই সংখ্যা অধিকাধিক □ বার ও 5 এই সংখ্যা অধিকাধিক □ বার প্রাপ্ত হয়েছে।

∴ ল.সা.গু = 2 × 3 × 3 × 5 × 5 = 450   ∴ 18, 30, 50 এর ল.সা.গু 450।

উদা. 16, 28 ও 40 এর ল.সা.গু জ্ঞাত করো।

ঊর্দ্ধ বিন্যাস

2	16	28	40
2	8	14	20
2	4	7	10
	2	7	5

- বিভাজ্যতার শর্তের ব্যবহার করে সকল সংখ্যাগুলিতে ভাগ যায় এমন সংখ্যা খোঁজো ও তা দিয়ে প্রদত্ত সংখ্যাগুলিকে ভাগ করো। প্রাপ্ত ভাগফলের জন্যও যতোবার সম্ভব উক্ত ক্রিয়াটি করো।
- এবার প্রাপ্ত সংখ্যার মধ্যে অন্তত দুটি সংখ্যার বিভাজক হয় এমন সংখ্যা খুঁজে তা দিয়ে ভাগ যাওয়ার মতো সংখ্যাগুলিকে ভাগ করো। যে সংখ্যায় ভাগ যায় না সেগুলি তেমনই রাখো। যতোবার সম্ভব উক্ত ক্রিয়াটি করো।
- 1 ব্যতিরিক্ত অন্য কোনো সাধারণ গুণনীয়ক না থাকলে ভাগ ক্রিয়ায় বিরাম দাও।
- বাম পাশের স্তম্ভের সংখ্যার গুণ করো। তাঁর সাথে নিচের লাইনের সংখ্যার গুণ করো।

∴ ল.সা.গু. = 2 × 2 × 2 × 2 × 5 × 7 = 560

উদা. 18 ও 30-এর ল.সা.গু. ও গ.সা.গু. নির্ণয় করো। প্রাপ্ত ল.সা.গু. ও গ.সা.গু. এর গুণফল ও প্রদত্ত সংখ্যার গুণফলের তুলনা করো।

2	18	30
3	9	15
	3	5

গ.সা.গু. = 2 × 3 = 6

ল.সা.গু. = 2 × 3 × 3 × 5 = 90

গ.সা.গু. × ল.সা.গু. = 6 × 90 = 540

প্রদত্ত সংখ্যার গুণফল = 18 × 30 = 540

প্রদত্ত সংখ্যার গুণফল = গ.সা.গু. × ল.সা.গু.

তদানুসারে দুটি সংখ্যার গুণফল সেই দুটি সংখ্যার গ.সা.গু. ও ল.সা.গু.-এর গুণনফলের সমান হয়। এই বিধানের যাচাই করার জন্য নিচে দেওয়া সংখ্যার জোড়া দেখো।

(15, 48), (14, 63), (75, 120)

উদা. 15, 45 ও 105-এর ল.সাগু. ও গ.সাগু. বের করো।

3	15	45	105
5	5	15	35
	1	3	7

15 = 3 × 5

45 = 3 × 3 × 5

105 = 3 × 5 × 7

গ.সা.গু. = 3 × 5 = 15

ল.সা.গু. = 3 × 3 × 5 × 7 = 315

উদা. যদি দুই অঙ্কীয় দুটি সংখ্যার গুণফল 1280 এবং তার গ.সা.গু 4 হয়, তাহলে তার ল.সা.গু. নির্ণয় করো।

গ.সা.গু. × ল.সা.গু. = প্রদত্ত সংখ্যাগুলির গুণ

4 × ল.সা.গু. = 1280

$\therefore$ ল.সা.গু. $= \frac{1280}{4} = 320$

অনুশীলন-13

1. ল.সা.গু. বের করো।

(i) 12, 15 (ii) 6, 8, 10 (iii) 18, 32 (iv) 10, 15, 20 (v) 45, 86

(vi) 15, 30, 90 (vii) 105, 195 (viii) 12, 15, 45 (ix) 63, 81

(x) 18, 36, 27

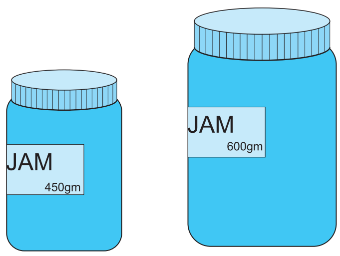
2. নিচে দেওয়া সংখ্যার গ.সা.গু. এবং ল.সা.গু. নির্ণয় করো। তাদের গুণফল প্রদত্ত দুটি সংখ্যার গুণফলের একই সমান হয় তা যাচাই করো।

(i) 32, 37 (ii) 46, 51 (iii) 15, 60 (iv) 18, 63 (v) 78, 104

ল.সা.গু. ও গ.সা.গু.-এর ব্যবহার

উদা. দোকানে 450 গ্রাম আচারের ছোট শিশির মূল্য 96 টাকা ও সেই আচারের 600 গ্রাম ওজনের বড়ো শিশির মূল্য 124 টাকা, তাহলে কোন শিশিটি ক্রয় করা বেশি লাভকারী হবে?

সমাধান: আমরা ঐকিক নিয়ম শিখেছি। তদানুসারে প্রত্যেক শিশিতে 1 গ্রাম আচারের মূল্যের তুলনা করতে পারবো। কিন্তু ছোটো সাধারণ উৎপাদক ধার্য করার চেয়ে বড়ো সাধারণ উৎপাদক ধার্য করলে গণনা সরল হয়।



450 ও 600 -এর গ.সা.গু. 150 -এর ব্যবহার করব।

450 = 150 × 3,   600 = 150 × 4

$\therefore$ ছোটো শিশিতে 150 গ্রাম আচারের মূল্য $\frac{96}{3}$ = 32 টাকা।

বড় শিশিতে 150 গ্রাম আচারের মূল্য $\frac{124}{4}$ = 31 টাকা

$\therefore$ 600 গ্রাম আচারের শিশি ক্রয় করাটাই বেশি লাভজনক।

উদা. যোগ করো $\frac{17}{28} + \frac{11}{35}$ **বিধি 1 :** যোগ করার জন্য প্রদত্ত ভিন্নের হর সমান করি।

সমাধান : $\frac{17}{28} + \frac{11}{35} = \frac{17\times35+11\times28}{28\times35} = \frac{595+308}{28\times35} = \frac{903}{28\times35} = \frac{903}{980} = \frac{129}{140}$

বিধি 2: যোগ করার জন্য 28 ও 35 এর ল.সা.গু. বের করি।

সমাধান : ল.সা.গু. = 7 × 4 × 5 = 140

$$\frac{17}{28} + \frac{11}{35} = \frac{17\times5}{28\times5} + \frac{11\times4}{35\times4} = \frac{85+44}{140} = \frac{129}{140}$$

হরের গুণ করার বদলে ল.সা.গু. নিয়ে আমাদের গণনা অনেকটাই সহজ হয়েছে!

উদা. কোনো একটি সংখ্যাকে ক্রমানুসারে 8, 10, 12, 14-এই সংখ্যা দিয়ে ভাগ দিলে প্রত্যেক বার 3 অবশিষ্ট রয়ে যায়, এমন সবথেকে ছোটো সংখ্যা কোনটি হবে?

সমাধান: ভাজ্য সংখ্যা খোঁজবার জন্য প্রদত্ত ভাজকের ল.সা.গু. নির্ণয় করি।

2	8	10	12	14
2	4	5	6	7
	2	5	3	7

ল.সা.গু. = 2 × 2 × 2 × 5 × 3 × 7 = 840

এই ল.সা.গু.-তে প্রত্যেক বারের প্রাপ্ত অবশেষ যুক্ত করি।

সেই সংখ্যা = ল.সা.গু + অবশেষ = 840 + 3 = 843

উদা. 16,20,80 এই সংখ্যার ল.সা.গু. নির্ণয় করো।

সমাধান: 16 = 2 × 2 × 2 × 2

20 = 2 × 2 × 5

80 = 2 × 2 × 2 × 2 × 5

ল.সা.গু. = 4 × 4 × 5 = 80

4	16	20	80
4	4	5	20
5	1	5	5
	1	1	1

এখানে একটা মজা লক্ষ্য করেছো কি? প্রদত্ত সংখ্যার মধ্যে 80 একটি সংখ্যা এবং 16 ও 20 এই সংখ্যাটির বিভাজক।

মনে রেখো :
প্রদত্ত সংখ্যার মধ্যে অন্যান্য ছোট সংখ্যাগুলি সবথেকে বড় সংখ্যার বিভাজক হয়ে থাকে, এমন সময়ে সেই বড় সংখ্যাটি প্রদত্ত সংখ্যাগুলির ল.সা.গু. হয়ে থাকে।

উপরে দেওয়া নিয়মকে যাচাই করার জন্য (18,90) (35,140,70) এই সংখ্যাসমূহ যাচাই করো।

উদা. শ্রেয়স, শলাকা এবং স্নেহল একটা বৃত্তাকার দৌড় পাটির এক স্থান থেকে একই সময়ে দৌড়নো শুরু করে ও ক্রমানুসারে 16, 24 ও 18 মিনিটে এক পরিক্রমা পূর্ণ করে, তবে তারা তিনজন কমপক্ষে কতক্ষণ পরে আবার সেইস্থানে একই সময়ে আসতে পারবে?

সমাধান : যতটা সময়ের পরে তারা একত্র আসতে পারবে সে সময় 16, 24 ও 18-এর নামতার ঘরে আসবে। সে সময়টি কমপক্ষে কতো হতে পারে তা বের করার জন্য ল.সা.গু. বের করি।

16 = 2 × 2 × 2 × 2   24 = 2 × 2 × 2 × 3   18 = 2 × 3 × 3

ল.সা.গু = 2 × 2 × 2 × 2 × 3 × 3 = 144

144 মিনিট পরে কিংবা 2 ঘন্টা 24 মিনিট পরে তারা একত্র আসতে পারবে।

অনুশীলনী-14

1. উচিৎ বিকল্প চয়ন করো।

(i) 120 ও 150 -এর গ.সা.গু. ....

(1) 30   (2) 45   (3) 20   (4) 120

(ii) নিচে দেওয়া বিকল্পের মধ্যে .... এই সংখ্যার গ.সা.গু. 1 নয়।

(1) 13, 17   (2) 29, 20   (3) 40, 20   (4) 14, 15

2. গ.সা.গু. ও ল.সা.গু. জ্ঞাত করো।

(i) 14, 28   (ii) 32, 16   (iii) 17, 102, 170   (iv) 23, 69   (v) 21, 49, 84

3. ল.সা.গু. নির্ণয় করো।

(i) 36, 42   (ii) 15, 25, 30   (iii) 18, 42, 48   (iv) 4, 12, 20   (v) 24, 40, 80, 120

4. একটি সংখ্যাকে 8, 9, 10, 15, 20 এই সংখ্যা দিয়ে ভাগ দিলে প্রত্যেক বার 5 শেষফল রয়ে যায়, এমন ছোটো থেকে ছোটো সংখ্যা লেখো।

5. $\frac{348}{319}$, $\frac{221}{247}$, $\frac{437}{551}$ এই ভিন্নের সংক্ষিপ্ত রূপ দাও।

6. দুটি সংখ্যার ল.সা.গু. ও গ.সা.গু. ক্রমশঃ 432 ও 72, সংখ্যা দুটির মধ্যে একটি সংখ্যা 216 হলে দ্বিতীয় সংখ্যা বের করো?

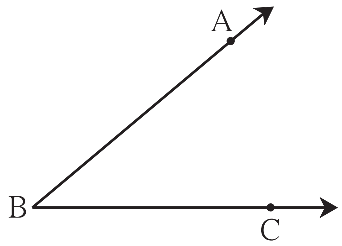
7. দুই অঙ্কীয় দুটি সংখ্যার গুণফল 765 ও তাদের গ.সা.গু. 3, তাহলে তাদের ল.সা.গু. নির্ণয় করো।

8. একজন বিক্রেতার কাছে 392 মিটার, 308 মিটার, 490 মিটার দৈর্ঘ্যের প্লাস্টিকের দড়ির তিনটি গোছা আছে। একটুও দড়ি অবশিষ্ট থাকবে না এমনভাবে তিনটি গোছার দড়ির সমান দৈর্ঘ্যের টুকড়া করা হয়েছে। তাহলে প্রত্যেকটি টুকরা বেশির-বেশি কতটুকু দৈর্ঘ্যের হতে পারে?

9*. দুটি ক্রমিক সম সংখ্যার ল.সা.গু. 180, তবে সেই সংখ্যা দুটি কি-কি?

4 কোণ ও কোণের জোড়া

একটু স্মরণ করি।

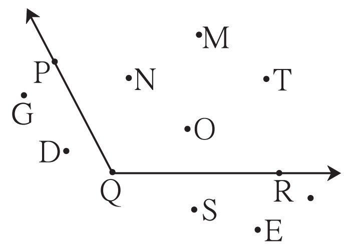


- পাশে দেওয়া কোণের নাম লেখো. ....
- কোণের শীর্ষবিন্দুর নাম লেখো...................
- কোণের বাহুর নাম লেখো ....
- বাহুর উপর দেখানো বিন্দুর নাম লেখো ....

এসো জেনে নেই।

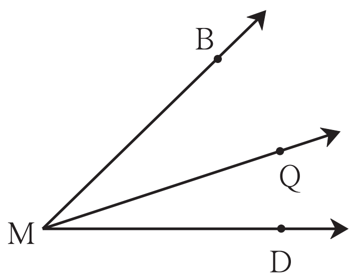
কোণের অন্তর্ভাগ ও বহির্ভাগ

সংলগ্ন ছবিতে সমতলে দেওয়া কোণের বাহুর উপর বিন্দু ব্যতিরিক্ত বিন্দু N, বিন্দু M, বিন্দু T এইরূপ বিন্দুসমূহ অর্থাৎ $\angle PQR$ -এর **অন্তর্ভাগ**।
(Interior of an angle)



পৃষ্ঠভাগের যে বিন্দু কোণের বাহুর উপরে নয় ও কোণের অন্তর্ভাগেও নয়, এমন বিন্দু G, বিন্দু D, বিন্দু E এইরূপ বিন্দুসমূহ অর্থাৎ $\angle PQR$-এর **বহির্ভাগ**। (Exterior of an angle)

সন্নিহিত কোণ (পার্শ্ববর্তী কোণ) (Adjacent angles)



এখানে দেওয়া ছবিতে কোণ দেখো। $\angle BMQ$ ও $\angle QMD$-এই কোণের রশ্মি MQ টি সাধারণ এবং M এই শীর্ষ বিন্দু সাধারণ। এই কোণ দুটির অন্তর্ভাগে একটি বিন্দু সাধারণ নেই। এরা একে-অপরের পার্শ্ববর্তী। এমন কোণকে সন্নিহিত কোণ বলা হয়।

সন্নিহিত কোণের একটি বাহু সাধারণ হয়ে থাকে ও অন্য দুটি বাহু সাধারণ বাহুর বিপরীত পাশে হয়ে থাকে এবং তাদের শীর্ষবিন্দু সাধারণ হয়ে থাকে।

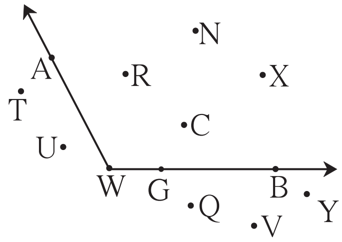
উপরে দেওয়া আকৃতিতে $\angle BMD$ ও $\angle BMQ$ এই কোণ দুটির MB-এই ভূজা সাধারণ। কিন্তু তারা সন্নিহিত কোণ নয়, কারণ তাঁদের অন্তর্ভাগ ভিন্ন নয়।

আমি এটা বুঝতে পেরেছি।

- যে দুটি কোণের শীর্ষবিন্দু সাধারণ হয়ে থাকে, একটি বাহু সাধারণ হয়ে থাকে ও তাদের অন্তর্ভাগ ভিন্ন হয়ে থাকে, সেই কোণকে সন্নিহিত কোণ বলে।

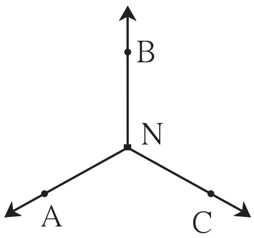
অনুশীলনী-15

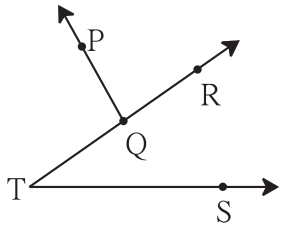
1. ছবি নিরীক্ষণ করো ও ∠AWB -এর জন্য প্রদত্ত সারণী পূর্ণ করো।



অন্তর্ভাগে অবস্থিত বিন্দু	
বহির্ভাগে অবস্থিত বিন্দু	
কোণের বাহুর উপর অবস্থিত বিন্দু	

2. নিচে দেওয়া ছবিতে সন্নিহিত কোণের জোড়া লেখো।

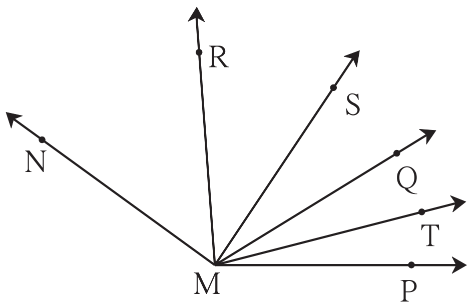




3. নিচে দেওয়া কোণের জোড়া সন্নিহিত কি না? সন্নিহিত না হলে কারণ লেখো।

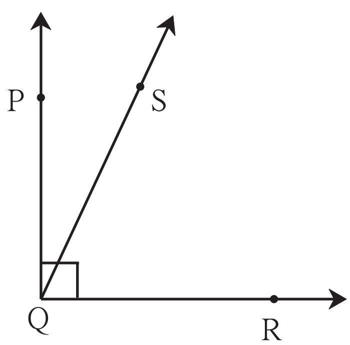
(i) ∠PMQ ও ∠RMQ (ii) ∠RMQ ও ∠SMR

(iii) ∠RMS ও ∠RMT (iv) ∠SMT ও ∠RMS



এসো জেনে নেই।

পূরক কোণ (Complementary angles)

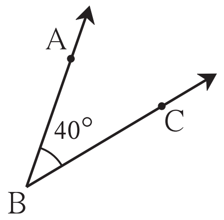


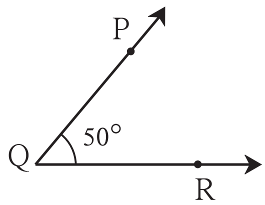
- একটি সমকোণ PQR আঁকো।
- তার অন্তর্ভাগে যে-কোনো স্থানে একটি বিন্দু S নাও।
- রশ্মি QS আঁকো।
- ∠PQS ও ∠SQR এদের মাপের যোগ করো।
- যোগফল কতো আসবে?

যে দুটি কোণের মাপের যোগফল 90° হয় এমন কোণ দুটিকে একে-অপরের পূরক কোণ বলা হয়।

এখানে ∠PQS ও ∠SQR একে-অপরের পূরক কোণ।

উদা. প্রদত্ত ছবিতে কোণের নিরীক্ষণ করো ও ছকে উচিৎ সংখ্যা লেখো।





$m\angle ABC = \square^\circ$

$m\angle PQR = \square^\circ$

$m\angle ABC + m\angle PQR = \square^\circ$

$\angle ABC$ ও $\angle PQR$ এদের মাপের যোগফল 90° সুতরাং তারা একে-অপরের পূরক কোণ।

উদা. 70° মাপের পরস্পর পূরক কোণের মাপ কতো?

সমাধান : প্রদত্ত কোণের পূরক কোণের মাপ মেনে নিলাম x

$70 + x = 90$

$\therefore 70 + x - 70 = 90 - 70$

$x = 20^\circ$

70° মাপের পূরক কোণের মাপ 20°।

উদা. $(a + 15)^\circ$ ও $(2a)^\circ$ একে-অপরের পূরক কোণ, তাহলে প্রত্যেক কোণের মাপ কতো হবে?

সমাধান : $a + 15 + 2a = 90$

$3a + 15 = 90$

$3a = 75$

$a = 25$

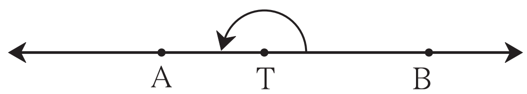
$\therefore a + 15 = 25 + 15 = 40^\circ$

এবং $2a = 2 \times 25 = 50^\circ$

অনুশীলন-16

1. নিচে কিছু কোণের মাপ দেওয়া আছে। তাদের পূরক কোণের মাপ লেখো।
   (i) 40° (ii) 63° (iii) 45° (iv) 55° (v) 20° (vi) 90° (vii) x°
2. $(y - 20)^\circ$ এবং $(y + 30)^\circ$ একে অপরের পূরক কোণ, তবে প্রত্যেক কোণের মাপ বের করো।

একটু স্মরণ করি।

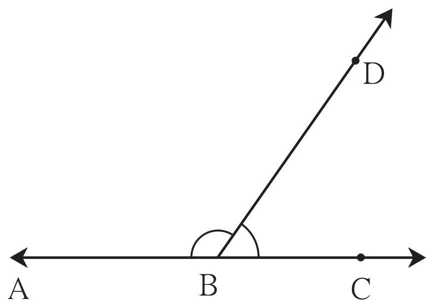


রেখা AB-এর উপর T বিন্দু আছে।

- $\angle ATB$ এই কোণটির প্রকার কি?
- তার মাপ কতো?

এসো জেনে নেই।

সম্পূরক কোণ (Supplementary angles)



- সংলগ্ন ছবিটিতে রেখা AC দেওয়া আছে। রেখার উপর B বিন্দু হতে রশ্মি BD টানা হয়েছে। এখানে কয়টি কোণ আছে?

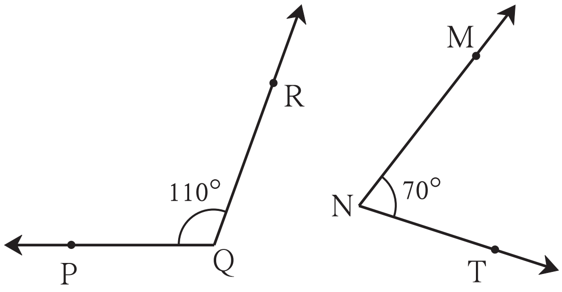
নিম্ন কোণগুলি কোণ মাপকের সাহায্যে মাপো।

- $m\angle ABD = \square^\circ$, $m\angle DBC = \square^\circ$
- $m\angle ABD + m\angle DBC = \square^\circ$

যে দুটি কোণের মাপের যোগফল 180° হয়, সেই কোণ দুটিকে একে অপরের সম্পূরক কোণ বলা হয়।

এখানে $\angle ABD$ ও $\angle DBC$ একে-অপরের সম্পূরক কোণ।

উদা. নিচে দেওয়া ছবিতে কোণের নিরীক্ষণ করো ও ছকে উচিৎ সংখ্যা লেখো।



- $m\angle PQR = \square^\circ$ $m\angle MNT = \square^\circ$
- $m\angle PQR + m\angle MNT = \square^\circ$

$\angle PQR$ ও $\angle MNT$ একে-অপরের সম্পূরক কোণ।

উদা. 135°মাপের সম্পূরক কোণের মাপ নির্ণয় করো।

সমাধান : সম্পূরক কোণের মাপ p° মেনে নিলাম।

সম্পূরক কোণের মাপের যোগফল 180° হয়ে থাকে।

$$135 + p = 180$$

$$\therefore 135 + p - 135 = 180 - 135$$

$$\therefore p = 45$$

$\therefore$ 135° মাপের সম্পূরক কোণের মাপ 45°

উদা. $(a + 30)^\circ$ ও $(2a)^\circ$ একে অপরের সম্পূরক কোণ হলে প্রত্যেক কোণের মাপ কতো হবে??

সমাধান : $a + 30 + 2a = 180$

$$\therefore 3a = 180 - 30$$

$$\therefore 3a = 150$$

$$\therefore a = 50$$

$$\therefore a + 30 = 50 + 30 = 80^\circ$$

$$\therefore 2a = 2 \times 50 = 100^\circ$$

$\therefore$ সেই কোণের মাপ 80° ও 100° হবে।

অনুশীলনী-17

1. নিচে দেওয়া কোণের সম্পূরক কোণের মাপ লেখো।
   (i) 15° (ii) 85° (iii) 120° (iv) 37° (v) 108° (vi) 0° (vii) a°
2. নিচে কিছু কোণের মাপ দেওয়া আছে। তাদের মধ্যে সম্পূরক কোণ ও পূরক কোণের জোড়া তৈরি করো।
   $m\angle B = 60^\circ$ $m\angle N = 30^\circ$ $m\angle Y = 90^\circ$ $m\angle J = 150^\circ$
   $m\angle D = 75^\circ$ $m\angle E = 0^\circ$ $m\angle F = 15^\circ$ $m\angle G = 120^\circ$
3. ΔXYZ মধ্যে $m\angle Y = 90^\circ$, $\angle X$ ও $\angle Z$ এই কোণ দুটির পরস্পর সম্বন্ধ লেখো।
4. পূরক কোণের জোড়ায় দুটি কোণের মাপের পার্থক্য 40° হলে সেই কোণ দুটির মাপ বের করো।
5. □PTNM একটি আয়তক্ষেত্র
   এই ছবিটিতে তৈরি সম্পূরক কোণের জোড়া লেখো।

6*. যদি $m\angle A = 70^\circ$ হয়, তবে $\angle A$ -এর পূরক কোণের সম্পূরক কোণের মাপ কতো হবে?

7. $\angle A$ ও $\angle B$ একে-অপরের সম্পূরক কোণ এবং $m\angle B = (x + 20)^\circ$, তবে $m\angle A$ কতো হবে?

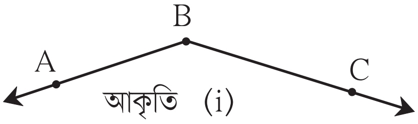
এসো চর্চা করি।

নিচে দেওয়া বিধানের চর্চা করো। বিধান সঠিক থাকলে তার উাহরণ দাও। বিধান ভুল থাকলে কারণ বলো।

- দুটি লঘুকোণ একে-অপরের পূরক কোণ হতে পারে।
- দুটি সমকোণ একে-অপরের পূরক কোণ হতে পারে।
- একটি লঘুকোণ ও একটি বিশাল কোণ একে-অপরের পূরক কোণ হতে পারে।
- দুটি লঘুকোণ একে-অপরের সম্পূরক কোণ হতে পারে।
- দুটি সমকোণ একে-অপরের সম্পূরক কোণ হতে পারে।
- একটি লঘুকোণ ও একটি বিশাল কোণ একে-অপরের সম্পূরক কোণ হতে পারে।

এসো জেনে নেই।

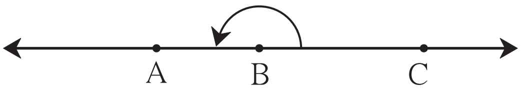
বিপরীত রশ্মি (Opposite rays)



আকৃতি (i)

পাশে দেওয়া ছবিতে রশ্মির নাম বলো। রশ্মির প্রারম্ভ বিন্দুর নাম বলো। আকৃতি (i)-এ কোণের নাম লেখো।

পাশে দেওয়া আকৃতি (ii) -এ কোণের নাম লেখো। ছবিতে 'B' প্রারম্ভ বিন্দু যার, এমন রশ্মির নাম লেখো।



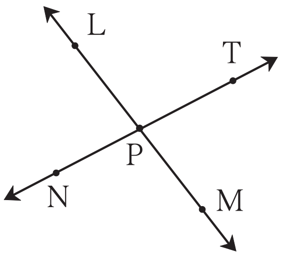
আকৃতি (ii)

আকৃতি (i)-এ রশ্মি BC ও রশ্মি BA যুক্ত হয়ে একটি বৃহৎ কোণ (বিশাল কোণ) নির্মিত হয় ও আকৃতি (ii)-এ রশ্মি BC ও রশ্মি BA যুক্ত হয়ে সরলকোণ নির্মাণ হয় ও একটি সরল রেখা প্রাপ্ত হয়। এখানে রশ্মি BC ও রশ্মি BA একে-অপরের বিপরীত রশ্মি।

আমি এটা বুঝতে পেরেছি।

- যে দুটি রশ্মির আরম্ভ বিন্দু সাধারণ হয় ও তাদের দ্বারা একটি রেখা তৈরি হয়, এমন রশ্মি দিগকে একে-পরের বিপরীত রশ্মি বলে।

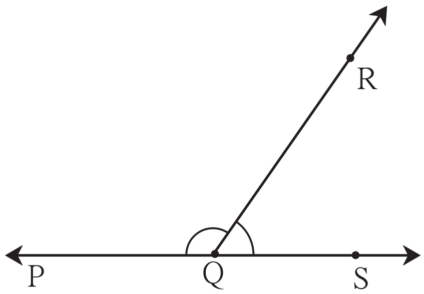
অনুশীলনী-18



1. পাশে দেওয়া ছবিতে বিপরীত রশ্মির নাম লেখো।
2. রশ্মি PM ও রশ্মি PT এ দুটি বিপরীত রশ্মি হতে পারে কি? কারণ লেখো।

এসো জেনে নেই।

রৈখিক যুগল কোণ (Angles in linear pair)



- পাশে দেওয়া ছবিতে কোণের নাম লেখো।
- কোণের জোড়া কোন প্রকারে ?
- কোণের কোন বাহু সাধারণ বাহু নয় ?
- $m\angle PQR = \square^\circ$
- $m\angle RQS = \square^\circ$
- $m\angle PQR + m\angle RQS = 180^\circ$

ছবিতে $\angle PQR$ ও $\angle RQS$ দুটি সন্নিহিত কোণ। ঠিক তেমনি তারা সম্পূরক কোণও বটে। তাদের যে বাহু সাধারণ একে-অপরের বিপরীত রশ্মি, অর্থাৎ সেই বাহু দ্বারা একটি রেখা তৈরি হয়। এই কোণ দুটি রৈখিক জোড়ায় কোণ এমন বলা হয়। **রৈখিক যুগল কোণের মাপের যোগফল 180° হয়ে থাকে।**

আমি এটা বুঝতে পেরেছি।

- যে দুটি কোণের একটি বাহু সাধারণ হয় ও অসাধারণ বাহু দ্বারা সরল রেখা তৈরি হয়, তাদের রৈখিক যুগল কোণ বলা হয়।

উপক্রম : স্ট্রা কিংবা সিধা কাঠি নিয়ে সবে শেখা কোণের জোড়া তৈরি করো।

অনুশীলনী-19

নিচে দেওয়া বর্ণনানুসারে কোণের জোড়া আঁকো। না আঁকতে পারলে কারণ লেখো।

(i) অসন্নিহিত পূরককোণ

(ii) অসম্পূরক রৈখিক যুগল কোণ

(iii) রৈখিক যুগল কোণ ব্যতিরিক্ত সম্পূরক কোণ

(iv) রৈখিক যুগল কোণ ব্যতিরিক্ত সন্নিহিত কোণ

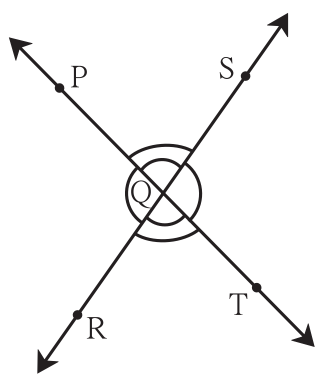
(v) যে পূরক কোণও নয় ও সন্নিহিত কোণও নয়

(vi) পূরক কোণ যা রৈখিক যুগল কোণও হয়।

এসো জেনে নেই।

বিপ্রতীপ কোণ (Vertically opposite angles)

প্রদত্ত ছবিটিতে রেখা PT ও রেখা RS একে-অপরকে ‘Q’ বিন্দুতে ছেদ করেছে। চারটি কোণ তৈরি হয়েছে। রশ্মি QP ও রশ্মি QR দ্বারা $\angle PQR$ তৈরি হয়েছে। QP ও QR এই রশ্মি দুটির ক্রমাগত বিপরীত রশ্মি QT ও QS । এই বিপরীত রশ্মি দ্বারা কোণ $\angle SQT$ তৈরি হয়েছে। সুতরাং $\angle SQT$-এটি $\angle PQR$-এর বিপ্রতীপ কোণ এমন বলা হয়।



আমি এটা বুঝতে পেরেছি।

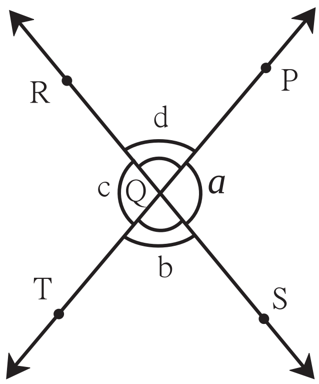
- যে দুটি রশ্মি দ্বারা কোণ তৈরি হয়ে থাকে, তাদের বিপরীত রশ্মি দ্বারা তৈরি কোণ প্রথম কোণের বিপ্রতীপ কোণ হয়ে থাকে।

এসো জেনে নেই।

বিপ্রতীপ কোণের ধর্ম

- প্রদত্ত আকৃতিতে $\angle PQS$ -এর বিপ্রতীপ কোণ কোনটি ?

  আকৃতিতে দেখানো অনুসারে $m\angle PQS = a$, $m\angle SQT = b$, $m\angle TQR = c$, $m\angle PQR = d$ ধরে নেই।



$\angle PQS$ ও $\angle SQT$ -এ দুটি রৈখিক যুগল কোণ।

$\therefore a + b = 180^\circ$

তেমনি $m\angle SQT$ ও $m\angle TQR$-এ দুটি রৈখিক যুগল কোণ

$\therefore b + c = 180^\circ$

$\therefore a + b = b + c$

$\therefore a = c$ . . . . (উভয় পক্ষ থেকে b বিয়োগ করে)

$\therefore \angle PQS$ ও $\angle TQR$ এদের মাপ সমান অর্থাৎ এই কোণ দুটি সর্বসম।

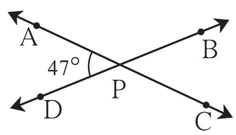
তদানুসারে $m\angle PQR = m\angle SQT$ অতএব $\angle PQR$ ও $\angle SQT$ সর্বসম।

আমি এটা বুঝতে পেরেছি।

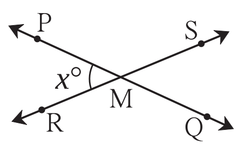
- দুটি রেখা একে অপরকে ছেদ করলে তৈরি হওয়া পরস্পর বিপ্রতীপ কোণের মাপ সমান হয়ে থাকে।

অনুশীলনী-20

1. রেখা AC ও রেখা BD পরস্পরে 'P' বিন্দুতে ছেদ করে। $m\angle APD = 47^\circ$, $\angle APB$, $\angle BPC$, $\angle CPD$ এর মাপ লেখো।

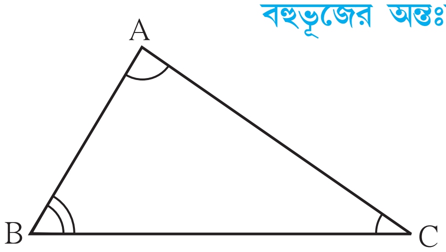


2. রেখা PQ ও রেখা RS পরস্পরে M বিন্দুতে ছেদ করে। $m\angle PMR = x^\circ$, $\angle PMS$, $\angle SMQ$ ও $\angle QMR$ এর মাপ লেখো।



এসো জেনে নেই।

বহুভূজের অন্তঃস্থ কোণ (Interior angles of a polygon)

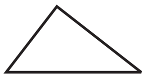
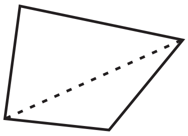
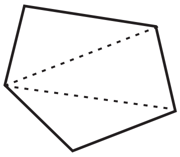
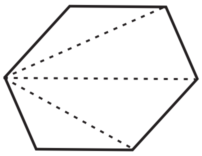
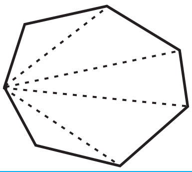


ত্রিভূজের অন্তঃস্থ কোণ

ΔABC-এর $\angle A$, $\angle B$ ও $\angle C$ অন্তঃস্থ কোণ।

- $m\angle ABC + m\angle BAC + m\angle ACB = \square^\circ$

নিচের তালিকার নিরীক্ষণ করো ও উপসংহার প্রাপ্ত করো।

ভূজার সংখ্যা	বহুভূজের নাম	বহুভূজাকৃতি	ত্রিভূজের সংখ্যা	অন্তঃস্থ কোণের যোগ
3	ত্রিভূজ		1	$180^\circ \times 1 = \square$
4	চতুর্ভূজ		2	$180^\circ \times 2 = \square$
5	পঞ্চভূজ		3	$180^\circ \times 3 = \square$
6	ষড়ভূজ		4	$180^\circ \times \square = \square$
7	সপ্তভূজ		5	
8	অষ্টভূজ		6	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
n	n ভূজা যুক্ত বহুভূজ		(n - 2)	$180^\circ \times (n - 2)$

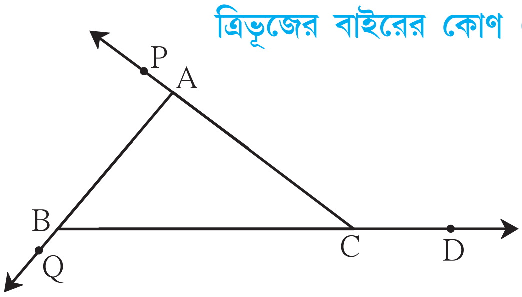
লক্ষ্য করো, উপরে দেওয়া তালিকা অনুসারে বহুভূজে তৈরি ত্রিভূজের সংখ্যা ও বহুভূজের ভূজার সংখ্যায় দুইয়ের পার্থক্য।

আমি এটা বুঝতে পেরেছি।

- n ভূজা যুক্ত বহুভূজের অন্তঃস্থ কোণের মাপের যোগফল = $180^\circ \times (n - 2)$

এসো জেনে নেই।

ত্রিভূজের বাইরের কোণ (Exterior angle of a triangle)



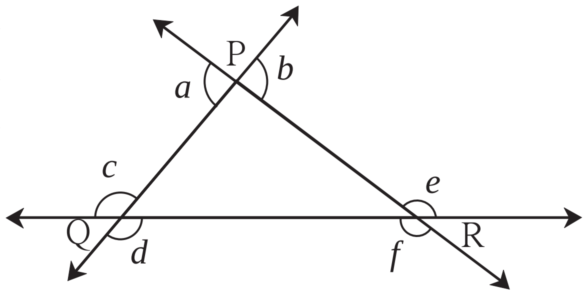
ΔABC তে ভূজা BC কে ছবিতে দেখানো অনুসারে বাড়িয়ে দিলে, $\angle$ACD একটি নতুন কোণ ত্রিভূজের বাইরে তৈরি হয়।

$\angle$ACD এটা ΔABC -এর বাইরের কোণ। $\angle$ACD ও $\angle$ACB দুটি রৈখিক যুগল কোণ। $\angle$PAB ও $\angle$QBC এ দুটিও ΔABC-এর বাইরের কোণ।

আমি এটা বুঝতে পেরেছি।

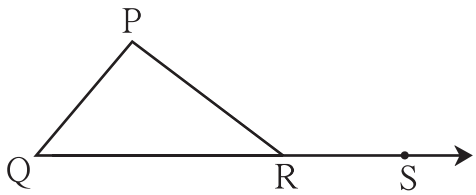
- ত্রিভূজের একটি বাহুকে বাড়িয়ে দিলে যে কোণটি ত্রিভূজের সন্নিহিত অন্তঃস্থ কোণের সাথে রৈখিক যুগল কোণ তৈরি করে, সেই কোণটিকে ত্রিভূজের বাইরের কোণ বলা হয়।

উদা. পাশে দেওয়া ছবিতে ত্রিভূজের বাইরের কোণ দেখানো হয়েছে। *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f* এগুলি ΔPQR-এর বাইরের কোণ। প্রতিটি ত্রিভূজের এইরূপ ছয়টি বাইরের কোণ হয়ে থাকে।



এসো জেনে নেই।

বাইরের কোণের ধর্ম



পাশে দেওয়া ছবিতে $\angle$PRS টি ΔPQR-এর একটি বাইরের কোণ। $\angle$PRQ টি তার সন্নিহিত বাইরের কোণ। অন্য দুটি বাইরের কোণ অর্থাৎ $\angle$P ও $\angle$Q দুটি $\angle$PRS থেকে একটু দূরে আছে। সুতরাং $\angle$P কে $\angle$Q -এর $\angle$PRS দূরস্ত বাইরের কোণ বলা হয়।

$m\angle P + m\angle Q + m\angle PRQ = \square^\circ$ ………… (ত্রিভূজের তিনটি কোণের সমষ্টি)

$m\angle PRS + m\angle PRQ = \square^\circ$ ………… (রৈখিক যুগল কোণ)

$\therefore\ m\angle P + m\angle Q + m\angle PRQ = m\angle PRS + m\angle PRQ$

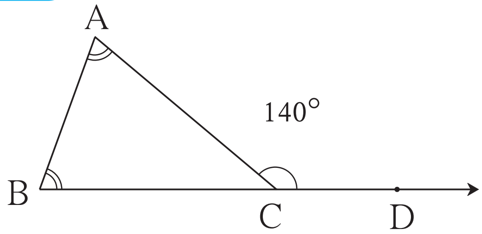
$\therefore\ m\angle P + m\angle Q = m\angle PRS$ (উভয় পক্ষ থেকে $m\angle PRQ$ বিয়োগ করে)

আমি এটা বুঝতে পেরেছি।

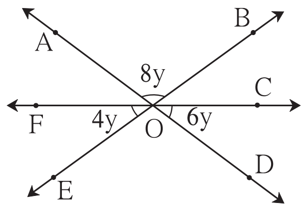
- ত্রিভুজের বাইরের কোণের মাপ সেই কোণের দূরস্ত অন্তঃস্থ কোণের মাপের যোগফলের সমান হয়ে থাকে।

অনুশীলনী-21

1. $\angle ACD$ টি ΔABC -এর বাইরের কোণ। $\angle A$ ও $\angle B$ -এর মাপ একই সমান। যদি $m\angle ACD = 140^\circ$ তাহলে $\angle A$ ও $\angle B$ -এর মাপ বের করো।



2. পাশের ছবিতে দেওয়া কোণের মাপ দেখে অবশিষ্ট তিনটি কোণের মাপ লেখো।



3* ΔABC এই সমদ্বিবাহু ত্রিভূজে $\angle A$ ও $\angle B$ -এর মাপ সমান। $\angle ACD$ টি ΔABC -এর বাইরের কোণ। $\angle ACB$ ও $\angle ACD$ -এর মাপ ক্রমানুসারে $(3x - 17)^\circ$ ও $(8x + 10)^\circ$ তবে, $\angle ACB$ ও $\angle ACD$ -এর মাপ বের করো। ঠিক তেমনি $\angle A$ ও $\angle B$ -এর মাপ বের করো।

ICT Tools or Links

- Geogebra এর সাহায্যে একই আরম্ভ বিন্দু যার এমন দুটি রশ্মি আঁকো। Move Options এর ব্যবহার করে রশ্মিটি ঘোরাও । এক বিশিষ্ট স্থিতিতে বিপরীত রশ্মি তৈরি হয়, তার যাচাই করো।
- রৈখিক যুগল কোণ তৈরি করো। সাধারণ ভূজা Move করে ভিন্ন-ভিন্ন রৈখিক যুগল কোণের জোড়া তৈরি করো।
- Geogebra মধ্যে Playgon Tools-এর ব্যবহার করে বিবিধ বহুভূজাকৃতি আঁকো ও তার অন্তঃস্থ কোণের মাপের ধর্মের যাচাই করো।

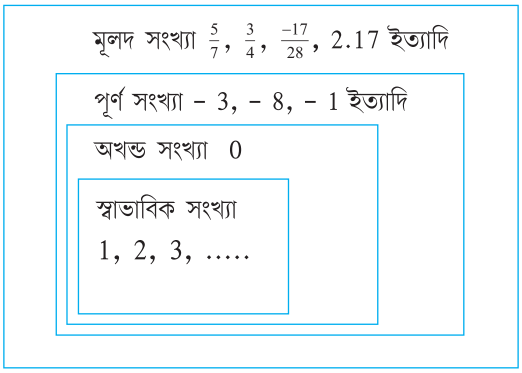
5 মূলদ সংখ্যা ও তার উপর ক্রিয়া

এসো জেনে নেই।

মূলদ সংখ্যা (Rational numbers)

পূর্ব শ্রেণীতে আমরা 1, 2, 3, 4, ... গণন সংখ্যা অর্থাৎ স্বাভাবিক সংখ্যা অধ্যয়ন করেছি। স্বাভাবিক সংখ্যা, শূন্য এবং স্বাভাবিক সংখ্যার বিপরীত সংখ্যা মিলে পূর্ণ সংখ্যা সমূহ হয়, তা আমাদের জানা আছে। তেমনি $\frac{7}{11}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{1}{7}$ এমন ভগ্নাংশও আমাদের জানা আছে। পূর্ণ সংখ্যা ও ভগ্নাংশ সংখ্যা সম্মিলিত কোনো সংখ্যা সমূহ আছে কি? তাহার চিন্তন করি।

$4 = \frac{12}{3}$, $7 = \frac{7}{1}$, $-3 = \frac{-3}{1}$, $0 = \frac{0}{2}$ এইভাবে সব পূর্ণসংখ্যা আমরা $\frac{m}{n}$ রূপে লিখতে পারি, এটাও আমাদের জানা আছে। যদি m যে কোনো একটি পূর্ণসংখ্যা এবং n যে কোনো একটি শূন্যত্তর পূর্ণ সংখ্যা হয় তাহলে $\frac{m}{n}$ এই সংখ্যাটিকে মূলদ সংখ্যা বলা হয়। এমন মূলদ সংখ্যার সমূহ প্রদত্ত সর্ব প্রকারের সংখ্যায় সমাবেশ হয়।



নিচের তালিকা পূর্ণ করো।

	-3	$\frac{3}{5}$	-17	$-\frac{5}{11}$	5
স্বাভাবিক সংখ্যা	×				✓
পূর্ণ সংখ্যা	✓				
মূলদ সংখ্যা	✓				

মূলদ সংখ্যার উপর ক্রিয়া

মূলদ সংখ্যা একটি লব এবং হর ব্যবহার করে ভগ্নাংশ রূপে লেখা যায়। অর্থাৎ মূলদ সংখ্যার উপর ক্রিয়া এটা ভগ্নাংশের উপর ক্রিয়া করার ন্যায় হয়ে থাকে।

(1) $\frac{5}{7} + \frac{9}{11} = \frac{55+63}{77} = \frac{118}{77}$

(2) $\frac{1}{7} - \frac{3}{4} = \frac{4-21}{28} = \frac{-17}{28}$

(3) $2\frac{1}{7} + 3\frac{8}{14} = \frac{15}{7} + \frac{50}{14}$

$= \frac{30}{14} + \frac{50}{14}$

$= \frac{80}{14} = \frac{40}{7}$

(4) $\frac{9}{13} \times \frac{4}{7} = \frac{9\times4}{13\times7} = \frac{36}{91}$

(5) $\frac{3}{5} \times \frac{(-4)}{5} = \frac{3\times(-4)}{5\times5} = \frac{-12}{25}$

(6) $\frac{9}{13} \times \frac{26}{3} = \frac{3\times2}{1} = \frac{6}{1}$

একটু স্মরণ করি।

একটি সংখ্যাকে অন্য সংখ্যা দ্বারা ভাগ করা অর্থাৎ এই সংখ্যাটিকে অন্যের গুণগত বিপরীত দ্বারা গুণ করা।

আমরা দেখেছি যে, $\frac{5}{6}$ ও $\frac{6}{5}$, $\frac{2}{11}$ ও $\frac{11}{2}$ হল গুণগত বিপরীত সংখ্যার জোড়া।

তদানুসারে, $\left(\frac{-5}{4}\right) \times \left(\frac{-4}{5}\right) = 1$; $\left(\frac{-7}{2}\right) \times \left(\frac{-2}{7}\right) = 1$ এইভাবে $\left(\frac{-5}{4}\right)$ ও $\left(\frac{-4}{5}\right)$ এবং $\left(\frac{-7}{2}\right)$ ও $\left(\frac{-2}{7}\right)$ এবং $\frac{-5}{4}$ ও $\frac{-4}{5}$ এগুলি গুণগত বিপরীত সংখ্যার জোড়া। অর্থাৎ $\frac{-7}{2}$ ও $\frac{-2}{7}$ এরাও একে-অপরের গুণগত বিপরীত।

যত্ন নেবেন !

উদা. $\frac{-11}{9}$ ও $\frac{9}{11}$ এর গুণফল -1 হয়। অর্থাৎ $\frac{-11}{9}$, $\frac{9}{11}$ এটি গুণগত বিপরীতের জোড়া **নয়**।

এসো, চর্চা করি।

আমরা বিভিন্ন সংখ্যা সমূহের বৈশিষ্ট্যগুলি দেখি। তাহার জন্য সমূহে চর্চা করে নিচের তালিকাটি পূর্ণ করো। স্বাভাবিক সংখ্যা সমূহ, পূর্ণ সংখ্যা সমূহ এবং মূলদ সংখ্যা সমূহের বিবেচনা করি। এই প্রত্যেক সংখ্যা সমূহের সামনে যোগ, বিয়োগ, গুণ এবং ভাগের ক্রিয়াকলাপ সম্পাদনের পরে (✓) অথবা (×) এই চিহ্ন দ্বারা দেখাবে। মনে রাখবে শূন্য দিয়ে ভাগ করা যায় না।

- স্বাভাবিক সংখ্যা যোগ করলে তাদের যোগফল সর্বদা একটি স্বাভাবিক সংখ্যাই পাওয়া যায়। অর্থাৎ স্বাভাবিক সংখ্যা সমূহের সামনে যোগ এই চৌকটের নিচে (✓) এমন চিহ্ন দাও।
- দুইটি স্বাভাবিক সংখ্যার বিয়োগ করলে বিয়োগফল সবসময় একটি স্বাভাবিক সংখ্যা হবে এমন নয়। কারণ $7 - 10 = -3$ এরকম অনেক উদাহরণ আছে। অতএব বিয়োগের চৌকটে (×) এমন চিহ্ন দাও। তালিকায় (×) এই চিহ্ন আসলে তাহার কারণ স্পষ্ট করো। উদাহরণ (×) এর কারণ দেওয়ার সময় অসংখ্য উদাহরণের মধ্যে শুধুমাত্র একটি দেওয়া যথেষ্ট।

সংখ্যাসমূহ	যোগ	বিয়োগ	গুণ	ভাগ
স্বাভাবিক সংখ্যা	✓	× $(7 - 10 = -3)$	✓	× $(3 \div 5 = \frac{3}{5})$
পূর্ণ সংখ্যা				
মূলদ সংখ্যা				

আমি এটা বুঝতে পেরেছি।

- স্বাভাবিক সংখ্যা সমূহ, যোগ এবং গুণ ক্রিয়ার জন্য যথেষ্ট, কিন্তু বিয়োগ এবং ভাগ ক্রিয়ার জন্য যথেষ্ট নয়, অর্থাৎ দুইটি স্বাভাবিক সংখ্যার বিয়োগ এবং ভাগ এটা স্বাভাবিক সংখ্যা হতে পারে এমন নয়।
- পূর্ণ সংখ্যা সমূহ যোগ, বিয়োগ, গুণ এবং ভাগ এই ক্রিয়া করার জন্য যথেষ্ট কিন্তু শূন্য দিয়ে ভাগ করা যথেষ্ট নয়।
- মূলদ সংখ্যা যোগ, বিয়োগ, গুণ এবং ভাগ এই ক্রিয়া করার জন্য যথেষ্ট কিন্তু শূন্য দিয়ে ভাগ করা যথেষ্ট নয়।

অনুশীলনী-22

1. নিম্নলিখিত মূলদ সংখ্যার যোগ করো।

(i) $\frac{5}{36} + \frac{6}{42}$ (ii) $1\frac{2}{3} + 2\frac{4}{5}$ (iii) $\frac{11}{17} + \frac{13}{19}$ (iv) $2\frac{3}{11} + 1\frac{3}{77}$

2. নিম্নলিখিত মূলদ সংখ্যার বিয়োগ করো।

(i) $\frac{7}{11} - \frac{3}{7}$ (ii) $\frac{13}{36} - \frac{2}{40}$ (iii) $1\frac{2}{3} - 3\frac{5}{6}$ (iv) $4\frac{1}{2} - 3\frac{1}{3}$

3. নিম্নলিখিত মূলদ সংখ্যার গুণ করো।

(i) $\frac{3}{11} \times \frac{2}{5}$ (ii) $\frac{12}{5} \times \frac{4}{15}$ (iii) $\frac{(-8)}{9} \times \frac{3}{4}$ (iv) $\frac{0}{6} \times \frac{3}{4}$

4. গুণগত বিপরীত সংখ্যা লেখো।

(i) $\frac{2}{5}$ (ii) $\frac{-3}{8}$ (iii) $\frac{-17}{39}$ (iv) 7 (v) $-7\frac{1}{3}$

5. নিম্নলিখিত মূলদ সংখ্যার ভাগ করো।

(i) $\frac{40}{12} \div \frac{10}{4}$ (ii) $\frac{-10}{11} \div \frac{-11}{10}$ (iii) $\frac{-7}{8} \div \frac{-3}{6}$ (iv) $\frac{2}{3} \div (-4)$

(v) $2\frac{1}{5} \div 5\frac{3}{6}$ (vi) $\frac{-5}{13} \div \frac{7}{26}$ (vii) $\frac{9}{11} \div (-8)$ (viii) $5 \div \frac{2}{5}$

এসো জেনে নেই।

মূলদ সংখ্যার অন্তর্নিহিত সংখ্যা

- 2 থেকে 9 এর স্বাভাবিক সংখ্যার অন্তর্নিহিত কয়টি স্বাভাবিক সংখ্যা আছে? তাহা লেখো।
- − 4 থেকে 5 এর অন্তর্নিহিত কয়টি পূর্ণ সংখ্যা? তাহা লেখো।
- $\frac{1}{2}$ এবং $\frac{3}{4}$ এর অন্তর্নিহিত কোনটি মূলদ সংখ্যা হতে পারে?

উদা. $\frac{1}{2}$ এবং $\frac{4}{7}$ এই মূলদ সংখ্যার অন্তর্নিহিত সংখ্যা খোঁজ করি। এইজন্য, এই সংখ্যাকে সমহর রূপে পরিণত করবো।

$$\frac{1}{2} = \frac{1\times 7}{2\times 7} = \frac{7}{14}, \qquad \frac{4}{7} = \frac{4\times 2}{7\times 2} = \frac{8}{14}$$

7 এবং 8 ক্রমিক স্বাভাবিক সংখ্যা। কিন্তু $\frac{7}{14}$ এবং $\frac{8}{14}$ এটা ক্রমিক মূলদ সংখ্যা আছে কি?

যে কোনো মূলদ সংখ্যার হর বড় করা যায়। সেই ধাপে লবও বৃদ্ধি পায়।

$$\frac{7}{14} = \frac{70}{140}, \qquad \frac{8}{14} = \frac{80}{140}$$ . . . (লব এবং হরকে 10 দিয়ে গুণ করে)

এখন $\frac{70}{140} < \frac{71}{140} \ldots\ldots < \frac{79}{140} < \frac{80}{140}$ এখানে $\frac{7}{14}$ এবং $\frac{8}{14}$ এর অন্তর্নিহিত কয়টি সংখ্যা পাওয়া গিয়েছে?

তেমনই $\frac{7}{14} = \frac{700}{1400}$, $\frac{8}{14} = \frac{800}{1400}$ . . . (লব এবং হর কে 100 দিয়ে গুণ করে)

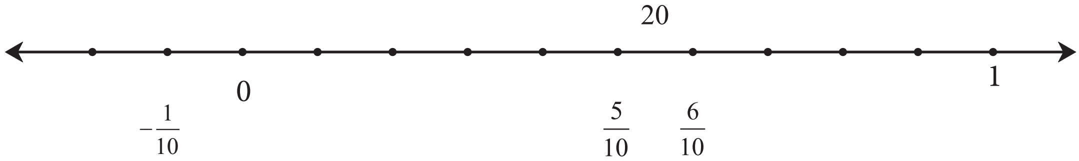
অর্থাৎ $\frac{700}{1400} < \frac{701}{1400} \ldots\ldots < \frac{799}{1400} < \frac{800}{1400}$

তদানুসারে মূলদ সংখ্যার পরিবর্তন অধিকাধিক বড় হরযুক্ত সম মূল্য সংখ্যায় করাতে তাদের মধ্যে অধিকাধিক মূলদ সংখ্যা প্রকাশ করা যায়।

উদা. $\frac{1}{2}$ এবং $\frac{3}{5}$ –এই মূলদ সংখ্যা দুটি অন্তর্নিহিত সংখ্যার খোঁজ করা,

$\frac{1}{2}$ এবং $\frac{3}{5}$ এর মূলদ সংখ্যাকে প্রথম সমহর রূপ দেই।

যেমন $\frac{1}{2} = \frac{5}{10}$, $\frac{3}{5} = \frac{6}{10}$



সংখ্যা রেখাতে $\frac{5}{10}$, $\frac{6}{10}$ সংখ্যাগুলি প্রদর্শিত করার জন্য বিন্দু দেওয়া আছে। তাদের সংযুক্তে তৈরি রেখাংশের মধ্য বিন্দু খোঁজ করি ও বিন্দুটি নির্দিষ্ট করা সংখ্যাটি দেখি।

$\frac{1}{2}\left(\frac{5}{10}+\frac{6}{10}\right) = \frac{11}{20}$ এখন বিন্দু উক্ত রেখাংশের মধ্যবিন্দু।

কারণ, $\frac{6}{10} - \frac{11}{20} = \frac{12-11}{20} = \frac{1}{20}$ তেমনি $\frac{11}{20} - \frac{5}{10} = \frac{11-10}{20} = \frac{1}{20}$

$\therefore$ $\frac{5}{10}$ এবং $\frac{6}{10}$ এদের অন্তর্নিহিত ঠিক মধ্যভাগে $\frac{11}{20}$ এই সংখ্যা অবস্থিত। অর্থাৎ $\frac{1}{2}$ ও $\frac{3}{5}$ এদের অন্তর্নিহিত $\frac{11}{20}$ এই সংখ্যাটি তদানুসারে $\frac{1}{2}$ ও $\frac{11}{20}$ এবং $\frac{11}{20}$ ও $\frac{3}{5}$ এদের অন্তর্নিহিত সংখ্যা খোঁজ করা যাবে।

আমি এটা বুঝতে পেরেছি।

- দুইটি মূলদ সংখ্যার অন্তর্নিহিত অসংখ্য মূলদ সংখ্যা থাকে।

অনুশীলনী-23

⊙ নিচের দুটি সংখ্যার অন্তর্নিহিত তিনটি মূলদ সংখ্যা লেখো।

(i) $\frac{2}{7}$, $\frac{6}{7}$ (ii) $\frac{4}{5}$, $\frac{2}{3}$ (iii) $-\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$ (iv) $\frac{7}{9}$, $-\frac{5}{9}$

(v) $\frac{-3}{4}$, $\frac{+5}{4}$ (vi) $\frac{7}{8}$, $\frac{-5}{3}$ (vii) $\frac{5}{7}$, $\frac{11}{7}$ (viii) 0, $\frac{-3}{4}$

✸ **অধিক তথ্যের জন্য**

যদি m একটি পূর্ণসংখ্যা হয়, তাহলে $m+1$ এই সংখ্যাটি তার ক্রমিক বড় পূর্ণসংখ্যা m এবং $m+1$ এর অন্তর্নিহিত কোনো পূর্ণসংখ্যা নেই। ক্রমাগত না থাকা যেকোনো দুটি পূর্ণসংখ্যার অন্তর্নিহিত পূর্ণসংখ্যা প্রাপ্ত করা যায়, তাহা অনুভব করো। অথচ যে কোনো দুটি মূলদ সংখ্যার অন্তর্নিহিত অসংখ্য মূলদ সংখ্যা থাকে।

একটু স্মরণ করি।

দশমিক ভগ্নাংশের গুণ ও ভাগ কিরূপ করা হয় তা আমরা দেখেছি।

$$\frac{35.1}{10} = 35.1 \times \frac{1}{10} = \frac{351}{10} \times \frac{1}{10} = \frac{351}{100} = 3.51$$

$$\frac{35.1}{100} = \frac{35.1}{1} \times \frac{1}{100} = \frac{351}{10} \times \frac{1}{100} = \left(\frac{351}{1000}\right) = 0.351$$

$$35.1 \times 10 = \frac{351}{10} \times 10 = 351.0$$

$$35.1 \times 1000 = \frac{351}{10} \times 1000 = \left(\frac{351000}{10}\right) = 35100.0$$

এই থেকে বোধ হয় যে, দশমিক ভগ্নাংশকে 100 দিয়ে ভাগ করা অর্থাৎ দশমিক বিন্দু 2 ঘর বামদিকে নেওয়া। 1000 দিয়ে গুণ করা অর্থাৎ দশমিক চিহ্ন তিন ঘর ডানদিকে নেওয়া। এমন ভাগ ও গুণ করার সময় নিম্ন নিয়মের প্রয়োজন পড়ে।

দশমিক ভগ্নাংশের ভগ্নাংশ ভাগের পরে যতটা শূন্য লেখা হয় না কেনো অথবা পূর্ণ ভাগের আগে যতটা শূন্য লেখা হয় না কেনো দশমিক ভগ্নাংশের মূল্যে বদল হয় না।

$$1.35 = \frac{135}{100} \times \frac{100}{100} = \frac{13500}{10000} = 1.3500$$

$0.35 = \frac{35}{100} \times \frac{1000}{1000} = \frac{35000}{100000} = 0.35000$ ইত্যাদি।

$1.35 = 001.35$ এদের প্রয়োজন কি করে হবে তাহা দেখো।

$$\frac{1.35}{100} = \frac{001.35}{100} = 0.0135$$

এসো জেনে নেই।

মূলদ সংখ্যার দশমিক রূপ (Decimal representation of rational numbers)

উদা. $\frac{7}{4}$ এটি মূলদ সংখ্যা দশমিক রূপে লেখো।

(1) $7 = 7.0 = 7.000$ (ভগ্নাংশের ভাগ করার পর অসংখ্য শূন্য দেওয়া যায়।)

$$\begin{array}{r} 1.75 \\ 4\overline{)7.000} \\ -4 \\ \hline 30 \\ -28 \\ \hline 20 \\ -20 \\ \hline 00 \end{array}$$

(2) 7 কে 4 দিয়ে ভাগ করলে ভাগফল 1 ও অবশিষ্ট 3 থাকে। এখন 1 এই পূর্ণ সংখ্যার পরে দশমিক চিহ্ন লিখবো। অবশিষ্ট 3 এরপর ভাজ্যের 0 নামিয়ে 30 কে 4 দিয়ে ভাগ করবো। এখন প্রাপ্ত ভাগফল এটি ভগ্নাংশ ভাগ আছে। অর্থাৎ ভাগে দশমিক চিহ্নের পর 7 লিখবো। এখন ভাজ্যের থেকে আরও 0 নামিয়ে ভাগফল পূর্ণ করি।

এই ভাগক্রিয়ায় দশমিক ভগ্নাংশের ভগ্ন অংশের পরে শূন্যের ব্যবহার করা হয়েছে।

উদা. $2\frac{1}{5}$ দশমিক রূপে লেখো।

$2\frac{1}{5} = \frac{11}{5}$ এর দশমিক রূপ তিন প্রকারে খোঁজ করি।

$\frac{1}{5}$ কে দশমিক রূপে লেখো।

(I)

$$\begin{array}{r} 0.2 \\ 5\overline{)1.0} \\ -0 \\ \hline 10 \\ -10 \\ \hline 00 \end{array} \qquad \frac{1}{5} = 0.2$$

$\therefore 2\frac{1}{5} = 2.2$

(II)

$$\begin{array}{r} 2.2 \\ 5\overline{)11.000} \\ -10 \\ \hline 010 \\ -10 \\ \hline 00 \end{array}$$

(III)

$$\frac{11}{5} = \frac{11\times 2}{5\times 2} = \frac{22}{10} = 2.2$$

$$\frac{11}{5} = 2.2$$

উদা. $\frac{-5}{8}$ এই মূলদ সংখ্যাকে দশমিক রূপে লেখো।

$\frac{5}{8}$ কে দশমিক রূপে ভাগ করে 0.625 পাওয়া যায়। $\therefore \frac{-5}{8} = -0.625$

উপরের সকল উদাহরণে শেষফল শূন্য এসেছে। ভাগক্রিয়া পূর্ণ হয়েছে। মূলদ সংখ্যার এমন দশমিক রূপকে খন্ডিত দশমিক রূপ বলা হয়।

উদা. কিছু মূলদ সংখ্যার দশমিক রূপ একটু ভিন্ন-ভিন্ন, তাহা দেখবো।

(i) $\frac{5}{3}$ এই সংখ্যা দশমিক রূপে লেখো।

$$\begin{array}{r|l} & 1.66 \\ 3 & 5.00 \\ - & 3 \\ \hline & 20 \\ - & 18 \\ \hline & 20 \\ - & 18 \\ \hline & 2 \end{array}$$

$\therefore \frac{5}{3} = 1.666.......$

$\therefore \frac{5}{3} = 1.\dot{6}$

(ii) $\frac{2}{11}$ এই সংখ্যা দশমিক রূপে লেখো।

$$\begin{array}{r|l} & 0.18 \\ 11 & 2.00 \\ - & 0 \\ \hline & 20 \\ - & 11 \\ \hline & 90 \\ - & 88 \\ \hline & 20 \end{array}$$

$\therefore \frac{2}{11} = 0.1818.......$

$\therefore \frac{2}{11} = 0.\overline{18}$

(iii) $2\frac{1}{3}$ এই সংখ্যা দশমিক রূপে লেখো। $2\frac{1}{3} = \frac{7}{3}$

$$\begin{array}{r|l} & 2.33 \\ 3 & 7.00 \\ - & 6 \\ \hline & 10 \\ - & 9 \\ \hline & 10 \\ - & 9 \\ \hline & 01 \end{array}$$

$2\frac{1}{3} = 2.33...$

$\therefore 2\frac{1}{3} = 2.\dot{3}$

(iv) $\frac{5}{6}$ এই সংখ্যা দশমিক রূপে লেখো।

$$\begin{array}{r|l} & 0.833 \\ 6 & 50 \\ - & 48 \\ \hline & 020 \\ - & 18 \\ \hline & 020 \\ - & 18 \\ \hline & 02 \end{array}$$

$\frac{5}{6} = 0.833...$

$\therefore \frac{5}{6} = 0.8\dot{3}$

উপরের সমস্ত উদাহরণে ভাগের ক্রিয়া পূর্ণ হয়নি। **দশমিক চিহ্নের ডান পাশে একটি অঙ্ক অথবা কিছু অঙ্কের সমূহ বারম্বার আসে। এমন ভগ্নাংশকে পুনরাবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশ বলে।**

যে দশমিক ভগ্নাংশে দশমিক চিহ্নের ডানপাশে একই অঙ্ক বারম্বার আসে, সেখানে বিন্দু লাগানো হয়, যেমন, $2\frac{1}{3} = 2.33... = 2.\dot{3}$ তেমনি দশমিক চিহ্নের ডানপাশের অঙ্কের সমূহ বারম্বার আসে এবং সমূহে অনুভূমিক সরল রেখা দেওয়া হয়। যেমন $\frac{2}{11} = 0.1818........ = 0.\overline{18}$ এবং $\frac{5}{6} = 0.8\dot{3}$

আমি এটা বুঝতে পেরেছি।

> কিছু মূলদ সংখ্যার দশমিক রূপ খন্ডিত হয় এবং
> কিছু মূলদ সংখ্যার দশমিক রূপ পুনরাবৃত্ত হয়।

এসো চর্চা করি।

- ভাগক্রিয়া না করে, কোন হরযুক্ত মূলদ সংখ্যাকে খণ্ডিত রূপ ও দশমিক রূপে লেখা যায় তাহা জ্ঞাত করো।

অনুশীলনী-24

⊙ নিম্নলিখিত মূলদ সংখ্যা দশমিক রূপে লেখো।

(i) $\frac{13}{4}$ (ii) $\frac{-7}{8}$ (iii) $7\frac{3}{5}$ (iv) $\frac{5}{12}$ (v) $\frac{22}{7}$ (vi) $\frac{4}{3}$ (vii) $\frac{7}{9}$

এসো, চর্চা করি।

যোগ, বিয়োগ, গুণ এবং ভাগ এই চিহ্নের ব্যবহার করে লিখিত সংখ্যার বিন্যাশকে পদাবলী বলে।

$72 \div 6 + 2 \times 2$ এই পদাবলী হল করে উত্তর নির্ধারণ করো।

হৌসার পদ্ধতি

$72 \div 6 + 2 \times 2$

$= 12 + 2 \times 2$

$= 12 + 4$

$= 16$

মঙ্গরুর পদ্ধতি

$72 \div 6 + 2 \times 2$

$= 12 + 2 \times 2$

$= 14 \times 2$

$= 28$

দুটি উত্তর ভিন্ন ভিন্ন এসেছে। কারণ দুজনেই ভিন্ন-ভিন্ন ক্রমে ক্রিয়া করেছে। এই অনুসারে ক্রিয়ার ক্রম ভিন্ন নিলে উত্তর ভিন্ন ভিন্ন আসে। এমন না হয় সেইজন্য ক্রিয়ার ক্রম নির্ধারণের কিছু নিয়ম করা হয়েছে। এই নিয়মের পালন করলে কেবল একটি উত্তর প্রাপ্ত হবে। সে নিয়ম দেখি। কখনও-কখনও যে ক্রিয়া প্রথম করতে হবে এমন অপেক্ষা করা হয়, এমন সময় পদাবলীতে বন্ধনী ব্যবহার করা হয়।

পদাবলী হল করার নিয়ম

(1) যদি পদাবলীতে একাধিক ক্রিয়া থাকে তবে প্রথমে গুণ ও ভাগ এই ক্রিয়া বাম পাশ থেকে ডান পাশে যথাক্রমে করবে।

(2) পরে যোগ ও বিয়োগ এই ক্রিয়া বাম পাশ থেকে ডান পাশে যথাক্রমে করবে।

(3) বন্ধনীতে এক থেকে বেশি ক্রিয়া থাকেল, উপরের উভয় নিয়মের পালন করে উপযুক্ত ক্রিয়া প্রথমে করবে।

উপরের নিয়মের ব্যবহার করে হৌসার পদ্ধতি ঠিক তাহা বোঝা যায়।

$\therefore 72 \div 6 + 2 \times 2 = 16$

নিচের পদাবলী হল করি।

উদা. $40 \times 10 \div 5 + 17$

$= 400 \div 5 + 17$

$= 80 + 17$

$= 97$

উদা. $80 \div (15 + 8 - 3) + 5$

$= 80 \div (23 - 3) + 5$

$= 80 \div 20 + 5$

$= 4 + 5$

$= 9$

উদা. $2 \times \{25 \times [(113 - 9) + (4 \div 2 \times 13)]\}$

$= 2 \times \{25 \times [104 + (4 \div 2 \times 13)]\}$

$= 2 \times \{25 \times [104 + (2 \times 13)]\}$

$= 2 \times \{25 \times [104 + 26]\}$

$= 2 \times \{25 \times 130\}$

$= 2 \times 3250$

$= 6500$

উদা. $\frac{3}{4} - \frac{5}{7} \times \frac{1}{3}$

$= \frac{3}{4} - \frac{5}{21}$ (প্রথমে গুণ)

$= \frac{3\times21-5\times4}{84}$ (তারপর বিয়োগ)

$= \frac{63-20}{84} = \frac{43}{84}$

মনে রেখো :
ক্রিয়ার ক্রম স্পষ্ট হওয়ার জন্য এক থেকে অধিক সময় বন্ধনীর ব্যবহার করা লাগে। তারজন্য প্রথম বন্ধনী ( ), দ্বিতীয় বন্ধনী [ ], তৃতীয় বন্ধনী { } ব্যবহার করা হয়।
বন্ধনী সমাধান করার সময় প্রথমে বন্ধনীর অন্তরের বন্ধনীটি সমাধান করবে এবং বাইরের বন্ধনীগুলি ক্রিয়া ক্রমাগত করবে।

অনুশীলনী-25

⦿ নিম্নলিখিত পদাবলী হল করো।

1. $50 \times 5 \div 2 + 24$
2. $(13 \times 4) \div 2 - 26$
3. $140 \div [(-11) \times (-3) - (-42) \div 14 - 1)]$
4. $\{(220 - 140) + [10 \times 9 + (-2 \times 5)]\} - 100$
5. $\frac{3}{5} + \frac{3}{8} \div \frac{6}{4}$

উপক্রম : চৌকটের অঙ্কের এবং চিহ্নের ব্যবহার করে এমন পদাবলী তৈরি করো, যার উত্তর 112 হয়।

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9	+ × ÷ −

✻ অধিক তথ্যের জন্য

পদাবলী সমাধানের জন্য চিহ্নের ক্রম

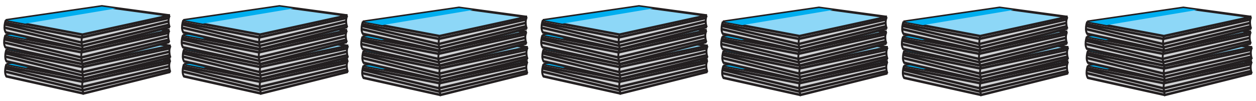
ব →	এ →	ভা →	গু →	যো →	বি
( )	×	÷	×	+	−
বন্ধনীর ক্রিয়া সর্বপ্রথম	এর গুণ উদা. 200 $\frac{1}{4}$ $= 200 \times \frac{1}{4}$	ভাগ	গুণ	যোগ	বিয়োগ

6 সূচক

একটু স্মরণ করি।

7 টি ছেলেদের প্রত্যেকে 4টি বই বিতরণ করা হল।

মোট খাতা = 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 = 28 খাতা



এখানে যোগক্রিয়া বহুবার করা হইছে।

একই সংখ্যার একাধিক বার যোগক্রিয়া কে গুণনক্রিয়া রূপেও দেখানো যায়।

মোট খাতা = 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 = 4 × 7 = 28

এসো বুঝে নেই।

নিধান এবং সূচক (Base and Index)

এখন 2 এই সংখ্যা অকাধিকবার নিয়ে গুণক্রিয়াকে ছোট করে কিভাবে দেখানো যায় তাহা দেখি।

2 × 2 × 2 × 2 × 2 × 2 × 2 × 2 এখানে 2 কে 8 বার নিয়ে গুণ করা হয়েছে।

উক্ত তথ্যকে সংক্ষেপে 2^8 এইরূপ লেখা হয়। এখানে 2^8 গুণক্রিয়ার সংক্ষিপ্ত রূপ।

তারমধ্যে 2 এটি **নিধান** এবং 8 এটি **সূচক**।

8 ⟵ সূচক

2 ⟵ নিধান

উদা. $5 \times 5 \times 5 \times 5 = 5^4$ এখানে 5^4 এটি সূচকযুক্ত সংখ্যা।

5^4 এই সূচক যুক্ত সংখ্যায় 5 এই সংখ্যা নিধান এবং 4 এই সংখ্যা সূচক।

এর পঠন '5-এর সূচক 4' অথবা '5-এর চতুর্থ ঘাত' এমন করে।

সাধারণত: a একটি সংখ্যা হলে, $a \times a \times a \times \ldots\ldots\ldots$ (m বার) $= a^m$

a^m -এর পঠন 'a -এর সূচক m' অথবা 'a -এর m তম ঘাত' এভাবে করে।

এখানে m এইটি স্বভাবিক সংখ্যা।

∴ $5^4 = 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 625$ অতএব 5^4 -এই সূচক যুক্ত সংখ্যার মূল্য 625।

তেমনি $\left[\frac{-2}{3}\right]^3 = \frac{-2}{3} \times \frac{-2}{3} \times \frac{-2}{3} = \frac{-8}{27}$ অর্থাৎ $\left[\frac{-2}{3}\right]^3$ -এর মূল্য $\frac{-8}{27}$

$7^1 = 7$, $10^1 = 10$ এটি লক্ষ্য করো। **যে কোনো সংখ্যার প্রথম ঘাত অর্থাৎ ওই সংখ্যাই হয়ে থাকে। কোনো সংখ্যার সূচক 1 থাকলে তাহা না লেখাই প্রচলন।** যেমন $5^1 = 5$, $a^1 = a$

অনুশীলনী-26

1. নিচের তালিকা পূর্ণ করো।

অ.ক্র	সূচক সংখ্যা	নিধান	সূচক	গুণ রূপ	মূল্য
(i)	3^4	3	4	$3 \times 3 \times 3 \times 3$	81
(ii)	16^3				
(iii)		(-8)	2		
(iv)				$\frac{3}{7} \times \frac{3}{7} \times \frac{3}{7} \times \frac{3}{7}$	$\frac{81}{2401}$
(v)	$(-13)^4$				

2. মূল্য বের করো।

(i) 2^{10} (ii) 5^3 (iii) $(-\ 7)^4$ (iv) $(-6)^3$ (v) 9^3

(vi) 8^1 (vii) $\left(\frac{4}{5}\right)^3$ (viii) $\left(-\frac{1}{2}\right)^4$

বর্গ এবং ঘনক (Square and cube)

$3^2 = 3 \times 3$

3^2 এর পঠন 3-এর দ্বিতীয় ঘাত অথবা 3-এর বর্গ এইভাবে করে।

$5^3 = 5 \times 5 \times 5$

5^3 -এর পঠন 5-এর তৃতীয় ঘাত অথবা 5-এর ঘন এইভাবে করে।

মনে রেখো :

যে কোনো সংখ্যার দ্বিতীয় ঘাত অর্থাৎ সেই সংখ্যার বর্গ হয়।

যে কোনো সংখ্যার তৃতীয় ঘাত অর্থাৎ সেই সংখ্যার ঘন হয়।

এসো জেনে নেই।

নিধান সমান থাকা সূচক সংখ্যার গুণক্রিয়া

উদা. $2^4 \times 2^3$

$= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$

$= 2^7$

তদানুসারে $2^4 \times 2^3 = 2^{4+3} = 2^7$

উদা. $(-\ 3)^2 \times (-\ 3)^3$

$= (-\ 3) \times (-\ 3) \times (-\ 3) \times (-\ 3) \times (-\ 3)$

$= (-\ 3)^5$

তদানুসারে $(-\ 3)^2 \times (-\ 3)^3 = (-\ 3)^{2+3} = (-\ 3)^5$

উদা. $\left(\frac{-2}{5}\right)^2 \times \left(\frac{-2}{5}\right)^3 = \left(\frac{-2}{5}\right) \times \left(\frac{-2}{5}\right) \times \left(\frac{-2}{5}\right) \times \left(\frac{-2}{5}\right) \times \left(\frac{-2}{5}\right) = \left(\frac{-2}{5}\right)^5$

তদানুসারে $\left(\frac{-2}{5}\right)^2 \times \left(\frac{-2}{5}\right)^3 = \left(\frac{-2}{3}\right)^{2+3} = \left(\frac{-2}{5}\right)^5$

আমি এটা বুঝতে পেরেছি।

- যদি a একটি মূলদ সংখ্যা হয় এবং m ও n ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা হয়, তাহলে $a^m \times a^n = a^{m+n}$

অনুশীলনী-27

সরল রূপ দাও।

(i) $7^4 \times 7^2$ (ii) $(-11)^5 \times (-11)^2$ (iii) $\left(\frac{6}{7}\right)^3 \times \left(\frac{6}{7}\right)^5$

(iv) $\left(-\frac{3}{2}\right)^5 \times \left(-\frac{3}{2}\right)^3$ (v) $a^{16} \times a^7$ (vi) $\left(\frac{P}{5}\right)^3 \times \left(\frac{P}{5}\right)^7$

এসো জেনে নেই।

একই নিধানের সাথে সূচকীয় সংখ্যার ভাগক্রিয়া

উদা. $6^4 \div 6^2 = ?$

$$\frac{6^4}{6^2} = \frac{6\times6\times6\times6}{6\times6}$$

$$= 6 \times 6$$

$$= 6^2$$

$$\therefore 6^4 \div 6^2 = 6^{4-2} = 6^2$$

উদা. $(-2)^5 \div (-2)^3 = ?$

$$\frac{(-2)^5}{(-2)^3} = \frac{(-2)\times(-2)\times(-2)\times(-2)\times(-2)}{(-2)\times(-2)\times(-2)}$$

$$= (-2)^2$$

$$\therefore (-2)^5 \div (-2)^3 = (-2)^2$$

আমি এটা বুঝতে পেরেছি।

যদি a শূন্যেত্তর মূলদ সংখ্যা, m এবং n ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা এবং $m > n$, হয়, তাহলে $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

a^0 এর অর্থ

a^{1} 0 এমন থাকলে

$\frac{a^m}{a^m} = 1$ তেমনি

$\frac{a^m}{a^m} = a^{m-m} = a^0$

$\therefore$ $\boxed{a^0 = 1}$

a^{-m} এর অর্থ

$$a^{-m} = a^{-m} \times 1$$

$$= a^{-m} \times \frac{a^m}{a^m}$$

$$= \frac{a^{-m+m}}{a^m}$$

$$= \frac{a^0}{a^m} = \frac{1}{a^m}$$

$$\boxed{a^{-m} = \frac{1}{a^m}}$$

$a^{-m} = \frac{1}{a^m}$ $\therefore$ $a^{-1} = \frac{1}{a}$

তেমনি $a \times \frac{1}{a} = 1$ অর্থাৎ $a \times a^{-1} = 1$

$\therefore$ a^{-1} এটি a এর

তেমনি $\frac{5}{3}$ গুণগত বিপরীত $\frac{3}{5}$

$\therefore$ $\boxed{\left(\frac{5}{3}\right)^{-1} = \frac{3}{5}}$

উদা. $\left(\frac{4}{7}\right)^{-3}$ -এর সূচকীয় সংখ্যা দেখো।

$$\left(\frac{4}{7}\right)^{-3} = \frac{1}{\frac{4}{7}\times\frac{4}{7}\times\frac{4}{7}} = \frac{1}{\frac{64}{343}} = \frac{343}{64} = \left(\frac{7}{4}\right)^{3}$$

আমি এটা বুঝতে পেরেছি।

- এই অনুসারে, $a \neq 0$, $b \neq 0$, এবং m এটা ধন পূর্ণ সংখ্যা থাকলে তবে $\left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\frac{b}{a}\right)^{m}$.

নিচের উদাহরণ নিরীক্ষণ করে কোন নিয়মটি পাওয়া যায় তাহা দেখি।

উদা. $(3)^4 \div (3)^6$

$$= \frac{3^4}{3^6}$$

$$= \frac{3\times3\times3\times3}{3\times3\times3\times3\times3\times3} = \frac{1}{3^2}$$

$\therefore\ 3^4 \div 3^6 = 3^{4-6} = 3^{-2}$

উদা. $\left(\frac{3}{5}\right)^{2} \div \left(\frac{3}{5}\right)^{5}$

$$= \frac{\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}}{\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}} = \frac{1}{\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}} = \frac{1}{\left(\frac{3}{5}\right)^{3}}$$

$$\therefore \left(\frac{3}{5}\right)^{2} \div \left(\frac{3}{5}\right)^{5} = \left(\frac{3}{5}\right)^{2-5} = \left(\frac{3}{5}\right)^{-3}$$

আমি এটা বুঝতে পেরেছি।

- যদি a একটি মূলদ সংখ্যা হয়, $a \neq 0$ এবং m ও n এটাও পূর্ণ সংখ্যা হয়, তবে $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

এসো জেনে নেই।

নিধান যদি (-1) এবং সূচক পূর্ণ সংখ্যা হয় তাহলে কি হবে তাহা দেখো।

$(-1)^6 = \underline{(-1)\times(-1)}\times\underline{(-1)\times(-1)}\times\underline{(-1)\times(-1)} = 1\times1\times1 = 1$

$(-1)^5 = \underline{(-1)\times(-1)}\times\underline{(-1)\times(-1)}\times(-1) = 1\times1\times(-1) = -1$

m যদি সম সংখ্যা থাকে তবে $(-1)^m = 1$ এবং m যদি বিষম সংখ্যা থাকে তবে $(-1)^m = -1$

অনুশীলনী-28

1. সরল রূপ দাও।

 (i) $a^6 \div a^4$ (ii) $m^5 \div m^8$ (iii) $p^3 \div p^{13}$ (iv) $x^{10} \div x^{10}$

2. মূল্য বের করো।

 (i) $(-7)^{12} \div (-7)^{12}$ (ii) $7^5 \div 7^3$ (iii) $\left(\frac{4}{5}\right)^{3} \div \left(\frac{4}{5}\right)^{2}$ (iv) $4^7 \div 4^5$

এসো জেনে নেই।

দুই সংখ্যার গুণফল ও ভাগফলের ঘাত

নিচের উদাহরণ নিরীক্ষণ করে কোন নিয়মটি পাওয়া যায় তাহা দেখি।

উদা. $(2 \times 3)^4$

$= (2 \times 3) \times (2 \times 3) \times (2 \times 3) \times (2 \times 3)$

$= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 2^4 \times 3^4$

উদা. $\left(\frac{4}{5}\right)^3$

$= \frac{4}{5} \times \frac{4}{5} \times \frac{4}{5}$

$= \frac{4 \times 4 \times 4}{5 \times 5 \times 5} = \frac{4^3}{5^3}$

আমি এটা বুঝতে পেরেছি।

যদি a ও b শূন্যেতর মূলদ সংখ্যা এবং m পূর্ণ সংখ্যা হয় তবে

(1) $(a \times b)^m = a^m \times b^m$ (2) $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$

$(a^m)^n$ অর্থাৎ সূচকের সংখ্যার ঘাত

উদা. $(5^2)^3$

$= 5^2 \times 5^2 \times 5^2$

$= 5^{2+2+2}$

$= 5^{2 \times 3}$

$= 5^6$

উদা. $(7^{-2})^{-5} = \frac{1}{(7^{-2})^5}$

$= \frac{1}{7^{-2} \times 7^{-2} \times 7^{-2} \times 7^{-2} \times 7^{-2}}$

$= \frac{1}{7^{(-2) \times 5}}$

$= \frac{1}{7^{-10}} = 7^{10}$

$a^{-m} = \frac{1}{a^m}$

উদা. $\left(\left(\frac{2}{5}\right)^{-2}\right)^3$

$= \left(\frac{2}{5}\right)^{-2} \times \left(\frac{2}{5}\right)^{-2} \times \left(\frac{2}{5}\right)^{-2} = \left(\frac{2}{5}\right)^{(-2)+(-2)+(-2)} = \left(\frac{2}{5}\right)^{-6}$

$(a^m)^n = a^m \times a^m \times a^m \times \ldots\ldots\ldots$ n বার $= a^{m+m+m \ldots\ldots\ldots}$ (n বার) $= a^{m \times n}$

উপরের উদাহরণ দেখে এই নিয়ম প্রাপ্ত হয়।

আমি এটা বুঝতে পেরেছি।

- যদি a শূন্যেতর মূলদ সংখ্যা ও m এবং n পূর্ণ সংখ্যা থাকে, তবে $(a^m)^n = a^{m \times n} = a^{mn}$

সূচকের নিয়ম

মনে রেখো :

যদি a এবং b শূন্যেতর মূলদ সংখ্যা, m, n পূর্ণ সংখ্যা হলে,

- $a^m \times a^n = a^{m+n}$
- $a^m \div a^n = a^{m-n}$
- $a^1 = a$
- $a^0 = 1$
- $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$
- $(ab)^m = a^m \times b^m$
- $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$
- $(a^m)^n = a^{mn}$
- $\left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\frac{b}{a}\right)^m$

অনুশীলনী-29

1. সরল রূপ দাও।

(i) $\left[\left(\frac{15}{12}\right)^3\right]^4$ (ii) $(3^4)^{-2}$ (iii) $\left(\left(\frac{1}{7}\right)^{-3}\right)^4$ (iv) $\left(\left(\frac{2}{5}\right)^{-2}\right)^{-3}$ (v) $(6^5)^4$

(vi) $\left[\left(\frac{6}{7}\right)^5\right]^2$ (vii) $\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{-4}\right]^5$ (viii) $\left[\left(\frac{5}{8}\right)^3\right]^{-2}$ (ix) $\left[\left(\frac{3}{4}\right)^6\right]^1$ (x) $\left[\left(\frac{2}{5}\right)^{-3}\right]^2$

2. নিম্নলিখিত সংখ্যা ধন সূচক ব্যবহার করে লেখো।

(i) $\left(\frac{2}{7}\right)^{-2}$ (ii) $\left(\frac{11}{3}\right)^{-5}$ (iii) $\left(\frac{1}{6}\right)^{-3}$ (iv) $(y)^{-4}$

গণিত আমার সাথী : বিজ্ঞানে, খগোল শাস্ত্রে।

(1) দশমিক পদ্ধতিতে সংখ্যা লিখতে 10-এর সূচকের বিশেষ ব্যবহার করা হয়। পৃথিবী এবং চন্দ্রের দূরত্ব 38,40,00,000 মিটার। 10-এর সূচক ব্যবহার করে এই দূরত্ব নিম্নপ্রকারে লেখা হয়।

$384\ 000\ 000 = 384 \times 10^6$

$38\ 4000000 = 38.4 \times 10^7$

$3\ 84000000 = 3.84 \times 10^8$ (প্রমাণিত রূপ)

(2) অক্সিজেনের অণুর ব্যাস মিমিতে নিচে দেওয়া।

$0.0000000000000356 = 3.56 \times 10^{-14}$

(3) নিচের সংখ্যা প্রমাণিত রূপে লেখার চেষ্টা করো।

সূর্যের ব্যাস 1400000000 মিটার।

প্রকাশের বেগ = 300000000 মিটার / সেকেন্ড।

(4) সংলগ্ন আকৃতিতে Googol এই সংখ্যা দেখানো হয়েছে। তাহা 10 এর সূচকের রূপে লেখার চেষ্টা করো।

যে কোনো খুবই বড় অথবা খুবই ছোট সংখ্যা লেখার সময় এক অংকীয় পূর্ণযুক্ত দশমিক ভগ্নাংশ সংখ্যা এবং 10-এর উচিৎ সূচক এদের গুণ করে লেখা হয়। একেই ওই সংখ্যাটির (Standard form) প্রমাণিত রূপ বলা হয়।

Googol

10000000000000000000000000
0000000000000000000000000
0000000000000000000000000
0000000000000000000000000

একটু স্মরণ করি।

পূর্ণ বর্গ সংখ্যার বর্গমূল নির্ণয় করো।

প্রদত্ত সংখ্যা যখন নিজেই গুণিত হয় তখন প্রাপ্ত গুণফল হল সেই সংখ্যার বর্গ।

উদা. $6 \times 6 = 6^2 = 36$

$6^2 = 36$ এর পঠন আমরা 6 এর বর্গ 36 এমন হয়।

উদা. $(-5) \times (-5) = (-5)^2 = 25$

$(-5)^2 = 25$ এর পঠন (-5) এর বর্গ 25, এমন হয়।

এসো জেনে নেই।

✱ প্রদত্ত সংখ্যার বর্গমূল নির্ণয় করা।

উদা. $3 \times 3 = 3^2 = 9$ এখানে 3 এর বর্গ 9

অথবা 9 এর বর্গমূল ও এই রূপে লিখতে পারি।

বর্গমূলের জন্য $\sqrt{\ }$ এই প্রতীকটি ব্যবহৃত করা হয়। $\sqrt{9}$ অর্থাৎ 9 এর বর্গমূল $\therefore \sqrt{9} = 3$।

উদা. $7 \times 7 = 7^2 = 49$ $\therefore \sqrt{49} = 7$

উদা. $8 \times 8 = 8^2 = 64$ এরূপ $\sqrt{64} = 8$

$(-8) \times (-8) = (-8)^2 = 64$ এরূপ 64 এর বর্গমূল -8 এমন প্রাপ্ত হয়।

যদি x একটি ধনাত্মক সংখ্যা হয়, তাহলে তার দুইটি বর্গমূল সংখ্যা হয়ে থাকে।

তাহা থেকে ঋণাত্মক বর্গমূলকে $-\sqrt{x}$ দিয়ে এবং ধনাত্মক বর্গমূলকে $\sqrt{x}$ চিহ্নের দ্বারা দেখানো হয়।

উদা. 81 এর বর্গমূল বের করো।

$81 = 9 \times 9 = -9 \times -9$ $\therefore \sqrt{81} = 9$ এবং $-\sqrt{81} = -9$

বেশিরভাগ ক্ষেত্রে, আমরা ধনাত্মক বর্গমূলের বিবেচনা করি।

✱ উৎপাদক পদ্ধতি দ্বারা বর্গমূল নির্ণয় করা।

উদা. 144 এর বর্গমূল নির্ণয় করো।

প্রদত্ত সংখ্যার মৌলিক উৎপাদক থেকে সমান উৎপাদকে জোড়া মিলাও।

$144 = 2 \times 72$

$= 2 \times 2 \times 36$

$= 2 \times 2 \times 2 \times 18$

$= \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times \underline{3 \times 3}$

2	144
2	72
2	36
2	18
3	9
3	3
	1

প্রাপ্ত উৎপাদকের সমান উৎপাদকে জোড়া তৈরি করো।

প্রত্যেক জোড়ার একটি উৎপাদক নিয়ে গুণক্রিয়া করো।

$\sqrt{144} = 2 \times 2 \times 3 = 12$ $\therefore \sqrt{144} = 12$

উদা. 324 এর বর্গমূল নির্ণয় করো।

প্রদত্ত সংখ্যার মৌলিক উৎপাদকে বের করে সমান উৎপাদকে জোড়া তৈরি করো।

2	324
2	162
3	81
3	27
3	9
3	3
	1

$$\begin{aligned}324 &= 2 \times 162\\ &= 2 \times 2 \times 81\\ &= 2 \times 2 \times 3 \times 27\\ &= 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 9\\ &= \underline{2 \times 2} \times \underline{3 \times 3} \times \underline{3 \times 3}\end{aligned}$$

বর্গমূলের জন্য প্রত্যেক জোড়ার থেকে একটি করে সংখ্যা নাও এবং গুণক্রিয়া করো।

$\sqrt{324} = 2 \times 3 \times 3 = 18$

$\therefore \sqrt{324} = 18$

অনুশীলনী-30

⊙ বর্গমূল নির্ণয় করো।

(i) 625 (ii) 1225 (iii) 289 (iv) 4096 (v) 1089

✸ অধিক তথ্যের জন্য (ভাগ পদ্ধতিতে বর্গমূল)

(1) 9801 এর বর্গমূল নির্ণয় করো।

	99
9	$\overline{98}\,\overline{01}$
+ 9	− 81
189	1701
+ 9	− 1701
198	0000

$\sqrt{9801} = 99$

(2) 19321 এর বর্গমূল নির্ণয় করো।

	139
1	$\overline{1}\,\overline{93}\,\overline{21}$
+ 1	− 1
23	093
+ 3	− 69
269	2421
+ 9	− 2421
278	0000

(3) 141.61 এর বর্গমূল নির্ণয় করো।

	11.9
1	$\overline{1}\,\overline{41}.\overline{61}$
+ 1	− 1
21	041
+ 1	− 21
229	2061
+ 9	− 2061
238	0000

যে সংখ্যার মৌলিক উৎপাদক খুব বড়ো ও তা থেকে উৎপাদক বের করা কঠিন হয়, তার বর্গমূল খোঁজ করতে এই পদ্ধতি ব্যবহার হয়।

এখন আরও একটি ব্যবহার দেখতে $\sqrt{137}$ নেওয়া যাক।

	11.7
1	$\overline{1}\,\overline{37}.\overline{00}$
+ 1	−1
21	037
+ 1	− 21
227	1600
+ 7	− 1589
234	11

$\sqrt{137} > 11.7$

কিন্তু $(11.8)^2 = 139.24$

$\therefore 11.7 < \sqrt{137} < 11.8$

এভাবে $\sqrt{137}$ এর নিকটতম সংখ্যা পাওয়া যাবে।

যে সংখ্যার বর্গমূল পূর্ণ সংখ্যা নয় তার বর্গমূলের সংখ্যা অনুমানিক দশমিক ভগ্নাংশ দ্বারা প্রাপ্ত হতে পারে।

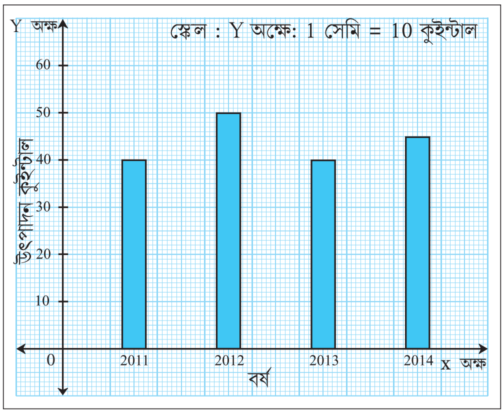
7 দ্বি - স্তম্ভ লেখ

এসো চর্চা করি।

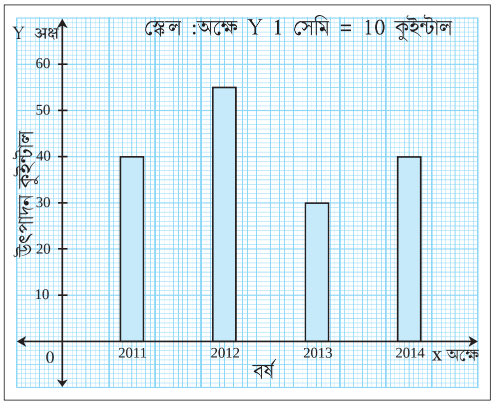
দ্বি স্তম্ভালেখ

অজয় এবং বিজয় এদের ক্ষেতে গমের উৎপাদন কুইন্টালে কতো এর তথ্য নিম্ন দুইটি স্তম্ভালেখে দেখানো হয়েছে। তাহা নিরীক্ষণ করো।

অজয়ের গমের উৎপাদন



বিজয়ের গমের উৎপাদন

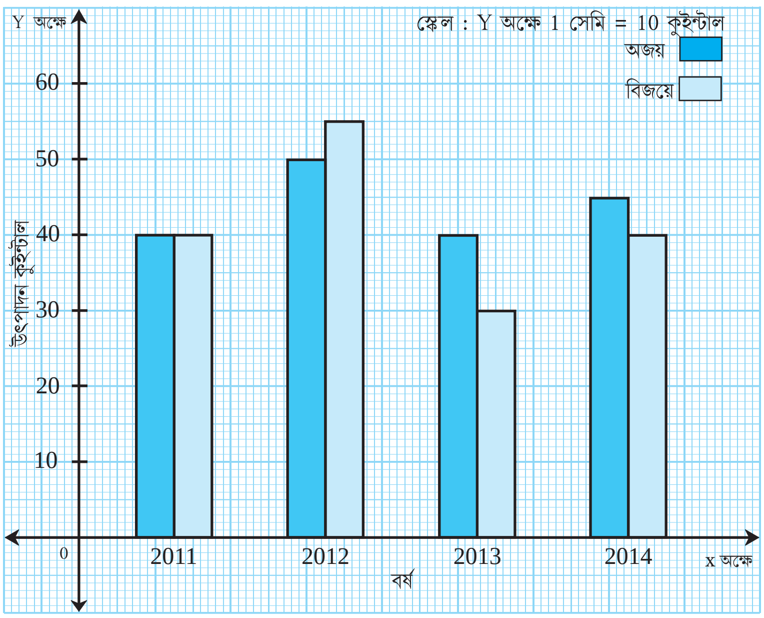


দুইটি স্তম্ভ চিত্রের তথ্যগুলি একই লেখ চিত্রে দেখানো যাবে কি তা দেখি। নিম্ন লেখচিত্রে দেখো। এইরূপ কম জায়গায় বেশি তথ্য দেওয়া যায়। তদ্রুপ অজয় ও বিজয় এদের প্রত্যেকের উৎপাদন সহজে তুলনা করা যাবে। এই ধরনের স্তম্ভ চিত্রকে দ্বি স্তম্ভালেখ বলে।

দ্বি স্তম্ভ লেখের নিরীক্ষণ করে নিম্ন প্রশ্নের উত্তর দাও।

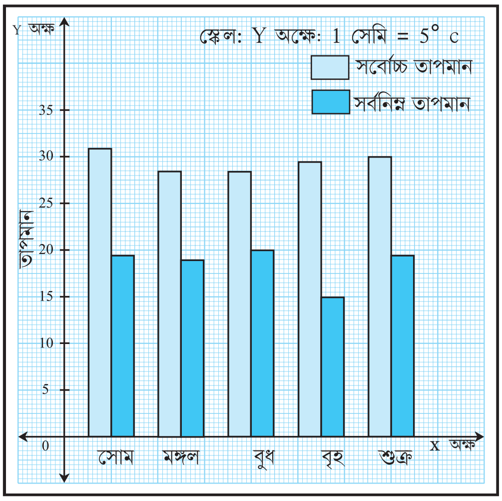
- কোন বছরে উভয়ের গমের উৎপাদন এক সমান ?
- 2014 সালে কার গমের উৎপাদন বেশি ছিল ?
- 2013 সালে প্রত্যেকের গম উৎপাদন কতো ছিল ?

অজয় এবং বিজয়ের গম উৎপাদন



দ্বি স্তম্ভালেখের পঠন

পুণে শহরের পাঁচ দিনের সর্বোচ্চ এবং সর্বনিম্ন তাপমান (°C) দেওয়া হয়েছে। দ্বি স্তম্ভালেখের নিরীক্ষণ করে নিম্ন প্রশ্নের উত্তর দাও।



- X - অক্ষে কোন তথ্য দেওয়া হয়েছে ?
- Y - অক্ষে কোন তথ্য দেওয়া হয়েছে ?
- সর্বোচ্চ তাপমান কোন দিনে দেখানো হয়েছে ?
- সর্বনিম্ন তাপমান কোন দিনে সর্বাধিক দেখানো হয়েছে ?
- বৃহস্পতিবারের সর্বোচ্চ ও সর্বনিম্ন তাপমানের ব্যবধান কতো ?
- কোন দিনে সর্বোচ্চ ও সর্বোনিম্ন তাপমানের ব্যবধান সর্বাধিক ছিল ?

এসো জেনে নেই।

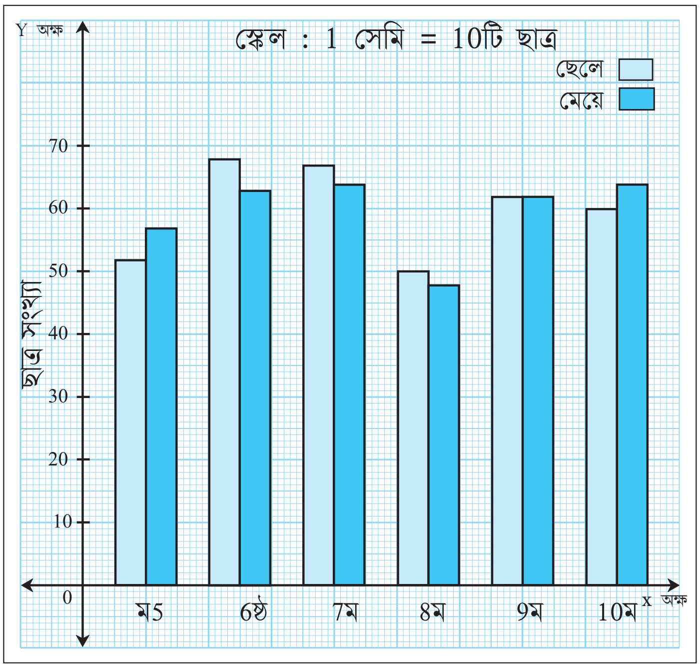
দ্বি স্তম্ভালেখ (Joint bar graph) আঁকা

এক বিদ্যালয়ের ছেলে ও মেয়েদের সংখ্যা দেওয়া হয়েছে। তথ্যানুসারে দ্বি-স্তম্ভালেখ তৈরি করো।

শ্রেণী	5ম	6ষ্ঠ	7ম	8ম	9ম	10ম
ছেলে	52	68	67	50	62	60
মেয়ে	57	63	64	48	62	64

দ্বি-স্তম্ভালেখের জন্য ক্রম

1. ছক কাগজে X অক্ষ ও Y অক্ষ এবং এদের ছেদ বিন্দু দেখাও।
2. দুইটি দ্বি-স্তম্ভালেখের সমান দূরত্ব রেখে X অক্ষে শ্রেণী দেখাও।
3. Y অক্ষে স্কেল নির্ধারিত করো। যেমন 1 একক = 10 ছেলে/মেয়ে,
4. নির্ধারিত স্কেল অনুসারে প্রত্যেক শ্রেণীর ছেলেদের ও মেয়েদের সংখ্যা দেখানোর জন্য স্তম্ভের উঁচু নির্ধারিত করো ও স্তম্ভালেখ আঁকো। দুটি স্তম্ভের পার্থক্য দেখানোর জন্য ভিন্ন রং ব্যবহার করো।

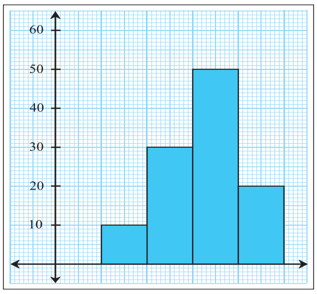


আমি এটা বুঝতে পেরেছি।

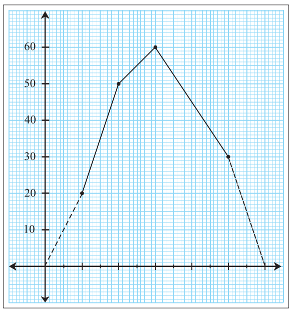
- দ্বি-স্তম্ভালেখের প্রত্যেক স্তম্ভের প্রস্থ সমান হওয়া উচিৎ।
- পার্শ্ববর্তী দ্বি-স্তম্ভের দূরত্ব সমান হওয়া উচিৎ।
- দ্বি-স্তম্ভালেখের ব্যবহার তুলনাত্মক অধ্যয়নের জন্য করা হয়।

গণিত আমার সাথী : সংবাদপত্র, মাসিকপত্র, তথ্যের পরিবেশন

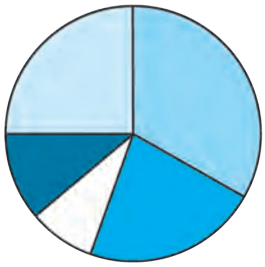
- সংবাদপত্রের বিভিন্ন প্রকারের লেখ চিত্রের সংগ্রহ করে আলোচনা করো।



1. স্তম্ভালেখ



2. রৈখিক লেখচিত্র



3. বৃত্ত লেখচিত্র

ICT Tools or Links

তথ্যের পরিবেশন করার সময় দ্বি-স্তম্ভালেখের পরিবর্তে বিভিন্ন লেখ চিত্রের ব্যবহার করা হয়। MS-Excell, Graph Matica, Geogebra প্রভৃতিতে সমাবিষ্ট বিভিন্ন লেখচিত্র শিক্ষকের সাহায্যে দেখো।

অনুশীলনী-31

1. বৈশ্বিক বৃক্ষ দিনে দুটি বিদ্যালয়ের দ্বারা চারা রোপনের সংখ্যা দেওয়া হয়েছে, তার উপর ভিত্তি করে দ্বি-স্তম্ভালেখ তৈরি করো।

চারার সংখ্যা / বিদ্যালয়ের নাম	বাদাম	পিঠেচ্যাপ্টা	নীম	অশোক	গুলমোহর
নতুন বিদ্যালয়	40	60	72	15	42
ভারত বিদ্যালয়	42	38	60	25	40

2. একটি জুস সেন্টারে শনিবারে ও রবিবারে বিভিন্ন ফলের জুস ক্রয় করার জন্য গ্রাহকের সংখ্যা নিম্ন সারিণীতে দেওয়া হয়েছে। দেওয়া তথ্য অনুসারে দ্বি-স্তম্ভ লেখ তৈরি করো।

ফল / বার	মোসম্বী	কমলালেবু	আপেল	আনারস
শনিবার	43	30	56	40
রবিবার	59	65	78	67

3. গ্রাম পঞ্চায়েত নির্বাচনে পাঁচটি মতদান কেন্দ্রে নিম্নলিখিত ভোট হয়েছে। এর থেকে দ্বি-স্তম্ভালেখ আঁকো।

ব্যক্তি \ কেন্দ্র	1	2	3	4	5
পুরুষ	200	270	560	820	850
নারী	700	240	340	640	470

4. ভারতের পাঁচটি শহরের সর্বোচ্চ এবং সর্বোনিম্ন তাপমান °C-এ দেওয়া আছে। এর থেকে দ্বি-স্তম্ভালেখ আঁকো।

তাপমান \ শহর	দিল্লী	মুম্বই	কোলকাতা	নাগপুর	কপুরথলা
সর্বোচ্চ তাপমান	35	32	37	41	37
সর্বোনিম্ন তাপমান	26	25	26	29	26

5. নিম্ন তালিকাতে সোলাপুর এবং পুণের সরকারি হাসপাতালে একদিনে টিকা নেওয়া শিশুদের সংখ্যা দেওয়া হয়েছে। এর থেকে দ্বি-স্তম্ভালেখ আঁকো।

শহর \ টিকার নাম	ডি.পি.টি পূরক	পোলিও পূরক	জলবসন্ত	কামলা
সোলাপুর	65	60	65	63
পুণে	89	87	88	86

6. মহারাষ্ট্র এবং গুজরাট রাজ্যের লোকের স্বাক্ষরতা প্রমাণ শতকরাতে দেওয়া হয়েছে। এর দ্বারা দ্বি-স্তম্ভালেখ আঁকো।

রাজ্য \ বর্ষ	1971	1981	1991	2001	2011
মহারাষ্ট্র	46	57	65	77	83
গুজরাট	40	45	61	69	79

গণিতের মজা

$1 + 3 = 2^2$

$1 + 3 + 5 = 3^2$

$1 + 3 + 5 + 7 = 4^2$

তদানুসারে $1 + 3 + \ldots + (2n - 1) = n^2$ এই সূত্রটি মনে রেখো।

এই সূত্র $n = 5, 6, 7, 8, \ldots$ নিয়ে সূত্রটির যাচাই করে দেখো।

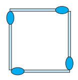
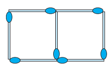
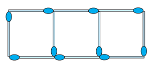
বৈজ্ঞানিক অভিক্রিয়ার দ্বারা প্রাপ্ত অনুমান জ্ঞাত করার জন্য এবং ভূগোল, অর্থশাস্ত্রেও দ্বি-স্তম্ভালেখের ব্যবহার হয়।

8 বীজগাণিতিক চলরাশি ও তার উপর ক্রিয়া

এসো জেনে নেই।

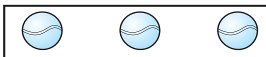
বীজগাণিতিক চলরাশি (Algebraic expressions)

- নিচে দেওয়া দিয়াশলাই কাঠির গঠন দেখো ও আকৃতি প্রবাহের নিরীক্ষণ করো

দিয়াশলাই কাঠির গঠন				......	..	......	..	......
বর্গ	1	2	3	4	..	10	..	n
কাঠির সংখ্যা	4	7	10	13	..	......	..	......
	$3 + 1$	$6 + 1$	$9 + 1$	$12 + 1$	..	......	..	......
	$3 \times 1 + 1$	$3 \times 2 + 1$	$3 \times 3 + 1$	$3 \times 4 + 1$		$3 \times 10 + 1$		$3 \times n + 1$

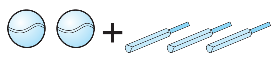
উপরে দেওয়া আকৃতি প্রবাহের নিরিক্ষণ করলে বোঝা যায় যে, কাঠির সংখ্যা = 3 × বর্গের সংখ্যা + 1 বর্গের সংখ্যা পরিবর্তন হতে থাকে। যেমন 2, 3, 4, ... , 10,... এর থেকে যে কোনো সংখ্যা হতে পারে। বর্গের সংখ্যা জানা না থাকলে সেটা অক্ষর দ্বারা দেখানো হয়। বর্গের সংখ্যা n এই অক্ষর দ্বারা দেখানো হয়েছে। n হলো বীজগাণিতিক চলরাশি।

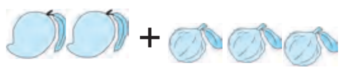
n চলের ব্যবহার করে $3 \times n + 1$ অর্থাৎ $3n + 1$ হলো বীজগাণিতিক চলরাশি।

 = 3টি বল

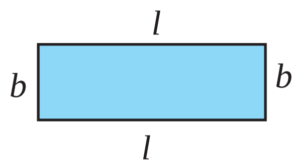
= 3টি ত্রিভুজ

t t t = $3t$

 = ☐ বল + ☐ ব্যাট

 = ☐ আম + ☐ পেয়ারা

$x + x + y + y + y = 2x + 3y$



আয়তের পরিসীমা $= 2l + 2b$

$= 2(l + b)$

আমি এটা বুঝতে পেরেছি।

$3n + 1$, $3t$, $2x + 3y$, $2(l + b)$ বীজগাণিতিক চলরাশি।
এই রাশিতে n, t, y, l, b, x হলো চলরাশি।

এসো জেনে নেই।

$3x$ এই রাশিতে 3 হলো x এই চলের ধ্রুবক (coefficient)

$-15t$ তে -15 হলো t এই চলের ধ্রুবক।

যে রাশিতে কেবল মাত্র গুণের মতো একই ক্রিয়া থাকে সেই রাশিকে 'পদ' (term) বলে।

বীজগণিতিক চলরাশি একপদী বা বহুপদীর যোগফল হয়।

পদ	ধ্রুবক	চল
$11mn$	11	m, n
$-9x^2y^3$	-9	x, y
$\frac{5}{6}p$	$\frac{5}{6}$	p
a	1	a

উদা. বীজগণিতিক চলরাশি : $4x^2 - 2y + \frac{5}{6}xz$

এই রাশিতে $4x^2$ হলো প্রথম পদ এর মধ্যে 4 হলো ধ্রুবক।

$-2y$ হলো দ্বিতীয় পদ এর মধ্যে -2 হলো ধ্রুবক।

$\frac{5}{6}xz$ হলো তৃতীয় পদ। এরমধ্যে $\frac{5}{6}$ হলো ধ্রুবক।

মনে রেখো :

- $15 - x$ এই বীজগাণিতিক চলরাশিতে দুইটি পদ আছে। প্রথম পদ 15 হলো একটি সংখ্যা। $15 - x = 15 + (-x)$ $\therefore$ দ্বিতীয় পদ হলো $-x$ । এই পদে x এর ধ্রুবক হলো (-1)
- যে পদের চল ও তার সূচক সমান হয় সেই পদ কে সদৃশ পদ বলে।

সদৃশ পদ (Like terms)

(i) $2x,\ 5x,\ -\frac{2}{3}x$ (ii) $-5x^2y,\ \frac{6}{7}yx^2$

অসদৃশ পদ (Unlike terms)

(i) $7xy,\ 9y^2,\ -2xyz,\ 8mn,\ 8m^2n^2,\ 8m^3n$

বীজগাণিতিক চলরাশির প্রকার (Types of algebraic expressions)

পদের সংখ্যার আধারে রাশির নাম নিশ্চিত করা হয়। এক পদ থাকলে একপদী, দুই পদ থাকলে দ্বিপদী তিন পদ থাকলে ত্রিপদী, তিন থেকে অধিক পদ থাকলে বহুপদী হয়।

একপদী	দ্বিপদী	ত্রিপদী	বহুপদী
• $4x$	• $2x - 3y$	• $a + b + c$	• $a^3 - 3a^2b + 3ab - b^3$
• $\frac{5}{6}m$	• $2l + 2b$	• $x^2 - 5x + 6$	• $4x^4 - 7x^2 + 9 - 5x^3 - 16x$
• -7	• $3mn - 5m^2n$	• $8a^3 - 5a^2b + c$	• $5x^5 - \frac{1}{2}x + 8x^3 - 5$

অনুশীলনী-32

⊙ নিচে দেওয়া পদের সংখ্যার আধারে একপদী দ্বিপদী প্রভৃতি প্রকারে বর্গীকরণ করো।

(i) $7x$ (ii) $5y - 7z$ (iii) $3x^3 - 5x^2 - 11$ (iv) $1 - 8a - 7a^2 - 7a^3$

(v) $5m - 3$ (vi) a (vii) 4 (viii) $3y^2 - 7y + 5$

এসো জেনে নেই।

বীজগাণিতিক চলরাশির যোগ (Addition of algebraic expressions)

✱ একপদীর যোগ (Addition of monomials)

উদা. 3টি পেয়ারা + 4টি পেয়ারা = (3 + 4) পেয়ারা = 7টি পেয়ারা   **উদা.** $3x + 4x = (3 + 4)\,x = 7x$

সদৃশ পদের যোগ একই প্রকারের বস্তুর যোগ হিসাবে করা হয়।

উদা. যোগ করো।

(i) $-3x - 8x + 5x = (-3 - 8 + 5)x = -6x$

(ii) $\frac{2}{3}ab - \frac{5}{7}ab = (\frac{2}{3} - \frac{5}{7})\,ab = \frac{-1}{21}\,ab$

(iii) $-2p^2 + 7p^2 = (-2 + 7)p^2 = 5p^2$

> একটু চিন্তন করো।
> $3x + 4y$ = কতো ?
> 3 টি পেয়ারা + 4 টি আম = 7 টি পেয়ারা
> $7m - 2n = 5m$?

✱ দ্বিপদী রাশির যোগ (Addition of binomial expressions)

অনুভূমিক বিন্যাস

উদা. $(2x + 4y) + (3x + 2y)$

$= 2x + 3x + 4y + 2y$

$= 5x + 6y$

উর্দ্ধ বিন্যাস

$$\begin{array}{r} 2x + 4y \\ +\quad 3x + 2y \\ \hline 5x + 6y \end{array}$$

সদৃশ পদীর যোগ করার সময় ওই পদের ধ্রুবকের যোগ করার পরে তার সামনে চল লিখতে হয়।

উদা. যোগ করো। $9x^2y^2 - 7xy$; $3x^2y^2 + 4xy$

অনুভূমিক বিন্যাস

$(9x^2y^2 - 7xy) + (3x^2y^2 + 4xy)$

$= 9x^2y^2 - 7xy + 3x^2y^2 + 4xy$

$= (9x^2y^2 + 3x^2y^2) + (-7xy + 4xy)$

$= 12x^2y^2 - 3xy$

উর্দ্ধ বিন্যাস

$$\begin{array}{r} 9x^2y^2 - 7xy \\ +\quad 3x^2y^2 + 4xy \\ \hline 12x^2y^2 - 3xy \end{array}$$

সাবধান!

$3x + 7y$ সদৃশ পদ না এইজন্য তাদের যোগ $3x + 7y$ বা $7y + 3x$ যথারূপে লিখতে হয়।

অনুশীলনী-33

⊙ যোগ করো।

(i) 9p + 16q ; 13p + 2q   (ii) 2a + 6b + 8c; 16a + 13c + 18b

(iii) $13x^2 - 12y^2$; $6x^2 - 8y^2$ (iv) $17a^2b^2 + 16c$; $28c - 28a^2b^2$

(v) $3y^2 - 10y + 16$; $2y - 7$ (vi) $-3y^2 + 10y - 16$; $7y^2 + 8$

এসো জেনে নেই।

বীজগাণিতিক চলরাশির বিয়োগ (Subtraction of algebraic expressions)

পূর্ণসংখ্যার বিয়োগ করার সময় একটি পূর্ণসংখ্যা থেকে অপর পূর্ণসংখ্যা বিয়োগ করা মানে প্রথম পূর্ণসংখ্যায় দ্বিতীয় পূর্ণসংখ্যার বিপরীত সংখ্যা যোগ করা।

আমরা এই নিয়মের ব্যবহার বীজগাণিতিক চলরাশির বিয়োগ করার সময় করবো।

উদা. $18 - 7$

$= 18 + (-7) = 11$

উদা. $9x - 4x$

$= [9 + (-4)]x = 5x$

উদা. প্রথম রাশি থেকে দ্বিতীয় রাশি বিয়োগ করো।

$16x + 23y + 12z$; $9x - 27y + 14z$

অনুভূমিক বিন্যাস

$(16x + 23y + 12z) - (9x - 27y + 14z)$

$= 16x + 23y + 12z - 9x + 27y - 14z$

$= (16x - 9x) + (23y + 27y) + (12z - 14z)$

$= 7x + 50y - 2z$

উর্দ্ধ বিন্যাস

$$\begin{array}{rrrr} & 16x & +\ 23y & +\ 12z \\ - & \oplus\ 9x & \ominus\ 27y & \oplus\ 14z \\ & - & + & - \\ \hline & 7x & +\ 50y & -\ 2z \end{array}$$

(যে রাশি বিয়োগ করতে হবে সেই রাশির প্রত্যেক পদের চিহ্ন পরিবর্তন করে যোগ করবো।)

অনুশীলনী-34

⊙ প্রথম রাশি থেকে দ্বিতীয় রাশি বিয়োগ করো।

(i) $(4xy - 9z)$; $(3xy - 16z)$ (ii) $(5x + 4y + 7z)$; $(x + 2y + 3z)$

(iii) $(14x^2 + 8xy + 3y^2)$; $(26x^2 - 8xy - 17y^2)$

(iv) $(6x^2 + 7xy + 16y^2)$; $(16x^2 - 17xy)$ (v) $(4x + 16z)$; $(19y - 14z + 16x)$

এসো জেনে নেই।

বীজগাণিতিক চলরাশির গুণ (Multiplication of algebraic expressions)

✸ **একপদীকে একপদী দ্বারা গুণ করা।**

উদা. $3x \times 12y$

$= 3 \times 12 \times x \times y$

$= 36xy$

উদা. $(-12x) \times 3y^2$

$= -12 \times 3 \times x \times y \times y$

$= -36xy^2$

উদা. $2a^2 \times 3ab^2$

$= 2 \times 3 \times a^2 \times a \times b^2$

$= 6a^3 b^2$

উদা. $(-3x^2) \times (-4xy)$

$= (-3) \times (-4) \times x^2 \times x \times y$

$= 12x^3y$

দুটি একপদীর গুণ করার সময় সর্বপ্রথমে ধ্রুবকের চিহ্ন লক্ষ্য রেখে গুণ করবে। তারপর চলের গুণ করবে।

✸ **দ্বিপদীকে একপদী দিয়ে গুণ করা।**

উদা. $x\,(x + y)$

$= x \times x + x \times y$

$= x^2 + xy$

উদা. $(7x - 6y) \times 3z = 7x \times 3z - 6y \times 3z$

$= 7 \times 3 \times x \times z - 6 \times 3 \times y \times z$

$= 21xz - 18yz$

✸ **দ্বিপদীকে দ্বিপদী দিয়ে গুণ করা।**

উদা.

$$\begin{array}{rl} 3x + 4y & \\ \times\ 5x + 7y & \\ \hline 15x^2 + 20xy & \text{[5x দিয়ে গুণ করার পর]} \\ + 21xy + 28y^2 & \text{[7y দিয়ে গুণ করার পর]} \\ \hline 15x^2 + 41xy + 28y^2 & \text{[যোগ করার পর]} \end{array}$$

$(3x + 4y)\ (5x + 7y)$

$= 3x\,(5x + 7y) + 4y\,(5x + 7y)$

$= 3x \times 5x + 3x \times 7y + 4y \times 5x + 4y \times 7y$

$= 15x^2 + 21xy + 20xy + 28y^2$

$= 15x^2 + 41xy + 28y^2$

উদা. একটি আয়তাকার জমির দৈর্ঘ্য $(2x + 7)$ মি ও প্রস্থ $(x + 2)$ মি হয়, তাহলে সেই জমির ক্ষেত্রফল কতো?

সমাধান: আয়তাকার জমির ক্ষেত্রফল = দৈর্ঘ্য x প্রস্থ $= (2x + 7) \times (x + 2)$

$= 2x\,(x + 2) + 7\,(x + 2)$

$= 2x^2 + 11x + 14$

আয়তাকার জমির ক্ষেত্রফল $(2x^2 + 11x + 14)$ মী^{2}

অনুশীলনী-35

1. গুণ করো।

(i) $16xy \times 18xy$ (ii) $23xy^2 \times 4yz^2$

(iii) $(12a + 17b) \times 4c$ (iv) $(4x + 5y) \times (9x + 7y)$

2. একটি আয়তের দৈর্ঘ্য $(8x + 5)$ সেমি ও প্রস্থ $(5x + 3)$ সেমি হয়, তাহলে সেই আয়তের ক্ষেত্রফল কতো?

একটু স্মরণ করি।

একচল সমীকরণ (Equations in one variable)

• নিম্নলিখিত সমীকরণ সমাধান করো।

(1) $x + 7 = 4$ (2) $4p = 12$ (3) $m - 5 = 4$ (4) $\frac{t}{3} = 6$

এসো জেনে নেই।

উদা. $2x + 2 = 8$

$\therefore 2x + 2 - 2 = 8 - 2$

$\therefore 2x = 6$

$\therefore x = 3$

উদা.. $3x - 5 = x - 17$

$3x - 5 + 5 - x = x - 17 + 5 - x$

$\therefore 2x = -12$

$\therefore x = -6$

উদা. একটি আয়তের দৈর্ঘ্য তার প্রস্থের দ্বিগুন অপেক্ষা 1 সেমি বেশি হয়। এই আয়তের পরিসীমা 50 সেমি হলে, তার দৈর্ঘ্য কতো?

সমাধান: মেনে নিলাম আয়তের প্রস্থ হলো x সেমি।

আয়তের দৈর্ঘ্য $(2x + 1)$ সেমি হবে।

$2 \times$ দৈর্ঘ্য $+ 2 \times$ প্রস্থ $=$ আয়তের পরিসীমা

$2(2x + 1) + 2x = 50$

$\therefore 4x + 2 + 2x = 50$

$6x + 2 = 50$

$6x = 50 - 2$

$\therefore 6x = 48 \therefore x = 8$

আয়তের প্রস্থ 8 সেমি।

আয়তের দৈর্ঘ্য $= 2x + 1 = 2 \times 8 + 1$

$\therefore$ আয়তের দৈর্ঘ্য $= 17$ সেমি।

উদা. একটি স্বাভাবিক সংখ্যা এবং তারপরের ক্রমাগত স্বাভাবিক সংখ্যার যোগফল 69 হয়, তাহলে সেই সংখ্যাগুলি কোনটি?

সমাধান: মেনে নিলাম স্বাভাবিক সংখ্যা হলো x

পরের ক্রমাগত স্বাভাবিক সংখ্যা হলো $x + 1$

$(x) + (x + 1) = 69$

$\therefore x + x + 1 = 69$

$\therefore 2x + 1 = 69$

$2x = 69 - 1$

$\therefore 2x = 68 \therefore x = 34$

স্বাভাবিক সংখ্যা $= 34$

পরের ক্রমাগত স্বাভাবিক সংখ্যা $= 34 + 1$

$= 35$

মনে রেখো :

যে কোনো পদ সমীকরণের '=' চিহ্নের উভয় দিকে নেওয়ার সময় চিহ্ন পরিবর্তন করতে হয়।

অনুশীলনী-36

1. $(3x - 11y) - (17x + 13y)$ এই বিয়োগের জন্য সঠিক বিকল্প চয়ন করো।

   (i) $7x - 12y$ (ii) $-14x - 54y$ (iii) $-3(5x + 4y)$ (iv) $-2(7x + 12y)$

2. $(23x^2y^3z) \times (-15x^3yz^2)$ এর উত্তর .... হবে।

   (i) $-345x^5y^4z^3$ (ii) $345x^2y^3z^5$ (iii) $145x^3y^2z$ (iv) $170x^3y^2z^3$

3. নিম্ন সমীকরণ সমাধান করো।

   (i) $4x + \frac{1}{2} = \frac{9}{2}$ (ii) $10 = 2y + 5$ (iii) $5m - 4 = 1$

   (iv) $6x - 1 = 3x + 8$ (v) $2(x - 4) = 4x + 2$ (vi) $5(x + 1) = 74$

4. রাকেশের বয়েস সানিয়ার অপেক্ষা 5 বছর কম। তাদের বয়েসের যোগফল 27 বছর হলে, প্রত্যেকের বয়স কতো?

5. একটি বনে অশোকার যত বৃক্ষ লাগানো আছে তা অপেক্ষা জামের 60টি বৃক্ষ বেশি লাগানো হয়েছে। সেখানে উভয় বৃক্ষের মোট 200 বৃক্ষ আছে, তাহলে জামের কয়টি বৃক্ষ লাগানো হয়েছে।

6. শুভাঙ্গীর কাছে 50 টাকার যত নোট আছে। তারথেকে দ্বিগুন 20 টাকার নোট আছে। তার কাছে মোট 2700 টাকা আছে, তাহলে 50 টাকার নোট কয়টি?

7*. বিরাট দ্বারা বানানো রান রোহিতের অপেক্ষা দ্বিগুন ছিলো। উভয়ের রান মিলে দ্বিশতক অপেক্ষা 2 রান কম ছিলো। তাহলে প্রত্যেকে কতো রান করলো?

বিক্ষিপ্ত অনুশীলনী 1

1. নিম্ন উদাহরণগুলি সমাধান করো।

   (i) $(-16) \times (-5)$ (ii) $(72) \div (-12)$ (iii) $(-24) \times (2)$

   (iv) $125 \div 5$ (v) $(-104) \div (-13)$ (vi) $25 \times (-4)$

2. মৌলিক উৎপাদ বের করে নিম্ন সংখ্যার গ.সা.গু ও ল.সা.গু বের করো।

   (i)75, 135 (ii) 114, 76 (iii) 153, 187 (iv) 32, 24, 48

3*. সংক্ষিপ্ত রূপ দাও।

   (i) $\frac{322}{391}$ (ii) $\frac{247}{209}$ (iii) $\frac{117}{156}$

4. নিম্ন সংখ্যার বর্গমূল বের করো।

   (i) 784 (ii) 225 (iii) 1296 (iv) 2025 (v) 256

5. নির্বাচনের জন্য চারটি মতদান কেন্দ্র দেওয়া আছে। প্রত্যেক কেন্দ্রে স্ত্রী ও পুরুষ দ্বারা দেওয়া মতদান তালিকায় দেওয়া আছে। দেওয়া তথ্যের ভিত্তিতে স্তম্ভালেখ বানাও।

মতদান কেন্দ্র	নবোদয় বিদ্যালয়	বিদ্যানিকেতন স্কুল	সিটি হাইস্কুল	একলব্য স্কুল
স্ত্রী	500	520	680	800
পুরুষ	440	640	760	600

6. নিম্ন পদাবলী সমাধান করো।

   (i) $45 \div 5 + 20 \times 4 - 12$ (ii) $(38 - 8) \times 2 \div 5 + 13$

   (iii) $\frac{5}{3} + \frac{4}{7} \div \frac{32}{21}$ (iv) $3 \times \{ 4 [85 + 5 - (15 \div 3)] + 2 \}$

7. সমাধান করো।

   (i) $\frac{5}{12} + \frac{7}{16}$ (ii) $3\frac{2}{5} - 2\frac{1}{4}$ (iii) $\frac{12}{5} \times \frac{(-10)}{3}$ (iv*) $4\frac{3}{8} \div \frac{25}{18}$

8. ΔABC এইভাবে আঁকো যাহার, $m\angle A = 55^\circ$, $m\angle B = 60^\circ$, এবং $l(AB) = 5.9$ সেমি।
9. ΔXYZ এইভাবে আঁকো যাহার, $l(XY) = 3.7$ সেমি, $l(YZ) = 7.7$ সেমি, $l(XZ) = 6.3$ সেমি।
10. ΔPQR এইভাবে আঁকো যাহার, $m\angle P = 80^\circ$, $m\angle Q = 70^\circ$, $l(QR) = 5.7$ সেমি।
11. প্রদত্ত মাপের ভিত্তিতে ΔEFG আঁকো যাহার, $l(FG) = 5$ সেমি, $m\angle EFG = 90^\circ$, $l(EG) = 7$ সেমি।
12. ΔLMN এরমধ্যে $l(LM) = 6.2$সেমি, $m\angle LMN = 60^\circ$, $l(MN) = 4$ সেমি হয়, তাহলে ΔLMN আঁকো।
13. প্রদত্ত কোণের পূরককোণের মাপ লেখো।

    (i) 35° (ii) a° (iii) 22° (iv) $(40-x)^\circ$

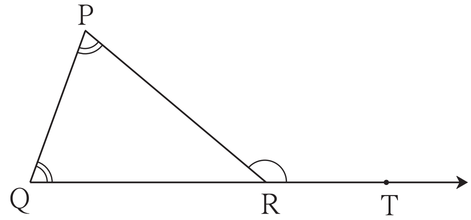
14. প্রদত্ত কোণের সম্পূরক কোণের মাপ লেখো।

    (i) 111° (ii) 47° (iii) 180° (iv) $(90-x)^\circ$

15. নিম্নলিখিত আকৃতি আঁকো।

    (i) সন্নিহিত কোণের জোড়া (ii) সম্পূরক কোণ কিন্তু সন্নিহিত কোণ না এমন কোণ

    (iii) দুটি সন্নিহিত পূরক কোণের জোড়া

16. 

ΔPQR এরমধ্যে $\angle P$ এবং $\angle Q$ -এর মাপ সমান এবং $m\angle PRQ = 70^\circ$ হয়, তাহলে নিম্নলিখিত কোণের মাপ বের করো।

(i) $m\angle PRT$ (ii) $m\angle P$ (iii) $m\angle Q$

17. সরল রূপ দাও।

(i) $5^4 \times 5^3$ (ii) $\left(\frac{2}{3}\right)^6 \div \left(\frac{2}{3}\right)^9$ (iii) $\left(\frac{7}{2}\right)^8 \times \left(\frac{7}{2}\right)^{-6}$ (iv) $\left(\frac{4}{5}\right)^2 \div \left(\frac{5}{4}\right)$

18. মান বের করো।

(i) $17^{16} \div 17^{16}$ (ii) 10^{-3} (iii) $(2^3)^2$ (iv) $4^6 \times 4^{-4}$

19. সমাধান করো।

(i) $(6a-5b-8c) + (15b+2a-5c)$ (ii) $(3x+2y)(7x-8y)$

(iii) $(7m-5n) - (-4n-11m)$ (iv) $(11m-12n+3p) - (9m+7n-8p)$

20. প্রদত্ত সমীকরণ সমাধান করো।

(i) $4(x + 12) = 8$ (ii) $3y + 4 = 5y - 6$

বহুবিকল্প প্রশ্ন

প্রদত্ত প্রশ্নের উত্তরগুলি বহু বিকল্পে দেওয়া আছে। ওই উত্তরগুলি থেকে সঠিক বিকল্পের চয়ন করো।

1. ত্রিভূজের উভয় তিনটি কোণ-দ্বিখন্ডক সংগামী হয়ে থাকে তাদের সংগম বিন্দুকে .... বলা হয়।
(i) পরিকেন্দ্র (ii) শীর্ষ বিন্দু (iii) অন্ত:কেন্দ্র (iv) ছেদক বিন্দু

2. $\left[\left(\frac{3}{7}\right)^{-3}\right]^4 =$ ....

(i) $\left(\frac{3}{7}\right)^{-7}$ (ii) $\left(\frac{3}{7}\right)^{-10}$ (iii) $\left(\frac{7}{3}\right)^{12}$ (iv) $\left(\frac{3}{7}\right)^{20}$

3. $5 \div \left(\frac{3}{2}\right) - \frac{1}{3}$ এদের সরলরূপ .... ।

(i) 3 (ii) 5 (iii) 0 (iv) $\frac{1}{3}$

4. $3x - \frac{1}{2} = \frac{5}{2} + x$ এই সমীকরণের সমাধান .... ।

(i) $\frac{5}{3}$ (ii) $\frac{7}{2}$ (iii) 4 (iv) $\frac{3}{2}$

5*. প্রদত্ত পদ থেকে কোন পদাবলীর মান 37 হয় ?

(i) $10 \times 3 + (5 + 2)$ (ii) $10 \times 4 + (5 - 3)$

(iii) $8 \times 4 + 3$ (iv) $(9 \times 3) + 2$

9

সমানুপাত ও ব্যস্ত অনুপাত

বিভাগ দ্বিতীয়

এসো চর্চা করি।

সমানুপাত (Direct proportion)

দুইটি সংখ্যার তুলনা করে তাহাকে কিভাবে অনুপাতের মত লিখতে হয় তাহা আমরা পূর্বের শ্রেণীতে শিখেছি।

উদা. প্রদত্ত চিত্র দেখো। বৃত্তে আঁকা ব্যাসের দ্বারা বৃত্তের ভাগগুলিকে দেখানো হয়েছে।

(A) (B) (C) (D)

উপরে দেওয়া ব্যাসের সংখ্যা এবং ব্যাস দ্বারা তৈরী বৃত্তের ভাগের সংখ্যার মধ্যে কোন সম্বন্ধ দেখা যায় কি?

- (A) আকৃতিতে **একটি** ব্যাসের দ্বারায় বৃত্তের ____ ভাগ হয়েছে।
- (B) আকৃতিতে **দুটি** ব্যাসের দ্বারায় বৃত্তের ____ ভাগ হয়েছে।
- (D) আকৃতিতে **চারটি** ব্যাসের দ্বারায় বৃত্তের ____ ভাগ হয়েছে।

$\dfrac{\text{ব্যাসের সংখ্যা}}{\text{ভাগের সংখ্যা}} = \dfrac{1}{2} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{3}{6} = \dfrac{4}{8}$ এখানে ব্যাসের সংখ্যা ও ব্যাসের দ্বারা তৈরি ভাগের সংখ্যার অনুপাত স্থির থাকে।

উদা. নগরপালিকার পাঠশালার শিক্ষার্থীদের প্রাপ্ত বইয়ের সংখ্যা নিচের তালিকায় দেওয়া হয়েছে।

শিক্ষার্থী	15	12	10	5
বই	90	72	60	30

$\dfrac{\text{শিক্ষার্থীর সংখ্যা}}{\text{বইয়ের সংখ্যা}} = \dfrac{15}{90} = \dfrac{12}{72} = \dfrac{10}{60} = \dfrac{5}{30} = \dfrac{1}{6}$

অর্থাৎ এই অনুপাত 1:6 স্থির অথবা স্থায়ী (Constant) হয়।

উপরোক্ত উদাহরণে দেখা যায় যে ব্যাসের সংখ্যা বাড়লে বৃত্তের ভাগের সংখ্যাও বাড়ে। শিক্ষার্থীদের সংখ্যা কম হলে বইয়ের সংখ্যাও কম হয়। ব্যাসের সংখ্যা ও বৃত্তের ভাগের সংখ্যা সমানুপাতে আছে, তেমনই শিক্ষার্থীর সংখ্যা ও বইয়ের সংখ্যা সমানুপাতে আছে।

উপক্রম :
- ✸ মোটর সাইকেলে ভরা পেট্রোল এবং তার দ্বারা প্রবাস করা দূরত্ব সমানুপাতে আছে কি? বিচার করো।
- ✸ বিজ্ঞানে ও দৈনন্দিন ব্যবহারে সমান প্রমাণে পরিবর্তন সংখ্যার উদাহরণ দেওয়া যাবে কি? তার চর্চা করো।

উদা. যদি 10টি কলমের মূল্য 60 টাকা হয়, তাহলে এমন 13টি কলমের মূল্য কতো হবে?

সমাধান: 13টি কলমের মূল্য জানতে হবে, এইজন্য 13টি কলমের মূল্য x টাকা মেনে নিলাম।

কলমের সংখ্যা এবং তার মূল্য সমানুপাতে আছে।

অতএব অনুপাত রূপে গঠন করে সমীকরণ তৈরি করবো।

$$\frac{10}{60} = \frac{13}{x}$$

$\therefore$ $10x = 780$ (উভয় পক্ষে $60x$ দিয়ে গুণ করলে)

$x = 78$

13 টি কলমের মূল্য 78 টাকা।

অনুশীলনী-37

1. 7 কিগ্রা প্যাজের মূল্য 140 টাকা হয়, তাহলে 12 কি.গ্রা. প্যাজের মূল্য কতো টাকা হবে?
2. 600 টাকায় 15টি ঘাসের আটি পাওয়া যায় তাহলে 1280 টাকায় কতগুলি ঘাসের আটি পাওয়া যাবে?
3. প্রতিদিন 9টি গাভীর 13 কি 500 গ্রাম পূরক খাদ্যের প্রয়োজন হয়, ওই প্রমাণে 12টি গাভীর কতোটুকু খাদ্যের প্রয়োজন?
4. 12 কুইন্টাল সয়াবিনের মূল্য 36,000 টাকা হয়, তাহলে 8 কুইন্টাল সয়াবিনের মূল্য কতো?
5. দুটি মোবাইলের মূল্য 16,000 টাকা, এমন 13টি মোবাইল ক্রয় করলে মোট কতো টাকার প্রয়োজন?

এসো জেনে নেই।

ব্যস্ত অনুপাত (Inverse proportion)

বৃক্ষরোপনের জন্য 90টি গর্ত করতে হবে। তারজন্য অনেক স্বেচ্ছাসেবক একত্রিত হয়। একজন প্রতিদিন একটি গর্ত করে।

15 জন স্বেচ্ছাসেবকদের 90টি গর্ত করতে $\frac{90}{15} = 6$ দিন লাগবে।

10 জন স্বেচ্ছাসেবকদের 90টি গর্ত করতে $\frac{90}{10} = 9$ দিন লাগবে।

স্বেচ্ছাসেবকের সংখ্যা এবং গর্ত করতে ব্যাতিত দিনের সংখ্যা সমানুপাতে আছে কি?

স্বেচ্ছাসেবকের সংখ্যা কম হলে দিনের সংখ্যা বাড়ে এর বিপরীত স্বেচ্ছাসেবকের সংখ্যা বাড়লে দিনের সংখ্যা কম হয়। স্বেচ্ছাসেবক এবং দিনের সংখ্যার গুনফল স্থির থাকে। এই সংখ্যাগুলি ব্যস্ত অনুপাতে আছে এমন বলা যায়।

উদা. মনে করো সুধাকে কোনো অনুশীলনের 48টি উদা. সমাধান করতে হবে। প্রতিদিন একটি উদা. সমাধান করলে, সকল অনুশীলন সমাধান করতে 48 দিন লাগবে। প্রতিদিন 8টি উদা. সমাধান করলে সকল অনুশীলন সমাধান করতে $\frac{48}{8} = 6$ দিন লাগবে। প্রতিদিন 12টি উদা. সমাধান করলে সকল অনুশীলন সমাধান করতে $\frac{48}{12} = 4$ দিন লাগবে। প্রতিদিন সমাধান করা উদাহরণ এবং ব্যাতীত দিনের সংখ্যা ব্যস্ত অনুপাতে আছে। তাদের গুণফল স্থির থাকে।

$8 \times 6 = 12 \times 4 = 48 \times 1$ লক্ষ্য করো।

উদা. একটি বড়ো প্রাচীর বানানোর জন্য 15 জন শ্রমিকদের 8 ঘন্টা লাগে, তাহলে 12 জন শ্রমিকদের ওই কাজ করতে কতো ঘন্টা লাগবে?

সমাধান : শ্রমিকের সংখ্যা বাড়লে কাজের সময় কম হয়।

শ্রমিকের সংখ্যা এবং তাদের দ্বারা লাগা সময়ের অনুপাত ব্যস্ত অনুপাতে আছে।

শ্রমিকের সংখ্যা এবং প্রাচীর তৈরি করতে লাগা সময়ের গুনফল স্থির থাকে।

এখন x এই চলের ব্যবহার করে উদাহরণ সমাধান করবো।

মেনে নিলাম 12 জন শ্রমিকের x ঘন্টা সময় লাগবে	$12 \times x = 15 \times 8$
15 জন শ্রমিকদের 8 ঘন্টা সময় লাগে	$\therefore 12x = 120$
12 জন শ্রমিকদের x ঘন্টা সময় লাগে	$\therefore x = 10$

এইভাবে 12 জন শ্রমিকের প্রাচীর তৈরি করতে 10 ঘন্টা সময় লাগবে।

উদা. একটি ক্লাসে 40 পৃষ্ঠার হস্তলিখিত অঙ্ক তৈরি করার কাজ শুরু করে। একজন শিক্ষার্থীদের অঙ্ক তৈরি করতে 80 দিন লাগে। তাহলে 4 জন শিক্ষার্থীদের এই অঙ্ক তৈরি করতে কতো দিন লাগবে?

সমাধান : একই কাজ শিক্ষার্থীরা একত্র মিলে করলে দিন কম লাগবে অর্থাৎ শিক্ষার্থী সংখ্যা ও দিনের সংখ্যা ব্যস্ত অনুপাতে আছে। ধরে নাও 4 জন শিক্ষার্থীর x দিন লাগবে।

শিক্ষার্থী	দিন
1	80
4	x

$$4x = 80 \times 1$$

$$x = \frac{80}{4}$$

$$x = 20$$

$\therefore$ 4 জন শিক্ষার্থীর 20 দিন লাগবে

উদা. একটি স্কুলের সপ্তম শ্রেণীর শিক্ষার্থীরা বাসদ্বারা ভ্রমণে একটি জমি দেখতে যায়। ভ্রমণ দ্বারা অবগত তাদের কিছু অনুভব দেখবো। প্রত্যেক অনুভবের সংখ্যা সমানুপাতে আছে ? কি ব্যস্ত অনুপাতে আছে? তাহা লেখো।

- ভ্রমণের জন্য প্রত্যেক শিক্ষার্থী থেকে খর্চার বিনিময় 60 টাকা নেওয়া হয়েছে।

  মোট 45 জন শিক্ষার্থী ছিলো এইজন্য ☐ টাকা জমা হয়েছে।

  তাহলে 50 জন শিক্ষার্থী থাকলে ☐ জমা হতো।

  শিক্ষার্থীর সংখ্যা এবং জমা টাকার সংখ্যা .... অনুপাতে আছে।
- স্কুলের পাশের মিষ্টিওয়ালা ভ্রমণের জন্য 90 টি লাড্ডু দিলো।

  যদি 45 জন শিক্ষার্থী ভ্রমণে আসতো তাহলে প্রত্যেকে ☐ লাড্ডু পেতো।

  যদি 30 জন শিক্ষার্থী ভ্রমণে আসতো তাহলে প্রত্যেকে ☐ লাড্ডু পেয়ে থাকতো।

  শিক্ষার্থীদের সংখ্যা এবং প্রত্যেকের প্রাপ্ত লাড্ডু .... অনুপাতে আছে।
- ভ্রমণের জায়গাটি ফুল থেকে 120 কিমী দূরে ছিলো।

  জমি দেখতে যাওয়ার সময় বাসের গতিবেগ 40 কিমী/ঘন্টা ছিলো এইজন্য ☐ ঘন্টা সময় লাগবে।

  ফেরৎ আসার সময় বাসের গতিবেগ 60 কিমী/ঘন্টা ছিলো এইজন্য ☐ ঘন্টা সময় লাগবে।

  বাসের গতিবেগ এবং প্রয়োজনীয় সময় .... অনুপাতে আছে।

- একজন কৃষক তার বরই বাগান থেকে 180টি বরই জমা করে।

  সে 45 জন শিক্ষার্থীকে সমানে বিতরণ করলো। প্রত্যেকে ☐ টি বরই পেলো।

  যদি 60 জন শিক্ষার্থী হতো, তাহলে প্রত্যেকে ☐ টি বরই পেতো।

  শিক্ষার্থীর সংখ্যা এবং প্রত্যেকে পাওয়া বরইয়ের সংখ্যা .... অনুপাতে আছে।

অনুশীলনী-38

1. একটি জমির নিড়ানি করতে 5 জন শ্রমিককে 12 দিন লাগে। তাহলে 6 জন শ্রমিকের কতো দিন লাগবে? 15 জন শ্রমিকের কতো দিন লাগবে?
2. মোহনরাও প্রতিদিন একটি বইয়ের 40 পৃষ্ঠা পড়ে। এই ভাবে সে 10 দিনে সম্পূর্ণ বই সম্পন্ন করে। এই বই 8 দিনে সম্পন্ন করতে গেলে প্রতিদিন কতো পৃষ্ঠা পড়তে হবে?
3. মেরীর সাইকেল চালানোর গতিবেগ প্রতি ঘন্টা 6 কিমী। 12 কিমী দূর মাসির বাড়ি যেতে তাকে কতো সময় লাগবে? যদি সাইকেলের গতিবেগ 4 কিমী / ঘন্টা হয়, তাহলে তার কতো সময় লাগবে?
4. একটি সরকারী গুদামের সংগ্রহ করা খাদ্য 4000 মানুষ 30 দিনে খায়, তাহলে 6000 মানুষ সেই খাদ্য কতো দিনে খাবে?

এসো জেনে নেই।

অংশীদারিত্ব (Partnership)

কোনো একটি ব্যবসা শুরু করতে গেলে কিছু জায়গা, কাঁচামাল ইত্যাদির জন্য অর্থ প্রয়োজন হয়। এই অর্থকে আসল বলা হয়। কতো সময় দুই অপেক্ষা অধিক ব্যক্তি একত্র মিলে অর্থ জমা করে। অর্থাৎ তারা অংশীদারী হয়ে ব্যবসা শুরু করে। অংশীদারী ব্যবসায় অংশীদারীদের ব্যাঙ্কে সংযুক্ত খাতা থাকে। এই ব্যবসায় অর্থ যে অনুপাতে বিনিয়োগ করা হয় ঠিক ওই অনুপাতে ব্যবসায় হওয়া লাভ বা ক্ষতি বিতরণ করা হয়।

উদা. ঝেলম ও অথর্ব উভয়ে যথাক্রমে 2100 ও 2800 টাকা আসল নিয়ে ব্যবসা শুরু করলো। তাদের 3500 টাকা লাভ হলো, তাহলে ওই টাকা কিভাবে বিতরণ করবে?

সমাধান : ব্যবহৃত আসলের অনুপাত 2100:2800 অর্থাৎ $\frac{2100}{2800} = \frac{3}{4}$ অর্থাৎ আসলের অনুপাত 3:4

লাভের বিতরণ ও আসলের অনুপাতে করতে হয়। ধরে নাও ঝেলমের লাভ $3x$ ও অথর্বের লাভ $4x$।

$\therefore\ 3x + 4x = 3500$ মোট লাভ 3500 টাকা

$\therefore\ 7x = 3500$ $\therefore\ x = 500$

ঝেলমকে $3x = 1500$ টাকা এবং অথর্বকে $4x = 2000$ টাকা লাভ হবে।

উদা. কোনো ব্যবসায় চিন্ময় এবং স্যাম 1,30,000 টাকা আসল 3:2 অনুপাতে বিনিয়োগ করলো প্রত্যেকে কতো টাকা বিনিয়োগ করলো। এই ব্যবসায় তাদের 36,000 টাকা লাভ হলো, প্রত্যেকের কতো টাকা লাভ হবে?

সমাধান : চিন্ময় এবং শ্যামের বিনিয়োগের অনুপাত 3:2।

বিনিয়োগের অনুপাতেই লাভের বিতরণ হয়। এইজন্য লাভের অনুপাত 3:2 হবে।

মনে করি চিন্ময়ের বিনিয়োগ $3y$ এবং শ্যামের বিনিয়োগ $2y$

$3y + 2y$ = মোট বিনিয়োগ

$\therefore 5y = 130000$

$$\frac{5y}{5} = \frac{130000}{5} \quad \text{..... (5 দ্বারা ভাগ দিলে)}$$

$\therefore y = 26000$

$\therefore$চিন্ময়ের বিনিয়োগ $= 3y$

$= 3 \times 26000$

$= 78,000$

শ্যামের বিনিয়োগ $= 2y$

$= 2 \times 26000$

$= 52000$

মনে করি চিন্ময়ের লাভ $3x$ এবং শ্যামের লাভ $2x$ $3x + 2x$ = মোট লাভ

$5x = 36000$

$$\frac{5x}{5} = \frac{36000}{5} \quad \text{..... (5 দ্বারা ভাগ দিলে)}$$

$\therefore x = 7200$

$\therefore$চিন্ময়ের লাভ $= 3x$

$= 3 \times 7200$

$= 21600$

শ্যামের লাভ $= 2x$

$= 2 \times 7200$

$= 14400$

উদা. আব্দুল, সেজল ও সোহম সায়লীকে যথাক্রমে 30 টাকা, 70 টাকা এবং 50 টাকা দিলো। সায়লী আরো 150 টাকা জুড়ে কাগজ, রং ইত্যাদি বস্তু আনলো। সেই বস্তু দ্বারা সকলে গ্রিটিং কার্ড তৈরি করলো ও বিক্রয় করলো। তাদের মোট 420 টাকা লাভ হলো। তাহলে প্রত্যেকের কতো টাকা লাভ হলো ?

সমাধান : সকলের মিলে আসল মোট 300 টাকা ছিলো। তারমধ্যে 150 টাকা সায়লীর ছিলো অর্থাৎ আধা টাকা তার ছিলো। তাদের মোট 420 টাকা লাভ হয়েছিলো। সায়লীর 420 টাকার আধা অর্থাৎ 210 টাকা লাভ হয়েছিলো। অবশিষ্ট 210 টাকা আব্দুল, সেজল ও সোহমকে বিতরণ করা হয়েছিলো। আব্দুল, সেজল ও সোহম এদের আসল যথাক্রমে 30 টাকা, 70 টাকা এবং 50 টাকা।

আসলের অনুপাত 30:70:50 অর্থাৎ 3:7:5। সকলের লাভ 210 টাকা।

মনে করি তাদের লাভ যথাক্রমে $3k + 7k + 5k = 210$

$\therefore 15k = 210$

$\therefore k = 14$

আব্দুলের লাভ $= 3k = 3 \times 14 = 42$ টাকা,

সেজলের লাভ $= 7k = 7 \times 14 = 98$ টাকা,

সোহমের লাভ $= 5k = 5 \times 14 = 70$ টাকা

উদা. সরিতাবেন, আয়েশা এবং মিনাক্ষী সকলে যথাক্রমে 2400, 5200 ও 3400 টাকা বিনিয়োগ করে একটি ব্যবসা শুরু করেছিলো। তাদের 50% লাভ হয়েছিলো তাহলে তাহারা সেই টাকা কি করে বিতরণ করবে ? লাভ না নিয়েই তারা আগামী বছরের জন্য আসল ব্যবহার করলো, তাহলে প্রত্যেকের আগামী বছরের জন্য অংশীদারী কতো টাকা হবে ?

সমাধান : মোট আসল $= 2400 + 5200 + 3400 = 11000$ টাকা

এই আসলে 50% লাভ হয়েছিলো।

$$\therefore \text{মোট লাভ} = \frac{11000 \times 50}{100} = 5500$$

আসলের অনুপাতে লাভ বিতরণ করতে হবে।

আমরা দুটি সংখ্যার অনুপাত উভয় সংখ্যার সামান্য গুণিতক দ্বারা ভাগ দিয়ে সহজ করে নেই। এইভাবে দুই অপেক্ষা অধিক সংখ্যার অনুপাতও সহজ করা যাবে।

অংশীদারীর অনুপাত = 2400 : 5200 : 3400

= 24 : 52 : 34 (100 দ্বারা ভাগ দিলে)

= 12 : 26 : 17 (2 দ্বারা ভাগ দিলে)

মনেকরি সরিতাবেনের লাভ =12p, আয়েশার লাভ = 26p, মিনাক্ষীর লাভ = 17p

$\therefore$ 12p + 26p + 17p = 55p = 5500 $\therefore$ p = $\frac{5500}{55}$ = 100

$\therefore$ সারিতাবেনের লাভ = 12 × 100 = 1200, আয়েশার লাভ = 26 × 100 = 2600 এবং

মিনাক্ষীর লাভ = 17 × 100 = 1700,

লাভ না নিয়ে আসলের লাভ মিলানোতে প্রত্যেকের নতুন আসল নির্ণয় করবো।

আগামী বছরের জন্য সরিতাবেনের আসল = 2400 + 1200 = ₹ 3600

আগামী বছরের জন্য আয়েশার আসল = 5200 + 2600 = ₹ 7800

আগামী বছরের জন্য মিনাক্ষীর আসল = 3400 + 1700 = ₹ 5100

এসো, চর্চা করি।

- উপরোক্ত উদাহরণে সরিতাবেন, মিনাক্ষী এবং আয়েশা এদের মধ্যে প্রত্যেকেই লাভ না নিয়ে নিজের টাকা বিনিয়োগ করেছিলো, তাহলে তাদের আগামী বছরের বিনিয়োগের অনুপাত নির্ণয় করো?

অনুশীলনী 39

1. সুরেশ এবং রমেশ 144000 টাকা বিনিয়োগ করে 4:5 অনুপাতে একটি ভূখন্ড ক্রয় করলো। কিছু বছর পর ভূখন্ড বিক্রয় করলে তাদের 20% লাভ হলো, তাহলে প্রত্যেকের কতো লাভ হলো?
2. বিরাট এবং সম্রাট যথাক্রমে 50000 টাকা ও 120000 টাকা বিনিয়োগ করে ব্যবসা শুরু করলো। এই ব্যবসায় তাদের 20% হানি হলো তাহলে প্রত্যেকের কতো হানি হলো?
3. সীতা, পিজুষ এবং অনিকেত মিলে সোলাপুর চাদর ও তোয়ালি বিক্রয় করার ব্যবসা 80000 টাকা বিনিয়োগ করে শুরু করলো। তারমধ্যে সীতার 30000 টাকা ও পিজুষের 12000 টাকা ছিলো। বছরের শেষে তাদের 24% লাভ হলো, তাহলে অনিকেতের অংশীদারী কতো ছিলো? অনিকেত লাভের কতো টাকা পেলো?
4. অ এবং ব উভয়ে মিলে লাভের 24500 টাকা 3:7 অনুপাতে বিতরণ করে নিয়েছিলো। প্রত্যেকেই পাওয়া লাভের টাকার 2% টাকা সৈনিক কল্যাণ তহবিলে দিয়েছিলো, তাহলে প্রত্যেক কল্যাণ তহবিলে কতো টাকা দিয়েছিলো?

5*. ব্যাবসার জন্য জয়া, সীমা, নিখিল ও নিলেশ 3:4:7:6 অনুপাতে 360000 টাকার অংশীদারী হয়। জয়ার আসল কতো টাকা ছিলো? তাদের এই ব্যবহারে 12% লাভ হয়েছিলো। তাহলে নিখিলের ভাগে কতো টাকা লাভ হবে?

10 ব্যাংক ও সরল সুদ

এসো একটু স্মরণ করি।

পয়সার ব্যবহার করা সরকারমান্য সংস্থা মানে ব্যাংক। ব্যাংকের দ্বারা পয়সার নিয়োজন অর্থাৎ আর্থিক নিয়োজন করা সহজ হয়। ব্যাংকে নগদ টাকা জমা করা ও নগদ টাকা বের করা প্রভৃতি ব্যবহার করা হয়। তারজন্য প্রথমে ব্যাংকে খাতা খোলার প্রয়োজন। ব্যাংকে বিভিন্ন ধরনের খাতা থাকে।

এসো জেনে নেই।

বিভিন্ন খাতা

✱ চালু খাতা (Current account)

চালু খাতা মূলত : ব্যবসায়ী ও প্রতিদিন পয়সার ব্যবহার করে এমন লোকদের জন্য হয়। এখানে খাতা ধারক একদিনে বহুবার লেনদেন করতে পারে। ব্যাংক এই খাতার জন্য পাসবুক এবং চাহিদা অনুসারে চেকবুক দেয়। এই ধরনের খাতায় ব্যাংক কোনো সুদ দেয় না। চেকের সাহায্যে ব্যংকে টাকা জমা করতে পারে বা ব্যাংক থেকে টাকা তুলতে পারে।

✱ বচত খাতা (Savings account)

খাতা ধারক নিশ্চিতরূপে টাকা ব্যাংকে জমা করে বচত খাতা খুলতে পারে। কিছু ব্যাংক এমন আছে যেখানে টাকা না ভরেও খাতা খোলা যায়। এই খাতায় প্রতিদিনের জমা টাকার আধারে ব্যাংক কিছু সুদ দেয় এবং নির্ধারিত সময়ের মধ্যে আমরা কতবার টাকা তুলতে পারি তার একটি সীমা থাকে। এই খাতার জন্য ব্যাংক পাসবুক ও চাহিদা অনুসারে চেকবুক দেয়।

✱ আবৃত্ত জমা খাতা (Recurring deposit account)

এই খাতায় প্রতিমাসে কতো জমা করতে হবে, তাহা খাতা ধারক নির্ধারিত করে। এই ধরনের জমা টাকার আধারে ব্যাংক সুদ দেয়। এই সুদ বচত খাতার সুদ থেকে বেশি হয়। এই খাতায় খাতা ধারকের অনিবার্য বচত হয়।

অনেক সময় ব্যাংকে সংযুক্ত খাতা থাকা সুবিধাজনক হয়। উদা. স্বামী-স্ত্রী, পালক ও সন্তান ইত্যাদি। তেমনি ব্যবসায়ের অংশীদার, হাউসিঙ্গ সোসাইটী, সেবাভাবী ন্যাস ইত্যাদির ব্যাংক খাতায় এক থেকে বেশি ব্যক্তির নামে হওয়া অতি আবশ্যক হয়।

✱ মেয়াদী জমা খাতা (Fixed deposit)

জমা কর্তা, টাকা নির্দিষ্ট মেয়াদীর জন্য ব্যাংকে জমা করতে পারে। এই ধরনের জমার উপরে ব্যাংক বচত খাতার অপেক্ষা বেশি সুদ দেয়। মেয়াদী জমা খাতায় প্রত্যেক ব্যাংকের সুদের হার ভিন্ন-ভিন্ন থাকে। জ্যেষ্ঠ নাগরিকদের নিয়মিত হার অপেক্ষা একটু বেশি সুদ দেওয়া হয়।

ক্রেডিট, এ.টি.এম / ডেবিট কার্ড : ব্যাংকে না গিয়ে নগদী টাকা প্রাপ্ত করার জন্য ATM (Automated teller machine) কার্ডের ব্যবহার হয়। নগদী টাকা ছাড়া ব্যবহার করার জন্য ক্রেডিট কার্ড এবং ডেবিট কার্ড ব্যবহার করা হয়।

এসো, চর্চা করি।

- তোমরা ব্যাংকের পাসবুক দেখেছো কি?

এখানে ব্যাংক পাসবুকের একটি পৃষ্ঠা দেওয়া আছে। তাহার মধ্যে লেখা ছাপানোগুলি পর্যবেক্ষণ করো।

অ.ক্র. पंक्ति क्र. LINE NO.	তারিখ दिनांक DATE	বিবরণ ब्यौरा PARTICULARS	চেক ক্রমাংক चेक क्रमांक CHEQUE No.	উত্তোলিত টাকা (বের করা টাকা) निकाली गई रकम AMOUNT WITHDRAWN	জমা করা টাকা जमा की गई रकम AMOUNT DEPOSITED	শেষ জমা बाकी जमा BALANCE
1.	2.2.2016	cash			1500.00	7000.00
2.	8.2.2016	cheque	232069		5000.00	12000.00
3.	12.2.2016	cheque	243965	3000.00		9000.00
4.	15.2.2016	self		1500.00		7500.00
5.	26.2.2016	interest			135.00	7635.00

- তারিখ 2.2.16 ব্যাংকে জমা করা টাকা ☐ টাকা শেষ জমা ☐ টাকা।
- তারিখ 12.2.16 চেক ক্রমাঙ্ক 243965 থেকে ☐ টাকা বার করা হলো শেষ জমা ☐ টাকা।
- তারিখ 26.2.16 ব্যাংক সুদ (interest) দিলো। তার জমা ☐ টাকা।

বচত খাতা ও আবৃত্ত খাতার জন্য পাসবুক হয়। সেই পাসবুকে তারিখ অনুসারে জমা করা পয়সা (টাকা) বার করা টাকা ও শেষ টাকার উল্লেখ থাকে।

উপক্রম : তোমাদের বাড়িতে কোনো জ্যেষ্ঠ ব্যক্তির অনুমতি নিয়ে তাহার পাসবুকের লেখা ছাপানোগুলি বুঝে নাও।

এসো, একটু স্মরণ করি।

সুবিদ্যা, কম্পিউটার ক্রয় হেতু প্র.শ.প্র.ব. 8 টাকা সুদের হারে ব্যাংক থেকে 1 বছরের জন্য 30000 টাকা ঋণ নিলো। সময় পূর্ণ হওয়ার পর তাকে তার টাকার অপেক্ষা 2400 টাকা বেশি দেওয়া লাগলো।

- এই ভিত্তিতে নিচে দেওয়া ছকে সংখ্যা লেখো।

আসল = ₹ ☐ , সুদের হার = ₹ ☐ , সুদ = ₹ ☐ , সময় = ₹ ☐ বছর

ব্যাংকে ফেরৎ দেওয়া মোট টাকা = 30000 + 2400 = ☐

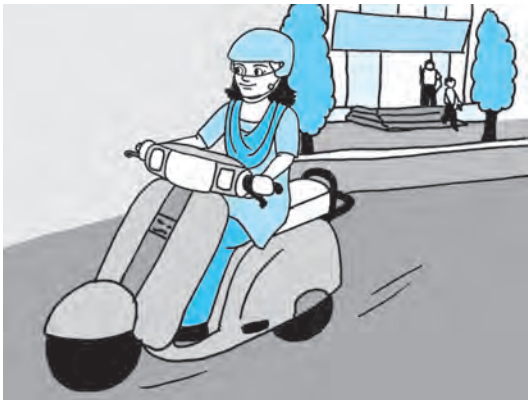
এসো জেনে নেই।

উপরোক্ত উদাহরণে সুবিদ্যা, মোট কতো টাকা ব্যাংকে জমা করলো তাহা সমাধান করার জন্য আসল এবং সুদের যোগফল করা হলো। তাহাকে সবৃদ্ধিমুল বলে।

আসল + সুদ = সবৃদ্ধিমুল

উদা. নেহা দুচাকী বাহন ক্রয় হেতু প্র.শ. প্র. ব. 12 টাকা সুদের হারে ব্যাংক থেকে 50000 টাকা ঋণ নিলো। এক বছর পরে সে ব্যাংকে কতো টাকা জমা করবে?

সমাধান : উপরোক্ত উদাহরণে মেয়াদী পূর্ণ হওয়ার পর ব্যাংকে মোট ফেরৎ দেওয়া টাকা বের করতে হবে অর্থাৎ সবৃদ্ধিমুল নির্ণয় করতে হবে। এখানে আসল 50000 টাকা। প্র.শ.প্র.ব. 12 টাকা সুদের হার হিসাবে অর্থাৎ 100 টাকার আসলে এক বছরের সুদ 12 টাকা।



সুদকে আসলের সঙ্গে অনুপাত দুই প্রকারে লিখে সমীকরণ প্রাপ্ত করবো।

ধরে নাও 50000 টাকা আসলের উপরে পাওয়া সুদ x টাকা।

100 টাকার আসলের উপরে পাওয়া সুদ 12 টাকা।

$$\frac{x}{50000} = \frac{12}{100}$$

$$\frac{x}{50000} \times 50000 = \frac{12}{100} \times 50000$$ (উভয় পক্ষকে 50000 দিয়ে গুণ করার পর)

$$x = 6000$$

(ব্যাংকে ফেরৎ দেওয়া টাকা) সবৃদ্ধিমুল = আসল + সুদ

= 50000 + 6000

∴ ব্যাংকে ফেরৎ দেওয়া টাকা = ₹ 56000

উদা. আকাশ প্র.শ.প্র.ব 8 টাকা সুদের হারে 25000 টাকা তিন বছরের জন্য ব্যাংকে জমা করলো, তাহলে সে প্রতি বছরে কতো টাকা সুদ পেলো? মোট কতো টাকা সুদ পেলো?

সমাধান : এই উদাহরণে আসল 25000 টাকা, সময় 3 বছর, সুদের হার 8%।

100 টাকা আসলের পরে 8 টাকা সুদ পাওয়া যায়। এইজন্য মেনে নিলাম আসল 25000 টাকায় 1 বছরে x টাকা সুদ পাওয়া যায়। সুদের আসলের সঙ্গে অনুপাত কি তা দেখি।

$$\frac{x}{25000} = \frac{8}{100}$$

$$\therefore \frac{x}{25000} \times 25000 = \frac{8}{100} \times 25000$$ (উভয় পক্ষকে 25000 দিয়ে গুণ করি)

$$\therefore x = 2000$$

আকাশ 1 বছরের জন্য 2000 টাকা সুদ পেলো।

আকাশ 3 বছরে মোট = 2000 × 3 = 6000 টাকা সুদ পেলো।

এসো জেনে নেই।

সাধারণ সুদের সমাধান করার সময় প্রায় একটি সূত্র ব্যবহার করা হয়। সেই সূত্রটি আমরা দেখবো।

প্রতি বছর আসল বজায় রেখে একই হার দ্বারা সুদের গণনা করা হয়। সেই গণনা কে সাধারণ সুদের গণনা বলা হয়। যদি 'অ' আসল 'স' বছরের জন্য এবং প্র.শ.প্র.ব সুদের হার 'হ' হয়, মোট কতো টাকা সুদ পাওয়া যাবে তাহা নির্ণয় করবো, মেনেনিলাম 'অ' আসলের পরে 1 বছরের সুদ 'ক'।

1 বছরের সুদ এবং আসলের অনুপাত দেখবো।

$\therefore \dfrac{ক}{অ} = \dfrac{হ}{100}$ $\quad \therefore ক = \dfrac{অ \times হ}{100}$

স বছরের সুদ $= ক \times স = \dfrac{অ \times হ \times স}{100}$

$\therefore$ মোট সুদ $= \dfrac{\text{আসল} \times \text{সুদের হার} \times \text{সময়}}{100}$

পূর্বের উদাহরণটি এই সূত্রের সাহায্যে সমাধান করবো।

উপরোক্ত উদাহরণে অ = 25000, হ = 8, স = 3

মোট সুদ $= \dfrac{অ \times হ \times স}{100}$

$= \dfrac{25000 \times 8 \times 3}{100}$

$= 6000$

অতএব মোট সুদ 6000 টাকা

আমি এটা বুঝতে পেরেছি।

মোট সুদ $= \dfrac{অ \times হ \times স}{100}$ এখানে অ = আসল, হ = সুদের হার স = সময় (বছর)।

উদা. $8\frac{1}{2}$ প্র.শ.প্র.ব সুদের হার হিসাবে সন্দিপভাই নিজের পুত্রের শিক্ষা হেতু 4 বছরের জন্য 120000 টাকা ব্যাংক থেকে শিক্ষা ঋণ নিলো। তাহলে সে সময় পূর্ণ হওয়ার পর ব্যাংককে মোট কতো টাকা ফেরৎ দিলো?

সমাধান : এই উদাহরণে আসল হলো 120000 টাকা সূত্র ব্যবহার করে সুদ নির্ণয় করবো।

অ = 120000, হ = 8.5, স = 4

$\therefore$ মোট সুদ $= \dfrac{অ \times হ \times স}{100} = \dfrac{120000 \times 8.5 \times 4}{100}$

$= \dfrac{120000 \times 85 \times 4}{100 \times 10}$

$= 120 \times 85 \times 4$

$= 40800$

ব্যাংকে ফেরৎ দেওয়া মোট টাকা অর্থাৎ সবৃদ্ধিমূল = 120000 + 40800 = 160800 টাকা দিয়েছিলো।

অনুশীলনী-40

1. রিহানা 1500 টাকা বিদ্যালয়ের সংরক্ষণাগারে 9 প্র.শ.প্র.ব সুদের হারে 2 বছরের জন্য জমা রাখলে, সে মোট কতো টাকা পাবে ?
2. জেঠালাল ব্যাংক থেকে 10 প্র.শ.প্র.ব. সুদের হারে 2,50,000 টাকা 5 বছরের জন্য গৃহ ঋণ নিলো। তাহলে তাকে প্রতি বছর কতো টাকা সুদ দিতে হবে ? তেমনি তাকে মোট কতো টাকা ব্যাংককে দিতে হবে ?

3*. শ্রীকান্ত 85,000 টাকা 7 প্র.শ.প.ব. সুদের হারে $2\frac{1}{2}$ বছরের জন্য বচত ব্যাংকে জমা করলো। সময় পূর্ণ হওয়ার পর সে সাধারণ সুদ হিসাবে কতো টাকা পাবে ?

4. সুদের যে কোনো হারে আসল 5000 টাকার 4 বছরে 1200 টাকা সুদ হয়। তাহলে ওই হারে ওই সময়ে আসল 15000 টাকার সুদ কতো হবে ?
5. পঙ্কজ 10 প্র.শ.প্র.ব সুদের হারে 2 বছরের জন্য 1,50,000 টাকা ব্যাংকে মেয়াদি জমা হিসাবে রাখলো। তাহলে সময় পূর্ণ হওয়ার পর সে মোট কতো টাকা ফেরৎ পাবে ?

এসো জেনে নেই।

আসল, সময়, সুদের হার, সবৃদ্ধিমুল থেকে যে কোনো তিনটি রাশি দেওয়া থাকলে চতুর্থ রাশি নির্ণয় করা। সূত্র দ্বারা নির্ণয় করা রাশির সংখ্যা হেতু অক্ষর মেনে নিয়ে সমীকরণ তৈরি করে উদাহরণ সমাধান করা যায়।

উদা. যদি আসল = 25000 টাকা, সবৃদ্ধিমুল = 31,000 টাকা, সময় = 4 বছর তাহলে সুদের হার কতো ?

এখানে সবৃদ্ধিমুল - আসল = মোট সুদ

31000 - 25000 = 6000

আসল = 25000 টাকা, সময় = 4 বছর, সুদ = 6000 টাকা

এখন আমরা সূত্রের সাহায্যে সুদের হার বের করবো। ধরে নাও সুদের হার = হ।

$$\text{সাধারণ সুদ} = \frac{\text{আসল} \times \text{সুদের হার} \times \text{সময়}}{100}$$

$$6000 = \frac{25000 \times \text{হ} \times 4}{100} \qquad \text{হ} = \frac{6000 \times 100}{25000 \times 4}$$

$\therefore$ হ = 6 $\qquad\qquad \therefore$ সুদের হার প্র.শ.প্র.ব. 6 টাকা

উদা. 9 প্র.শ.প্র.ব সুদের হারে উন্মেষ 5 বছরের জন্য কিছু টাকা সাধারণ সুদ হিসাবে ঋণ নিলো। সে সময়ের শেষে মোট 17400 টাকা জমা করলো। তাহলে সে কতো টাকা ঋণ নিয়েছিলো ?

$$\text{সুদ} = \frac{\text{আসল} \times \text{সুদের হার} \times \text{সময়}}{100}$$

এই সূত্রটি উদাহরণ সমাধান করার জন্য শীঘ্রই ব্যবহার করা যায় না।

কারণ সুদ এবং আসল কোনোটাই জানা নেই, কিন্তু আসল 100 টাকায় 5 বছরের সুদ 45 টাকা হয়। অতএব 100 + 45 = 145 টাকা সবৃদ্ধিমুল হয়। এখন আসল এবং সবৃদ্ধিমুল এদের অনুপাত দুই প্রকারে গঠন করে সমীকরণ প্রাপ্ত করবো।

উন্মেষের আসল অ যদি হয় $\frac{\text{অ}}{17400} = \frac{100}{145}$

$\therefore$ অ $= \frac{100 \times 17400}{145} = 12000$

$\therefore$ উন্মেষের ঋণ 12000 টাকা ছিলো।

এসো চর্চা করি।

- সূত্র ব্যবহার করে নতুন প্রকারের সমীকরণ তৈরি করে এই উদাহরণ সমাধান করা যাবে কি?

অনুশীলনী-41

1. 1700 টাকার, প্র.ব.প্র.ব. যে কোনো হারে, 2 বছরের সুদ 340 টাকা হয়, তাহলে সুদের হার .... হবে।
   (i) 12 % (ii) 15 % (iii) 4 % (iv) 10 %

2. 3000 টাকার বিশিষ্ট হারে, বিশিষ্ট সময়ে 600 টাকা সুদ হয়, তাহলে 1500 টাকার ওই হারে ওই সময়ে সুদ কতো টাকা হবে?
   (i) 300 টাকা (ii) 1000 টাকা (iii) 700 টাকা (iv) 500 টাকা

3. 9 প্র.শ.প্র.ব. বর্ষ সুদের হারে জাবেদ 12000 টাকা কিছু বছরের জন্য ব্যাংকে রাখলো। সে প্রতি বছর সুদের টাকা বের করে নিত। সে কতো বছরে সুদ সহ মোট 17400 টাকা পাবে?

4*. লতাবেন গৃহ উদ্যোগ শুরু করার জন্য কিছু টাকা 10 প্র.শ.প্র.ব সুদের হারে $2\frac{1}{2}$ বছরের জন্য ব্যাংক থেকে ঋণ নিলো। সে ঋণ শোধ করার জন্য মোট 10250 টাকা সুদ দিলো, তাহলে সে মোট কতো টাকা ঋণ নিয়েছিলো?

5. নিচে দেওয়া সারণীর শূন্যস্থান পূর্ণ করো।

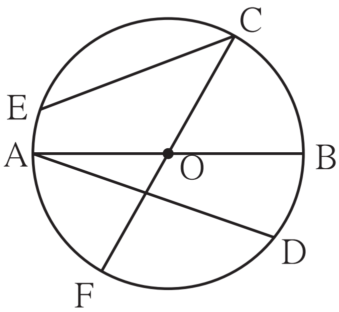
	আসল	সুদের হার (প্র.শ.প্র.ব)	সময় (কাল)	সুদ	সবৃদ্ধিমুল
(i)	4200	7%	3 বছর	......	......
(ii)	......	6%	4 বছর	1200	......
(iii)	8000	5%	......	800	......
(iv)	......	5%	......	6000	18000
(v)	......	$2\frac{1}{2}$ %	5 বছর	2400	......

উপক্রম : ✸ বিবিধ ব্যাংকে গিয়ে সাক্ষাৎকার করে সেখানকার বিভিন্ন খাতায় দেওয়া সুদ জেনে নাও।

✸ বিদ্যালয়ে শিক্ষকের সাহায্যে সংরক্ষণাগার (বচত ব্যাংক) তৈরি করো। সেখানে খাতা খুলে আর্থিক বচত করো।

11 বৃত্ত

এসো, একটু স্মরণ করি।



• প্রদত্ত আকৃতিতে বৃত্তের ব্যাসার্ধ, জ্যা এবং ব্যাস চেনো এবং তাদের নাম নিম্ন তালিকায় লেখো।

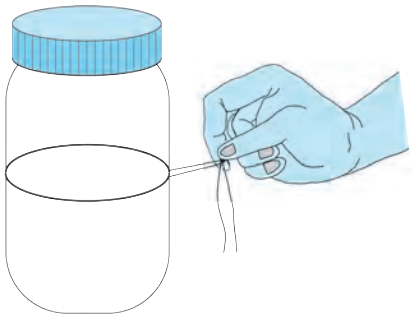
ব্যাসার্ধ				
জ্যা				
ব্যাস				

বৃত্তের পরিধি (Circumference of a circle)

কৃতি I কাগজের উপর একটি বেলনাকার জলের বোতল রেখে তার সাহায্যে একটি বৃত্ত আঁকো। সুতার সাহায্যে বৃত্তের পরিধি মাপো।

কৃতি II সুতার সাহায্যে চুড়ির পরিধি মাপো।

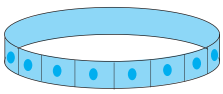
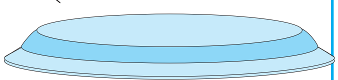
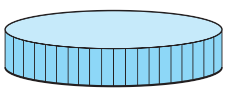
কৃতি III সুতার সাহায্যে একটি বৃত্তাকার বস্তুর পরিধি মাপো।



এসো জেনে নেই।

পরিধি ও ব্যাসের সম্পর্ক

কৃতি I নিচে দেওয়া বস্তুর পরিধি ও ব্যাস মেপে পরিধির ব্যাসের সাথে অনুপাত তালিকায় লেখো।

অ.ক্র.	বস্তু	পরিধি	ব্যাস	পরিধির ব্যাসের সাথে অনুপাত
1.	 চুড়ি	19 সেমি	6 সেমি	$\frac{19}{6} = 3.16$
2.	বৃত্তাকারের উল্টা প্লেট 	....	....	....
3.	 বোয়েমের ঢাক্কন	....	....	....

তালিকার সাহায্যে পরিধির ব্যাসের সাথে অনুপাত যাচাই করো। তুমি কি বুঝতে পারবে ?

যে কোনো বৃত্তের পরিধির ব্যাসের সাথে অনুপাত তিগুণ অপেক্ষা কিঞ্চিৎ বেশি হয়ে প্রায় স্থির থাকে। এই স্থির সংখ্যা π (পাই) এই গ্রীক বর্ণের দ্বারা দেখানো হয়। মহৎ গণিতজ্ঞ দ্বারা অথক পরিশ্রমের ফলে প্রমাণ করা হয়েছে যে π এই সংখ্যা মূলদ সংখ্যা নয়। ব্যবহারে π এর মান $\frac{22}{7}$ বা 3.14 নেওয়া হয়। উদাহরণে π এর মান দেওয়া না থাকলে $\frac{22}{7}$ নেওয়া হয়।

ব্যাসার্ধ 'r', ব্যাস 'd' এবং পরিধি 'c' হলে পরিধি $\frac{\text{পরিধি (c)}}{\text{ব্যাস (d)}} = \pi$ অর্থাৎ $c = \pi d$

কিন্তু $d = 2r \quad \therefore c = \pi \times 2r$ অর্থাৎ $c = 2\pi r$

উদা. একটি বৃত্তের ব্যাস 14 সেমি, তাহলে তার পরিধি বের করো।

সমাধান : বৃত্তের ব্যাস : $d = 14$ সেমি

বৃত্তের পরিধি $= \pi d$

$$c = \frac{22}{7} \times 14$$

$\therefore$ বৃত্তের পরিধি = 44 সেমি

উদা. একটি বৃত্তের ব্যাসার্ধ 35 সেমি তাহলে তার পরিধি বের করো।

সমাধান : বৃত্তের ব্যাসার্ধ : $r = 35$ সেমি

বৃত্তের পরিধি $= 2\pi r$

$$c = 2 \times \frac{22}{7} \times 35$$

$\therefore$ বৃত্তের পরিধি = 220 সেমি

উদা. একটি বৃত্তের পরিধি 198 সেমি, তাহলে তার ব্যাসার্ধ ও ব্যাস বের করো।

সমাধান : বৃত্তের পরিধি, $c = 2\pi r$

$$198 = 2 \times \frac{22}{7} \times r$$

$$r = 198 \times \frac{1}{2} \times \frac{7}{22}$$

ব্যাসার্ধ = 31.5 সেমি

$\therefore$ ব্যাস $= 2 \times 31.5 = 63$ সেমি

উদা. একটি বৃত্তের পরিধি 62.80 সেমি, $\pi = 3.14$ এই মান নিয়ে বৃত্তের ব্যাস বের করো।

সমাধান : বৃত্তের পরিধি, $c = \pi d$

$$62.80 = 3.14 \times d$$

$$\frac{62.80}{3.14} = d$$

$$20 = d$$

$\therefore$ ব্যাস = 20 সেমি

উদা. একটি বৃত্তাকার ভূখন্ডের ব্যাসার্ধ 7.7 মি.। এই ভূখন্ডের চারিপাশে তারের তিনপ্রত বেড়া লাগানোর জন্য প্রতি মিটার 50 টাকা দর হিসাবে কতো টাকা খরচ হবে?

সমাধান: বৃত্তাকার ভূখন্ডের পরিধি $= 2\pi r = 2 \times \frac{22}{7} \times 7.7 = 48.4$

একবার বেড়া লাগানোর জন্য লাগা তারের দৈর্ঘ্য = 48.4 মি.

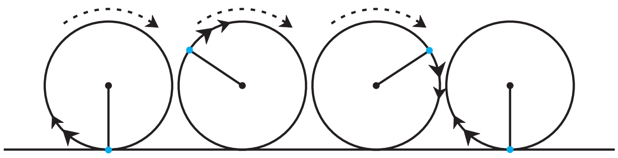
একবার বেড়া লাগানোর খরচ = তারের দৈর্ঘ্য × প্রতি মিটার দর

$= 48.4 \times 50$

$= 2420$ টাকা

$\therefore$ তিনবার বেড়া লাগানোর খরচ $= 3 \times 2420 = 7260$ টাকা

উদা. একটি বাসের চাকার ব্যাস 0.7 মি., দুটি গ্রামের মধ্যে 22 কিমি দূরত্ব পূর্ণ করতে চাকার কতো বার ঘুরতে হবে ?



সমাধান : চাকার পরিধি $= \pi d$

$= \frac{22}{7} \times 0.7$

$= 2.2$ মি.

সদৃশ রাশির অনুপাত জানতে হলে তার একক সমান হওয়া প্রয়োজন।

22 কিমি = 22 × 1000 = 22000 মিটার

2.2 মি. দূরত্ব পূর্ণ হলে চাকার 1 ফেরা (চক্কর) পূর্ণ হয়। (1 ফেরা = 1 পরিধি)

চাকার মোট ফেরা (চক্কর) $= \frac{\text{দূরত্ব}}{\text{পরিধি}} = \frac{22000}{2.2} = \frac{220000}{22} = 10000$

22 কিমি দূরত্ব পূর্ণ করতে বাসের চাকার 10000 ফেরা (চক্কর) লাগবে।

অনুশীলনী-42

1. নিম্ন তালিকা পূর্ণ করো।

অ.ক্র.	ব্যাসার্ধ (r)	ব্যাস (d)	পরিধি (c)
(i)	7 সেমি	....	....
(ii)	....	28 সেমি	....
(iii)	....	....	616 সেমি
(iv)	....	....	72.6 সেমি

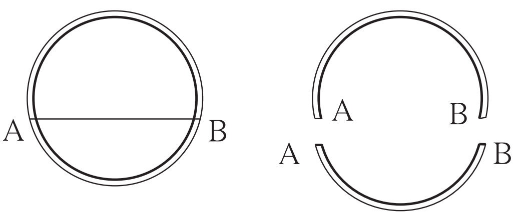
2. একটি বৃত্তের পরিধি 176 সেমি হলে, তার ব্যাসার্ধ বের করো।

3. একটি বৃত্তাকার বাগানের ব্যাসার্ধ 56 মি. । বাগানের চারিপাশে চারবার তারের বেড়া লাগানোর জন্য 40 টাকা প্রতি মিটার দর হিসাবে মোট কতো টাকা খরচ হবে ?

4. একটি গরুগাড়ীর চাকার ব্যাস 1.4 মিটার । ওই গরুগাড়ীকে 1.1 কিলোমিটার দূরত্ব পূর্ণ করতে চাকার কতো ফেরা হবে ?

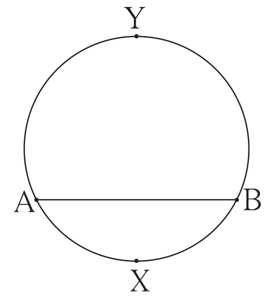
এসো একটু স্মরণ করি।

বৃত্তখন্ড (Arc of the circle)



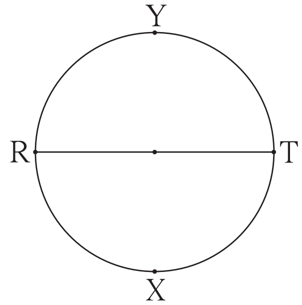
সংলগ্ন আকৃতিতে প্লাস্টিকের বৃত্তাকার চুড়ি দেখানো হয়েছে। মনে করো এই চুড়ি A এবং B বিন্দুতে ভেঙ্গেছে । তাহলে চিত্রের চুড়ির প্রত্যেক টুকড়োকে বৃত্তের সম্বন্ধে কি বলবে ?

এসো জেনে নেই।



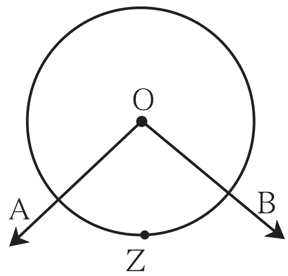
সংলগ্ন আকৃতিতে জ্যা AB এরজন্য বৃত্তের দুই ভাগ হয়েছে। এরমধ্যে চাপ AXB হলো ছোটো চাপ এইজন্য এই চাপকে **উপচাপ** বলে। চাপ AYB হলো বড়ো চাপ (বৃত্তখন্ড)। এইজন্য এই চাপকে **অধিচাপ** বলে। উপচাপ AXB এই চাপকে চাপ AB এইভাবে লেখা হয়।

যে দুটি চাপের অন্তবিন্দু সমান হয় এবং উভয় বৃত্তচাপ মিলে পূর্ণ বৃত্ত তৈরি হয়, ওই বৃত্তচাপ একে অপরের সন্নিহিত চাপ হয়। এইজন্য চাপ AYB এবং চাপ AXB একে-অপরের সন্নিহিত চাপ।



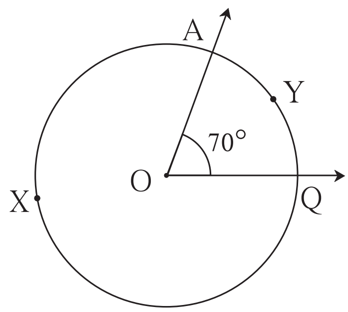
সংলগ্ন আকৃতিতে জ্যা RT বৃত্তের ব্যাস। ব্যাসের কারণে বৃত্তের দুটি সমান চাপ তৈরি হয়। তাহাকে **অর্ধবৃত্তচাপ** বলে, এটা মনে রেখো।

কেন্দ্র কোণ এবং চাপের মাপ (Central angle and Measure of an arc)



সংলগ্ন আকৃতিতে, বিন্দু 'O' বৃত্তের কেন্দ্র বিন্দু এবং ∠AOB এর শীর্ষ বিন্দু। যে কোণের শীর্ষবিন্দু বৃত্তের কেন্দ্র বিন্দু হয় ওই কোণকে কেন্দ্রিয় কোণ বলে। আকৃতিতে ∠AOB চাপ AZB এর সম্পর্কিত কেন্দ্রিয় কোণ হয়। **বৃত্ত চাপ দ্বারা তৈরি কেন্দ্রিয় কোণের মাপ ওই বৃত্ত চাপের মাপের সমান হয়।**

✸ উপচাপের মাপ

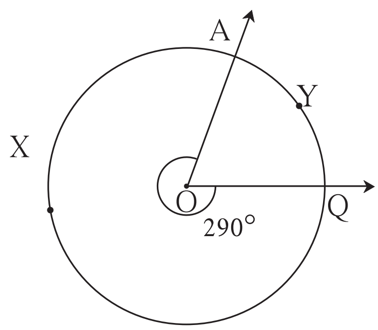


সংলগ্ন আকৃতিতে কেন্দ্রিয় কোণ ∠AOQ কোণের মাপ 70° ।

∴ উপচাপ AYQ এর মাপ 70° ।

∴ m(চাপ AYQ) = 70° এইভাবে লিখতে হয়।

✸ অধিচাপের মাপ

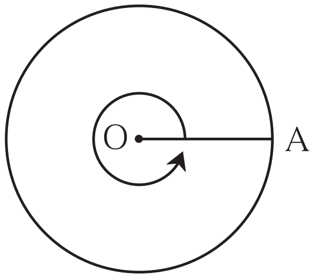


অধিচাপের মাপ = 360°– সন্নিহিত উপচাপের মাপ

∴ আকৃতিতে অধিচাপ AXQ এর মাপ

360° – 70° = 290° ।

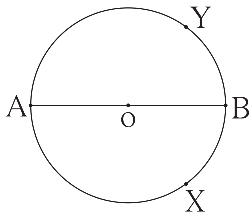
✸ বৃত্তের মাপ (Measure of Circle)



সংলগ্ন আকৃতিতে দেখানো OA বৃত্তের ব্যাসার্ধ । OA এই ব্যাসার্ধটি ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে একটি পূর্ণ কোণে ঘুরতে থাকে। সেই সময় তৈরি হওয়া কোণ 360° মাপের হয়। তার প্রান্তবিন্দু A একটি পূর্ণ বৃত্ত তৈরি করে।

$\therefore$ পূর্ণ বৃত্তের মাপ 360° হয়ে থাকে।

✸ অর্ধবৃত্তের মাপ



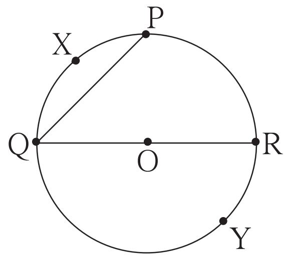
আকৃতি অনুসারে অর্ধবৃত্ত চাপ AXB এবং অর্ধবৃত্ত চাপ AYB এদের মাপ নির্ণয় করো।

আমি এটা বুঝতে পেরেছি।

- উপচাপের মাপ তার অন্তর্ভুক্ত কেন্দ্রিয় কোণের মাপের সমান হয়ে থাকে।
- অধিচাপের মাপ = 360° − সন্নিহিত উপচাপের মাপ
- অর্ধবৃত্তের মাপ 180° হয়ে থাকে।

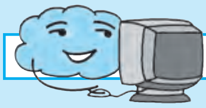
অনুশীলনী-43

1. সঠিক বিকল্প নির্ণয় করো।
   যদি চাপ AXB এবং চাপ AYB একে অপরের সন্নিহিত চাপ হয় এবং m(চাপ AXB) = 120° হয় তাহলে m(চাপ AYB) = ?
   (i) 140° (ii) 60° (iii) 240° (iv) 160°



2. সংলগ্ন আকৃতিতে 'O' কেন্দ্রের বৃত্তে কিছু বৃত্তচাপ দেখানো হয়েছে। তারমধ্যে থেকে বৃত্তের উপচাপ, অধিচাপ এবং অর্ধবৃত্ত চাপের নাম লেখো।

3. সংলগ্ন আকৃতিতে 'O' কেন্দ্রের বৃত্তে উপচাপ PXQ এর মাপ 110° হলে, অধিচাপ PYQ এর মাপ বের করো।



ICT Tools or Links

Geogebra Software এর ব্যবহার করে কেন্দ্রিয় কোণ এবং চাপের বিবিধ মাপের পরস্পর সম্পর্ক move option এর ব্যবহার করে দেখো।

12 পরিসীমা ও ক্ষেত্রফল

একটু স্মরণ করি।

পরিসীমা (Perimeter)

বদ্ধ আকৃতিতে সকল বাহুর দৈর্ঘ্যের যোগফল, ওই আকৃতির পরিসীমা হয়ে থাকে।

বহুভূজের পরিসীমা = তার সকল বাহুর দৈর্ঘ্যের যোগফল।

$\therefore$ বর্গের পরিসীমা = 4 $\times$ বাহু

a বাহুর বর্গের পরিসীমা = $4a$

আয়তের পরিসীমা = 2 দৈর্ঘ্য + 2 প্রস্থ

l দৈর্ঘ্য ও b প্রস্থ আয়তের পরিসীমা = $2l + 2b$

উদা. একটি আয়তের পরিসীমা 64 সেমি, দৈর্ঘ্য 17 সেমি হলে তার প্রস্থ কতো হবে?

সমাধান: মনে করি আয়তের প্রস্থ x সেমি।

2 দৈর্ঘ্য + 2 প্রস্থ = পরিসীমা

2 (দৈর্ঘ্য + প্রস্থ) = 64

$$2(17 + x) = 64$$

$$\frac{2(17+x)}{2} = \frac{64}{2}$$

$$17 + x = 32$$

$$x = 15$$

আয়তের প্রস্থ হলো 15 সেমি।

উদা. 28 সেমি দৈর্ঘ্য ও 20 সেমি প্রস্থ একটি আয়তের পরিসীমা একটি বর্গের পরিসীমার সমান হয়। তাহলে বর্গের বাহুর দৈর্ঘ্য কতো?

সমাধান: আয়তের পরিসীমা = 2 (দৈর্ঘ্য + প্রস্থ)

= 2 (28 + 20)

= 96

বর্গের বাহু a হলে $4a = 96$

বর্গের পরিসীমা = 96

$$4a = 96$$

$$\therefore\ a = \frac{96}{4} = 24$$

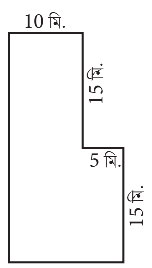
বর্গের বাহুর দৈর্ঘ্য 24 সেমি।

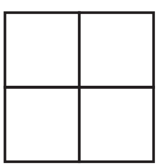
অনুশীলনী-44

1. একটি আয়তের দৈর্ঘ্য ও প্রস্থকে দ্বিগুণ করলে, ওই আয়তের পরিসীমা মূল আয়তের পরিসীমার কতোগুণ হবে?

2. একটি বর্গের বাহুর দৈর্ঘ্য তিনগুণ করলে তার পরিসীমা মূল বর্গের পরিসীমার কতোগুণ হবে?

3. সংলগ্ন আকৃতিতে মাঠের দৈর্ঘ্য ও প্রস্থের মাপ দেওয়া হয়েছে। তাহলে মাঠের পরিসীমা বের করো।





4. এক মিটার দৈর্ঘ্য বর্গাকার কাপড়ের টুকরো নিয়ে আকৃতিতে দেখানো অনুসারে চারটি সমান আকারের রুমাল তৈরি করা হলো। তাহলে রুমালের সকল প্রান্তে লেস লাগানোর জন্য কতটুকু লেস প্রয়োজন?

একটু স্মরণ করি।

ক্ষেত্রফল (Area)

- বর্গের ক্ষেত্রফল = বাহু × বাহু = (বাহু)^2
- আয়তের ক্ষেত্রফল = দৈর্ঘ্য × প্রস্থ = $l \times b$

ক্ষেত্রফল বর্গমিটার, বর্গসেমি, বর্গকিমি প্রভৃতি এককে মাপা হয়।

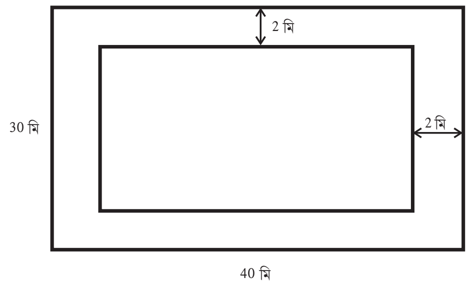
কৃতি I

খো-খো, কবড্ডী এই খেলার জন্য তৈরি করা মাঠে যদি সম্ভব হয় তাহলে টেনিস কোর্ট, ব্যাডমিন্টন কোর্টের দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ মাপো। তার পরিসীমা ও ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।

কৃতি II

অনিরুদ্ধের ঘরের একটি দেওয়ালে রং করতে হবে। দেওয়ালের দৈর্ঘ্য 7 মিটার ও প্রস্থ 5 মিটার 1120 টাকা প্রতি বর্গমিটার হিসাবে রং করতে হলে, পেন্টারকে রং করতে মোট কতো টাকা দিতে হবে, নির্ণয় করো।

উদা. একটি আয়তাকার বাগানের দৈর্ঘ্য 40 মিটার ও প্রস্থ 30 মিটার। বাগানের ভিতরে তার সিমানা ঘিরে 2 মিটার চওড়া পথ আছে। ওই পথ 25 সেমি × 20 সেমি আকারের টাইল্স লাগানোর জন্য কতোগুলি টাইল্স আনতে হবে?



টাইল্স লাগানোর অংশের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করবো।

বাগানের ক্ষেত্রফল = 40 × 30 = 1200 বর্গ মি.

পথ ছেড়ে দিয়ে বাগানের ক্ষেত্রফল = 36 × 26 = 936 বর্গ মি.

∴ টাইল্স লাগানো অংশের ক্ষেত্রফল = 1200 − 936 = 264 বর্গ মিটার

100 সেমি = 1 মি.
25 সেমি = $\frac{25}{100}$ মি.

প্রত্যেক টাইল্সের ক্ষেত্রফল = $\frac{25}{100} \times \frac{20}{100} = \frac{1}{20}$ বর্গ মি.

একটি টাইল্সের ক্ষেত্রফল $\frac{1}{20}$ বর্গ মি. হলে 264 বর্গ মি. অংশে লাগানো টাইল্সের সংখ্যা নির্ণয় করবো।

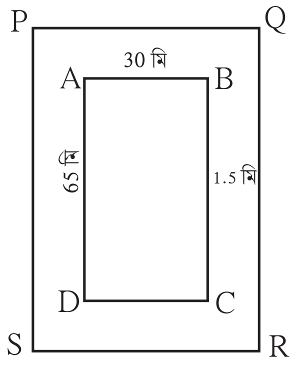
টাইল্সের সংখ্যা = $\frac{\text{জায়গার ক্ষেত্রফল}}{\text{একটি টাইলসের ক্ষেত্রফল}}$

$= 264 \div \frac{1}{20}$

$= 264 \times 20 = 5280$

অর্থাৎ 5280টি টাইল্স আনতে হবে।

উদা. একটি আয়তাকার খেলার মাঠের দৈর্ঘ্য 65 মিটার ও প্রস্থ 30 মিটার। এই মাঠের চারপাশে বাইরের অংশে সীমা জুড়ে 1.5 মিটার চওড়া পথ রয়েছে। ওই পথের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।



সমাধান : খেলার মাঠের আকার হলো আয়তাকার।

মনে করি □ ABCD একটি খেলার মাঠ। মাঠের চারপাশে বাইরে দিয়ে 1.5 মিটার চওড়া পথ আছে।

□ ABCD এর সকল বাহু থেকে 1.5মিটার দূরত্ব রাখলে আর একটি আয়ত □ PQRS পাওয়া যায়।

আয়ত PQRS এর দৈর্ঘ্য = 65 + 1.5 + 1.5 = 68 মিটার

আয়ত PQRS এর প্রস্থ = 30 + 1.5 + 1.5 = 33 মিটার

পথের ক্ষেত্রফল = আয়ত PQRS এর ক্ষেত্রফল – আয়ত ABCD এর ক্ষেত্রফল

= 68 × 33 – 65 × 30 = ☐ – ☐ = ☐ বর্গ মিটার

এসো, চর্চা করি।

- উপরোক্ত উদাহরণে পথের ক্ষেত্রফল অন্য পদ্ধতিতে বের করা যাবে কি?

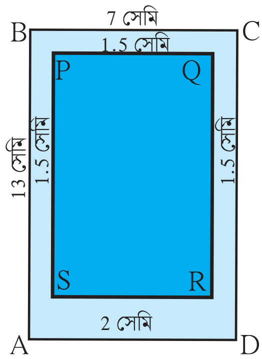
উদা. একটি মোবাইলের দৈর্ঘ্য 13 সেমি এবং প্রস্থ 7 সেমি। তার উপর স্ক্রিন PQRS কে চিত্রে দেখানো হয়েছে। তাহলে ওই স্ক্রিনের ক্ষেত্রফল কতো?

সমাধান: মনে করি মোবাইলের ধার দিয়ে আয়ত ABCD তৈরি হয়েছে। তার দৈর্ঘ্য 13 সেমি ও প্রস্থ 7 সেমি। AB, BC ও DC থেকে 1.5 সেমি এবং DA থেকে 2 সেমি দূরত্ব রাখলে আয়ত PQRS তৈরি হয়।

আয়ত PQRS এর দৈর্ঘ্য = ☐ সেমি

আয়ত PQRS এর প্রস্থ = ☐ সেমি

স্ক্রিনের ক্ষেত্রফল = আয়ত PQRS এর ক্ষেত্রফল = ... × .... = ☐ বর্গ সেমি



কৃতি

বিবিধ আকারের মোবাইল দেখো। তার স্ক্রিনের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।

অনুশীলনী-45

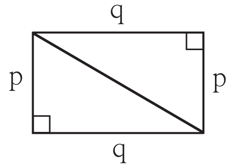
1. একটি বর্গের বাহুর দৈর্ঘ্য 12 সেমি হলে, তার ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।
2. একটি আয়তের দৈর্ঘ্য 15 সেমি ও প্রস্থ 5 সেমি হলে আয়তের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।
3. একটি আয়তের ক্ষেত্রফল 102 বর্গসেমি। আয়তের দৈর্ঘ্য 17 সেমি হলে, আয়তের পরিসীমা কতো হবে?

4*. একটি বর্গের বাহুর দৈর্ঘ্য তিনগুণ করলে, তার ক্ষেত্রফল মূল বর্গের ক্ষেত্রফলের কতোগুণ হবে?

এসো জেনে নেই।

সমকোণ ত্রিভূজের ক্ষেত্রফল (Area of right angled triangle)

কৃতি সমান মাপের দুটি সমকোণ ত্রিভূজ কেটে নাও। তাহা সংলগ্ন চিত্রে দেখানো অনুসারে মিলাও। দেখা যাবে যে একটি আয়ত তৈরি হয়েছে। ত্রিভূজের সমকোণ তৈরি করা বাহুর দৈর্ঘ্য হলো p ও q এবং তার অনুরূপ আয়তের বাহু। সংলগ্ন চিত্রে দেখা যায় যে, আয়তের ক্ষেত্রফল = 2 × সমকোণ ত্রিভূজের ক্ষেত্রফল



$\therefore$ 2 × সমকোণ ত্রিভূজের ক্ষেত্রফল = $p \times q$

$\therefore$ সমকোণ ত্রিভূজের ক্ষেত্রফল = $\dfrac{p \times q}{2}$

আমি এটা বুঝতে পেরেছি।

- সমকোণ ত্রিভূজের ক্ষেত্রফল = $\dfrac{1}{2}$ × সমকোণ তৈরি করা বাহুর দৈর্ঘ্যের গুণফল

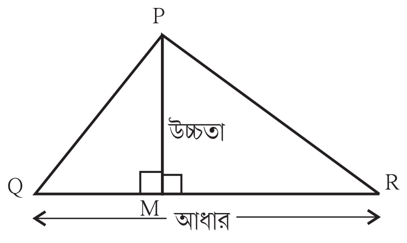
সমকোণ ত্রিভূজে সমকোণ তৈরি করা দুটি বাহু থেকে একটি বাহুকে আধার মানলে দ্বিতীয় বাহু তার উচ্চতা হয়।

সমকোণ ত্রিভূজের ক্ষেত্রফল = $\dfrac{1}{2}$ × আধার × উচ্চতা

ΔABC যে কোনো ত্রিভূজ হোক না কেনো আধারের জন্য যে কোনো একটি বাহু নেওয়া হয়। ওই বাহুর সম্মুখ শীর্ষবিন্দু থেকে আধারের উপর টানা লম্বের মাপ ওই ত্রিভূজের উচ্চতা হয়।

ΔPQR যে কোনো প্রকারের ত্রিভূজ হোক না কেনো তার আধার QR নিলাম। P থেকে আধার QR -এর উপরে PM লম্ব টানলাম।

চিত্র 1: বিন্দু M, রেখাংশ QR–এর উপর স্থিত।



ΔPMR ও ΔPMQ হলো সমকোণ ত্রিভূজ।

$A(\Delta PQR) = A(\Delta PMQ) + A(\Delta PMR)$

$= \dfrac{1}{2} \times l(QM) \times l(PM) + \dfrac{1}{2} \times l(MR) \times l(PM)$

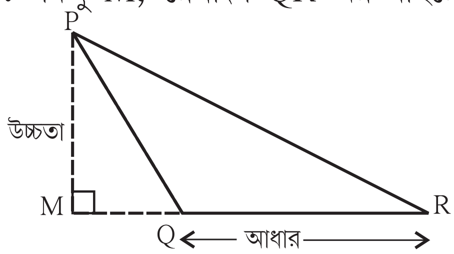
$= \dfrac{1}{2}\ [l(QM) + l(MR)] \times l(PM)$

$= \dfrac{1}{2}\ l(QR) \times l(PM)$

= $\dfrac{1}{2}$ × আধার × উচ্চতা

$A(\Delta PQR)$ = $\dfrac{1}{2}$ × আধার × উচ্চতা

চিত্র 2: বিন্দু M, রেখাংশ QR–এর বাইরে স্থিত।



ΔPMR ও ΔPMQ হলো সমকোণ ত্রিভূজ।

$A(\Delta PQR) = A(\Delta PMR) - A(\Delta PMQ)$

$= \dfrac{1}{2} \times l(MR) \times l(PM) - \dfrac{1}{2} \times l(MQ) \times l(PM)$

$= \dfrac{1}{2}\ [l(MR) - l(MQ)] \times l(PM)$

$= \dfrac{1}{2} \times l(QR) \times l(PM)$

= $\dfrac{1}{2}$ × আধার × উচ্চতা

$A(\Delta PQR)$ = $\dfrac{1}{2}$ × আধার × উচ্চতা

আমি এটা বুঝতে পেরেছি।

$$\text{ত্রিভূজের ক্ষেত্রফল} = \frac{1}{2} \times \text{আধার} \times \text{উচ্চতা}$$

উদা. একটি সমকোণ ত্রিভূজের সমকোণ তৈরি করা বাহুর দৈর্ঘ্য 3.5 সেমি ও 4.2 সেমি হলে ওই ত্রিভূজের ক্ষেত্রফল বের করো।

সমাধান: সমকোণ ত্রিভূজের ক্ষেত্রফল

$= \frac{1}{2} \times$ সমকোণ তৈরি করা বাহুর গুণফল

$= \frac{1}{2} \times 3.5 \times 4.2$

$= 7.35$ বর্গসেমি

উদা. একটি ত্রিভূজের আধার 5.6 সেমি ও উচ্চতা 4.5 সেমি হলে, ওই ত্রিভূজের ক্ষেত্রফল বের করো ?

সমাধান: ত্রিভূজের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times$ আধার $\times$ উচ্চতা

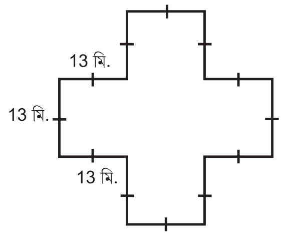
$= \frac{1}{2} \times 5.6 \times 4.5$

$= 12.6$ সেমি^{2}

(বর্গসেমিকে সেমি^{2} এইভাবেও লেখা যায়।)

অনুশীলনী–46

1. একটি দিনদর্শিকার (ক্যালেন্ডার) পৃষ্ঠার দৈর্ঘ্য 45 সেমি ও প্রস্থ 26 সেমি হলে, ওই পৃষ্ঠার ক্ষেত্রফল কতো হবে ?
2. একটি ত্রিভূজের উচ্চতা 3.6 সেমি ও আধার 4.8 সেমি হলে, ওই ত্রিভূজের ক্ষেত্রফল কতো হবে ?
3. একটি আয়তাকার ভূখন্ডের দৈর্ঘ্য 75.5 মিটার ও প্রস্থ 30.5 মিটার। 11000 টাকা প্রতি বর্গমিটার দর হিসাবে ওই ভূখন্ডের দাম কতো হবে ?
4. একটি আয়তাকার সভাগৃহের দৈর্ঘ্য 12 মিটার ও প্রস্থ 6 মিটার। ওই সভাগৃহে 30 সেমি বাহু থাকা বর্গাকার টাইল্‌স লাগাতে হলে, ওই সভাগৃহে মোট কতোগুলি টাইল্‌সের প্রয়োজন ? যদি 15 সেমি বাহু থাকা বর্গাকার টাইল্‌স নেওয়া হয়, তাহলে কতোগুলি টাইল্‌সের প্রয়োজন হবে ?
5. সংলগ্ন চিত্রে দেখানো মাপ অনুসারে বাগানের পরিসীমা ও ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।

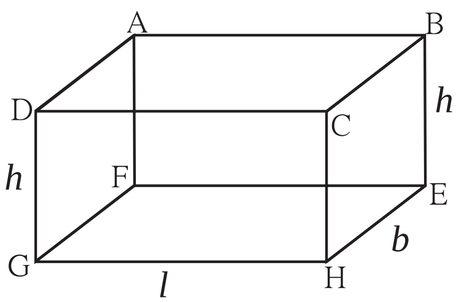


এসো জেনে নেই।

পৃষ্ঠতল (Surface area)

যে কোনো ত্রিমিতীয় বস্তুর সম্পূর্ণ পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফলের যোগফল অর্থাৎ ওই বস্তুর পৃষ্ঠতল হয়ে থাকে।

✸ আয়তঘনের পৃষ্ঠতল



- আয়তঘনের ছয়টি পৃষ্ঠ হয়ে থাকে।
- প্রত্যেক পৃষ্ঠ আয়তকার হয়ে থাকে।
- সম্মুখে পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল সমান হয়ে থাকে।
- প্রত্যেকটি ধার তাকে জোড়া অন্য দুটি ধারের উপরে লম্ব হয়ে থাকে।
- আয়তঘনের অনুভূমি পৃষ্ঠতলের দৈর্ঘ্য l ও প্রস্থ b দ্বারা দেখানো হয়ে থাকে। উর্দ্ধ পৃষ্ঠের উচ্চতা h দ্বারা দেখানো হয়ে থাকে।

আয়ত ABCD-এর ক্ষেত্রফল = আয়ত GHEF-এর ক্ষেত্রফল = দৈর্ঘ্য × প্রস্থ = $l \times b$

আয়ত ADGF-এর ক্ষেত্রফল = আয়ত BCHE-এর ক্ষেত্রফল = প্রস্থ × উচ্চতা = $b \times h$

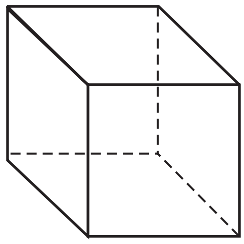
আয়ত CHGD-এর ক্ষেত্রফল = আয়ত ABEF-এর ক্ষেত্রফল = দৈর্ঘ্য × উচ্চতা = $l \times h$

আয়তঘনের সম্পূর্ণ পৃষ্ঠতল = সকল আয়তের ক্ষেত্রফলের যোগফল

আয়তঘনের সম্পূর্ণ পৃষ্ঠতল = 2 (দৈর্ঘ্য × প্রস্থ + প্রস্থ × উচ্চতা + দৈর্ঘ্য × উচ্চতা)

$= 2\ (l \times b + b \times h + l \times h) = 2\ (lb + bh + lh)$

✸ ঘনকের পৃষ্ঠতল



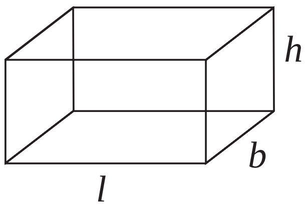
- ঘনকের 6টি পৃষ্ঠ হয়ে থাকে।
- প্রত্যেক পৃষ্ঠ বর্গাকার হয়ে থাকে।
- সকল পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল সমান হয়ে থাকে।
- বর্গের বাহুকে l মানা হয়।
- ঘনকের এক পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল = বর্গের ক্ষেত্রফল
- ঘনকের সম্পূর্ণ পৃষ্ঠতল = 6 বর্গের ক্ষেত্রফলের যোগফল

  = 6 × বাহু^{2}

  $= 6 \times l^2$

উদা. 1.5 মিটার দৈর্ঘ্য, 1.2 মিটার প্রস্থ ও 1.3 মিটার উচ্চতা এই মাপের লোহার চাদরের আয়তঘনের আকারের বাক্স তৈরি করতে কতোটুকু লোহার চাদর প্রয়োজন হবে?

সমাধান: বাক্সের দৈর্ঘ্য = l = 1.5 মিটার, প্রস্থ = b = 1.2 মিটার, উচ্চতা = h = 1.3 মিটার



বাক্সের পৃষ্ঠতল $= 2\ (l \times b + b \times h + l \times h)$

$= 2\ (1.5 \times 1.2 + 1.2 \times 1.3 + 1.5 \times 1.3)$

$= 2\ (1.80 + 1.56 + 1.95)$

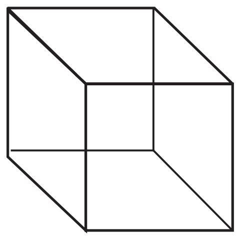
$= 2\ (5.31)$

= 10.62 বর্গ মি.

বাক্স তৈরি করতে 10.62 বর্গ মিটার লোহার চাদর প্রয়োজন হবে।

উদা. একটি ঘনকের বাক্সের বাহুর দৈর্ঘ্য 0.4 মি.। 50 টাকা প্রতি বর্গমিটার দর হিসাবে ওই বাক্সের বাইরের পৃষ্ঠে রং করতে কতো খরচ হবে?

সমাধান: বাহু = l = 0.4 মিটার



ঘনকের সম্পূর্ণ পৃষ্ঠতল $= 6 \times (l)^2$

$= 6 \times (0.4)^2$

$= 6 \times 0.16 = 0.96$ বর্গ মি.

1 বর্গমিটার রং করতে খরচ 50 টাকা।

∴ 0.96 বর্গ মী রং করতে খরচ = 0.96×50

= 48 টাকা

বাক্স রং করতে মোট 48 টাকা খরচ হবে।

অনুশীলনী-47

1. ঘনকের বাহুর দৈর্ঘ্য নিচে দেওয়া আছে। তার সম্পূর্ণ পৃষ্ঠতল নির্ণয় করো।
   (i) 3 সেমি (ii) 5 সেমি (iii) 7.2 মি. (iv) 6.8 মি. (v) 5.5 মি.
2. নিচে আয়তঘনের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা ক্রমাগত দেওয়া আছে। তার সম্পূর্ণ পৃষ্ঠতল নির্ণয় করো।
   (i) 12 সেমি, 10 সেমি, 5 সেমি. (ii) 5 সেমি, 3.5 সেমি, 1.4 সেমি.
   (iii) 2.5 সেমি, 2 মি., 2.4 মি. (iv) 8 মি., 5 মি., 3.5 মি.
3. একটি দেশলাইয়ের দৈর্ঘ্য 4 সেমি, প্রস্থ 2.5 সেমি ও উচ্চতা 1.5 সেমি। দেশলাইয়ের বাইরের অংশে রঙ্গিন কাগজ লাগাতে হলে মোট কতোটুকু কাগজের প্রয়োজন হবে?
4. বাগানের শাক-সব্জী ট্রলী দ্বারা নিয়ে যাওয়ার জন্য 1.5 মিটার দৈর্ঘ্য, 1 মিটার প্রস্থ ও 1 মিটার উচ্চতা এই মাপের ঢাকনছাড়া লোহার চাদরের বাক্স তৈরি করতে হবে। এরজন্য মোট কতোটুকু চাদরের প্রয়োজন? ওই বাক্সকে ভিতর ও বাইরে দিয়ে জং না ধরে এমন রং দিয়ে রং করতে হবে। 150 টাকা প্রতি বর্গমিটার দর হিসাবে বাক্স রং করতে কতো টাকা খরচ হবে?

গণিতের খেলা

কিছু তিন অঙ্কের এমন সংখ্যা আছে যে, ওই অঙ্কের গুণফল দ্বারা ওই সংখ্যায় সম্পূর্ণ ভাগ যায়।

উদা. (i) সংখ্যা 175 নাও, $1 \times 7 \times 5 = 35$, $\frac{175}{35} = 5$

(ii) সংখ্যা 816 নাও, $8 \times 1 \times 6 = 48$, $\frac{816}{48} = 17$

(iii) সংখ্যা 612 নাও, $6 \times 1 \times 2 = 12$, $\frac{612}{12} = 51$

135, 312,672 হলো এই ধরণের সংখ্যা।
এই ধরণের আরো সংখ্যা খোঁজ করো।

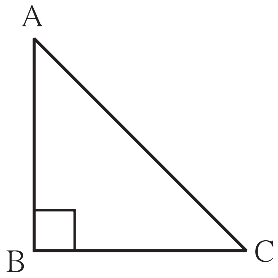
13 পিথাগোরাসের উপপাদ্য

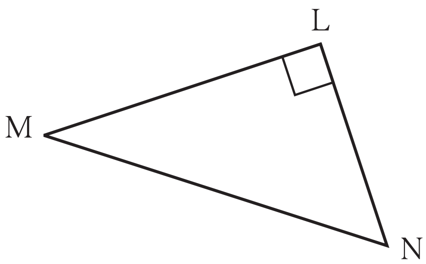
একটু স্মরণ করি।

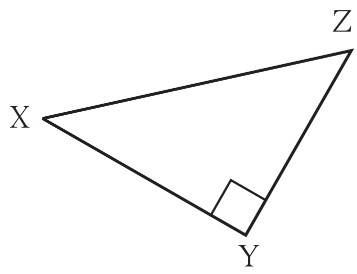
সমকোণ ত্রিভূজ (Right angled triangle)

আমরা পরিচিত, যে ত্রিভূজের একটি কোণ সমকোণ থাকে, সেই ত্রিভূজকে সমকোণ ত্রিভূজ বলে এবং সমকোণ ত্রিভূজের সম্মুখ বাহুকে কর্ণ বলে।

- নিচে দেওয়া সমকোণ ত্রিভূজের কর্ণের নাম লেখো।







ΔABC এর কর্ণ ☐ ΔLMN এর কর্ণ ☐ ΔXYZ এর কর্ণ ☐

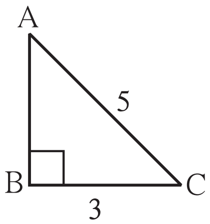
পিথাগোরাসের উপপাদ্য (Theorem of Pythagoras)

একজন মহৎ ইনানী গণিতজ্ঞ পিথাগোরাস ইসা পূর্ব ষষ্ঠ খ্রীষ্টাব্দের সময় হয়েছিলো। তার গণিত বিষয়ে বড়ো অবদান ছিলো। তার গণিত শেখানোর পদ্ধতি অনেক জনপ্রিয় ছিলো। তিনি অনেক শিষ্য করেছিলেন।

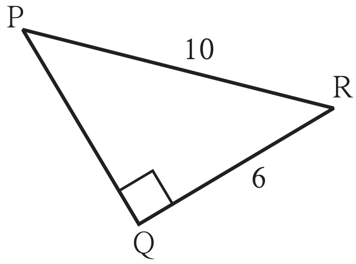
কিছু দেশের লোকেরা বহু পূর্বে থেকে সমকোণ ত্রিভূজের একটি উপপাদ্য হতে পরিচিত ছিলো। ভারতের 'শুল্বসূত্র' এই গ্রন্থেও উল্লেখ করা আছে। সর্বপ্রথমে পিথাগোরাস এই উপপাদ্যের যৌক্তিক উৎপত্তি করেছিলো। এইজন্য এই উপপাদ্যকে তার নাম দেওয়া হলো। **সমকোণ ত্রিভূজের কর্ণের বর্গ অপর দুটি বাহুর বর্গের যোগফলের সমান হয়ে থাকে**। এটাই হলো পিথাগোরাসের উপপাদ্য।

কৃতি কর্ণ এবং সমকোণ তৈরি করা একটি বাহু দেওয়া আছে। নিচে আকৃতিতে দেওয়া মাপের সাহায্যে সমকোণ ত্রিভূজ তৈরি করো ও তার তৃতীয় বাহুর মাপ লেখো। পিথাগোরাসের উপপাদ্যের যাচাই করো।

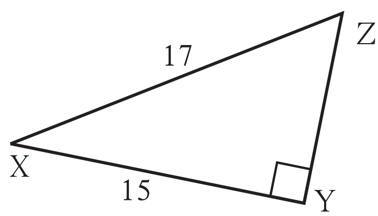
(i)



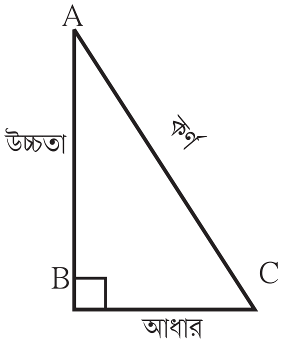
(ii)



(iii)



এসো জেনে নেই।



সংলগ্ন আকৃতির সাহায্যে পিথাগোরাসের উপপাদ্য নিম্নলিখিত প্রকারে লেখা যায়। ΔABC-এর মধ্যে $\angle B$ সমকোণ হলে,

$[l(AC)]^2 = [l(AB)]^2 + [l(BC)]^2$

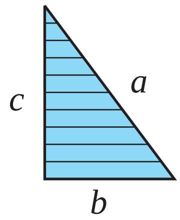
সাধারণতঃ সমকোণ ত্রিভূজের সমকোণ তৈরি করা বাহু থেকে একটি বাহুকে আধার ও দ্বিতীয় বাহুকে উচ্চতা মানা হয়।

এইজন্য এই উপপাদ্যকে (কর্ণ)^2 = (আধার)^2 + (উচ্চতা)^2 এইভাবে লেখা হয়।

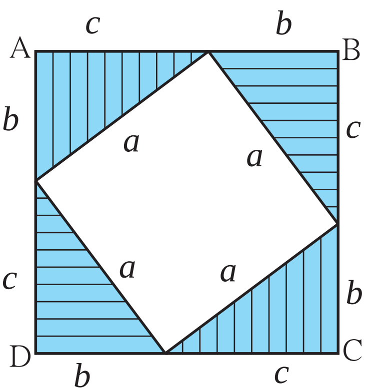
পিথাগোরাসের উপপাদ্যের যাচাই করার জন্য নিম্ন কৃতি করো।

কৃতি একটি শক্ত কাগজকে সমান মাপে ৪টি সমকোণ ত্রিভূজ হয় এইভাবে কাটো। তার বাহুর দৈর্ঘ্য কিছুই হতে পারে। মনে করি, ওই ত্রিভূজের কর্ণ 'a' একক, সমকোণ তৈরি করা বাহু 'b' একক এবং 'c' একক।

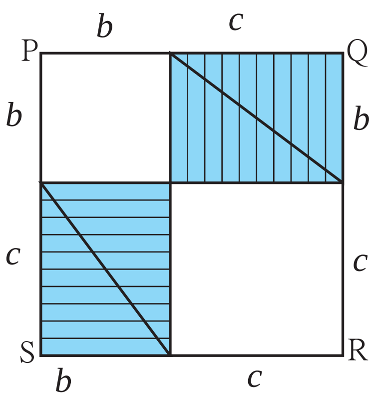
ওই ত্রিভূজের ক্ষেত্রফল $\frac{bc}{2}$, এটা মনে রেখো।



এখন আলাদা একটি শক্ত কাগজের উপর (b + c) একক থাকা বাহুর দুটি বর্গ কাঠপেন্সিল দ্বারা আঁকো। চিত্র অনুসারে প্রথমে কেটে রাখা ৪টি ত্রিভূজ থেকে 4টি ত্রিভূজকে বর্গ ABCD-এর মধ্যে এবং অবশিষ্ট 4টি ত্রিভূজকে বর্গ PQRS এর মধ্যে রাখো। ত্রিভূজ দ্বারা ঢেকে রাখা অংশকে রেখাঙ্কিত করো।



আকৃতি (i)



আকৃতি (ii)

চিত্রগুলির নিরীক্ষণ করো। আকৃতি (i) এর মধ্যে ফাঁকা জায়গায় 'a' বাহু থাকা একটি বর্গ তৈরি হয়েছে। আকৃতি (ii) এর মধ্যে ফাঁকা জায়গায় 'b' এবং 'c' বাহু থাকা দুটি বর্গ তৈরি হয়েছে।

উভয় বর্গের রেখাঙ্কিত করা অংশ সমান অর্থাৎ চারটি সমকোণ ত্রিভূজের ক্ষেত্রফলের সমান হয়ে থাকে।

চিত্র (i) এর মধ্যে বর্গ ABCD-এর ক্ষেত্রফল = $a^2 + 4 \times$ সমকোণ ত্রিভূজের ক্ষেত্রফল

$$= a^2 + 4 \times \frac{1}{2} bc$$

$$= a^2 + 2bc$$

আকৃতি (ii) এরমধ্যে বর্গ PQRS-এর ক্ষেত্রফল $= b^2 + c^2 + 4 \times$ সমকোণ ত্রিভূজের ক্ষেত্রফল

$$= b^2 + c^2 + 4 \times \frac{1}{2} bc$$

$$= b^2 + c^2 + 2bc$$

বর্গ ABCD-এর ক্ষেত্রফল = বর্গ PQRS-এর ক্ষেত্রফল

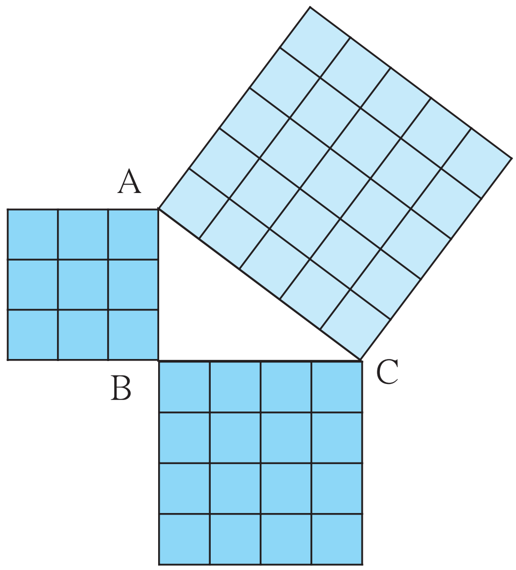
$$\therefore a^2 + 2bc = b^2 + c^2 + 2bc$$

$$\therefore a^2 = b^2 + c^2$$

এসো, চর্চা করি।

- আকৃতি (i)-এরমধ্যে ফাঁকা বর্গের প্রত্যেক কোণ সমকোণ, তাহা কোণমাপকের ব্যবহার না করে দেখা যাবে কি ?

কৃতি একটি শক্ত কাগজের উপর 3 সেমি, 4 সেমি ও 5 সেমি এই মাপের একটি সমকোণ ত্রিভূজ তৈরি করো। প্রত্যেক বাহুর উপর একটি বর্গ তৈরি করো। প্রত্যেক বর্গের ক্ষেত্রফল বের করে, পিথাগোরাসের উপপাদ্যের যাচাই করো।



পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে সমকোণ ত্রিভূজের দুটি বাহু দেওয়া থাকলে তৃতীয় বাহু বের করা যায়।

উদা. ΔABC-এর মধ্যে $\angle C = 90°$, $l(AC) = 5$ সেমি ও $l(BC) = 12$ সেমি হলে, $l(AB) = ?$

সমাধান : সমকোণ ত্রিভূজ ABC এর মধ্যে $\angle C = 90°$ এইজন্য বাহু AB হলো কর্ণ।

পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে,

$$l(AB)^2 = l(AC)^2 + l(BC)^2$$

$$= 5^2 + 12^2$$

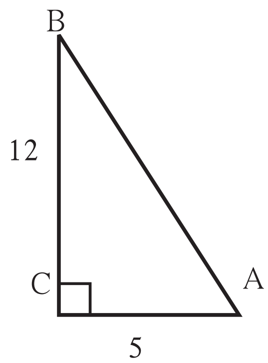
$$= 25 + 144$$

$$\therefore l(AB)^2 = 169$$

$$\therefore l(AB)^2 = 13^2$$

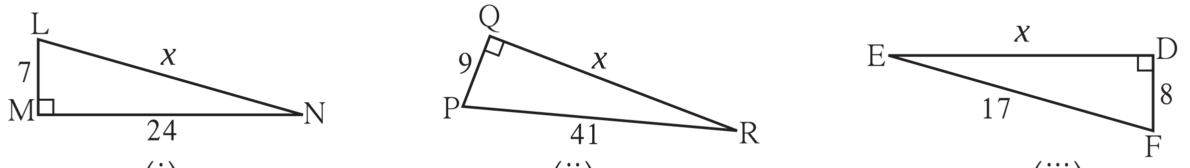
$$\therefore l(AB) = 13$$

$\therefore$ রেখাংশ AB-এর দৈর্ঘ্য = 13 সেমি



অনুশীলনী-48

1. প্রদত্ত আকৃতিগুলি দেখো এবং 'x' এর মান বের করো।



(i) (ii) (iii)

2. সমকোণ ΔPQR-এর মধ্যে $\angle P = 90^\circ$ যদি $l(PQ) = 24$ সেমি এবং $l(PR) = 10$ সেমি হয়, তাহলে রেখাংশ QR-এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় করো।
3. সমকোণ ΔLMN-এর মধ্যে $\angle M = 90^\circ$ যদি $l(LM) = 12$ সেমি এবং $l(LN) = 20$ সেমি হয়, তাহলে রেখাংশ MN-এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় করো।
4. 15 মিটার লম্বা একটি মই ভূমি থেকে 9 মিটার উঁচুতে অবস্থিত জানালা স্পর্শ করেছে। তাহলে দেওয়াল এবং মই-এর পাদদেশটির মধ্যের দূরত্ব নির্ণয় করো।

এসো জেনে নেই।

স্বাভাবিক সংখ্যার ত্রিক-এর মধ্যে যদি বড়ো সংখ্যার বর্গ অপর দুটি সংখ্যার বর্গের যোগফলের সমান হয়, তাকে **পিথাগোরাসের ত্রিক** বলে। যে ত্রিভূজের বাহুর দৈর্ঘ্য ত্রিক-এর সংখ্যা অনুসারে দেখানো হয়, সেই ত্রিভূজ সমকোণ ত্রিভূজ হয়।

উদা. (7,24,25)এই সংখ্যাগুলি পিথাগোরাসের ত্রিক কি?

7, 24, 25 প্রত্যেক সংখ্যার বর্গ করে দেখবো।

$7^2 = 49,\ 24^2 = 576,\ 25^2 = 625$

$\therefore\ 49 + 576 = 625$

$\therefore\ 7^2 + 24^2 = 25^2$

$\therefore$ 7, 24 ও 25 এই সংখ্যাগুলি হলো পিথাগোরাসের ত্রিক।

উপক্রম : 1 থেকে 50 এই সংখ্যাসমূহের সংখ্যা থেকে পিথাগোরাসের ত্রিকগুলি খোঁজ করো।

অনুশীলনী-49

1. নিচে কিছু ত্রিক দেওয়া আছে, তার থেকে পিথাগোরাসের ত্রিক কোণগুলি নির্ণয় করো।

(i) 3, 4, 5 (ii) 2, 4, 5

(iii) 4, 5, 6 (iv) 2, 6, 7

(v) 9, 40, 41 (vi) 4, 7, 8

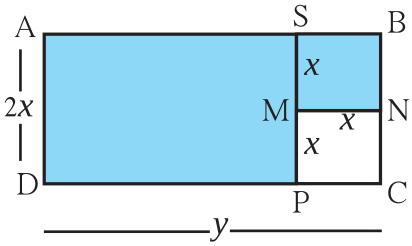
2. নিচে কিছু ত্রিভূজের বাহুর দৈর্ঘ্য দেওয়া আছে। এই তথ্যের সাহায্যে কোন ত্রিভূজ সমকোণ ত্রিভূজ, তাহা খোঁজ করো।

(i) 8, 15, 17 (ii) 11, 12, 15 (iii) 11, 60, 61 (iv) 1.5, 1.6, 1.7

(v) 40, 20, 30

14 বীজগাণিতিক সূত্রাবলি

একটু স্মরণ করি



সংলগ্ন চিত্রে আয়ত ABCD দেখানো হয়েছে। এই আয়তের দৈর্ঘ্য 'y' একক ও প্রস্থ $(2x)$ একক। এই আয়তাকার অংশের x একক থাকা বর্গ কেটে আলাদা করা হয়েছে। রঙ্গিন অংশের ক্ষেত্রফল বের করার জন্য বীজগাণিতিক চলরাশি ক্রিয়ার ব্যবহার করতে হবে। আয়ত ABCD এর ক্ষেত্রফল A($\square$ABCD) এইভাবেও লেখা যায়।

রঙ্গিন অংশের ক্ষেত্রফল $= A(\square ABCD) - A(\square MNCP)$

$= 2xy - x^2$

রঙ্গিন অংশের ক্ষেত্রফল $= A(\square ASPD) + A(\square SBNM)$

$= (y - x) \times 2x + x^2$

$= 2xy - 2x^2 + x^2$

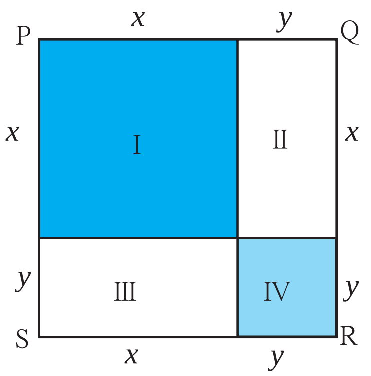
$= 2xy - x^2$

এসো জেনে নেই।

বর্গবিস্তার

বীজগাণিতিক চলরাশির গুণফলের গুণ করার পর প্রাপ্ত রাশি ওই গুণফলের বিস্তার হয়ে থাকে। বিশিষ্ট প্রকারের কিছু বীজগাণিতিক চলরাশির বিস্তার সহজে লিখতে পারি, তারজন্য সূত্র তৈরি করা হয়। এইরকম কিছু সূত্র আমরা দেখবো।

কৃতি I



- সংলগ্ন চিত্রে $\square$PQRS এই বর্গের বাহু হলো $(x + y)$।

  $\therefore A(\square PQRS) = (x + y)^2$

  বর্গ PQRS কে I, II, III, IV এই আয়তগুলিতে বিভাজন করা হয়েছে।

  বর্গ PQRS-এর ক্ষেত্রফল আয়ত I, II, III, IV -এর ক্ষেত্রফলের যোগফলের বরাবর হবে।

$\therefore$ A ($\square$PQRS) = A (আয়ত I) + A (আয়ত II) + A (আয়ত III) + A (আয়ত IV)

$(x + y)^2 = x^2 + xy + xy + y^2 = x^2 + 2xy + y^2$

$\therefore \quad (x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

এখন $(x + y)^2$ এই বীজগাণিতিক চলরাশির গুণফল নির্ণয় করবো।

$(x + y)(x + y) = x(x + y) + y(x + y)$

$= x^2 + xy + yx + y^2 \qquad \therefore \quad (x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

$(x + y)$ এই দ্বিপদীর বর্গ করার পর প্রাপ্ত বীজগাণিতিক চলরাশি, ক্ষেত্রফলের মাপের পরে প্রাপ্ত রাশির সমান হয়ে থাকে। $\therefore \quad (x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ হলো দ্বিপদীর বর্গবিস্তারের সূত্র।

কৃতি II সংলগ্ন চিত্রে 'a' বাহু থাকা PQRS একটি বর্গ। এই বর্গকে 4টি আয়তে বিভাজন করা হয়েছে। যেমন $(a - b)$ বাহুর বর্গ, 'b' বাহুর বর্গ এবং $(a - b)$ ও b বাহু থাকা 2টি আয়ত।

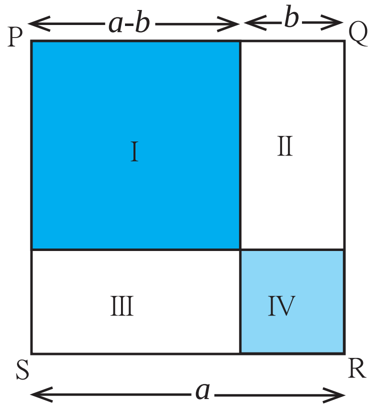
A (বর্গ I) + A (আয়ত II) + A (আয়ত III) + A (বর্গ IV) = A (□PQRS)

$$(a - b)^2 + (a - b)\,b + (a - b)\,b + b^2 = a^2$$

$$(a - b)^2 + 2ab - 2b^2 + b^2 = a^2$$

$$(a - b)^2 + 2ab - b^2 = a^2$$

$$\therefore\ (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$



বীজগাণিতিক চলরাশির গুণ করে সূত্র তৈরি করবো।

$$(a - b)^2 = (a - b) \times (a - b)$$
$$= a\,(a - b) - b\,(a - b)$$
$$= a^2 - ab - ab + b^2$$
$$= a^2 - 2ab + b^2$$

আমি এটা বুঝতে পেরেছি।

- $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

বর্গবিস্তার সূত্রে a এবং b এদের পরিবর্তে যে কোনো সংখ্যা নিয়ে তার যাচাই করা যেতে পারে।

যেমন, $a = 5, b = 3$ হলে,

$(a + b)^2 = (5 + 3)^2 = 8^2 = 64$

$a^2 + 2ab + b^2 = 5^2 + 2 \times 5 \times 3 + 3^2$

$= 25 + 30 + 9 = 64$

$(a - b)^2 = (5 - 3)^2 = 2^2 = 4$

$a^2 - 2ab + b^2 = 5^2 - 2 \times 5 \times 3 + 3^2$

$= 25 - 30 + 9 = 4$

নিম্নলিখিত মান নিয়ে বর্গবিস্তার সূত্রের যাচাই করো।

(i) $a = -7$, $b = 8$ (ii) $a = 11$, $b = 3$ (iii) $a = 2.5$, $b = 1.2$

বিস্তার করো।

উদা. $(2x + 3y)^2$

$= (2x)^2 + 2(2x) \times (3y) + (3y)^2$

$= 4x^2 + 12xy + 9y^2$

উদা. $(5x - 4)^2$

$= (5x)^2 - 2(5x) \times (4) + 4^2$

$= 25x^2 - 40x + 16$

উদা. $(51)^2$

$= (50 + 1)^2$

$= 50^2 + 2 \times 50 \times 1 + 1 \times 1$

$= 2500 + 100 + 1$

$= 2601$

উদা. $(98)^2$

$= (100 - 2)^2$

$= 100^2 - 2 \times 100 \times 2 + 2^2$

$= 10000 - 400 + 4$

$= 9604$

অনুশীলনী-50

1. বিস্তার করো।

(i) $(5a + 6b)^2$ (ii) $\left(\frac{a}{2}+\frac{b}{3}\right)^2$ (iii) $(2p - 3q)^2$ (iv) $\left(x-\frac{2}{x}\right)^2$

(v) $(ax + by)^2$ (vi) $(7m - 4)^2$ (vii) $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2$ (viii) $\left(a-\frac{1}{a}\right)^2$

2. $(8 - \frac{1}{x})$ এই দ্বিপদীর বর্গ কোনটি? সঠিক বিকল্পটির চয়ন করো।

(i) $64 - \frac{1}{x^2}$ (ii) $64 + \frac{1}{x^2}$ (iii) $64 - \frac{16}{x} + \frac{1}{x^2}$ (iv) $64 + \frac{16}{x} + \frac{1}{x^2}$

3. নিচে দেওয়া কোন রাশির বর্গবিস্তার হলো, $m^2n^2 + 14mnpq + 49p^2q^2$ তাহা বলো?

(i) $(m + n)(p + q)$ (ii) $(mn - pq)$ (iii) $(7mn + pq)$ (iv) $(mn + 7pq)$

4. বিস্তার সূত্রের ব্যবহার করে মান নির্ণয় করো।

(i) $(997)^2$ (ii) $(102)^2$ (iii) $(97)^2$ (iv) $(1005)^2$

এসো জেনে নেই।

✲ $(a + b)$ $(a - b)$ এর বিস্তার

$$\begin{aligned}(a + b)(a - b) &= (a + b) \times (a - b)\\ &= a(a - b) + b(a - b)\\ &= a^2 - ab + ba - b^2\\ &= a^2 - b^2\\ (a + b)(a - b) &= a^2 - b^2\end{aligned}$$

আমি এটা বুঝতে পেরেছি।

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

উদা. $(3x + 4y)(3x - 4y) = (3x)^2 - (4y)^2 = 9x^2 - 16y^2$

উদা. $102 \times 98 = (100 + 2)(100 - 2) = (100)^2 - (2)^2 = 10000 - 4 = 9996$

অনুশীলনী-51

1. বিস্তার সূত্র ব্যবহার করে গুণফল নির্ণয় করো।

(i) $(x + y)(x - y)$ (ii) $(3x - 5)(3x + 5)$

(iii) $(a + 6)(a - 6)$ (iv) $\left(\frac{x}{5}+6\right)\left(\frac{x}{5}-6\right)$

2. বিস্তার সূত্রের ব্যবহার করে মান বের করো।

(i) 502×498 (ii) 97×103 (iii) 54×46 (iv) 98×102

এসো জেনে নেই।

বীজগাণিতিক চলরাশির উৎপাদক।

আমরা অখন্ড সংখ্যার উৎপাদক বের করা শিখেছি। এখন বীজগাণিতিক চলরাশির উৎপাদক বের করার অভ্যাস করবো। প্রথমে একপদীর উৎপাদক নির্ণয় করবো।

$15 = 3 \times 5$ অর্থাৎ 3 ও 5 হলো সংখ্যা 15 এর উৎপাদক।

তেমনি $3x = 3 \times x$ অর্থাৎ 3 ও x হলো সংখ্যা $3x$ এর উৎপাদক।

$5t^2$ এই রাশি দেখো। $5t^2 = 5 \times t^2 = 5 \times t \times t$

$1, 5, t, t^2, 5t, 5t^2$ এগুলি সব $5t^2$ এর উৎপাদক

$6\, ab^2 = 2 \times 3 \times a \times b \times b$

যদি সম্ভব হয় তাহলে একপদীর উৎপাদক বের করবার সময় প্রথমে ধ্রুবকের উৎপাদক বের করবে। তারপর চলরাশির উৎপাদক বের করবে।

অনুশীলনী-52

⊙ নিচে দেওয়া রাশির মৌলিক উৎপাদক নির্ণয় করে গুণফল রূপে লেখো।

(i) $201\, a^3 b^2$ (ii) $91\, xyt^2$ (iii) $24\, a^2 b^2$ (iv) tr^2s^3

এসো জেনে নেই।

দ্বিপদীর উৎপাদক নির্ণয় করবো

$4xy + 8xy^2$ এই দ্বিপদীর প্রত্যেক পদের উৎপাদক হলো $4x$ এবং y।

$\therefore\quad 4xy + 8xy^2 = 4(xy + 2xy^2) = 4x\,(y + 2xy) = 4xy\,(1 + 2y)$

দ্বিপদীর উৎপাদক নির্ণয় করবার সময় উভয় পদের সাম্য পদ বন্ধনির বাইরে গুণফলের রূপে লেখো।

$9a^2bc + 12abc^2 = 3(3a^2bc + 4abc^2) = 3abc\,(3a + 4c)$ এইভাবে উৎপাদক বের করা যাবে।

$(a + b)\,(a - b) = a^2 - b^2$ এই সূত্র আমাদের জানা আছে।

এই ভিত্তিতে, $a^2 - b^2 = (a + b)\,(a - b)$

উৎপাদক নির্ণয় করো।

উদা. $a^2 - 4b^2 = a^2 - (2b)^2$
$= (a + 2b)\,(a - 2b)$

উদা. $3a^2 - 27b^2 = 3(a^2 - 9b^2)$
$= 3(a + 3b)\,(a - 3b)$

অনুশীলনী-53

⊙ নিচে দেওয়া রাশির উৎপাদক নির্ণয় করো।

(i) $p^2 - q^2$ (ii) $4x^2 - 25y^2$ (iii) $y^2 - 4$ (iv) $p^2 - \frac{1}{25}$

(v) $9x^2 - \frac{1}{16}y^2$ (vi) $x^2 - \frac{1}{x^2}$ (vii) $a^2b - ab$ (viii) $4x^2y - 6x^2$

(ix) $\frac{1}{2}y^2 - 8z^2$ (x) $2x^2 - 8y^2$

15 পরিসংখ্যান

এসো জেনে নেই।

গড়

প্রতিদিন অস্মিতার সাইকেলে ঘর থেকে স্কুলে যেতে কতো সময় লাগে তাহা দেওয়া আছে। অস্মিতার সোমবার থেকে শনিবার পর্যন্ত সাইকেলে স্কুলে যেতে লাগা সময় নিচের তালিকায় দেওয়া আছে।

বার	সোমবার	মঙ্গলবার	বুধবার	বৃহস্পতিবার	শুক্রবার	শনিবার
মিনিট	20	20	22	18	18	20

উপরোক্ত তালিকায় দেখা যায় যে, অস্মিতাকে কখনও 18 মিনিট, কখনও 22 মিনিট তো কখনও 20 মিনিট লেগে যায়। স্কুলের 6 দিনের বিচার করলে তাকে প্রতিদিন স্কুলে যেতে অনুমানিক কতো মিনিট লাগতে পারে?

গণিতে এই রকমের অনুমান লাগানোর জন্য গড় বের করতে হয়। এখানে 6 দিনের মিনিটের যোগফল বের করে তাকে 6 দ্বারা ভাগ দিলে প্রাপ্ত ভাগফলকে প্রতিদিন লাগা অনুমানিক সময় হিসাবে মানা হয়। ওই সংখ্যাটি হলো সমস্ত সংখ্যাগুলির গড়।

$$\text{গড়} = \frac{\text{স্কুলে 6 দিন যেতে লাগা সময়ের যোগফল}}{\text{মোট দিন}}$$

$$= \frac{20 + 20 + 22 + 18 + 18 + 20}{6} = \frac{118}{6} = 19\frac{2}{3}$$

প্রতিদিন অস্মিতার স্কুলে যেতে গড়ে $19\frac{2}{3}$ মিনিট সময় লেগে যায়।

উদা. ছাত্রদের ঘর বিদ্যালয় থেকে কতো দূরে আছে তাহা জেনে নেওয়ার জন্য পর্যবেক্ষণ করা হয়। তার থেকে নিম্নলিখিত ছয়টি ছাত্রের ঘর থেকে বিদ্যালয়ের দূরত্ব দেওয়া হয়েছে। ওই দূরত্বগুলির গড় বের করো।

950 মি., 800 মি., 700 মি., 1.5 কিমি, 1 কিমি, 750 মি.,

সমাধান : ছাত্রদের ঘর থেকে বিদ্যালয়ের দূরত্ব গড়ে বের করার জন্য সমস্ত দূরত্ব একই এককে মাপা লাগবে।

1 কিমি = 1000 মিটার
1.5 কিমি = 1500 মিটার

$$\text{গড়} = \frac{\text{ছয় জন ছাত্রদের ঘর ও বিদ্যালয়ের মধ্যের দূরত্বের যোগফল}}{\text{মোট ছাত্র}}$$

$$= \frac{950 + 800 + 700 + 1500 + 1000 + 750}{6} = \frac{5700}{6} = 950 \text{ মি.}$$

ছাত্রদের ঘর ও বিদ্যালয়ের মধ্যের দূরত্ব গড়ে 950 মিটার।

এসো, চর্চা করি।

উদা. ঋতুজা সপ্তাহের সাত দিন দড়ি লাফানোর অভ্যাস করতো। তার দ্বারা প্রত্যেক দিন এক মিনিটে দড়ি লাফ দেওয়ার সংখ্যা নিচে দেওয়া আছে।

60, 62, 61, 60, 59, 63, 58

$$\text{গড়} = \frac{\text{সাত দিন লাফ দেওয়ার সংখ্যার যোগফল}}{\text{মোট দিন}}$$

$$= \frac{\square + \square + \square + \square + \square + \square + \square}{7} = \frac{\square}{\square}$$

গড়ে এক মিনিটে দড়ি লাফানো = 60.42

যে সংখ্যার ব্যাপারে জানতে হবে, তার যতগুলি উদাহরণ আমাদের দেওয়া সামগ্রীতে প্রাপ্ত হবে তাকে প্রাপ্ত মান বলে।

আমার পরিচিত, দড়ির লাফ স্বাভাবিক সংখ্যায় গণনা করা হয়। দড়ি লাফ কখনো ভগ্নাংশ সংখ্যায় হতে পারে না। কিন্তু গড় ভগ্নাংশ সংখ্যায় আসতে পারে।

আমি এটা বুঝতে পেরেছি।

$$\text{গড়} = \frac{\text{প্রদত্ত তথ্যের সমস্ত প্রাপ্ত মানের যোগফল}}{\text{মোট প্রাপ্ত মানের সংখ্যা}}$$

উপক্রম : ✸ শ্রেণীতে 10-10 জন ছাত্রদের গট তৈরি করে প্রত্যেক গটের ছাত্রদের উচ্চতার গড় নির্ণয় করো।

✸ বর্গ শিক্ষকের থেকে উপস্থিতি রেজিস্টার নিয়ে এক সপ্তাহের উপস্থিতির গড় নির্ণয় করো।

অনুশীলনী-54

1. একটি শহরের এক সপ্তাহের বর্ষা মিলিমিটারে দেখানো হয়েছে। সপ্তাহিক বর্ষার গড় বের করো।

   9, 11, 8, 20, 10, 16, 12

2. শারদা মহিলা বচত গট বিদ্যালয়ের স্নেহ-সম্মেলনে একটি খাদ্য পদার্থের স্টাল লাগিয়েছিলো। তার প্রতি ঘন্টা 960 টাকা, 830 টাকা, 945 টাকা, 800 টাকা, 847 টাকা এবং 970 টাকা দর হিসাবে বিক্রী হয়েছিলো। তাহলে প্রতি ঘন্টা গড়ে কতো টাকার বিক্রী হয়েছিলো?

3. বিদর্ভে 5 বছরের বর্ষার সংখ্যা নিচে দেওয়া হয়েছে। ইহার উপর ভিত্তি করে গড়ে 5 বছরের বর্ষা নির্ণয় করো।

   900 মিমি, 650 মিমি, 450 মিমি, 733 মিমি, 400 মিমি

4. একটি কৃষক এক বস্তা পশুর খাদ্য আনলো। তার ওজন কি.গ্রা. হিসাবে নিচে দেওয়া আছে। তাহলে গড়ে বস্তার ওজন নির্ণয় করো।

   49.8, 49.7, 49.5, 49.3, 50, 48.9, 49.2, 48.8

এসো জেনে নেই।

গণসংখ্যা বিতরণ তালিকা (Frequency distribution table)

কখনও-কখনও দেওয়া তথ্যের কিছু প্রাপ্তমান বহুবার এসে থাকে। **কোন** প্রাপ্তমান **কতোবার এসেছে, তাহা দেখানো সংখ্যাকে ওই** প্রাপ্তমানের **গণসংখ্যা বলা হয়**। এইজন্য গণসংখ্যার তালিকা তৈরি করার সময় তালিকায় প্রাপ্তমান, গণন চিহ্ন এবং গণসংখ্যা এমন তিনটি স্তম্ভ থাকে।

1. প্রথম স্তম্ভে ছোট সংখ্যা থেকে শুরু করে বড় সংখ্যা পর্যন্ত প্রাপ্তমান লেখো।
   উদা. 1, 2, 3, 4, 5, 6 এই সংখ্যাগুলি ক্রমানুসারে একের-নিচে-এক এইভাবে লেখো।
2. দেওয়া তথ্যের সংখ্যা ক্রমাগত পঠন করো। প্রত্যেক বার পড়া সংখ্যা তালিকায় দেওয়া সংখ্যার নিকটের স্তম্ভে '।' এই চিহ্ন দাও। এই চিহ্নকে গণন চিহ্ন বলা হয়।
   উদা. 3 এই সংখ্যার পঠন করে 3 এর সামনে অন্য স্তম্ভে '।' এই চিহ্ন দাও। চারটি চিহ্নের জন্য |||| এমন লিখলে পাঁচটি 𝍸 এমন ভাবে লেখো। কারণ গণন চিহ্ন গুণতে সহজ হবে।
3. প্রত্যেক সংখ্যার সামনের স্তম্ভে লেখা গণন চিহ্নকে গণন করে লেখো। ইহাকেই গণসংখ্যা বলা হয়। তৃতীয় স্তম্ভে গণসংখ্যা লেখো।
4. অবশেষে সকল গণসংখ্যার যোগফল বের করে, N এই অক্ষর দ্বারা দেখানো হয়। এই যোগফল মোট প্রাপ্তমানের সমান হয়ে থাকে।

প্রদত্ত তথ্যের উপর ভিত্তি করে গণসংখ্যার তালিকা তৈরি করা

উদা. একটি শ্রেণীর কিছু ছাত্রীদের ঘর থেকে বিদ্যালয়ের দূরত্ব কিলোমিটারে দেওয়া হয়েছে।
1, 3, 2, 4, 5, 4, 1, 3, 4, 5, 6, 4, 6, 4, 6
এই তথ্যের উপর ভিত্তি করে গণসংখ্যার তালিকা কিভাবে তৈরি করতে হয়, তাহা দেখবো।

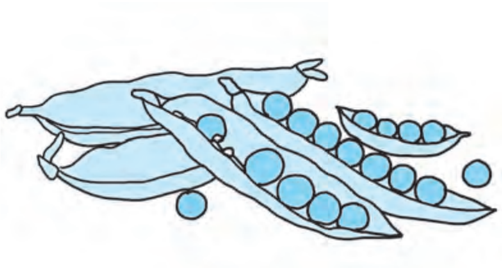
প্রাপ্তমান	গণন চিহ্ন	গণসংখ্যা
1	||	2
2	|	1
3	||	2
4	𝍸	5
5	||	2
6	|||	3
	মোট গণসংখ্যা	N = 15

প্রাপ্তমান গণন করার সময় যে সংখ্যা গণন করা হয় তাকে মনে রাখার জন্য দাগ দিতে হয়। এখানে প্রথমে তিনটি সংখ্যা গণন করার পরে প্রাপ্তমানের তালিকা, প্রাপ্তমান গণন করার সময় দেওয়া হয়েছে।
(~~1~~, ~~3~~, ~~2~~, 4, 5, 4, 1, 3, 4, 5, 6, 4, 6, 4, 6)

গণিত আমার বন্ধু : ঘরে, বাজারে।

প্রিয়ার মা বাজার থেকে কিছু মটরশুটি নিয়ে আসছে। তার মা মটরশুটি ছোলা শুরু করলো। তখন প্রিয়া মার নিকটে বসে গণিত বিষয়ের অভ্যাস করছিলো। তার লক্ষ্য মা দ্বারা ছোলা মটরশুটির দিকে পড়লো। সে দেখলো কিছু মটরশুটিতে 4টি দানা আর কিছুতে 7 টি দানা। তখন প্রিয়া 50টি মটরশুটি নিয়ে তারথেকে বের করা দানার সংখ্যা লিখে নিলো।

প্রিয়া মটরশুটির দানার গণসংখ্যা তৈরি করলো।



দানার সংখ্যা	গণন চিহ্ন	গণসংখ্যা
2	𝍸 |||	8
3	𝍸 𝍸 𝍸	15
4	𝍸 𝍸 ||	12
5	||	2
6	𝍸 ||	7
7	|||	3
8	|||	3
	মোট গণসংখ্যা	N = 50

4, 3, 2, 4, 3, 4, 3, 3, 2, 8
2, 3, 3, 4, 3, 4, 4, 5, 2, 8
8, 2, 5, 3, 4, 4, 3, 6, 2, 3
4, 4, 3, 3, 2, 6, 4, 4, 7, 2
3, 6, 3, 6, 6, 6, 7, 6, 7, 3

মা : গড়ে তোমার দ্বারা ছোলা মটরশুটির দানা বের করতে পারবে কি?

প্রিয়া : এই 50টি সংখ্যার যোগফল বের করে 50 দ্বারা ভাগ দেওয়া বড়ো ঝামেলার কাজ। তাই না?

মা : আমরা এই কাজকে সহজ করবো। গণসংখ্যার তালিকায় 2 টি দানা কয়টি মটরশুটিতে, 3 টি দানা কয়টি মটরশুটিতে দেখানো হয়েছে, এটা আমরা জানি?

প্রিয়া : হ্যাঁ! 2 টি দানা 8 টি মটরশুটিতে, 3 টি দানা 15 টি মটরশুটিতে, 4 টি দানা 12 টি মটরশুটিতে ইত্যাদি জানা আছে। এখন বুঝতে পেরেছি। 2×8, 3×15, 4×12 এইভাবে গুণফল বের করে তার যোগ করলে ওই 50 টি সংখ্যার যোগফল প্রাপ্ত হবে।

মা : সাতটি ছোটো গুণফল ও তার যোগফল বের করা সহজ তাই না! অনেক বড়ো বিষয়বস্তু থাকলেই গণসংখ্যা তালিকার ব্যবহার করা হয়।

প্রিয়া : মোট প্রাপ্ত মানের যোগফল 206।

গড় $= \dfrac{206}{50} = 4.12$

মা : যে কোনো মটরশুটির দানা অখন্ড সংখ্যাই হয়, কিন্তু গড় ভগ্নাংশ সংখ্যায় হতে পারে। এখানে প্রত্যেক মটরশুটিতে গড়ে 4টি দানা আছে এটা বলা যায়।

আমি এটা বুঝতে পেরেছি।

- প্রাপ্ত মানের শ্রেণীবদ্ধ সহজ উপায়ে করার জন্য গণন চিহ্নের ব্যবহার করা হয়।
- চিহ্নের সংখ্যা গণসংখ্যায় দেখায়। এমন তালিকাকে গণসংখ্যা তালিকা বলা হয়।
- প্রাপ্ত মানের সংখ্যা বড়ো থাকলে, তখন গণসংখ্যা তালিকার ব্যবহার গড় বের করতে করা হয়।

অনুশীলনী-55

1. একটি শ্রেণীতে 30 জন ছাত্রের উচ্চতা সেমিতে দেওয়া আছে। এই তথ্যের উপর ভিত্তি করে গণসংখ্যা তালিকা তৈরি করো।

   131, 135, 140, 138, 132, 133, 135, 133, 134, 135, 132, 133, 140, 139, 132, 131, 134, 133, 140, 140, 139, 136, 137, 136, 139, 137, 133, 134, 131, 140

2. একটি পল্লীগ্রামে 50 টি পরিবার বাস করে। প্রত্যেক পরিবারের সদস্য সংখ্যা নিচে দেওয়া হয়েছে। এই তথ্যের উপর ভিত্তি করে গণসংখ্যা তালিকা তৈরি করো।

   5, 4, 5, 4, 5, 3, 3, 3, 4, 3, 4, 2, 3, 4, 2, 2, 2, 2, 4, 5, 1, 3, 2, 4, 5, 3, 3, 2, 4, 4, 2, 3, 4, 3, 4, 2, 3, 4, 5, 3, 2, 3, 2, 3, 4, 5, 3, 2, 3, 2.

3. একটি পাশা 40 বার ফেলার পর পৃষ্ঠভাগের সংখ্যা লেখা হয়েছে। এই তথ্য অনুসারে গণসংখ্যা তালিকা তৈরি করো।

   3, 2, 5, 6, 4, 2, 3, 1, 6, 6, 2, 3, 5, 3, 5, 3, 4, 2, 4, 5, 4, 2, 6,
   3, 3, 2, 4, 3, 3, 4, 1, 4, 3, 3, 2, 2, 5, 3, 3, 4,

4. একটি ছাত্রাবাসের ভোজনালয়ে 30 জন ছাত্রদের ভোজনে প্রয়োজন রুটির সংখ্যা নিচে দেওয়া হয়েছে। এই তথ্য অনুসারে গণসংখ্যা তালিকা তৈরি করো।
   3, 2, 2, 3, 4, 5, 4, 3, 4, 5, 2, 3, 4, 3, 2, 5, 4, 4, 4, 3, 3, 2, 2, 2, 3, 4, 3, 2, 3, 2

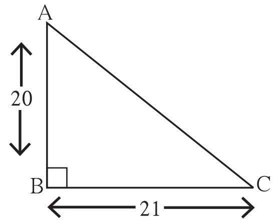
বিজ্ঞানের সমস্ত শাখা, চিকিৎসা শাখা, ভূগোল, অর্থশাস্ত্র, সমাজশাস্ত্র ইত্যাদি বিষয়গুলিতে গড়ের ব্যবহার হয়ে থাকে।

বিক্ষিপ্ত অনুশীলনী 2

1. এঞ্জেল 9 প্র.শ.প্র.ব. হার হিসাবে 15000 টাকা কিছু বছরের জন্য ব্যাঙ্কে জমা করলো। তাকে সময় শেষ হওয়ার পর 5400 টাকা সাধারণ সুদ হিসাবে দেওয়া হলো, তাহলে সে কতো বছরের জন্য টাকা জমা করেছিলো?
2. একটি পিচ রাস্তা তৈরি করার জন্য 10 জন শ্রমিকের 4 দিন লাগে। তাহলে 8 জন শ্রমিকের কতো দিন লাগবে?
3. নসরুদ্দীন ও মহেশ উভয়ে ক্রমাগত 40,000 টাকা ও 60,000 টাকা বিনিয়োগ করে ব্যবসা শুরু করলো। এই ব্যবসায় 30% লাভ হয়েছে, তাহলে প্রত্যেকের কতো টাকা লাভ হয়েছে?
4. একটি বৃত্তের ব্যাস 5.6 সেমি হলে, তার পরিধি নির্ণয় করো।
5. বিস্তার করো।

   (i) $(2a - 3b)^2$ (ii) $(10 + y)^2$ (iii) $\left(\frac{p}{3}+\frac{q}{4}\right)^2$ (iv) $\left(y-\frac{3}{y}\right)^2$
6. সূত্রের সাহায্যে গুণফল নির্ণয় করো।

   (i) $(x - 5)(x + 5)$ (ii) $(2a - 13)(2a + 13)$

   (iii) $(4z - 5y)(4z + 5y)$ (iv) $(2t - 5)(2t + 5)$
7. একটি গরুর গাড়ীর চাকার ব্যাসার্ধ 1.6 মিটার। ওই চাকার 2000 ফেরায় গরুর গাড়ী কতো কিলোমিটার দূরত্ব পার করবে?
8. একটি 40 মী. দৈর্ঘ্য আয়তকার বাগানের ক্ষেত্রফল 1000 বর্গসেমি হলে, বাগানের প্রস্থ ও পরিসীমা বের করো। এই বাগানের দরজার 4 মি জায়গা ছেড়ে তার চারপাশে 3 ফেরা ঘেরা দিতে হবে। তার খরচ 250 টাকা প্রতিমিটার হলে ঘেরা দিতে মোট কতো টাকা খরচ হবে?
9. 

   সংলগ্ন আকৃতিতে প্রদত্ত মাপের সাহায্যে কর্ণ AC-এর দৈর্ঘ্য বের করো। ΔABC-এর পরিসীমা বের করো।
10. একটি ঘনকের বাহুর দৈর্ঘ্য 8 সেমি হলে, তার সম্পূর্ণ পৃষ্ঠফল বের করো।
11. উৎপাদক নির্ণয় করো। $365y^4z^3 - 146y^2z^4$

বহু বিকল্প প্রশ্ন

প্রদত্ত প্রশ্নের বিকল্প উত্তর দেওয়া হয়েছে। তার থেকে সঠিক বিকল্পের চয়ন করো।

1. 33, 34, 35, x, 37, 38, 39 এই সংখ্যার গড় 36 হলে, x এর মান ....হবে।

   (i) 40 (ii) 32 (iii) 42 (iv) 36
2. $(61^2 - 51^2)$ এই বর্গসংখ্যার বিয়োগফল .... আসবে।

   (i) 1120 (ii) 1230 (iii) 1240 (iv) 1250
3. সমীর ও সুনিতা উভয়কে 2600 টাকা 8:5 অনুপাতে বিভক্ত করলে প্রত্যেকের অংশে .... এবং .... টাকা আসবে।

   (i) ₹ 1500, ₹ 1100 (ii) ₹ 1300, ₹ 900

   (iii) ₹ 800, ₹ 500 (iv) ₹ 1600, ₹ 1000

উত্তরমালা

অনুশীলনী 1 **1.** -- **2.** -- **3.** ত্রিভূজের অন্তর্ভাগে

4. সমকোণ ত্রিভূজের কর্ণের পর

5. ত্রিভূজের পরিকেন্দ্র আঁকা **অনুশীলনী 2** --

অনুশীলনী 3 -- **অনুশীলনী 4** -- **অনুশীলনী 5** --

অনুশীলনী 6 **1.**(i) রেখাংশ MG ≅ রেখাংশ GR (ii) রেখাংশ MG ≅ রেখাংশ NG (iii) রেখাংশ GC ≅ রেখাংশ GB (iv) রেখাংশ GE ≅ রেখাংশ GR

2. (i) রেখাংশ AB ≅ রেখাংশ WA (ii) রেখাংশ AP ≅ রেখাংশ YC (iii) রেখাংশ AC ≅ রেখাংশ PY (iv) রেখাংশ PW ≅ রেখাংশ BY (v) রেখাংশ YA ≅ রেখাংশ YQ (vi) রেখাংশ BW ≅ রেখাংশ ZX

(উপরের প্রশ্নের জন্য প্রত্যেকের ভিন্ন কিন্তু সঠিক উত্তর আসতে পারে)

অনুশীলনী 7 ⊙ ∠AOB ≅ ∠BOC , ∠AOB ≅ ∠RST, ∠AOC ≅ ∠PQR , ∠DOC ≅ ∠LMN , ∠BOC ≅ ∠RST

অনুশীলনী 8 ⊙(i) 35 (ii) −54 (iii) −36 (iv) −56 (v) 124 (vi) 84 (vii) 441 (viii) −105

অনুশীলনী 9 **1.** (i) −6 (ii) $\frac{-7}{2}$ (iii) $\frac{-3}{4}$ (iv) $\frac{-2}{3}$ (v) $\frac{-17}{4}$ (vi) 6 (vii) $\frac{5}{3}$ (viii) $\frac{-1}{6}$ (ix) $\frac{6}{5}$ (x) $\frac{1}{63}$ **2.** 24 , 5, 72 , 15, −48 , (−10) প্রভৃতি.

3. −5 , 7, −15 , 21, 20 , (−28) প্রভৃতি

অনুশীলনী 10 **1.** 1 **2.** 4,5 ও 17,19 **3.** 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97 মোট 16টি মৌলিক সংখ্যা

4. 59 ও 61, 71 ও 73 **5.** (2,3),(5,7),(11,12),(17,19),(29,30) প্রভৃতি **6.** 2

অনুশীলনী 11 ⊙ (i) 2 × 2 × 2 × 2 × 2 (ii) 3 × 19 (iii) 23 (iv) 2 × 3 × 5 × 5 (v) 2 × 2 × 2 × 3 × 3 × 3 (vi) 2 × 2 × 2 × 2 × 13 (vii) 3 × 3 × 5 × 17 (viii) 2 × 3 × 3 × 19 (ix) 13 × 29 (x) 13 × 43

অনুশীলনী 12 **1.**(i) 5 (ii) 8 (iii) 5 (iv) 1 (v) 2 (vi) 7 (vii) 3 (viii) 3 (ix) 1 (x) 21

2.(i) গ.সা.গু. 25, সংক্ষিপ্ত রূপ $\frac{11}{21}$

(ii) গ.সা.গু. 19, সংক্ষিপ্ত রূপ $\frac{4}{7}$

(iii) গ.সা.গু. 23, সংক্ষিপ্ত রূপ $\frac{7}{3}$

অনুশীলনী 13 **1.** (i) 60 (ii) 120 (iii) 288 (iv) 60 (v) 3870 (vi) 90 (vii) 1365 (viii) 180 (ix) 567 (x) 108

2. (i) 1; 1184 (ii) 1; 2346 (iii) 15; 60 (iv) 9; 126 (v) 26; 312

অনুশীলনী 14 **1.** (i) 30 (ii)40, 20

2. (i) 14; 28 (ii) 16; 32 (iii) 17; 510 (iv) 23; 69 (v) 7; 588

3. (i) 252 (ii) 150 (iii) 1008 (iv) 60 (v)240

4. 365 **5.** (i) $\frac{12}{11}$ (ii) $\frac{17}{19}$ (iii) $\frac{23}{29}$ **6.** 144

7. 255 **8.** 14 মি. **9.** 18 ও 20

অনুশীলনী 15 **1.** অন্তর্ভাগের বিন্দু : R,C,N,X

বহির্ভাগের ভাগের বিন্দু : T, U, Q, V, Y

কোণের বাহুর উপর অবস্থিত বিন্দু : A, W, G, B

2. ∠ANB ও ∠BNC, ∠BNC ও ∠ANC, ∠ANC ও ∠ANB, ∠PQR ও ∠PQT

3. (i) সংলগ্ন আছে (ii) এবং (iii) সংলগ্ন না কারণ অন্তর্ভাগ ভিন্ন না। (iv) সংলগ্ন আছে।

অনুশীলনী 16 **1.** (i) 50° (ii) 27° (iii) 45° (iv) 35° (v) 70° (vi) 0° (vii) $(90-x)^\circ$

2. 20°এবং 70°

অনুশীলনী 17 **1.** (i) 165° (ii) 95° (iii) 60° (iv) 143° (v) 72° (vi) 180° (vii) $(180-a)^\circ$

2. পূরক কোণের জোড়া : (i) ∠B ও ∠N (ii) ∠D ও ∠F (iii) ∠Y ও ∠E

সম্পূরক কোণের জোড়া : (i) ∠B ও ∠G (ii) ∠N ও∠J.

3. ∠X ও ∠Zএইগুলি পরস্পর পূরক কোণ **4.** 65° ও 25°

5. (i) ∠P ও ∠M (ii) ∠T ও ∠N (iii) ∠P ও ∠T (iv) ∠M ও ∠N(v) ∠P ও ∠N (vi) ∠M ও ∠T

6. 160° 7. $m\angle A = (160-x)°$

অনুশীলনী 18 1. রশ্মি PL ও রশ্মি PM; রশ্মি PN ও রশ্মি PT.

2. না । কারণ ওই রশ্মি থেকে একটি রেখা তৈরি হয় না।

অনুশীলনী 19 ---

অনুশীলনী 20 1. $m\angle APB = 133°$, $m\angle BPC = 47°$, $m\angle CPD = 133°$

2. $m\angle PMS = (180 - x)°$, $m\angle SMQ = x°$, $m\angle QMR = (180 - x)°$

অনুশীলনী 21 1. $m\angle A = m\angle B = 70°$

2. 40°, 60°, 80° 3. $m\angle ACB = 34°$, $m\angle ACD = 146°$, $m\angle A = m\angle B = 73°$

অনুশীলনী 22 1. (i) $\frac{71}{252}$ (ii) $\frac{67}{15}$ (iii) $\frac{430}{323}$ (iv) $\frac{255}{77}$ 2. (i) $\frac{16}{77}$ (ii) $\frac{14}{45}$ (iii) $\frac{-13}{6}$ (iv) $\frac{7}{6}$

3. (i) $\frac{6}{55}$ (ii) $\frac{16}{25}$ (iii) $-\frac{2}{3}$ (iv) 0

4. (i) $\frac{5}{2}$ (ii) $-\frac{8}{3}$ (iii) $-\frac{39}{17}$ (iv) $\frac{1}{7}$ (v) $-\frac{3}{22}$

5. (i) $\frac{4}{3}$ (ii) $\frac{100}{121}$ (iii) $\frac{7}{4}$ (iv) $-\frac{1}{6}$ (v) $\frac{2}{5}$ (vi) $-\frac{10}{7}$ (vii) $-\frac{9}{88}$ (viii) $\frac{25}{2}$

অনুশীলনী 23 ⊙(i) $\frac{3}{7}, \frac{4}{7}, \frac{5}{7}$ (ii) $\frac{23}{30}, \frac{22}{30}, \frac{21}{30}$ (iii) $-\frac{9}{15}, -\frac{7}{15}, \frac{4}{15}$ (iv) $\frac{6}{9}, 0, -\frac{4}{9}$ (v) $-\frac{2}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{3}{4}$ (vi) $\frac{17}{24}, \frac{11}{24}, \frac{-13}{24}$ (vii) $\frac{6}{7}, \frac{8}{7}, \frac{9}{7}$ (viii) $-\frac{1}{8}, -\frac{2}{8}, -\frac{5}{8}$ প্রভৃতি

অনুশীলনী 24 ⊙(i) 3.25 (ii) −0.875 (iii) 7.6 (iv) 0.416 (v) $3.\overline{142857}$ (vi) 1.3 (vii) 0.7

অনুশীলনী 25 1. 149 2. 0 3. 4 4. 60 5. $\frac{17}{20}$

অনুশীলনী 26 1. -- 2.(i) 1024 (ii) 125 (iii) 2401 (iv) −216 (v) 729 (vi) 8 (vii) $\frac{64}{125}$ (viii) $\frac{1}{16}$

অনুশীলনী 27 ⊙(i) 7^6 (ii) $(-11)^7$ (iii) $\left(\frac{6}{7}\right)^8$ (iv) $\left(-\frac{3}{2}\right)^8$ (v) $(a)^{23}$ (vi) $\left(\frac{p}{5}\right)^{10}$

অনুশীলনী 28

1. (i) a^2 (ii) m^{-3} (iii) p^{-10} (iv) 1

2.(i) 1 (ii) 49 (iii) $\frac{4}{5}$ (iv) 16

অনুশীলনী 29 1. (i) $\left(\frac{15}{12}\right)^{12}$ (ii) 3^{-8} (iii) $\left(\frac{1}{7}\right)^{-12}$ (iv) $\left(\frac{2}{5}\right)^6$ (v) 6^{20} (vi) $\left(\frac{6}{7}\right)^{10}$ (vii) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-20}$ (viii) $\left(\frac{5}{8}\right)^{-6}$ (ix) $\left(\frac{3}{4}\right)^6$ (x) $\left(\frac{2}{5}\right)^{-6}$

2. (i) $\left(\frac{7}{2}\right)^2$ (ii) $\left(\frac{3}{11}\right)^5$ (iii) $\left(\frac{6}{1}\right)^3$ অথবা 6^3 (iv) $\frac{1}{y^4}$

অনুশীলনী 30 1. (i) 25 (ii) 35 (iii) 17 (iv) 64 (v) 33

অনুশীলনী 31 --

অনুশীলনী 32 ⊙(i) একপদী = $7x$; a ; 4

(ii) দ্বিপদী = $5y - 7z$; $5m - 3$

(iii) ত্রিপদী = $3x^3 - 5x^2 - 11$; $3y^2 - 7y + 5$

(iv) বহুপদী = $1 - 8a - 7a^2 - 7a^3$

অনুশীলনী 33 ⊙(i) $22p + 18q$

(ii) $18a + 24b + 21c$ (iii) $19x^2 - 20y^2$

(iv) $-11a^2b^2 + 44c$ (v) $3y^2 - 8y + 9$

(vi) $4y^2 + 10y - 8$

অনুশীলনী 34 ⊙(i) $xy + 7z$ (ii) $4x + 2y + 4z$

(iii) $-12x^2 + 16xy + 20y^2$

(iv) $-10x^2 + 24xy + 16y^2$

(v) $-12x + 30z - 19y$

অনুশীলনী 35 1. (i) $288x^2y^2$ (ii) $92xy^3z^2$ (iii) $48ac + 68bc$ (iv) $36x^2 + 73xy + 35y^2$
2. $(40x^2 + 49x + 15)$ বর্গসেমি

অনুশীলনী 36 1. $-2(7x + 12y)$ 2. $-345x^5y^4z^3$
3. (i) 1 (ii) $\frac{5}{2}$ (iii) 1 (iv) 3 (v) −5 (vi) $\frac{69}{5}$
4. 16 বছর, 11 বছর 5. 130 6. 30 নোট 7. 132, 66

বিক্ষিপ্ত অনুশীলনী 1 1. (i) 80 (ii) −6 (iii) −48 (iv) 25 (v) 8 (vi) −100 2. (i) 15; 675 (ii) 38; 228 (iii) 17; 1683 (iv) 8; 96
3. (i) $\frac{14}{17}$ (ii) $\frac{13}{11}$ (iii) $\frac{3}{4}$ 4. (i) 28 (ii) 15 (iii) 36 (iv) 45 (v) 16 5. --
6. (i) 77 (ii) 25 (iii) $\frac{49}{24}$ (iv) 1026
7. (i) $\frac{41}{48}$ (ii) $\frac{23}{20}$ (iii) −8 (iv) $\frac{63}{20}$ 8. --
9. -- 10. -- 11. -- 12.-- 13. (i) 55° (ii) $(90 - a)°$ (iii) 68° (iv) $(50 + x)°$
14. (i) 69° (ii) 133° (iii) 0° (iv) $(90 + x)°$
15. -- 16. (i) 110° (ii) 55° (iii) 55°
17. (i) 5^7 (ii) $\left(\frac{3}{2}\right)^3$ (iii) $\left(\frac{7}{2}\right)^2$ (iv) $\left(\frac{4}{5}\right)^3$
18. (i) 1 (ii) $\frac{1}{1000}$ (iii) 64 (iv) 16
19. (i) $8a + 10b - 13c$ (ii) $21x^2 - 10xy - 16y^2$ (iii) $18m - n$ (iv) $2m - 19n + 11p$
20. (i) $x = -10$ (ii) $y = 5$

বহুপযায়ী প্রশ্ন 1. অন্তমধ্য 2. $\left(\frac{7}{3}\right)^{12}$ 3. 3
4. $\frac{3}{2}$ 5. $10 \times 3 + (5 + 2)$

অনুশীলনী 37 1. ₹ 240 2. 32 আটি
3.18 কিগ্রা 4. ₹ 24000 5. ₹ 104000

অনুশীলনী 38 1. 10 দিন; 4 দিন 2. 50 টি পৃষ্ঠ
3. 2 ঘন্টা; 3 ঘন্টা 4. 20 দিন

অনুশীলনী 39 1. ₹ 12800; ₹ 16000
2. ₹ 10000; ₹ 24000 3. ₹ 38000; ₹ 9120
4. ₹ 147; ₹ 343 5. ₹ 54000; ₹ 15120

অনুশীলনী 40 1. ₹ 1770 2. ₹ 25000; ₹ 375000
3. ₹ 14875 4. ₹ 3600 5. ₹ 180000

অনুশীলনী 41 1. 10% 2. ₹ 300 3. 5 বছর
4. ₹ 41000 5. (i) ₹ 882, ₹ 5082 (ii) ₹ 5000, ₹ 6200 (iii) 2 বছর, ₹ 8800 (iv) ₹ 12000, 10 বছর (v) ₹ 19200, ₹ 21600

অনুশীলনী 42 1. (i) 14 সেমি; 44 সেমি (ii) 14 সেমি; 88 সেমি (iii) 98 সেমি; 196 সেমি (iv) 11.55 সেমি; 23.1 সেমি 2. 28 সেমি
3. ₹ 56320 4. 250 পরিক্রমা

অনুশীলনী 43 1. 240°
2. উপচাপের নাম : চাপ PXQ, চাপ PR, চাপ RY, চাপ XP, চাপ XQ, চাপ QY
অধিচাপের নাম : চাপ PYQ, চাপ PQR, চাপ RQY, চাপ XQP, চাপ QRX
অর্ধবৃত্ত চাপের নাম : চাপ QPR, চাপ QYR 3. 250°

অনুশীলনী 44 1. 2 গুণ 2. 3 গুণ
3. 90 মি. 4. 8 মি.

অনুশীলনী 45 1. 144 বর্গসেমি 2. 75 বর্গসেমি
3. 46 সেমি 4. 9 গুণ

অনুশীলনী 46 1. 1170 বর্গসেমি 2. 8.64 বর্গসেমি
3. ₹ 2302750 4. 800 টাইল্‌স ; 3200 টাইল্‌স
5. 156 মি. ; 845 বর্গ মিটার

অনুশীলনী 47 1. (i) 54 বর্গসেমি (ii) 150 বর্গসেমি (iii) 311.04 বর্গ মিটার (iv) 277.44 বর্গ মিটার (v) 181.5 বর্গ মিটার2. (i) 460 বর্গসেমি (ii) 58.8 বর্গসেমি (iii) 31.6 বর্গ মিটার (iv) 171 বর্গ মিটার 3. 39.5 বর্গ মিটার 4. 6.5 বর্গ মিটার, ₹ 1950

অনুশীলনী 48 1. (i) 25 একক (ii) 40 একক (iii) 15 একক 2. 26 সেমি 3. 16 সেমি 4. 12 মিটার

অনুশীলনী 49 1. (i) হ্যাঁ (ii) না (iii) না (iv) না (v) হ্যাঁ (vi) না

2. (i) হ্যাঁ (ii) না (iii) হ্যাঁ (iv) না (v) না

অনুশীলনী 50 1. (i) $25a^2+60ab+36b^2$ (ii) $\frac{a^2}{4}+\frac{ab}{3}+\frac{b^2}{9}$ (iii) $4p^2-12pq+9q^2$ (iv) $x^2-4+\frac{4}{x^2}$ (v) $a^2x^2+2abxy+b^2y^2$ (vi) $49m^2-56m+16$ (vii) $x^2+x+\frac{1}{4}$ (viii) $a^2-2+\frac{1}{a^2}$ 2. $64-\frac{16}{x}+\frac{1}{x^2}$

3. $(mn+7pq)^2$ 4. (i) 994009 (ii) 10404 (iii) 9409 (iv) 1010025

অনুশীলনী 51 1. (i) x^2-y^2 (ii) $9x^2-25$ (iii) a^2-36 (iv) $\frac{x^2}{25}-36$ 2. (i) 249996 (ii) 9991 (iii) 2484 (iv) 9996

অনুশীলনী 52 ⊙(i) $3\times67\times a\times a\times a\times b\times b$

(ii) $13\times7\times x\times y\times t\times t$

(iii) $2\times2\times2\times3\times a\times a\times b\times b$

(iv) $t\times r\times r\times s\times s\times s$

অনুশীলনী 53 ⊙(i) $(p+q)(p-q)$ (ii) $(2x+5y)(2x-5y)$ (iii) $(y+2)(y-2)$ (iv) $\left(p+\frac{1}{5}\right)\left(p-\frac{1}{5}\right)$ (v) $\left(3x+\frac{1}{4}y\right)\left(3x-\frac{1}{4}y\right)$ (vi) $\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x-\frac{1}{x}\right)$ (vii) $ab(a-1)$ (viii) $2x^2(2xy-3x)$ (ix) $\frac{1}{2}(y+4z)(y-4z)$ (x) $2(x+2y)(x-2y)$

অনুশীলনী 54 1. 12.29 মিমী 2. ₹ 892 3. 626.6 মিমী 4. 49.4 কিগ্রা

অনুশীলনী 55 1.

উচ্চতা	131	132	133	134	135	136	137	138	139	140	মোট
ছাত্র	3	3	5	3	3	2	2	1	3	5	30

2.

ব্যক্তি	1	2	3	4	5	মোট
পরিবার	1	13	16	13	7	50

3.

প্রাপ্ত মান	1	2	3	4	5	6	মোট
গণসংখ্যা	2	8	13	8	5	4	40

4.

রুটি	2	3	4	5	মোট
ছাত্র	9	10	8	3	30

বিক্ষিপ্ত অনুশীলনী 2 1. 4 বছর 2. 5 দিন

3. ₹ 12000 ; ₹ 18000 4. 17.6 সেমি

5. (i) $4a^2-12ab+9b^2$ (ii) $100+20y+y^2$ (iii) $\frac{p^2}{9}+\frac{pq}{6}+\frac{q^2}{16}$ (iv) $y^2-6+\frac{9}{y^2}$

6. (i) x^2-25 (ii) $4a^2-169$ (iii) $16z^2-25y^2$ (iv) $4t^2-25$ 7. 3.3 কিমী

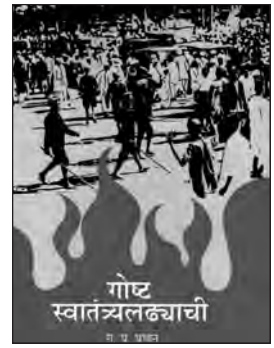
8. 25 মিটার ; 130 মিটার ; ₹ 94500

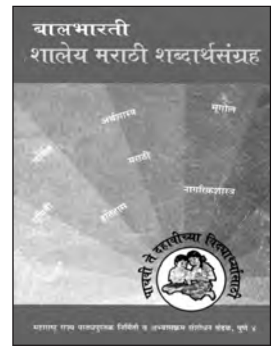
9. 29 একক ; 70 একক 10. 384 সেমি^{2}

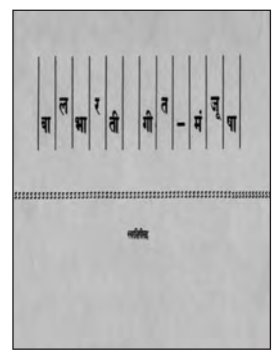
11. $73y^2z^3(5y^2-2z)$

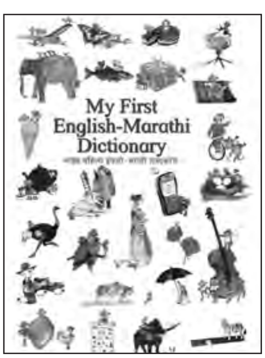
বহু বৈকল্পিক প্রশ্ন 1. 36 2. 1120

3. ₹ 1600, ₹ 1000.









- पाठ्यपुस्तक मंडळाची वैशिष्ट्यपूर्ण पाठ्येत्तर प्रकाशने.
- नामवंत लेखक, कवी, विचारवंत यांच्या साहित्याचा समावेश.
- शालेय स्तरावर पूरक वाचनासाठी उपयुक्त.

पुस्तक मागणीसाठी www.ebalbharati.in, www.balbharati.in संकेत स्थळावर भेट द्या.

साहित्य पाठ्यपुस्तक मंडळाच्या विभागीय भांडारांमध्ये विक्रीसाठी उपलब्ध आहे.

ebalbharati

विभागीय भांडारे संपर्क क्रमांक : पुणे - ☎ २५६५९४६५, कोल्हापूर- ☎ २४६८५७६, मुंबई (गोरेगाव) - ☎ २८७७१८४२, पनवेल - ☎ २७४६२६४६५, नाशिक - ☎ २३९१५११, औरंगाबाद - ☎ २३३२१७१, नागपूर - ☎ २५४७७१६/२५२३०७८, लातूर - ☎ २२०९३०, अमरावती - ☎ २५३०९६५

মহারাষ্ট্র রাজ্য পাঠ্যপুস্তক নির্মিতী ও অভ্যাসক্রম সংশোধন মণ্ডল, পুণে - ৪১১ ০০৪
गणित इयत्ता सातवी (बंगाली माध्यम)
₹ 41.00