గణితశాస్త్రం

ఏడవ తరగతి

భారత సంవిధానము

పార్ట్ – IV A

ప్రాథమిక బాధ్యతలు

51 ఎ) ప్రాథమిక బాధ్యతలు

ప్రతి పౌరుడు ఈ క్రింది బాధ్యతలను మనసారా స్వీకరించి బాధ్యతాయుతంగా ప్రవర్తించవలెను.

ఎ) రాజ్యాంగ శాసనబద్ధుడై యుండుట. శాసనమందలి ఆశయములనూ, శాసనం స్థాపించే సంస్థలనూ, జాతీయ పతకాన్ని, జాతీయ గీతాన్ని అంకితభావంతో గౌరవించుట.

బి) స్వాతంత్ర్యోద్యమ స్ఫూర్తితో అన్ని రంగాలలో వ్యవహరించుట.

సి) దేశ సార్వభౌమత్వాన్ని, సమన్వయతనూ, సమగ్రతను రక్షించుట.

డి) దేశరక్షణలో అనుక్షణం సంసిద్ధుడై ఉండుట.

ఇ) ప్రజాజీవనంలో అన్యోన్యతనూ, భ్రాతృభావాన్ని పోషించుట, మత, భాష, ప్రాంతీయతత్త్వాలకు వర్గవైరుధ్యములకు అతీతముగా ఉండుట. స్త్రీలను అగౌరవపరచే ఆచారములను విడనాడుట.

ఎఫ్) అమూల్యమైన భారతీయ చారిత్రక సంపదనూ, సుసంపన్న సంస్కృతినీ పరిరక్షించుట.

జి) పర్యావరణాన్ని అడవులను, కొలనులనూ, నదులనూ రక్షించుట, అభివృద్ధి పరచుట, మృగరక్షణ జలజంతు జీవరాసులపై కరుణాత్రత.

హెచ్) శాస్త్రీయ మరియు మానవతా దృక్పథాలను అలవరచుకొనుట, జిజ్ఞాసను పెంపొందించు కొనుట, సంస్కరణ తత్వమును పెంపొందించుట.

ఐ) హింసను విడనాడుట, ప్రజల ఆస్తుల విధ్వంసం చర్యలను నిరోధించుట.

జె) వ్యక్తిత్వ శక్తి సామర్థ్యాల ఔన్నత్యాన్ని పెంపొందించుకొనుట ద్వారా మరియూ సమిష్టి కృషి ద్వారా అన్ని రంగాలలో గణనీయమైన స్థాయిని చేరుటకొరకు, శిఖరాగ్ర సాధనకొరకు నిరంతరం కృషి సల్పుట.

కె) రక్షకులు లేదా సంరక్షకులుగా ఉన్నవారందరూ ఆరు నుంచి 14 సంవత్సరముల లోపల పసివారికి విద్యాభ్యాసము చేయు అవకాశమును కల్పించవలెను.

ప్రభుత్వ తీర్మానం క్రమ సంఖ్య : అభ్యాస్-2016/(ప్ర.క్ర.43/16) ఎస్‌డి-4 తేదీ 25.4.2016ను సారం స్థాపించబడిన సమన్వయ సమితి యొక్క తేదీ 3.3.2017 రోజున జరిగిన సభలో ఈ పాఠ్య పుస్తకమును నిర్దేశించుటకుగాను అనుమతి ఇవ్వబడినది.

గణితశాస్త్రం

ఏడవ తరగతి

మహారాష్ట్ర రాష్ట్ర పాఠ్యపుస్తక నిర్మితి మరియు పాఠ్యప్రణాళిక పరిశోధన సంస్థ, పుణె-411 004.

RLNZHN

మీ స్మార్ట్‌ఫోన్‌తో DIKSHA App నుపయోగించి పాఠ్యపుస్తకం మొదటి పుటలోని QR CODE ను స్కాన్ చేసిన డిజిటల్ పాఠ్యపుస్తకం మరియు ప్రతి పాఠంలోని QR CODE ను స్కాన్ చేసిన ఆ పాఠానికి సంబంధించిన అధ్యయన-అధ్యాపనలకు ఉపయుక్తమగు దృశ్య-శ్రవణ సాహిత్యం లభిస్తుంది.

ప్రథమ ప్రచురణ : 2017
పునర్ముద్రణ : 2022

© మహారాష్ట్ర రాష్ట్ర పాఠ్యపుస్తక నిర్మితి మరియు పాఠ్య ప్రణాళిక పరిశోధన సంస్థ, పుణె-411004.
ఈ పుస్తకమునకు సంబంధించిన సర్వహక్కులు మహారాష్ట్ర రాష్ట్ర పాఠ్యపుస్తక నిర్మితి మరియు పాఠ్య ప్రణాళిక పరిశోధన సంస్థవి. ఈ పుస్తకము నందలి ఏ భాగమును సంచాలకులు, మహారాష్ట్ర రాష్ట్ర పాఠ్యప్రణాళిక పరిశోధన సంస్థ వారి లిఖిత అనుమతి లేకుండా ఉటంకించటం చేయరాదు.

గణిత విషయనిపుణుల సమితి

డా॥ మంగళ నార్లీకర్	(అధ్యక్షులు)
డా॥ జయశ్రీ అత్రే	(సభ్యులు)
శ్రీ రమాకాంత్ సరోదే	(సభ్యులు)
శ్రీ దాదాసో సర్దే	(సభ్యులు)
శ్రీ సందీప్ పంచ్‌భాయ్	(సభ్యులు)
శ్రీమతి లత టిళేకర్	(సభ్యులు)
శ్రీమతి ఉజ్వల గోడ్‌బోలె	(సభ్యకార్యదర్శి)

ప్రకాశకులు

శ్రీ వివేక్ ఉత్తమ్ గోసావి, నియంత్రకులు,
పాఠ్యపుస్తక నిర్మితి సంస్థ,
ప్రభాదేవి, ముంబయి-25.

ప్రధాన సంయోజకులు : శ్రీమతి ఉజ్వల శ్రీకాంత్ గోడ్‌బోలే
ఇ. విశేషాధికారిణి, గణితం
పాఠ్యపుస్తక సంస్థ, పుణె.

ముఖచిత్రం అలంకరణ : ధనశ్రీ మోకాశీ, పుణె

కంప్యూటర్ స్కెచ్ : శ్రీ సందీప్ కోళీ, ముంబయి

చిత్రకారులు : శ్రీ ధనశ్రీ మోకాశీ

గణిత విషయం - రాష్ట్ర అధ్యయనవర్గ సభ్యులు

శ్రీమతి పూజా జాధవ్	శ్రీ అన్సార్ శేఖ్
శ్రీ గణేష్ కోల్తే	శ్రీ ప్రమోద్ ఠోంబ్రే
శ్రీ రామా వన్యాళ్‌కర్	శ్రీ ప్రకాశ్ జేండె
శ్రీమతి సువర్ణ దేశ్‌పాండే	శ్రీ బన్సీ హావలే
శ్రీ ఉమేష్ రేళే	శ్రీ శ్రీకాంత్ రత్నపారఖీ
శ్రీ అన్నప్ప పరీట్	శ్రీ సూర్యకాంత్ శహాణే
శ్రీ శ్రీపాద్ దేశ్‌పాండే	శ్రీ సురేష్ దాతే
శ్రీ రాజేంద్ర చౌధరీ	శ్రీ ప్రకాశ్ కాప్సే
శ్రీ చందన్ కులకర్ణీ	శ్రీ సలీం హాష్మీ
శ్రీమతి అనిత జావే	శ్రీమతి ఆర్యా భిడే
శ్రీమతి బాగేశ్రీ చవాన్	శ్రీ మిలింద్ భాకరే
శ్రీ కళ్యాణ్ కడేకర్	శ్రీ జ్ఞానేశ్వర్ మాశాళ్‌కర్
శ్రీ సందేశ్ సోనావణే	శ్రీ లక్ష్మణ్ దావణ్‌కర్
శ్రీ సుజిత్ శిందే	శ్రీ సుధీర్ పాటిల్
డా॥ హన్మంత్ జగ్‌తాప్	శ్రీ రాజారాం బండగర్
శ్రీ ప్రతాప్ కాశిద్	శ్రీమతి రోహిణి శిర్కే
శ్రీ కాశీరాం బావిసానే	శ్రీ సాగర్ సకుడే
శ్రీ పప్పు గాడే	శ్రీ ప్రదీప్ గోడ్సే
	శ్రీ రవీంద్ర ఖందారే

శ్రీమతి ప్రాజక్తి గోఖలే (ఆహ్వానిత సభ్యులు)

అనువాదకులు : శ్రీ మురళి రాజేశం కుందారం

సమీక్షకులు : శ్రీ సత్యనారాయణ సందుపట్ల

అనువాద సంయోజకులు : డా॥ శ్రీమతి తులసీ భారత్,
: విశేషాధికారిణి-తెలుగు,
పాఠ్యపుస్తక సంస్థ, పుణె

నిర్మితి : శ్రీ సచ్చితానంద్ ఆఫళే
ముఖ్యనిర్మితి అధికారి
శ్రీ సంజయ్ కాంబ్లే
నిర్మితి అధికారి
శ్రీ ప్రశాంత్ హరణె
నిర్మితి సహాయకులు

అక్షర కూర్పు : శ్రీ విజయ్‌కుమార్ దండె, పుణె

కాగితం : 70 జి.యస్.యమ్. క్రీమ్‌వోవ్

ముద్రణాదేశం :

ముద్రకులు :

భారత సంవిధానము

ప్రస్తావన

భారతదేశ ప్రజలమగు మేము, భారతదేశమును **సార్వభౌమ్య**
సామ్యవాద లౌకిక ప్రజాస్వామ్య గణరాజ్యముగ
నెలకొల్పుటకు మరియు అందరి పౌరులెల్లరకు
సామాజిక, ఆర్థిక, రాజకీయ **న్యాయమును**,
భావము, భావప్రకటన, విశ్వాసము,
ధర్మము, ఆరాధన -- వీటి **స్వాతంత్ర్యమును**,
అంతస్తులోను, అవకాశములోను **సమానత్వమును**
చేకూర్చుటకు; మరియు వారందరిలో
వ్యక్తి గౌరవమును, జాత్యైక్యతను,
అఖండతను తప్పక ఒనగూర్చు **సౌభ్రాత్రమును**,
పెంపొందించుటకు; సత్యనిష్ఠా పూర్వకముగ తీర్మానించుకొని,
ఈ 1949వ సంవత్సరము నవంబరు ఇరువది యారవ
దినమున **మా సంవిధాన సభయందు ఇందుమూలముగ,**
ఈ సంవిధానమును అంగీకరించి, అధిశాసనము చేసి
మాకు మేము ఇచ్చుకొన్నవారమైతిమి.

జాతీయ గీతము

జనగణమన – అధినాయక జయ హే
భారత – భాగ్యవిధాతా
పంజాబ, సింధు, గుజరాత, మరాఠా,
ద్రావిడ, ఉత్కల, బంగ,
వింధ్య, హిమాచల, యమునా, గంగా,
ఉచ్ఛల జలధితరంగ,
తవ శుభ నామే జాగే, తవ శుభ ఆశిస మాగే,
గాహే తవ జయగాథా,
జనగణ మంగలదాయక జయ హే,
భారత – భాగ్యవిధాతా
జయ హే, జయ హే, జయ హే,
జయ జయ జయ, జయ హే

ప్రతిజ్ఞ

భారతదేశం నా మాతృభూమి. భారతీయులందరు నా సహోదరులు.

నేను నా దేశాన్ని ప్రేమిస్తున్నాను. సుసంపన్నమైన, బహువిధమైన నా దేశ వారసత్వ సంపద నాకు గర్వకారణం. దీనికి అర్హత పొందడానికి సర్వదా నేను కృషిచేస్తాను.

నా తల్లిదండ్రుల్ని, ఉపాధ్యాయుల్ని, పెద్దలందర్ని గౌరవిస్తాను. ప్రతివారితోను మర్యాదగా నడచుకొంటాను.

నా దేశంపట్ల, నా ప్రజలపట్ల సేవానిరతితో ఉంటానని ప్రతిజ్ఞ చేస్తున్నాను. వారి శ్రేయోభివృద్ధులే నా ఆనందానికి మూలం.

ప్రస్తావన

విద్యార్థి మిత్రులారా,

మీ అందరికి ఏడవతరగతికి స్వాగతం. మీరు ఒకటి నుండి ఆరు తరగతుల గణితశాస్త్రం పాఠ్యపుస్తకాలను, అభ్యసించారు. ఇప్పుడు ఏడవతరగతి గణితశాస్త్రం పాఠ్యపుస్తకమును మీ చేతులకు అందిస్తున్నందుకు మాకు చాలా ఆనందంగా అనిపిస్తున్నది.

ఈ పుస్తకం ద్వారా గణితశాస్త్రం విషయాన్ని మీరు బాగా అర్థం చేసుకోవాలి, ఇది మీకు మనోరంజకముగా అనిపించాలి, కొత్త జ్ఞానాన్ని పొంది మరియు కొత్త సమస్యలను సాధించే ఆనందం మీకు లభించాలి అని మాకు అనిపిస్తుంది. అందుకై ఈ పాఠ్యపుస్తకంలో కొన్ని కృత్యాలు మరియు నిర్మాణాలు ఇవ్వబడినవి, వాటిని తప్పకుండా చేసి చూడండి. వాటిలోనుండి కొన్ని గమ్మత్తులు, కొత్తధర్మాలు దృష్టికొస్తాయా అని గమనించండి. మీలో మీరు చర్చించుకొంటే కొత్త అంశాలు అర్థం చేసుకోగలుగుతారు. చిత్రాలు, వెబ్‌పటాలు మరియు ఇంటర్నెట్ సహాయంతో గణితం అర్థం చేసుకోవడం చాలా సులభమవుతుంది. ఈ అంశాలను మీరు బాగా అర్థం చేసుకొన్నట్లయితే, గణితం ఏ మాత్రం కఠినం అనిపించదు. పాఠ్యపుస్తకంలోని ప్రతి పాఠాన్ని మీరు చాలాజాగ్రత్తగా దృష్టి పెట్టి చదవాలని మా అపేక్ష. ఏ భాగమైన అర్థం గాకపోతే ఉపాధ్యాయుల, పాలకుల లేదా ఇతర విద్యార్థుల సహాయంతో అర్థం చేసుకోండి. సమస్యలను సాధించు పద్ధతులు అలాగే వాటి సూత్రాలు ఎందుకు మరియు ఎలా తయారైనవో వాటి స్పష్టీకరణ ఈ పాఠ్యపుస్తకంలో ఇవ్వబడినది. ఆ పద్ధతులనుపయోగించి సమస్యలను సాధించటం అభ్యసించడం చాలాముఖ్యం. అభ్యాసం కొరకు ఇవ్వబడిన సమస్యలలాంటి ఉదాహరణలు మీరుకూడా తయారు చేయండి. అధిక కఠినమైన సమస్యలు ఈ పాఠ్యపుస్తకంలో నక్షత్రపు గుర్తుతో సూచించబడినవి. గడులలో ఇచ్చిన సమాచారం ముున్ముందు అభ్యాసానికై మీకు తప్పకుండా ఉపయోగపడుతుంది. ఒకటవ తరగతి నుండి నేర్చుకొన్న గణితం తర్వాత కూడా ఎల్లప్పుడు ఉపయోగించ వలసివస్తుంది. ఉదాహరణకు కూడిక, తీసివేత, గుణకారం, భాగాహారం ఇవి మీరు మర్చిపోవడం కుదరదు కదా! వాటిని అభ్యసించండి. ఈ క్రియలన్నింటిని సమస్యలను సాధించునపుడు చాలాసార్లు ఉపయోగించవలసివస్తుంది.

ఏడవ తరగతి గణితంలో అనేక మూలాధార సంకల్పనలున్నాయి. వాటిని బాగా అర్థం చేసుకుంటేనే పై తరగతుల అభ్యాసం సులభమవుతుంది.

పదండి మరియు ఈ పాఠ్యపుస్తకం గణితాన్ని అర్థం చేసుకోవడంలో మీ సోపతి (ఫ్రెండ్) అవుతుందో లేదో చూడండి మరి!

(డా।। సునీల్ మగర్)

సంచాలకులు

మహారాష్ట్ర రాష్ట్ర పాఠ్యపుస్తక నిర్మితి మరియు

పాఠ్య ప్రణాళిక పరిశోధన సంస్థ, పుణె–411004.

పుణె :

తేదీ : 28 మార్చి 2017

7వ తరగతి (గణితం)

అధ్యయన – ఆధ్యాపన ప్రక్రియ	అధ్యయన ఫలితాలు

అధ్యయన – ఆధ్యాపన ప్రక్రియ

అధ్యయనార్థులను వ్యక్తిగతంగా/జంటగా/సమూహంగా అవకాశమిచ్చి కృత్యం చేయుటకు ప్రోత్సహించుట.

- సందర్భాన్ని ఇచ్చినపుడు, పూర్ణసంఖ్యలలోని గుణకారం మరియు భాగహారం మొదలగు వాటి నియమాలను శోధించుట. ఇది సంఖ్యారేఖ లేదా సంఖ్యాకృతుల సహాయంతో చేయవచ్చును.

  ఉదా.: 3×2=6

  3×1=3

  3×0=0

  3× (-1)= -3

  3× (2)= 6

  ఈ సంఖ్యలో 1 తగ్గించాము. ఈ సంఖ్యలో 1 తగ్గించాము.

కావున 3× (-3)= -9

అనగా ధన పూర్ణసంఖ్యను ఋణపూర్ణ సంఖ్యతో గుణించినపుడు జవాబు ఋణపూర్ణ సంఖ్య వచ్చును.

ఉదాహరణకు

(a) $\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}$ లు $\frac{1}{2}$ లో $\frac{1}{4}$ అనగా $\frac{1}{8}$

(b) $\frac{1}{2}\div\frac{1}{4}$ అనునది $\frac{1}{2}$ లో రెండు $\frac{1}{4}$ అవుతుంది

నిత్యజీవితంలోని సమస్యలను సాధించుటకు చిత్రాలు గీసి లేదా కాగితాన్ని మడచి భిన్నాల లేదా దశాంశ భిన్నాల గుణకారం లేదా భాగహారాన్ని సూచిస్తారు.

- చెట్టుకు పరిపూర్ణాంకం ఒకటి భిన్నం రెండు మీ. కుడివైపు లేదా పదిహేను పూర్ణాంకం రెండు భిన్నం మూడు మీ. ఎడమవైపు ఇలా వ్యతిరేక దిశలకు గల భిన్నాల అవసరమైనటువంటి పరిస్థితుల గురించి చర్చించుట.
- ఒకే సంఖ్య యొక్క మళ్ళీ మళ్ళీ గుణకారాన్ని సంక్షిప్త రూపంలో వ్యక్తపరచవచ్చునను విషయాన్ని చర్చ ద్వారా విద్యార్థుల దృష్టికి తెచ్చుట. ఉదా. 2×2×2×2×2×2= దీనిని 2^6 అనికూడా వ్యక్తపరచవచ్చును.
- చరరాశి మరియు స్థిరసంఖ్యలను ఒకటిగా చేసి వేర్వేరు క్రియల నుపయోగించి వివిధ సందర్భాలలో బీజీయ రాసులను తయారు చేయుట.
- సమీకరణం తయారు చేయుటకు దైనందిన జీవనంలోని వివిధ పరిస్థితులను కల్పించుట మరియు రెండువైపుల సమానం చేయున టువంటి చరరాశి యొక్క సరియైన విలువను ఎన్నుకొనుట.
- దైనందిన జీవనంలోని సమాన రకాల వస్తువుల కూడిక/తీసివేత కృత్యం చేయుట. ఉదా– 3 నోటుపుస్తకాలు మరియు 5 నోటుపుస్తకాల కూడిక చేయగా లభించే నోటుపుస్తకాల సంఖ్య.
- నిష్పత్తి మరియు శాతం, ఈ సంకల్పనను అభివృద్ధి చేయుటకు చర్చించుట. (నిష్పత్తుల సమానత్వం)
- లాభం/నష్టం మరియు సరళవడ్డీ మొ. వాటిపై ఆధారపడిన దైనందిన జీవనంలోని సంఘటనలు ఏర్పరుచుట మరియు శాతాల ఉపయోగాలను చూపుట.

అధ్యయన ఫలితాలు

అధ్యయనార్థి–

07.71.01 రెండు పూర్ణసంఖ్యల గుణకారం/భాగహారం చేయును.

07.71.02 భిన్నాల గుణకారం మరియు భాగహారపు అర్థనిర్వచనం చేయును. ఉదా. $\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}$ దీని అర్థం $\frac{4}{5}$ కు $\frac{2}{3}$ అలాగే $\frac{1}{2}\div\frac{1}{4}$ దీని అర్థం ఎన్నిసార్లు $\frac{1}{4}$ అనగా $\frac{1}{2}$?

07.71.03 సామాన్య మరియు దశాంశ భిన్నాల గుణకారం మరియు భాగహారం చేయుటకు నియమాలను ఉపయోగించును.

07.71.04 అకరణీయ సంఖ్యలకు సంబంధం కల్గిన దైనందిన జీవనంలోని ప్రశ్నలు సాధించును.

07.71.05 పెద్ద సంఖ్యల గుణకారం, భాగహారం చేయుటకు సంఖ్యల ఘాతాంక రూపాన్ని ఉపయోగించును.

07.71.06 దైనందిన జీవనంలోని వివిధ పరిస్థితులు సామాన్య సమీకరణాల రూపంలో అనుర్చి సమీకరణాలను సాధించును.

07.71.07 బీజీయ రాసుల కూడిక, తీసివేతలు చేయును.

07.71.08 ప్రమాణంలో ఉన్న మరియు ప్రమాణంలో లేని రాసులను (సంఖ్యలు) గుర్తించును. ఉదాహరణకు $\frac{15}{45}$ మరియు $\frac{40}{120}$ లు సమాన సంఖ్యలు కావున 15, 45, 40, 120 అను సంఖ్యలు ప్రమాణంలో గలవు అని చెప్పును.

07.71.09 శాతాలను సామాన్య మరియు దశాంశ భిన్నాలలో రూపాంతరం చేయు ప్రశ్నలు అలాగే వ్యతిరేక రకమైన ప్రశ్నలు సాధించును.

07.71.10 ధర్మాల ఆధారంగా, రేఖీయ కోణాల జత సంపూరక కోణాల జత, పూరక కోణాల జత, ఆసన్న కోణాల జత మరియు శీర్షాభిముఖ కోణాల జత మొదలగు వాటిని వర్గీకరించును. ప్రతి జతలోని ఒక కోణం కొలత ఇచ్చినపుడు, రెండో కోణం కొలత నిశ్చయించును.

07.71.11 త్రిభుజంలోని రెండు కోణాలను ఇచ్చినపుడు, మూడవ కోణం కొలత శోధించును.

07.71.12 చతురస్రాకార మరియు దీర్ఘచతురస్రాకారాల వైశాల్యాలను కనుగొనుట.

07.71.13 నిత్యజీవితంలోని అనుభవాలనుంచి పోగు చేసిన సాంఖ్యక సమాచారాన్నిబట్టి ప్రాతినిథ్య సంఖ్య (సగటు) కనుగొనుట.

07.71.14 కమ్మీరేఖా చిత్రాలనుబట్టి సమాచారం అర్థవివరణ చేస్తారు. ఉదా: వేసవికంటె చలికాలంలో విద్యుత్ ఉపయోగం అధికంగా ఉంటుంది. మొదటి పది ఓవర్లలో ఏదేని ఒక జట్టు చేసిన పరుగులు మొదలుగునవి.

07.71.15 త్రిభుజం యొక్క కోణ సమద్విఖండన మరియు వాటి భుజాల లంబ సమద్విఖండన రేఖలు గీసి, అవి మిళితాలు అవుతాయని గుర్తించుట.

07.71.16 భుజం, కోణాలు ఇచ్చినపుడు త్రిభుజం గీయుట.

07.71.17 కోణం, రేఖాఖండం, వృత్తాల సర్వసమానత్వమును గుర్తించుట.

07.71.18 సంఖ్యలను ప్రధాన కారణాంకాలుగా విభజించి గసాభా, కసాగు కనుగొనుట.

07.71.19 త్రిభుజ బాహ్యకోణాన్ని గుర్తించుట.

07.71.20 బహుభుజాకృతుల అంతరకోణాల మొత్తం యొక్క సూత్రం తయారు చేయుట.

07.71.21 ప్రధాన కారణాంకాల పద్ధతిలో సంఖ్యల వర్గమూలంను కనుగొనుట.

07.71.22 ఇచ్చిన సమాచారంనుబట్టి కమ్మీజత రేఖాచిత్రాలు గీసి, చదువుతారు.

- ఉమ్మడి శీర్షబిందువు కల్గిన కోణాల జతలు దైనందిన జీవనంలోని వేర్వేరు ఉదాహరణలు శోధించుట (కత్తెర, రోడ్ల కలయిక, X మరియు Y అను అక్షరాలు మొదలగునవి.)
- కోణాల జతల పటాలు గీసి వివిధ ధర్మాలు పరీక్షించుట. (ఒక జట్టు వారు ఒక కోణం కొలత చెబుతారు రెండో జట్టు వారు మిగిలిన కోణాల కొలతలు చెప్పాలి).
- వివిధ కోణాల జతలలోగల సంబంధాన్ని అలాగే త్రిభుజంలోని కోణాలు మరియు వాటి భుజాలలోగల సంబంధాన్ని, గణిత పరికరాలు ఉపయోగించి ప్రాత్యక్షికం చేయుట.
- వేర్వేరు రకాల త్రిభుజాలు గీసి ఆ త్రిభుజాలన్నింటి కోణాలను కొలచి పరీక్షించమని చెప్పుట.
- త్రిభుజం యొక్క బాహ్యకోణం ధర్మాలు మరియు పైథాగోరస్ సిద్ధాంతాన్ని శోధించుట.
- మొదట సదృశసూత్రాలను నిర్ణయించిన తర్వాత ఒకదానిపై నొకటి అమర్చి సదృశధర్మాలను పరీక్షించుట.
- కంపాస్ మరియు స్కేలునుపయోగించి సాధారణ త్రిభుజాన్ని గీయుట.
- ఇచ్చిన సామాగ్రి యొక్క ప్రాతినిధ్య విలువ కనుగొనుట అనగా వర్గీకరించని సామాగ్రి యొక్క సగటును పట్టికలో రాసి, దానిని కమ్మీచిత్రాలతో చూపుటకు ప్రోత్సహించుట.
- సేకరించిన సామాగ్రినిబట్టి, భవిష్యత్తులోని ఘటనల అనుమతి తెలుసుకొనుట.
- త్రిభుజంలోని రెండు భుజాల మొత్తం, మూడవ భుజం పొడవు కంటే అధికంగా ఉంటుంది, అను ధర్మాన్ని గ్రహించుట.

07.71.23 భాగస్వామ్య వ్యవహారాలు చేస్తున్నపుడు ప్రమాణాలుపయోగిస్తారు.
07.71.24 వృత్తపరిధి యొక్క సూత్రం కనుగొని, దానినుపయోగిస్తారు.
07.71.25 వృత్తం యొక్క అల్పవృత్త చాపం, అధికవృత్త చాపంలను గుర్తించి, చాపాల కొలతలు నిర్ణయిస్తారు.
07.71.26 త్రిభుజ వైశాల్య సూత్రం తయారు చేస్తారు.
07.71.27 ఘనం, దీర్ఘఘనం తలవైశాల్యంను కనుగొంటారు.
07.71.28 పైథాగరస్ సిద్ధాంతమునుపయోగించి లంబ కోణ త్రిభుజం యొక్క భుజంను కనుగొనుట.
07.71.29 వర్గ విస్తరణ సూత్రం ఉపయోగిస్తారు.
07.71.30 ద్విపదివర్గాన్ని చేయుట.
07.71.31 ద్విపదిని కారణ రాసులుగా విభజిస్తారు.

ఉపాధ్యాయులకై మార్గదర్శక అంశాలు.

తరగతిలో ప్రశ్నోత్తరాలు, కృత్యాలు, చర్చలు మరియు విద్యార్థులతో సంవాదము లాంటి వివిధ మాధ్యమాలద్వారా ఏడవ తరగతి పాఠ్యపుస్తకమునుపయోగించుట చాలా అవసరం. అందుకై పాఠ్యపుస్తకమును క్షుణ్ణంగా చదవండి. పాఠ్యపుస్తకంలో మన పరిసరాలు, భూగోళం, విజ్ఞానశాస్త్రం, అర్థశాస్త్రం లాంటి అన్ని విషయాలు గణితశాస్త్రంతో సమన్వయ పరచబడినవి. ఇలా అనేక విషయాలలో గణితశాస్త్రంలోని సంకల్పనల ఉపయోగం కలుగుతుందని ఉపాధ్యాయులు విద్యార్థులకు తెల్పండి. అందువల్ల వ్యవహారంలో గణితశాస్త్రం ఉపయోగం స్పష్టమయి విద్యార్థులకు గణితశాస్త్రం నేర్చుకోవడంలోని ప్రాముఖ్యత అర్థమవుతుంది. గణితశాస్త్రంలోని సంకల్పనలు సరళమైన భాషలో ఇవ్వబడినవి. అభ్యాసమాలికలో ఇవ్వబడిన ఉదాహరణలపై ఆధారపడి అనేక ఉదాహరణలను ఉపాధ్యాయులు తయారుచేసి విద్యార్థులకు సాధించడానికివ్వండి. వారిని కొత్త ఉదాహరణలు తయారుచేయుటకు ప్రోత్సహించండి.

విద్యార్థులకు కొన్ని కఠినమైన సమస్యలను నక్షత్రపు గుర్తు రూపంలో ఇవ్వబడినవి. 'అధిక వివరాలకై' శీర్షిక కింద కొంచెం ఎక్కువ వివరణ ఇవ్వబడినవి. ఈ వివరణ ముస్ముందు గణితశాస్త్రంను అభ్యసిస్తున్నపుడు తప్పకుండా ఉపయోగపడుతుంది.

విషయసూచిక

మొదటి విభాగం

1. జ్యామితీయ నిర్మాణాలు .... 1 నుండి 10

2. పూర్ణసంఖ్యల గుణకారం మరియు భాగహారం .... 11 నుండి 14

3. గ.సా.భా. – క.సా.గు. .... 15 నుండి 23

4. కోణాలు మరియు కోణాల జతలు .... 24 నుండి 33

5. అకరణీయ సంఖ్యలు మరియు వాటిపై క్రియలు ....34 నుండి42

6. ఘాతాంకాలు .... 43 నుండి 50

7. సంయుక్త కమ్మీరేఖాచిత్రాలు.. 51 నుండి 54

8. బీజీయ సమాసాలు మరియు వాటిపై క్రియలు .... 55 నుండి 60

1వ సంకీర్ణ ప్రశ్న సంగ్రహం .... 61 నుండి 62

రెండవ విభాగం

9. అనులోమానుపాతం మరియు విలోమానుపాతము .... 63 నుండి 68

10. బ్యాంక్ మరియు సరళవడ్డీ .... 69 నుండి 74

11. వృత్తం .... 75 నుండి 79

12. చుట్టు కొలత మరియు వైశాల్యం .... 80 నుండి 86

13. పైథాగోరస్ సిద్ధాంతం .... 87 నుండి 90

14. బీజీయ సూత్రాలు – వర్గాల విస్తరణ.............................. 91 నుండి 94

15. సాంఖ్యక శాస్త్రం... 95 నుండి 99

2వ సంకీర్ణ ప్రశ్న సంగ్రహం 100

జవాబులు ....101 నుండి 104

1

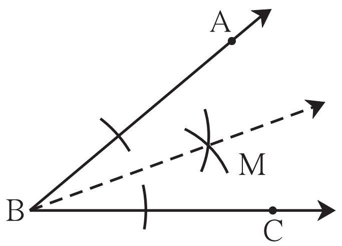
జ్యామితీయ నిర్మాణాలు

RLXVJB

కొంచెం గుర్తు తెచ్చుకొందాం.

- మనం కింది తరగతులలో రేఖ, రేఖాఖండం, కోణం, కోణసమద్విఖండన రేఖ మొదలైన వాటిని గూర్చి నేర్చుకున్నాం. మనం కోణంయొక్క కొలతను డిగ్రీలలో కొలుస్తాము. $\angle ABC$ యొక్క కొలత 40° ఉన్నట్లయితే, దానిని మనం $m\angle ABC = 40^\circ$ అని రాస్తాము.

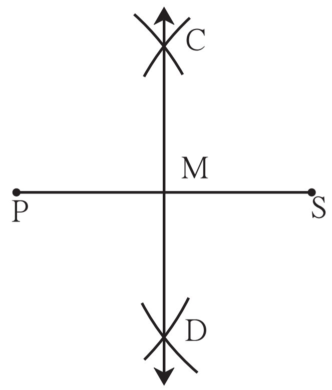
కోణసమద్విఖండన రేఖ (Angle bisector)



పక్కన $\angle ABC$ యొక్క పటం ఇవ్వబడినది.
కోణ సమద్విఖండన రేఖ, కోణాన్ని రెండు సమాన భాగాలుగా చేస్తుంది.
$\angle ABC$ నకు కిరణం BM సమద్విఖండన అవుతుందా?

రేఖాఖండం యొక్క లంబసమద్విఖండన రేఖ (Perpendicular bisector of a line segment)

4 సెం.మీ.ల PS రేఖాఖండంను గీసి, దాని లంబసమద్విఖండన రేఖను గీయండి. దానికి రేఖ CD అని పేరివ్వండి.



- రేఖ CD లంబ సమద్విఖండన రేఖ అవుతుందా, దీనిని పరీక్షించడానికి ఏంచేస్తావు?

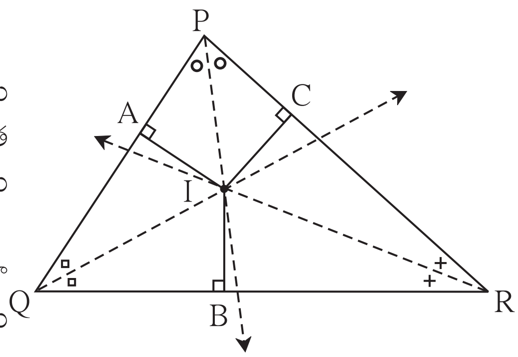
  $m\angle CMS = \square^\circ$

- $l(PM) = l(SM)$ అవుతుందా?

తెలుసుకొందాం.

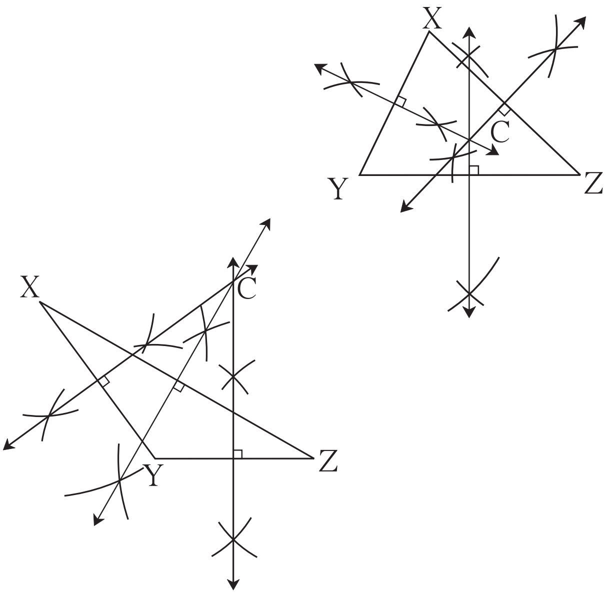
త్రిభుజ కోణాల యొక్క సమద్విఖండన రేఖల ధర్మం.

కృత్యం



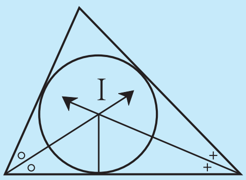
1. ఏదేని ఒక త్రిభుజం ΔPQR ను గీయండి.
2. వృత్తలేఖిని సహాయంతో త్రిభుజం యొక్క మూడు కోణాలను సమద్విఖండన చేయండి. (సమద్విఖండన రేఖలు తగినంత పొడవుగా లేనట్లయితే, వాటిని పెంచి ఒకదానినొకటి ఖండించు కొనునట్లుగా చూడండి.)
3. ఈ మూడు కోణసమద్విఖండనరేఖలు ఒకే బిందువుగుండా పోతాయి. అనగా అవి మిళిత రేఖలు అవుతాయి. వాటి మిళితబిందువుకు I అని పేరివ్వండి.
4. త్రిభుజంలో I నుంచి త్రిభుజం యొక్క భుజాలు PQ, QR మరియు PR లపై వరసగా IA, IB మరియు IC లంబరేఖలను గీయండి. ఈ మూడులంబరేఖల పొడవులను కొలవండి. ఏమి తెలిసింది? IA=IB=IC అని తెలుసుకోండి.

కృత్యం



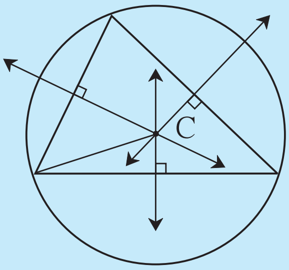
1. స్కేలు సహాయంతో ఒక అల్పకోణ త్రిభుజం మరియు ఒక అధిక కోణ త్రిభుజంను గీయండి. ప్రతి త్రిభుజం యొక్క భుజాలపై లంబ సమద్విఖండన రేఖలను గీయండి.
2. ప్రతి త్రిభుజం యొక్క భుజాల లంబ సమద్విఖండన రేఖలు మిళితరేఖలు అవుతాయని తెలుసుకోండి.
3. త్రిభుజం యొక్క భుజాల లంబసమద్విఖండన రేఖలు ఏ బిందువు వద్ద కలుస్తాయో, ఆ బిందువుకు C అని పేరివ్వండి. C బిందువు నుంచి త్రిభుజ శీర్షాల వరకుగల దూరాన్ని కొలవండి.
   ఏమి తెలిసింది ? CX=CY=CZ అని తెలుసుకోండి.
4. లంబసమద్విఖండన రేఖల మిళితబిందువు ఎక్కడ వుందో దానిని పరిశీలించండి.

✸ అధిక వివరాలకై



(1) త్రిభుజ కోణసమద్విఖండన రేఖలు **మిళితరేఖలు** (Concurrent) అవుతాయి. వాటి మిళితబిందువును **అంతఃవృత్త కేంద్రం** (incentre) అని అంటారు. దానిని I అనే అక్షరంతో సూచించారు.

(2) త్రిభుజం యొక్క భుజాల లంబసమద్విఖండన రేఖలు మిళితరేఖలు అవుతాయి. వాటి మిళితబిందువును **పరివృత్త మధ్యమం** లేదా **పరివృత్త కేంద్రం** (Circumcentre) అని అంటారు. దానిని C అనే అక్షరంతో సూచించారు.



అభ్యాసమాలిక 1

1. కిందనీయబడిన కొలతలతో రేఖా ఖండాలు గీసి, వాటి లంబసమద్విఖండన రేఖలు గీయండి.
   (1) 5.3సెం.మీ. (2) 6.7సెం.మీ. (3) 3.8సెం.మీ.
2. కిందనీయబడిన కొలతలతో కోణాలను గీసి, వాటి సమద్విఖండన రేఖలను గీయండి.
   (1) 105° (2) 55° (3) 90°
3. ఒక అధిక కోణ త్రిభుజం మరియు ఒక లంబకోణ త్రిభుజంను గీయండి. ప్రతి త్రిభుజంలోని కోణసమద్విఖండన రేఖల మిళిత బిందువును గీయండి. ప్రతి త్రిభుజంలో వాటి మిళితబిందువు ఎచ్చటవున్నది?
4. ఒక లంబకోణ త్రిభుజమును గీయండి. వాటి భుజాలపై లంబసమద్విఖండన రేఖలను గీయండి. వాటి మిళితబిందువు ఎచ్చటవున్నది?

5*. మైథిలి, శైలు మరియు అజయ్, వీరు ముగ్గురు ఒక పట్టణంలో వేర్వేరు చోట్ల నివసిస్తున్నారు. వారి ఇంటి నుంచి సమాన దూరంలో ఒక ఆట వస్తువుల దుకాణం ఉంది. దీనిని పటం సహాయంతో సూచించడానికి ఏ జ్యామితీరచననుపయోగించాలో వివరించండి.

తెలుసుకొందాం.

త్రిభుజ నిర్మాణం

కృత్యం

కొన్ని కోణాల మరియు భుజాల కొలతలనిచ్చినట్లయితే, త్రిభుజంను గీయగలమో చూడండి.

l(AB) = 4 సెం.మీ., l(BC) = 3 సెం.మీ.

ఉండునట్లుగా ΔABC ని గీయండి.

- ఇలాంటి త్రిభుజమును గీయవచ్చా?
- ఈ నియమాన్ని పాటిస్తూ అనేక త్రిభుజాలను గీయవచ్చునని తెలుసుకొండి.
- ఈ వివరాలనుబట్టి ఒకే ఒక త్రిభుజంను గీయ వచ్చునని అనుకొన్నచో, ఇంకెలాంటి నియమాలను పొందుపరచాలి?

> ఏదేని ఒక భవనంను నిర్మించేముందు ఆ భవన రచనను (నమూనా) కాగితంపై గీస్తారు. ఆభవనం యొక్క చిన్న ప్రతి రూపంను తయారు చేసినది కూడా మీరు చూసి ఉండవచ్చు. ఆ రేఖాకృతి ఆధారంగా భవన నిర్మాణం సులభమవుతుంది. అదే విధంగా ఏదేని జ్యామితీయ రచన చేసేముందు, దానియొక్క చిత్తు పటంను గీసు కొన్నట్లయితే, ఇచ్చిన నిర్మాణ రచన చేయుటకు సహా యపడుతుంది. నిర్మాణంలోని క్రియల వరసను నిర్ణయించవచ్చు.

(I) త్రిభుజం యొక్క మూడు భుజాలపొడవులు ఇచ్చిన త్రిభుజము గీయుట.

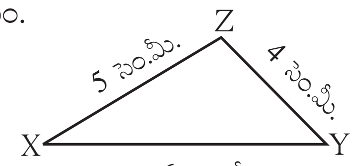
ఉదా: ΔXYZ లో l(XY) = 6 సెం.మీ., l(YZ) = 4 సెం.మీ., l(XZ) = 5 సెం.మీ. ఉండునట్లుగా గీయండి. చిత్తు పటంను గీయునపుడు, ఇచ్చిన వివరాలను వెంటనే సాధ్యమయినంతగా యోగ్య ప్రమాణంలో చూపుదాం. ఉదాహరణలో భుజం xy అన్నిటికంటె పొడవుగా ఉంది. కాబట్టి చిత్తు పటంలో కూడా దానిని అలాగే చూపుదాం.

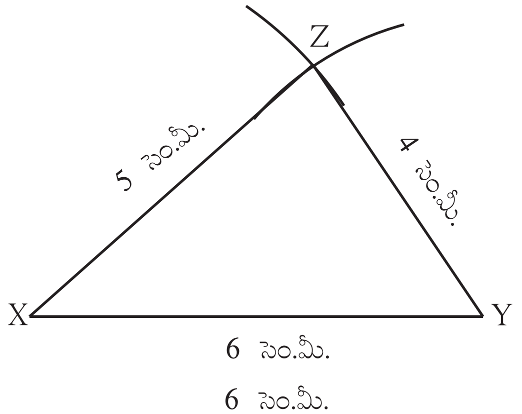
పటం గీయుటకు మెట్లు

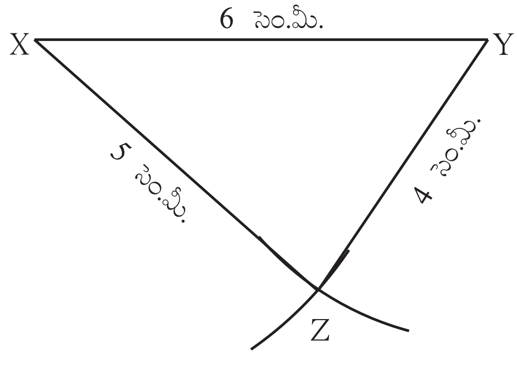
1. చిత్తుపటం మాదిరిగా 6 సెం.మీ.ల పొడవు గల రేఖాఖండం XY ను భూమిగా తీసుకొన్నాం.
2. రేఖాఖండం XZ యొక్క పొడవు 5 సెం.మీ. ఉన్నందున, వృత్తలేఖిని ద్వారా 5 సెం.మీ.ల దూరాన్ని తీసుకొని, వృత్తలేఖిని వాడిమొనను X పైన ఉంచి, రేఖాఖండం XY కు ఒకవైపు ఒక చాపంను గీసాం.
3. వృత్తలేఖిని ద్వారా 4 సెం.మీ.ల దూరాన్ని తీసుకొని వృత్త లేఖిని వాడిమొనను Y పైన ఉంచి ముందుగీసిన చాపంను ఖండించునట్లుగా చాపంను గీసాం. ఖండన బిందువుకు Z అని పేరుఇచ్చాం. రేఖ XZ మరియు రేఖాఖండం YZ లను గీసాం.

భూమికి రెండవవైపు చాపంలను గీసి అలాంటి త్రిభుజంనే నిర్మించి చూపబడినది.

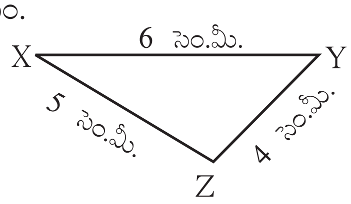
చిత్తు పటం.







చిత్తు పటం.



అభ్యాసమాలిక 2

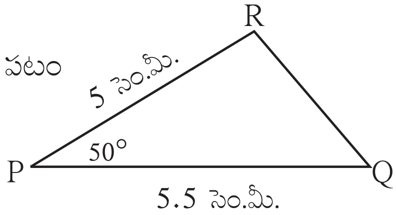
1. కిందనీయబడిన కొలతలను బట్టి త్రిభుజాలను నిర్మించండి.
   (a) ΔABC లో $l(AB) = 5.5$ సెం.మీ. , $l(BC)=4.2$ సెం.మీ., $l(AC)=3.5$ సెం.మీ.
   (b) ΔSTU లో $l(ST)=7$ సెం.మీ. , $l(TU)=4$ సెం.మీ., $l(SU)=5$ సెం.మీ.
   (c) ΔPQR లో $l(PQ) = 6$ సెం.మీ., $l(QR)=3.8$ సెం.మీ., $l(PR)=4.5$ సెం.మీ.
2. భూమి 5 సెం.మీ. మిగిలిన ప్రతి భుజం పొడవు 3.5 సెం.మీ.లు గల సమద్విబాహు త్రిభుజంను నిర్మించండి.
3. 6.5 సెం.మీ.ల భుజంగల సమబాహు త్రిభుజంను నిర్మించండి.
4. మీరు స్వయంగా భుజాల పొడవులు తీసుకొని ఒక సమబాహు త్రిభుజం, ఒక సమద్విబాహు త్రిభుజం మరియు ఒక విషమ బాహు త్రిభుజాన్ని నిర్మించండి.

(II) త్రిభుజం యొక్క రెండుభుజాలు మరియు వాటి మధ్య కోణం కొలతనిచ్చిన త్రిభుజాన్ని గీయుట.

ఉదా: ΔPQR లో $l(PQ) = 5.5$ సెం.మీ., $m\angle P = 50^\circ$, $l(PR) = 5$ సెం.మీ. ఉండునట్లుగా గీయుము.

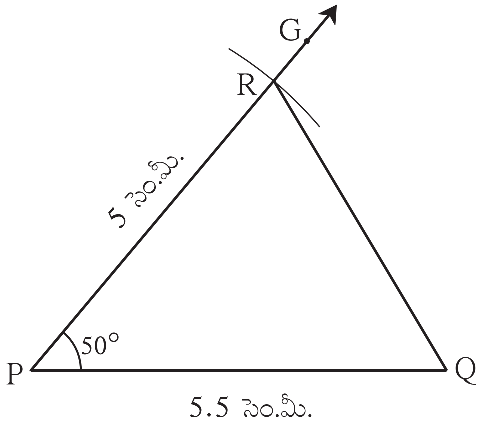
(చిత్తు పటంను గీసి, దానిలో ఇచ్చిన వివరాలను చూపించాం $\angle P$ అల్పకోణం కాబట్టి చిత్తు పటంలో కూడా అలాగే గీయ బడింది.)

చిత్తు పటం



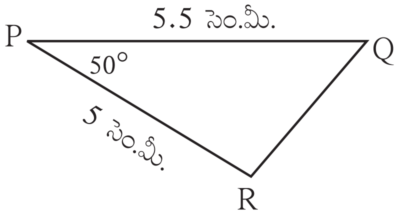
పటం గీయడానికి మెట్లు

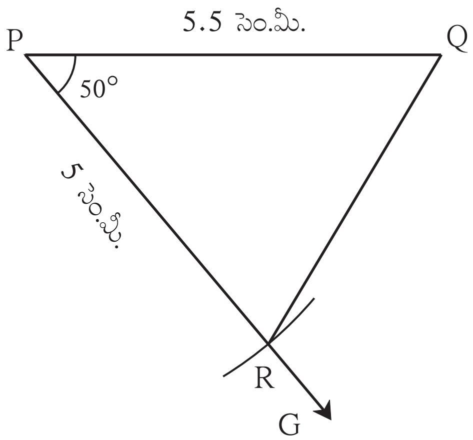
1. చిత్తు పటం మాదిరిగా 5.5 సెం.మీ.ల పొడవుతో రేఖాఖండం PQ ను భూమిగా తీసుకొన్నాం.
2. $m\angle GPQ=50^\circ$ ఉండునట్లుగా కిరణం PG గీసాం.
3. వృత్త లేఖిని ద్వారా 5 సెం.మీ. ల దూరాన్ని తీసుకొండి. వృత్త లేఖిని వాడిమొన P పైన ఉంచి కిరణం PG పై చాపంను గీసాం. ఆఖండన బిందువునకు R అని పేరిచ్చాం. బిందువు Q మరియు బిందువు R లను కలపండి. ΔPQR కావలసిన త్రిభుజం తయారైంది.



కిరణం PG ని రేఖ PQ నకు రెండవవైపున కూడా గీయవచ్చు. ఇప్పుడు చిత్తుపటంను కిందివిధంగా గీద్దాం. దానినిబట్టి ΔPQR ను గీసాం.

చిత్తు పటం





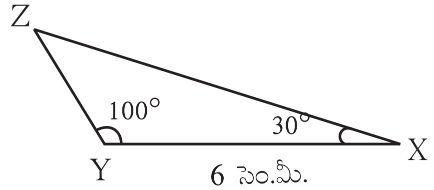
⦿ కిందనీయబడిన కొలతలను బట్టి త్రిభుజాలను నిర్మించండి.

1. ΔMAT లో $l(MA) = 5.2$ సెం.మీ., $m\angle A = 80^\circ$, $l(AT) = 6$ సెం.మీ.
2. ΔNTS లో $m\angle T = 40^\circ$, $l(NT) = l(TS) = 5$ సెం.మీ.
3. ΔFUN లో $l(FU) = 5$ సెం.మీ., $l(UN) = 4.6$ సెం.మీ., $m\angle U = 110^\circ$
4. ΔPRS లో $l(RS) = 5.5$ సెం.మీ., $l(RP) = 4.2$ సెం.మీ., $m\angle R = 90^\circ$

(III) రెండు కోణాలు మరియు వాటి మధ్యభుజం కొలతనిచ్చిన త్రిభుజంను నిర్మించుట.

ఉదా: $l(YX) = 6$ సెం.మీ., $m\angle ZXY = 30^\circ$, $m\angle XYZ = 100^\circ$ ఉండునట్లుగా ΔXYZ ను గీయండి.

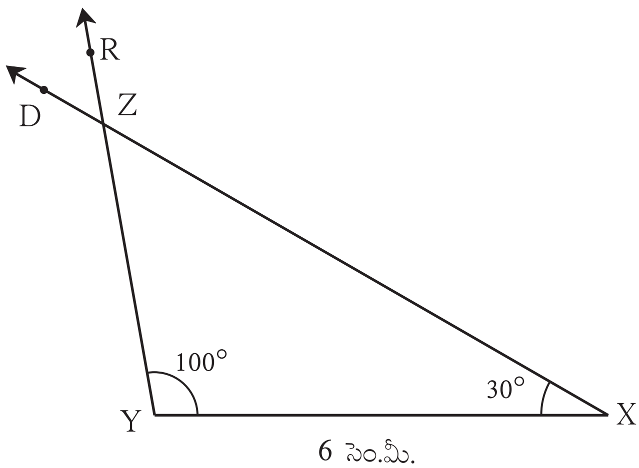
$\angle XYZ$ అధికకోణం కాబట్టి చిత్తు పటంలో కూడా అలాగే చూపబడింది.



చిత్తు పటం

పటం నిర్మించడానికి మెట్లు

1. చిత్తు పటం మాదిరిగా రేఖాఖండం YX ను భూమిగా 6 సెం.మీ.లు తీసుకొన్నాం.
2. $m\angle XYR=100^\circ$ ఉండునట్లుగా కిరణం YR ను గీసాం.
3. రేఖాఖండం XY నకు ఏ వైపునబిందువు R ఉందో అదేవైపున $m\angle YXD = 30^\circ$ ఉండునట్లుగా కిరణం XD ని గీసాం. YR మరియు XD కిరణాలయొక్క ఖండన బిందువునకు Z అని పేరిచ్చాం. ΔXYZ కావలసిన త్రిభుజం తయారైంది.
4. భూమికి రెండవవైపున కూడా ఇలాంటి త్రిభుజం గీయవచ్చునని తెలుసుకోండి.



మెదడుకు మేత.

ఉదా: ΔABC లో $m\angle A = 60^\circ$, $m\angle B = 40^\circ$ మరియు $l(AC) = 6$ సెం.మీ. గలదు. ఐతే మీరు ΔABC ని గీయగలరా? త్రిభుజంను గీయడానికి ఇంకెలాంటి వివరాలు ఇవ్వవలసి ఉంటుంది? ఈ వివరాలను పొందడానికి ఏ ధర్మాలను ఉపయోగించవచ్చును? చిత్తు పటంను గీసి నిర్ణయించండి.

త్రిభుజంలోని మూడు కోణాల కొలతల మొత్తం యొక్క ధర్మాలను గుర్తుకు తెచ్చుకోండి. ఈ ధర్మాన్ని ఉపయోగించి AC ని కలిగియున్న $\angle A$ మరియు $\angle C$ ల కొలతలు దొరుకునా?

అభ్యాసమాలిక 4

⦿ కిందనీయబడిన కొలతలను బట్టి త్రిభుజాలను నిర్మించండి.

1. ΔSAT, లో $l(AT) = 6.4$ సెం.మీ., $m\angle A = 45^\circ$, $m\angle T = 105^\circ$
2. ΔMNP, లో $l(NP) = 5.2$ సెం.మీ., $m\angle N = 70^\circ$, $m\angle P = 40^\circ$
3. ΔEFG, లో $l(EG) = 6$ సెం.మీ., $m\angle F = 65^\circ$, $m\angle G = 45^\circ$
4. ΔXYZ, లో $l(XY) = 7.3$ సెం.మీ., $m\angle X = 34^\circ$, $m\angle Y = 95^\circ$

(IV) కర్ణం మరియు ఒక భుజం పొడవు ఇచ్చిన లంబకోణ త్రిభుజంను నిర్మించుట.

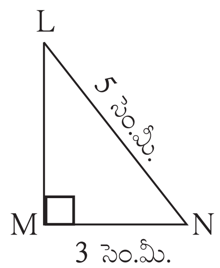
త్రిభుజంలో ఒక కోణం లంబకోణమైన ఆ త్రిభుజం లంబకోణ త్రిభుజమవుతుందని మనకు తెలుసు. ఇలాంటి త్రిభుజంలో **లంబకోణానికి ఎదురుగానున్న భుజంనే** కర్ణం అని అంటారు.

ఉదా: $m\angle LMN = 90^\circ$ కర్ణం = 5 సెం.మీ. $l(MN)$ 3 సెం.మీ. ఉండునట్లుగా ΔLMN ను గీయండి.

ఇచ్చిని వివరాలనుబట్టి, చిత్తుపటంను గీయండి.

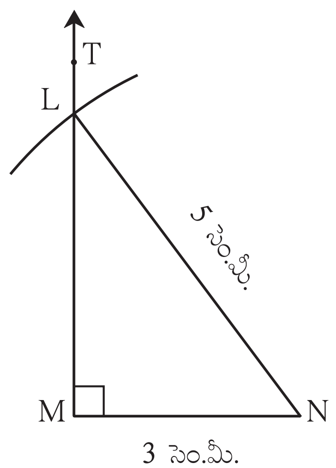
$m\angle LMN=90^\circ$ గనుక ఉజ్జాయింపుగా లంబకోణ త్రిభుజంను గీసి, లంబకోణం గుర్తును చూపాం. అనగా ఇచ్చిన వివరాలను చిత్తుపటంలో చూపించాం.

చిత్తు పటం



పటం నిర్మించడానికి మెట్లు.

1. చిత్తుపటంలో చూపినవిధంగా MN రేఖ ను భూమిగా 3 సెం.మీ.ల పొడవుతో గీసాం.
2. రేఖ MN యొక్క బిందువు M వద్ద 90° కొలతతో కోణాన్ని ఏర్పరచే కిరణం MT ని గీసాం.
3. వృత్తలేఖినిద్వారా 5 సెం.మీ. దూరంను తీసుకొని వృత్తలేఖిని వాడిమొన బిందువు N పై ఉంచి కిరణం MT ని ఖండించు నట్లుగా చాపంను గీసాం. ఖండన బిందువునకు L అని పేరు పెట్టాం. ΔLMN తయారయింది.
4. భూమికి రెండవవైపున కూడా ఇలాంటి పటమే గీయవచ్చునని తెలుసుకోండి.



అభ్యాసమాలిక 5

కిందనీయబడిన కొలతలను బట్టి త్రిభుజాలను నిర్మించండి.

1. ΔMAN, లో $m\angle MAN = 90^\circ$, $l(AN) = 8$ సెం.మీ., $l(MN) = 10$ సెం.మీ.
2. లంబకోణ త్రిభుజం STU లో కర్ణం SU = 5 సెం.మీ. మరియు $l(ST) = 4$ సెం.మీ.
3. ΔABC లో $l(AC) = 7.5$ సెం.మీ., $m\angle ABC = 90^\circ$, $l(BC) = 5.5$ సెం.మీ.
4. ΔPQR లో $l(PQ) = 4.5$ సెం.మీ., $l(PR) = 11.7$ సెం.మీ., $m\angle PQR = 90^\circ$.
5. త్రిభుజాల నిర్మాణంనకై వేర్వేరు ఉదాహరణలను తయారుచేసి విద్యార్థులు అభ్యాసం చేయవలెను.

కృత్యం

కింది వివరాలను బట్టి త్రిభుజాలను నిర్మించే ప్రయత్నం చేయండి.

1. ΔABC లో $m\angle A = 85^\circ$, $m\angle B = 115^\circ$ $l(AB) = 5$ సెం.మీ.
2. ΔPQR లో $l(QR) = 2$ సెం.మీ., $l(PQ) = 4$ సెం.మీ., $l(PR) = 2$ సెం.మీ.

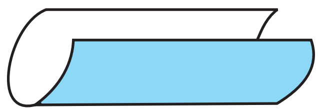
పై రెండు త్రిభుజాలను మీరు గీయగలరా? గీయలేక పోయినచో దాని వెనక గల కారణాలను అన్వేషించండి.

✸ **అధిక వివరాలకై కృత్యం.**

ఉదా: ΔABC లో $l(BC)=$ సెం.మీ. భూమి $l(CA) = 6$ సెం.మీ. $m\angle ABC = 40^\circ$. 8 సెం.మీ. పొడవుగల భూమి BC పై 40° కోణాన్ని ఏర్పరచు కిరణంను గీయండి. దానిపై $l(AC) = 6$ సెం.మీ. వచ్చునట్లుగా A కు ఇలా రెండుబిందువులు లభిస్తాయని వృత్తలేఖిని సహాయంతో తెలుసుకోండి. అనగా ఇచ్చిన కొలతలతో రెండు వేర్వేరు ఆకారాల త్రిభుజాలు లభిస్తాయి. త్రిభుజంలోని మూడు కోణాల కొలతలిచ్చి ఒక్క భుజం కొలత కూడా ఇవ్వనట్లయితే త్రిభుజాన్ని గీయవచ్చునా? ఇలా ఎన్ని త్రిభుజాలు గీయవచ్చు?

తెలుసుకొందాం.

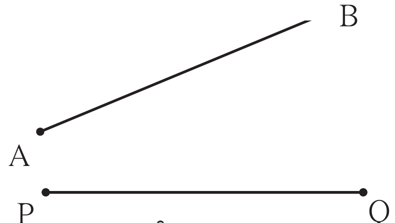
రేఖాఖండాల సర్వసమానత్వం (Congruence of segments)



కృత్యం I ఒక దీర్ఘచతురస్రాకార కాగితం తీసుకోండి. ఆ కాగితం యొక్క ఎదురెదురుగానున్న భుజాలను కలపండి. అవి పూర్తిగా ఏకీభవిస్తాయని తెలుసుకోండి.

కృత్యం II స్కేలు సహాయంతో రేఖ AB పొడవు మరియు రేఖ PQల పొడవులను కొలిచి రాయండి.

$l(AB) =$ .... $l(PQ) =$ ....



రేఖ AB మరియు రేఖ PQ ఈ రేఖాఖండాల పొడవులు సమానంగా ఉన్నాయా? ఆ రేఖలను ఎత్తి ఒకదానిపైనొకటి పెట్టలేము. ఒక పారదర్శక కాగితం AB పై పెట్టి, ఆ కాగితంపై AB రేఖాఖండం బిందువుల పేర్లతోసహా దిద్దండి. పారదర్శక కాగితంపై పొందిన కొత్త రేఖాఖండం PQ పై పెట్టి పరిక్షించండి. A బిందువు P పైన ఉంచిన B బిందువు Q పైన పడుతుందని తెలుసుకోండి. దీనిని బట్టి రేఖ AB, రేఖ PQ నకు సారూప్యమని తెలుస్తుంది.

దీనిని బట్టి, రెండు రేఖాఖండాల పొడవు సమానంగా ఉన్నట్లయితే ఆ రేఖాఖండాలు పూర్తిగా ఏకీభవిస్తాయని తెలుస్తుంది. అనగా అవి సర్వసమానంగా ఉన్నాయి అని అంటారు. రేఖాఖండం AB రేఖాఖండం PQ లు సర్వసమానమైనచో, దానిని రేఖ AB $\cong$ రేఖ PQ అని ఇలా రాస్తారు.

ఇదినాకు అర్థమైంది.

- ఇచ్చిన రేఖాఖండాల పొడవులు సమానంగా ఉన్నచో ఆ రేఖాఖండాలు సర్వసమానమవుతాయి.

- రేఖ AB $\cong$ రేఖ PQ అనగా రేఖ PQ $\cong$ రేఖ AB.
- రేఖ AB $\cong$ రేఖ PQ, రేఖ PQ $\cong$ రేఖ MN అయిన రేఖ AB $\cong$ రేఖ MN అని గుర్తుంచుకోండి.

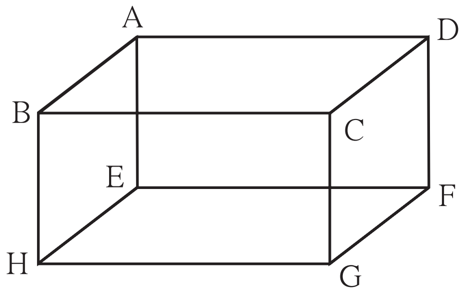
అనగా ఒక రేఖా ఖండం రెండవదానితో, రెండవది మూడవదానితో సర్వసమానమైనచో మొదట రేఖాఖండం మూడవదానితో కూడా సర్వసమానమవుతుంది.

కృత్యం I

ఏదేని ఒక పెట్టె తీసుకోండి. దాని ప్రతి అంచు పొడవును కొలవండి. ఏయే అంచులు సర్వసమానమో చూడండి.

కృత్యం II

కిందనీయబడిన ఆకారమునుబట్టి సర్వసమాన రేఖాఖండాల జతలను రాయండి.



(1) రేఖ AB ≅ రేఖ DC

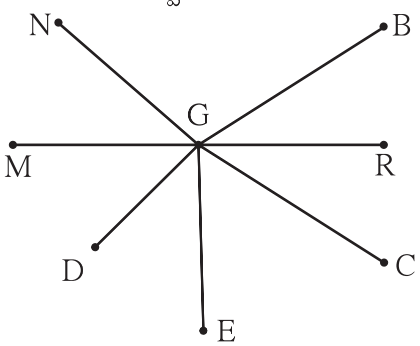
(2) రేఖ AE ≅ రేఖ BH

(3) రేఖ EF ≅ రేఖ ....

(4) రేఖ DF ≅ రేఖ ....

అభ్యాసమాలిక 6

1. కింది పటములో సర్వసమాన రేఖాఖండాల జతలను రాయండి. (విభాగినినుపయోగించి వాటిని వెదకండి)



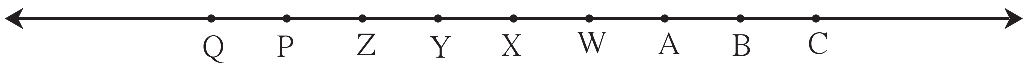
(i) ....

(ii) ....

(iii) ....

(iv) ....

2. కింది రేఖపై ప్రక్కనేనున్న ఏ రెండు బిందువుల మధ్యనైన సమాన దూరం ఉన్నది. దానినిబట్టి ఖాళీలనునింపండి.



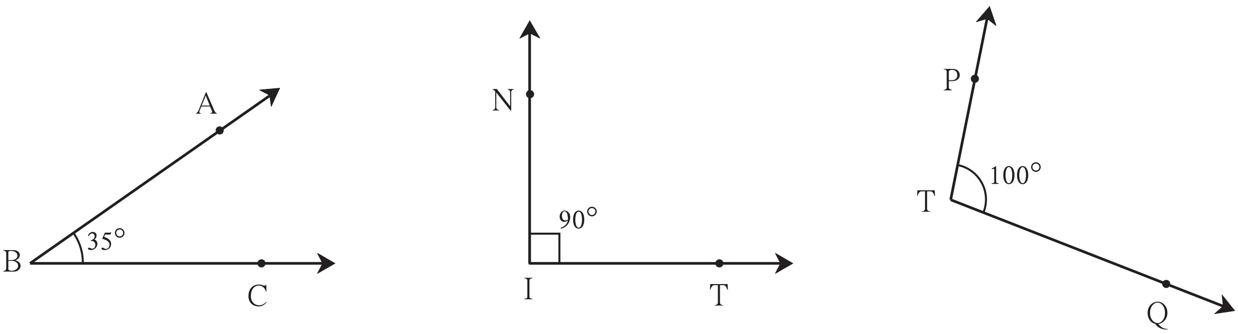
(i) రేఖ AB ≅ రేఖ .... (ii) రేఖ AP ≅ రేఖ .... (iii) రేఖ AC ≅ రేఖ ....

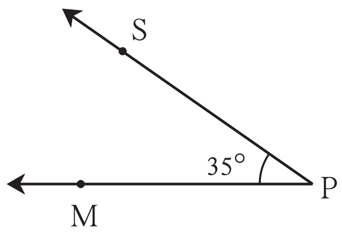
(iv) రేఖ .... ≅ రేఖ BY (v) రేఖ .... ≅ రేఖ YQ (vi) రేఖ BW ≅ రేఖ ....

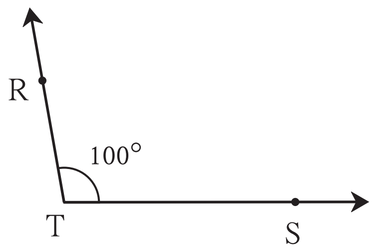
తెలుసుకొందాం.

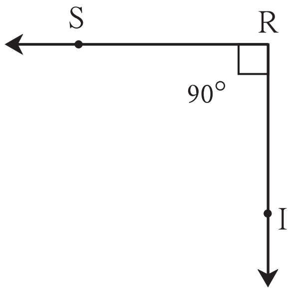
కోణాల సర్వసమానత్వం (Congruence of angles)

కిందనీయబడిన కోణాలను పరిశీలించి సమాన కొలతలుగల కోణాల జతలను రాయండి.

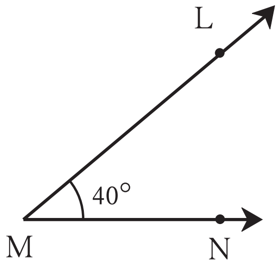


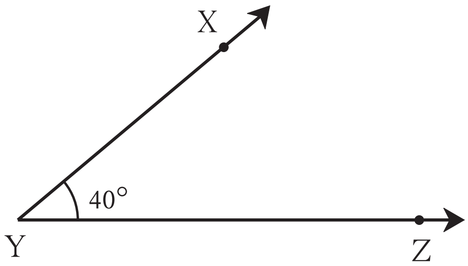






కృత్యం





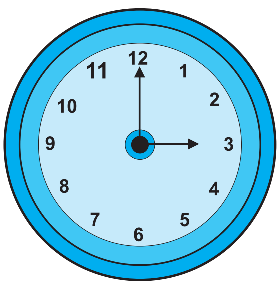
పటంలో చూపిన విధంగా 40° కొలతతో ∠LMN మరియు ∠XYZ అను రెండు కోణాలను గీయండి. ఒక పారదర్శక కాగితం ∠LMN పై ఉంచి బిందువుల పేర్లతోసహా కోణాలభుజాలను దిద్దండి. పారదర్శక కాగితంను పైకెత్తి పొందిన కోణాన్ని ∠XYZ పై ఉంచండి. బిందువు M బిందువు Y పై, కిరణం MN కిరణం YZ పై పెట్టిన కిరణం ML కిరణం YX పై పడుతుందని తెలుసుకోండి. దీనినిబట్టి సమాన కొలతగల కోణాలు సర్వసమానములని అర్థమవుతుంది. కోణాల సర్వసమానత్వం భుజాల పొడవులపై ఆధారపడి ఉండదు. కోణాల సర్వసమానత్వం కోణాల కొలతలపై ఆధారపడి ఉంటుంది. ∠LMN మరియు ∠XYZ లు సర్వసమానములు, దీనిని ∠LMN ≅ ∠XYZ అని ఇలారాస్తారు.

ఇది నాకు అర్థమైంది.

- ఏ కోణాల కొలతలు సమానంగా ఉంటాయో ఆ కోణాలు సర్వసమానములవుతాయి.

- ∠LMN ≅ ∠XYZ అయిన ∠XYZ ≅ ∠LMN
- ∠LMN ≅ ∠ABC మరియు ∠ABC ≅ ∠XYZ అయిన ∠LMN ≅ ∠XYZ

పదండి, చర్చిద్దాం.



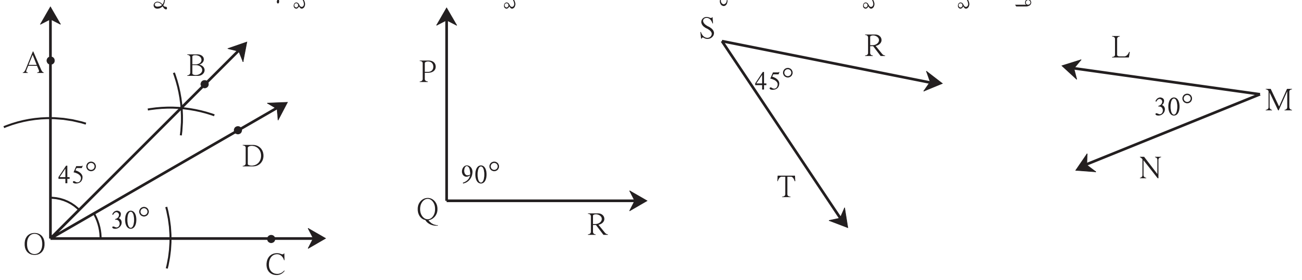
(1) గడియారంలో సమయమెంత అయింది ? ______

(2) రెండు ముళ్ళ మధ్య ఎన్ని డిగ్రీల కొలతగల కోణం ఏర్పడింది? ______

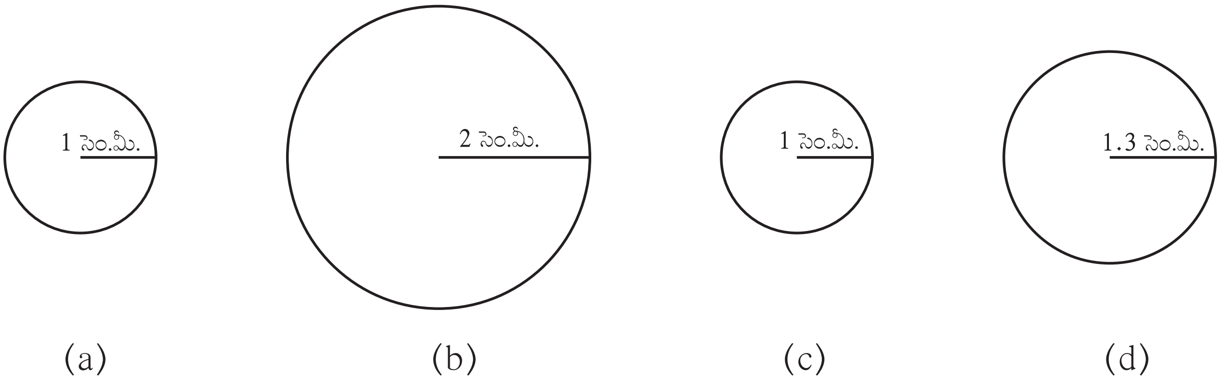
(3) ఈ కోణానికి సర్వసమాన కోణం గడియారం ముళ్ళమధ్య ఇంకెన్ని గంటలకు ఏర్పడుతుంది? ______

అభ్యాసమాలిక 7

⊙ కింద కొన్ని కోణాలు ఇవ్వబడినవి. వాటిలో సర్వసమాన కోణాలయొక్క జతలను సర్వసమానత్వ గుర్తునుపయోగించి రాయుము.



వృత్తాల సర్వసమానత్వం (Congruence of circles)



కృత్యం I పై ఆకృతులలోని వృత్తాలను పరిశీలించండి.
పై విధంగా 1 సెం.మీ. 2 సెం.మీ., 1 సెం.మీ., 1.3 సెం.మీ. వ్యాసార్థంగల వృత్తాలను కాగితంపై గీసి, వాటిని వృత్తాకార బిళ్ళలుగా కత్తిరించండి. ఈ బిళ్ళలను ఒకదానిపైనొకటి ఉంచి ఏ బిళ్ళలు ఒకదానితోనొకటి పూర్తిగా ఏకీభవిస్తాయో పరీక్షించండి.

పరిశీలన : 1. పటం (a) మరియు (c) లలోని వృత్తాలు ఒకదానితొనొకటి ఏకీభవిస్తాయి.
2. పటం (b) మరియు (c) లలోని వృత్తాలు అలాగే, పటం (a) మరియు పటం (d) లలోని వృత్తాలు ఒకదానితోనొకటి ఏకీభవించవు.

ఏ వృత్తాలు ఒకదానితొనొకటి పూర్తిగా ఏకీభవిస్తాయో వాటిని సర్వసమాన వృత్తాలు అని అంటారు.

కృత్యం II రకరకాల ఆకారాలలో, ఉండే ఒకే విధమైన మందంగల గాజులు తెచ్చి, వాటిలో ఏయే గాజులు సర్వసమానంగా ఉన్నాయో చూడండి.

కృత్యం III వ్యవహారికంగా మీకు సర్వసమాన వృత్తాలు ఎచ్చట కన్పిస్తాయో వాటిని వెదకండి.

కృత్యం IV ఇంట్లో వృత్తాకార అంచుగల పళ్ళాలు లేదా గిన్నెలు తీసుకోండి. వాటి అంచులను ఒక దానితో నొకటి కలిపి, ఏ అంచులు ఒకదానితోనొకటి సర్వసమానమవుతాయో చూడండి.

ఇది నాకర్థమైంది.

- ఏ వృత్తాల వ్యాసార్ధాలు సమానంగా ఉంటాయో, ఆ వృత్తాలు సర్వసమానములవుతాయి.

ICT Tools or Links

Geogebra Software లోని Construction tools నుపయోగించి త్రిభుజం మరియు వృత్తాలను గీయండి.

2 పూర్ణసంఖ్యల గుణకారం మరియు భాగహారం

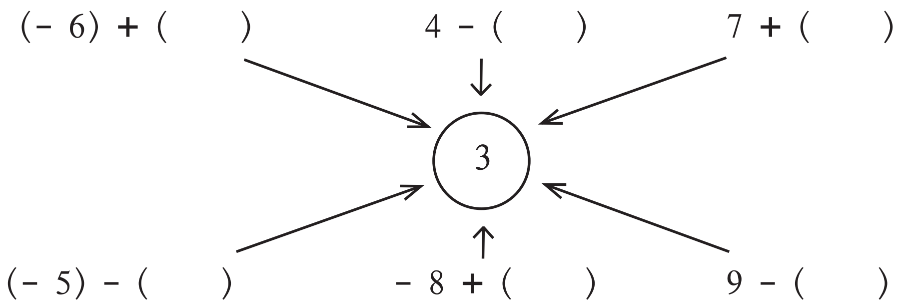
కొంచెం గుర్తు తెచ్చుకొందాం.

- కింది తరగతిలో మనం పూర్ణసంఖ్యల కూడిక మరియు తీసివేతలను చేయడం నేర్చుకున్నాం. వాటినుపయోగించి కింది ఖాళీలలను పూరించండి.

(1) $5 + 7 = \square$ (2) $10 + (-5) = \square$ (3) $-4 + 3 = \square$

(4) $(-7) + (-2) = \square$ (5) $(+8) - (+3) = \square$ (6) $(+8) - (-3) = \square$

- కింది ప్రతి క్రియలో జవాబు 3 వచ్చునట్లుగా ఖాళీలలో సరియైన సంఖ్యను రాయుము.



తెలుసుకొందాం.

పూర్ణసంఖ్యల గుణకారం

మయూరి పాఠశాలనుంచి ఇంటికి వెళుతున్నపుడు ఆమె సైకిల్ పంక్చర్ అయింది. పంక్చర్ వేయించుకోడానికి ఆమె వద్ద తగినంత డబ్బు లేకుండెను. అప్పుడామెకు సుశాంత్, స్నేహల్ మరియు కల్పన ప్రతి ఒక్కరు అయిదు రూపాయలు అప్పుగా ఇవ్వడంతో ఆమె వద్ద 15 రూపాయల అప్పు పోగయింది. ఆమె సైకిల్ మరమ్మత్తు అయింది. మనం అప్పుగా తీసుకొన్న రూపాయలను లేదా ఋణంను '–' (ఋణ) గుర్తుతో చూపిస్తాం, అనగా మయూరిపై 15 రూపాయల ఋణం ఉండెను లేదా ఆమె వద్ద –15 రూపాయలుండెను .

ఇచ్చట మనం $(-5) + (-5) + (-5) = -15$ అని తెలుసుకొన్నాం

దీనిని బట్టి $(-5) \times 3 = 3 \times (-5) = -15$ అని దృష్టికి వస్తుంది.

మరుసటి రోజు మయూరి తల్లి దగ్గరనుంచి 15 రూపాయలు తెచ్చి ప్రతి ఒక్కరి డబ్బు తిరిగిచ్చేసి రుణం చెల్లించింది లేదా తగ్గించుకొంది, రుణం తీర్చుకోవడం అనగా డబ్బు పొందడమని గ్రహించి $-(-15) = +15$ అని గుర్తుంచుకోండి.

మనం పూర్ణాంకాల గుణకారం మరియు భాగహారం నేర్చుకొని ఉన్నాం. ఈ క్రియలు చేయుటకు ఎక్కాలు సహితం తయారు చేసాం. ఇప్పుడు పూర్ణసంఖ్యల గుణకారాన్ని అభ్యసిద్దాం అనగా ఋణసంఖ్యలు, ధనసంఖ్యలు మరియు సున్న కలిసిన సమూహంలోని సంఖ్యల గుణకారమును చూద్దాం.

$(-3) + (-3) + (-3) + (-3)$ ఈ కూడికను అనగా (-3) అను సంఖ్యను 4 సార్లు తీసుకొని చేసిన మొత్తం –12 వస్తుంది. ఈ కూడికను మనం $(-3) \times 4 = -12$ అని రాయవచ్చు. అదేవిధంగా $(-5) \times 6 = -30$, $(-7) \times 2 = -14$, $8 \times (-7) = -56$

ఇప్పుడు (–4) వ ఎక్కమును తయారు చేద్దాం

$(-4) \times 0 = 0$
$(-4) \times 1 = -4$
$(-4) \times 2 = -8$
$(-4) \times 3 = -12$ ↓

దీనిలోని చిత్రాకృతిని పరిశీలించండి. ఇచ్చట (–4) యొక్క గుణిజం ఒక ప్రమాణం పెరిగినా లబ్ధం 4 తగ్గినట్లుగాతెలుస్తుంది.

ఈ చిత్రాకృతిని ఇలానే ఉంచి (–4)వ ఎక్కంను, పైకి గుణిజంను తగ్గించి పెంచుతుపోయినచో ఇలా అవుతుంది.

$(-4) \times (-2) = 8$ ↑
$(-4) \times (-1) = 4$
$(-4) \times 0 = 0$

(– 4) యొక్క గుణిజం ఒక ప్రమాణం తగ్గినచో లబ్ధంలో 4 పెరుగుతుందని దృష్టిలో పెట్టుకోండి.

కింది పట్టికలో (–5) వ ఎక్కం ఇవ్వబడినది. పట్టికలో (–6) మరియు (–7)ల ఎక్కములను పూర్తి చేయుము.

$(-5) \times (-3) = 15$	$(-6) \times (-3) =$ ☐	$(-7) \times (-3) =$ ☐
$(-5) \times (-2) = 10$	$(-6) \times (-2) =$ ☐	$(-7) \times (-2) =$ ☐
$(-5) \times (-1) = 5$	$(-6) \times (-1) =$ ☐	$(-7) \times (-1) =$ ☐
$(-5) \times 0 = 0$	$(-6) \times 0 =$ ☐	$(-7) \times 0 =$ ☐
$(-5) \times 1 = -5$	$(-6) \times 1 =$ ☐	$(-7) \times 1 =$ ☐
$(-5) \times 2 = -10$	$(-6) \times 2 =$ ☐	$(-7) \times 2 =$ ☐
$(-5) \times 3 = -15$	$(-6) \times 3 =$ ☐	$(-7) \times 3 =$ ☐
$(-5) \times 4 = -20$	$(-6) \times 4 =$ ☐	$(-7) \times 4 =$ ☐

ఇది నాకర్థమైంది.

- రెండు ధన పూర్ణసంఖ్యల లబ్ధం ధన పూర్ణసంఖ్య అవుతుంది.
- ఒక ధన పూర్ణసంఖ్య మరియు ఒక ఋణపూర్ణ సంఖ్యల లబ్ధం ఋణ పూర్ణ సంఖ్య అవుతుంది.
- రెండు ఋణ పూర్ణసంఖ్యల లబ్ధం ధనపూర్ణసంఖ్య అవుతుంది.

(ధనసంఖ్య) × (ధనసంఖ్య) = ధనసంఖ్య
(ధనసంఖ్య) × (ఋణసంఖ్య) = ఋణసంఖ్య
(ఋణసంఖ్య) × (ధనసంఖ్య) = ఋణసంఖ్య
(ఋణసంఖ్య) × (ఋణసంఖ్య) = ధనసంఖ్య

అభ్యాసమాలిక 8

⊙ గుణించండి.

(i) $(-5) \times (-7)$ (ii) $(-9) \times (6)$ (iii) $(9) \times (-4)$ (iv) $(8) \times (-7)$

(v) $(-124) \times (-1)$ (vi) $(-12) \times (-7)$ (vii) $(-63) \times (-7)$ (viii) $(-7) \times (15)$

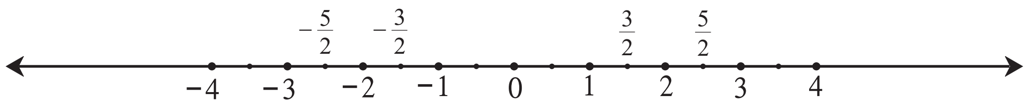
తెలుసుకొందాం.

పూర్ణసంఖ్యల భాగహారం

ఒక ధనపూర్ణసంఖ్యను, మరొక ధనపూర్ణసంఖ్యచే భాగించే క్రియ మనకు తెలుసు. ఇలాంటి వాటి భాగఫలం పూర్ణాంకం లేదా భిన్నం అవుతుందని, కూడా తెలుసు.

ఉదా: $6 \div 2 = \frac{6}{2} = 3, \quad 5 \div 3 = \frac{5}{3} = 1 + \frac{2}{3}$

సంఖ్యారేఖపై సున్నకు ఎడమవైపున మనం ఋణపూర్ణసంఖ్యలను చూపవచ్చు. అదేవిధంగా వాటి భాగాలను కూడా చూపవచ్చు.



ఇచ్చట $-\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}$ అను సంఖ్యలను, సంఖ్యారేఖపై చూపబడినవి.

$\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right), \left(\frac{3}{2},\frac{-3}{2}\right), \left(\frac{-5}{2},\frac{5}{2}\right)$ ఇవి పరస్పరం వ్యతిరేక సంఖ్యల జతలన్నది గుర్తుంచుకోండి.

అనగా $\frac{1}{2} + \frac{-1}{2} = 0, \quad \frac{3}{2} + \frac{(-3)}{2} = 0, \quad -\frac{5}{2} + \frac{5}{2} = 0$

వ్యతిరేకసంఖ్యల జతలను సంకలన విలోమసంఖ్యల జత అనికూడా అంటారు.

$(-1) \times (-1) = 1$ ఇది మనం చూసాం. ఈ సమీకరణాన్ని రెండు వైపుల (-1) చే భాగించినచో $(-1) = \frac{1}{(-1)}$ అను సమీకరణం వస్తుంది. గనుక $\frac{1}{(-1)}$ యొక్క భాగఫలం (-1) అవుతుందని తెలుసుకోండి.

దీనిని బట్టి $6 \times (-1) = 6 \times \frac{1}{(-1)} = \frac{6}{(-1)}$ అని తెలుస్తుంది.

ధనపూర్ణసంఖ్యను ఋణపూర్ణసంఖ్యచే భాగించుట.

$$\frac{7}{-2} = \frac{7 \times 1}{(-1) \times 2} = 7 \times \frac{1}{(-1)} \times \frac{1}{2} = \frac{7}{1} \times (-1) \times \frac{1}{2} = \frac{(7) \times (-1)}{2} = \frac{-7}{2}$$

ఋణ పూర్ణసంఖ్యను ఋణ పూర్ణసంఖ్యచే భాగించుట.

$$\frac{-13}{-2} = \frac{(-1) \times 13}{(-1) \times 2} = \frac{(-1)}{(-1)} \times 13 \times \frac{1}{2} = (-1) \times \frac{(-1)}{1} \times \frac{13}{2} = 1 \times \frac{13}{2} = \frac{13}{2}$$

ఇదేవిధంగా $\frac{-25}{-4} = \frac{25}{4}$, $\quad \frac{-18}{-2} = \frac{18}{2} = 9$ లాంటి వాటిని పరీక్షించి చూడండి.

దీనినిబట్టి ఋణ పూర్ణసంఖ్యల భాగహారం అర్థమవుతుంది.

ఒక పూర్ణసంఖ్యను ఇంకొక శూన్యేతరపూర్ణసంఖ్యచే భాగించగా వచ్చే భాగఫలంను రాయునపుడు హారంగా ధనపూర్ణ సంఖ్య ఉండాలని సంకేతం గలదు, కాబట్టి $\frac{7}{-2} = \frac{-7}{2}$, $\frac{-11}{-3} = \frac{11}{3}$ అని రాస్తాం.

ఇదినాకర్థమైంది.

పూర్ణసంఖ్యలయొక్క భాగహార నియమాలు గుణకారం యొక్క నియమాలలాగే వున్నాయి.

- రెండు ధనపూర్ణసంఖ్యల భాగఫలం ధనసంఖ్యయేవస్తుంది.
- రెండు ఋణపూర్ణసంఖ్యల భాగఫలం ధనసంఖ్యయేవస్తుంది.
- ధనపూర్ణసంఖ్య మరియు ఋణపూర్ణసంఖ్యల భాగఫలం ఎల్లప్పుడు ఋణసంఖ్యయే వస్తుంది.

అభ్యాసమాలిక 9

1. కింది ఉదహరణాలను సాధించండి.

   (i) $(-96) \div 16$ (ii) $98 \div (-28)$ (iii) $(-51) \div 68$ (iv) $38 \div (-57)$

   (v) $(-85) \div 20$ (vi) $(-150) \div (-25)$ (vii) $100 \div 60$ (viii) $9 \div (-54)$

   (ix) $78 \div 65$ (x) $(-5) \div (-315)$

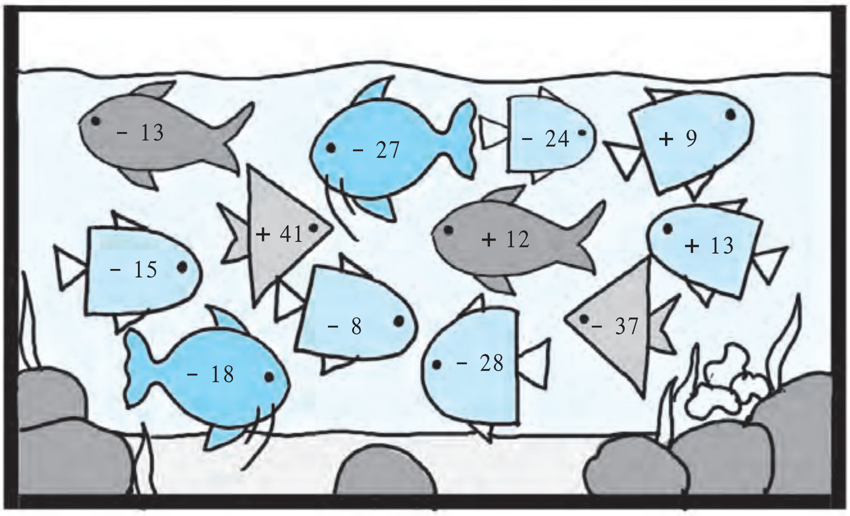
2*. $\frac{24}{5}$ సమాధానం వచ్చునట్లుగామూడు పూర్ణసంఖ్యల భాగాహారాలను తయారు చేయండి.

3*. $\frac{-5}{7}$ సమాధానం వచ్చునట్లుగా మూడు పూర్ణసంఖ్యల భాగాహారాలను తయారు చేయండి.

4. కింద ఒక చెరువులో కొన్ని సంఖ్యలను కలిగియున్న చేపలుగలవు. ఏవేని 4 జతలను తీసుకొని వాటిలోని సంఖ్యలతో నాలుగు గుణకారాలు చేయండి. అలాగే 4 ఇతర జతలను తీసుకొని వాటిలోని సంఖ్యలతో నాలుగు భాగహారాలు చేయండి.

ఉదాహరణకు:

. $(-13) \times (-15) = 195$ 2. $(-24) \div 9 = \frac{-24}{9} = \frac{-8}{3}$



3 గ.సా.భా. – క.సా.గు.

కొంచెం గుర్తు తెచ్చుకొందాం.

- అతి చిన్న ప్రధాన సంఖ్య (prime number) ఏది?
- 1 నుంచి 50 వరకు సంఖ్యలలో ఎన్ని ప్రధాన సంఖ్యలున్నాయి? వాటి పట్టికను తయారు చేయండి.
- కింది సంఖ్యలలో ఏవి ప్రధానసంఖ్యలో ఆ సంఖ్యల చుట్టు వృత్తాలను గీయండి.

  17, 15, 4, 3, 1, 2, 12, 23, 27, 35, 41, 43, 58, 51, 72, 79, 91, 97
- **పరస్పర ప్రధానసంఖ్యలు** (coprime numbers) : ఏ రెండు సంఖ్యలకు కేవలం 1 మాత్రమే ఉమ్మడి కారణాంకం అవుతుందో, ఆ సంఖ్యలను ఒకదానికొకటి పరస్పర ప్రధాన సంఖ్యలు అవుతాయని అంటారు. పరస్పర ప్రధాన సంఖ్యలను సాపేక్ష ప్రధాన సంఖ్య (relatively coprime numbers) అని కూడా అంటారు.

ఉదా : 10 మరియు 21 అను సంఖ్యలు పరస్పరం ప్రధాన సంఖ్యలు. ఎందుకనగా 10 యొక్క భాజకాలు : 1, 2, 5, 10 మరియు 21 యొక్క భాజకాలు 1, 3, 7, 21 ఈ రెండు సంఖ్యల యొక్క భాజకాలలో 1 ఏకైక ఉమ్మడి భాజకం అవుతుంది. (3, 8) ; (4, 9); (21, 22) ; (22, 23) ; (23, 24) లాంటివి మరికొన్ని పరస్పర ప్రధాన సంఖ్యలు. రెండు వరుససంఖ్యలు పరస్పర ప్రధానసంఖ్యలు అవుతాయి, దీనిని పరీక్షించి చూడండి.

తెలుసుకొందాం.

కవల ప్రధాన సంఖ్యలు (Twin prime numbers)

ఏ రెండు ప్రధాన సంఖ్యల భేదం 2 అవుతుందో, ఆ రెండు ప్రధాన సంఖ్యలను కవలప్రధాన సంఖ్యలని అంటారు.

ఉదా: (3, 5) ; (5, 7) ; (11, 13) ; (29, 31) మొదలగునవి.

అభ్యాసమాలిక 10

1. ఈ సంఖ్య ప్రధాన సంఖ్య, కాదు సంయుక్త సంఖ్యయును కాదు, అలాంటి సంఖ్య ఏది?
2. కింది జతలలో పరస్పర ప్రధానసంఖ్యల జతలను గుర్తించండి.

   (i) 8, 14 (ii) 4, 5 (iii) 17, 19 (iv) 27, 15
3. 25 నుంచి 100 వరకుగల అన్ని ప్రధాన సంఖ్యలయొక్క పట్టిక తయారు చేయండి. అవి ఎన్ని ఉన్నాయోరాయండి.
4. 51 నుంచి 100 వరకు గల అన్ని కవల ప్రధాన సంఖ్యలను రాయండి.
5. 1 నుంచి 50 వరకుగల పరస్పర ప్రధాన సంఖ్యల యొక్క 5 జతలనురాయండి.
6. ప్రధాన సంఖ్యలలో సరిసంఖ్య లేవి?

తెలుసుకొందాం.

సంఖ్యలను ప్రధాన కారణాంకాలుగా విభజించుట (Prime factorisation of a number)

సంఖ్యల కసాగు మరియు గసాభాను కనుగొనడానికి యుక్లిడ్ యొక్క సులభమైన మరియు ముఖ్యమైన నియమం అనేక సార్లు ఉపయోగించబడుతుంది. ఏ సంయుక్త సంఖ్యనైనను ప్రధాన సంఖ్యలుగా గుణకారరూపంలో రాయవచ్చుననే నియమంగలదు.

సంఖ్యలను ప్రధానకారణాంకాలుగా ఎలావిభజించాలో చూద్దాం.

ఉదా: 24 అను సంఖ్యను ప్రధానకారణాంకాల గుణకారరూపంలో రాయండి.

ప్రధాన కారణాంకాలను కనుగొనుపద్ధతి.

నిలువు అమరిక

2	24
2	12
2	6
3	3
	1

$24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3$

అడ్డం అమరిక

$24 = 2 \times 12$

$= 2 \times 2 \times 6$ ...12 ను కారణాంకాలుగా విభజించాం.

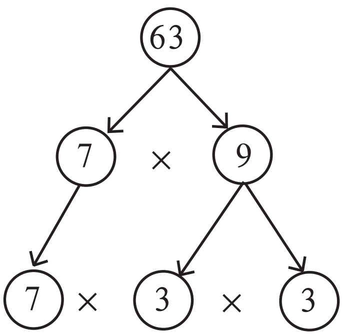
$= 2 \times 2 \times 2 \times 3$ ...6 అను కారణాంకాలుగా విభజించాం.

2 మరియు 3 లు ప్రధానకారణాంకాలు.

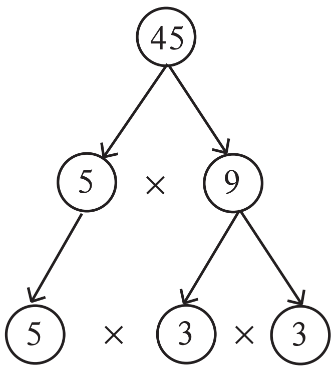
గుర్తుంచుకోండి.

ఇచ్చిన సంఖ్యను దానియొక్క ప్రధాన కారణాంకాలను గుణకారరూపంలో రాయడమనగా ఆ సంఖ్యను ప్రధానకారణాంకాలుగా విభజించుటయే.

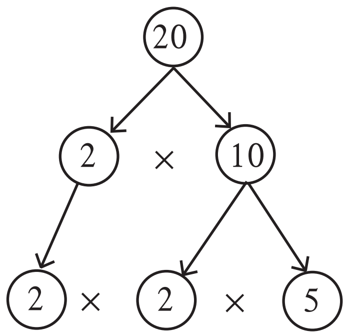
ఉదా: కిందనిచ్చిన సంఖ్యల ప్రధానకారణాంకాలను గుణకార రూపంలో రాయండి.



$63 = 7 \times 3 \times 3$



$45 = 5 \times 3 \times 3$



$20 = 2 \times 2 \times 5$

ఉదా: 117 ను ప్రధాన కారణాంకాలుగా విభజించండి.

3	117
3	39
13	13
	1

$117 = 13 \times 9$

$= 13 \times 3 \times 3$

$117 = 3 \times 3 \times 13$

ఉదా: 250 ను ప్రధానకారణాంకాలుగా విభజించండి.

2	250
5	125
5	25
5	5
	1

$250 = 2 \times 125$

$= 2 \times 5 \times 25$

$= 2 \times 5 \times 5 \times 5$

$250 = 2 \times 5 \times 5 \times 5$

ఉదా: 40 ను ప్రధానకారణాంకాలుగా విభజించండి.

నిలువు అమరిక

2	40
2	20
2	10
5	5
	1

$40 = 2 \times 2 \times 2 \times 5$

$$40 = 10 \times 4$$
$$= 5 \times 2 \times 2 \times 2$$

అడ్డం అమరిక

$$40 = 8 \times 5$$
$$= 2 \times 2 \times 2 \times 5$$

అభ్యాసమాలిక 11

- కింది సంఖ్యలను ప్రధానకారణాంకాలుగా విభజించండి.

(i) 32 (ii) 57 (iii) 23 (iv) 150 (v) 216
(vi) 208 (vii) 765 (viii) 342 (ix) 377 (x) 559

కొంచెం గుర్తు తెచ్చుకొందాం.

గరిష్ఠసామాన్యభాజకం (గ.సా.భా.)

[Greatest Common Divisor, (GCD) or Highest Common Factor (HCF)]

మనం ధనపూర్ణసంఖ్యల గసాభా మరియు కసాగును నేర్చుకొన్నాం. ఇప్పుడు వాటి గురించి మరికొంత నేర్చుకొందాం. ఇచ్చిన సంఖ్యల యొక్క గసాభాయే ఆ సంఖ్యల యొక్క అతి పెద్దసామాన్య భాజకం అవుతుంది.

- కిందనిచ్చిన ప్రతి వాటిలోని సంఖ్యల యొక్క అన్ని భాజకాలు రాసి, గసాభాను కనుగొనండి.

(i) 28, 42 (ii) 51, 27 (iii) 25, 15, 35

తెలుసుకొందాం.

ప్రధాన కారణాంకాల పద్ధతి : ప్రధానకారణాంకాలుగా విభజించినచో, సంఖ్యల గసాభాను కనుగొనుట సులభమవుతుంది.

ఉదా: ప్రధానకారణాంకాల పద్ధతిలో 24 మరియు 32 ల గసాభాను కనుగొనండి.

2	24
2	12
2	6
3	3
	1

$$24 = 4 \times 6$$
$$= \underline{2} \times \underline{2} \times \underline{2} \times 3$$

2	32
2	16
2	8
2	4
2	2
	1

$$32 = 8 \times 4$$
$$= \underline{2} \times \underline{2} \times \underline{2} \times 2 \times 2$$

ప్రతి సంఖ్యలోను 2 ఉమ్మడి కారణాంకం 3 సార్లు వచ్చింది కాబట్టి గసాభా = $2 \times 2 \times 2 = 8$

ఉదా: 195, 312 మరియు 546 వీటి గసాభాను కనుగొనండి.

$195 = 5 \times 39$
$\quad = 5 \times \underline{3} \times \underline{13}$

$312 = 4 \times 78$
$\quad = 2 \times 2 \times 2 \times 39$
$\quad = 2 \times 2 \times 2 \times \underline{3} \times \underline{13}$

$546 = 2 \times 273$
$\quad = 2 \times 3 \times 91$
$\quad = 2 \times \underline{3} \times 7 \times \underline{13}$

ప్రతి సంఖ్యలోను 3 మరియు 13లు ఉమ్మడి కారణాంకాలుగా ఒక్కొక్క సారి వచ్చాయి.

$\therefore$ గసాభా $= 3 \times 13 = 39$

ఉదా: 10, 15 మరియు 12 ల గసాభాను కనుగొనండి.

$10 = 2 \times 5$ $\qquad 15 = 3 \times 5$ $\qquad 12 = 2 \times 2 \times 3$

ఈ సంఖ్యలలో ఏ ప్రధానసంఖ్యయు, ఉమ్మడి భాజకంగా లేదు. 1 మాత్రమే ఉమ్మడి భాజకం అవుతుంది.

గనుక గసాభా = 1

ఉదా: 60, 12 మరియు 36 ల గసాభాను కనుగొనండి.

$60 = 4 \times 15$
$\quad = \underline{2} \times \underline{2} \times \underline{3} \times 5$

$12 = 2 \times 6$
$\quad = \underline{2} \times \underline{2} \times \underline{3}$

$36 = 3 \times 12$
$\quad = 3 \times 3 \times 4$
$\quad = \underline{2} \times \underline{2} \times \underline{3} \times 3$

$\therefore$ గసాభా $= 2 \times 2 \times 3 = 12$

ఈ ఉదాహరణను నిలువుగా అమర్చి చేద్దాం. ఒకేసారి అన్ని సంఖ్యలను రాసి, ప్రధాన కారణాంకాలుగా విభజిద్దాం.

2	60	12	36
2	30	6	18
3	15	3	9
	5	1	3

$\therefore$ గసాభా $= 2 \times 2 \times 3 = 12$

36 మరియు 60 ల భాజకం 12 అని గుర్తుంచుకోండి.

ఇదినాకర్థమైంది.

- ఇచ్చిన సంఖ్యలలో ఒకసంఖ్య, ఇతరసంఖ్యల భాజకమైనచో ఆ సంఖ్య ఇచ్చిన సంఖ్యల గసాభా అవుతుంది.
- ఇచ్చిన సంఖ్యలకు ఒక్క ప్రధాన సంఖ్యయును ఉమ్మడి కారణంకంగా లేనట్లయితే, ఆ సంఖ్యల గసాభా 1 అవుతుంది. ఎందుకనగా 1 వాటి ఏకైక ఉమ్మడి భాజకం అవుతుంది.

* అధిక వివరాలకై

రెండు వరస సరిసంఖ్యల గసాభా 2 అవుతుంది. అలాగే రెండు వరస బేసిసంఖ్యల గసాభా 1 అవుతుంది. వివిధ సంఖ్యల ఉదాహరణలు తీసుకొని ఈ నియమాన్ని పరీక్షించి చూడండి.

భాగహార పద్ధతిలో గసాభాను కనుగొనుట.

ఉదా: 144 మరియు 252 ల గసాభాను కనుగొనండి.

```
144) 252( 1
    -144
    108)144( 1
       -108
         36)108(3
           -108
            000
```

(1) పెద్ద సంఖ్యను చిన్న సంఖ్యచేభాగించండి.

(2) ఈ భాగహారంలో వచ్చిన శేషంతో మొదటి భాజకాన్ని భాగించండి.

(3) భాగహారంలో 2వ మెట్టులో లభించిన శేషంతో 2వ మెట్టులో భాజకాన్ని భాగించి, శేషాన్ని కనుగొనండి.

(4) ఈ విధంగా శేషం సున్న వచ్చేంతవరకు క్రియను కొనసాగించండి. ఏ భాగహారంలో శేషం సున్న వచ్చిందో, ఆ భాగహారంలోని భాజకం ముందు ఇచ్చిన సంఖ్యల గసాభా అవుతుంది.

∴ 144 మరియు 252 ల గసాభా = 36

ఉదా: $\frac{209}{247}$ ఈ సంఖ్యకు కనిష్ఠ రూపాన్ని ఇవ్వండి.

కనిష్ఠ రూపాన్నిచ్చుటకు రెండు సంఖ్యల యొక్క సామాన్య కారణాంకాలను వెదకుదాం. అందుకు 247 మరియు 209ల గసాభాను భాగాహార పద్ధతిలో కనుగొందాం.

```
209) 247 ( 1
    -209
     38)209 (5
       -190
        19)38(2
          -38
           00
```

గసాభా 19వచ్చింది అంటే లవస్థానంలో మరియు హారంస్థానంలో ఉన్న సంఖ్యలు 19చే భాగించబడతాయి.

$$\therefore \frac{209}{247} = \frac{209 \div 19}{247 \div 19} = \frac{11}{13}$$

అభ్యాసమాలిక 12

1. గసాభాను కనుగొనండి.

(i) 25, 40 (ii) 56, 32 (iii) 40, 60, 75 (iv) 16, 27

(v) 18, 32, 48 (vi) 105, 154 (vii) 42, 45, 48 (viii) 57, 75, 102

(ix) 56, 57 (x) 777, 315, 588

2. భాగహార పద్ధతిలో గసాభాను కనుగొని, కనిష్ఠ రూపాన్నివ్వండి.

(i) $\frac{275}{525}$ (ii) $\frac{76}{133}$ (iii) $\frac{161}{69}$

కొంచెం గుర్తు తెచ్చుకొందాం.

కనిష్ఠ సామాన్య గుణిజం (కసాగు) [Least common multiple (LCM)]

ఇచ్చిన సంఖ్యల కసాగు అనగా వాటిలోని ప్రతి సంఖ్యచే భాగించబడునట్టి అతిచిన్న సంఖ్య.

- కిందనీయబడిన సంఖ్యల ఎక్కాలు రాసి, వాటి కసాగు కనుగొనండి.

(i) 6, 7 (ii) 8, 12 (iii) 5, 6, 15

తెలుసుకొందాం.

ఉదా: 60 మరియు 48 ల కసాగును కనుగొనండి.

ప్రతి సంఖ్యను ప్రధాన కారణాంకాలుగా విభజిద్దాం.

$60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5$ $\qquad$ $48 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3$

పై గుణకారంలో వచ్చిన ప్రతి ప్రధాన సంఖ్యను చూద్దాం.

2 అనే సంఖ్య ఎక్కువలో ఎక్కువ 4 సార్లు వచ్చింది. (48 యొక్క కారణాంకాలలో)

3 అనే సంఖ్య ఎక్కువలో ఎక్కువ 1 సారి వచ్చింది. (60 యొక్క కారణాంకాలలో)

5 అనే సంఖ్య ఎక్కువలో ఎక్కువ 1 సారి వచ్చింది. (60 యొక్క కారణాంకాలలో)

∴ కసాగు $= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5 = 10 \times 24 = 240$

ఉదా: 18, 30 మరియు 50 ల కసాగును కనుగొనండి.

$18 = 2 \times 9 = 2 \times 3 \times 3$ | $30 = 2 \times 15 = 2 \times 3 \times 5$ | $50 = 2 \times 25 = 2 \times 5 \times 5$

పైన ఇచ్చిన గుణకారంలో 2, 3 మరియు 5 అను ప్రధాన సంఖ్యలు వచ్చాయి.

2 అనే సంఖ్య ఎక్కువలో ఎక్కువ ☐ సార్లు, 3 అనే సంఖ్య ఎక్కువలో ఎక్కువ ☐ సార్లు మరియు 5 అనే సంఖ్య ఎక్కువలోఎక్కువ ☐ సార్లు వచ్చింది.

∴ కసాగు $= 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5 = 450$ $\qquad$ ∴ 18, 30, 50 ల కసాగు 450 అవుతుంది.

ఉదా: 16, 28 మరియు 40 ల కసాగును కనుగొనండి.

నిలువు అమరిక

2	16	28	40
2	8	14	20
2	4	7	10
	2	7	5

- భాజనీయత సూత్రాలనుపయోగించి అన్ని సంఖ్యలను భాగించే సంఖ్యను వెదకి, దాంతో ఇచ్చిన సంఖ్యలను భాగించండి. భాగఫలంగా వచ్చిన, సంఖ్యలకు ఇదే క్రియను సాధ్యమైనన్ని సార్లు చేయండి.
- ఇప్పుడు వచ్చిన సంఖ్యలలో తక్కువలో తక్కువ రెండు సంఖ్యలకు భాజకమగునట్టి సంఖ్యను వెదకి దానితో ఏ సంఖ్యలు భాగించబడునో, ఆ సంఖ్యలను భాగించండి. ఏ సంఖ్య భాగించబడదో, దానిని అలాగే ఉంచండి. ఇదే క్రియను సాధ్యమైనన్ని సార్లు చేయండి.
- 1 గాకుండా ఇతర సామాన్య కారణాంకాలేవి లేనట్లయితే భాగహారం ఆపండి.
- ఎడమవైపు స్తంభంలోని సంఖ్యలను గుణించండి. దానిని అన్నిటికంటె కిందనున్న అడ్డు వరసలోని సంఖ్యలచే గుణించండి.

∴ కసాగు $= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 7 = 560$

ఉదా: 18 మరియు 30ల కసాగు మరియు గసాభాను కనుగొనండి. వాటిలబ్ధాన్ని ఇచ్చిన సంఖ్యల లబ్ధంతో పోల్చి చూడండి.

2	18	30
3	9	15
	3	5

గసాభా $= 2 \times 3 = 6$

కసాగు $= 2 \times 3 \times 3 \times 5 = 90$

గసాభా × కసాగు $= 6 \times 90 = 540$

ఇచ్చిన సంఖ్యల లబ్ధం $= 18 \times 30 = 540$

ఇచ్చిన సంఖ్యల లబ్ధం = గసాభా × కసాగు

దీనిని బట్టి తెలుస్తుందేమిటంటే రెండు సంఖ్యల లబ్ధం, ఆ రెండు సంఖ్యల యొక్క గసాభా మరియు కసాగుల లబ్ధమంత ఉంటుంది. ఈ వివరణ నిరూపణను కింది సంఖ్యల జతలకు తీసుకోండి.

(15, 48), (14, 63), (75, 120)

ఉదా: 15, 45 మరియు 105ల కసాగు మరియు గసాభాను కనుగొనండి.

3	15	45	105
5	5	15	35
	1	3	7

$15 = \underline{3} \times \underline{5}$

$45 = \underline{3} \times 3 \times \underline{5}$

$105 = \underline{3} \times \underline{5} \times 7$

గసాభా $= 3 \times 5 = 15$

కసాగు $= 3 \times 3 \times 5 \times 7 = 315$

ఉదా: రెండంకెల రెండుసంఖ్యల లబ్ధం 1280, వాటి గసాభా 4 అయిన వాటి కసాగును కనుగొనండి.

గసాభా × కసాగు = ఇచ్చిన సంఖ్యల లబ్ధం

4 × కసాగు = 1280

∴ కసాగు $= \frac{1280}{4} = 320$

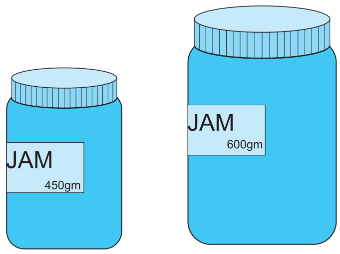
అభ్యాసమాలిక 13

1. కసాగును కనుగొనండి.
   (i) 12, 15 (ii) 6, 8, 10 (iii) 18, 32 (iv) 10, 15, 20 (v) 45, 86
   (vi) 15, 30, 90 (vii) 105, 195 (viii) 12, 15, 45 (ix) 63, 81
   (x) 18, 36, 27
2. కిందనిచ్చిన సంఖ్యల గసాభా మరియు కసాగును కనుగొనండి. వాటి లబ్ధం, ఇచ్చిన రెండు సంఖ్యల లబ్ధమంతనే ఉంటుందా నిరూపణ చేసుకోండి.
   (i) 32, 37 (ii) 46, 51 (iii) 15, 60 (iv) 18, 63 (v) 78, 104

కసాగు మరియు గసాభాల ఉపయోగం

ఉదా: దుకాణంలో 450 గ్రా.ల జామ్ సీసాచిన్నది 96 రూపాయలు గలదు. అదే జామ్ 600గ్రా.ల బరువుగల పెద్ద సీసా 124 రూపాయలు గలదు. అయితే ఏ సీసా ఖరీదు చేయడం అధిక లాభదాయకం అవుతుంది?

సాధన: మనం ఏకవస్తుమార్గ పద్ధతి నేర్చుకొని ఉన్నాం. అదే విధంగా ప్రతిసీసా లోని 1గ్రా. జామ్ విలువ కనుగొని పోల్చి చూడవచ్చు. కానీ చిన్న ఉమ్మడి కారణాంకాలు తీసుకోవడం కంటె పెద్ద ఉమ్మడి కారణాంకాలు తీసుకొన్నట్లయితే లెక్క చేయడం సులభమవుతుంది.



450 మరియు 600 ల గసాభా 150 దీనినుపయోగిద్దాం.

450 = 150 × 3, 600 = 150 × 4

$\therefore$ చిన్న సీసాలోని 150 గ్రా.ల జామ్ విలువ $\frac{96}{3}$ = 32 రూపాయలు

పెద్ద సీసాలోని 150 గ్రా.లజామ్ విలువ $\frac{124}{4}$ = 31 రూపాయలు

$\therefore$ 600 గ్రా.ల జామ్ సీసా ఖరీదు చేయడం అధిక లాభదాయకం అవుతుంది.

ఉదా: కూడండి $\frac{17}{28} + \frac{11}{35}$

1వ పద్ధతి : కూడిక చేయుటకై భిన్నాల హారాలు సమానం చేద్దాం.

సాధన : $\frac{17}{28} + \frac{11}{35} = \frac{17\times35+11\times28}{28\times35} = \frac{595+308}{28\times35} = \frac{903}{28\times35} = \frac{903}{980} = \frac{129}{140}$

2వ పద్ధతి : కూడిక చేయుటకై 28 మరియు 35ల కసాగు కనుగొందాం.

సాధన : కసాగు = 7 × 4 × 5 = 140

$$\frac{17}{28} + \frac{11}{35} = \frac{17\times5}{28\times5} + \frac{11\times4}{35\times4} = \frac{85+44}{140} = \frac{129}{140}$$

హారములు గుణించుటకంటెను కసాగు తీసుకోవడంవలన మన లెక్క ఎంతసులభమయిందో!

ఉదా: ఒక సంఖ్యను వరసగా 8, 10, 12, 14 ఈ సంఖ్యలచే భాగించినపుడు ప్రతిసారి శేషం 3 మిగులుతుంది. అయిన అలాంటి అతిచిన్న సంఖ్య ఏది?

2	8	10	12	14
2	4	5	6	7
	2	5	3	7

సాధన : భాజ్య సంఖ్యను తెలుసుకోవడానికై ఇచ్చిన భాజకాల కసాగును కనుగొందాం.

కసాగు = 2 × 2 × 2 × 5 × 3 × 7 = 840

ఈ కసాగులో ప్రతిసారి మిగిలిన శేషాన్ని కలుపుదాం.

ఆ సంఖ్య = కసాగు + శేషం = 840 + 3 = 843

ఉదా: 16,20,80 ఈ సంఖ్యల కసాగును కనుగొనుము.

4	16	20	80
4	4	5	20
5	1	5	5
	1	1	1

సాధన : 16 = 2 × 2 × 2 × 2

20 = 2 × 2 × 5

80 = 2 × 2 × 2 × 2 × 5

కసాగు = 4 × 4 × 5 = 80

ఇచ్చుట ఒక గమ్మత్తు కనిపించిందా? 80, ఇచ్చిన సంఖ్యలలో ఒక సంఖ్య. ఇచ్చిన ఇతర సంఖ్యలు 16 మరియు 20 లు దాని భాజకాలు.

దీనిని బట్టి గుర్తుంచుకోండి.

ఇచ్చిన సంఖ్యలలో కెల్లా అతి పెద్దసంఖ్యకు ఇతరసంఖ్యలు భాజకాలయినపుడు ఆ అతిపెద్దసంఖ్య ఇచ్చిన సంఖ్యల కసాగు అవుతుంది.

పై నియమ నిరూపణకై (18,90) (35,140,70) ఈ సంఖ్యా సమూహాన్ని పరిక్షించండి.

ఉదా: శ్రేయస్, శలాకా మరియు స్నేహల్ ఒక వృత్తాకార పరుగు పట్టీలో ఒక చోటునుంచి ఒకేసారి పరుగెత్తడం ప్రారంభించి వరసగా 16, 24 మరియు 18 నిమిషాలలో ఒక చుట్టు పూర్తి చేసారు. ఐనా వారు ముగ్గురు తక్కువలో తక్కువ ఎంత సమయానికి మొదటిచోటుకు ఒకేసారి వస్తారు?

సాధన: ఏ సమయానికి వారు కలసి వస్తారో, ఆ సమయం 16, 24 మరియు 18ల గుణిజాలలో ఉంటుంది. అది తక్కువలో తక్కువ ఎంత ఉంటుందో తెలుసుకోవడానికి కసాగు కనుగొందాం.

$16 = 2 \times 2 \times 2 \times 2$ $24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3$ $18 = 2 \times 3 \times 3$

కసాగు $= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 144$

144 నిమిషాలకు లేదా 2 గంటల 24, నిమిషాలకు వారు ఒక్కసారిగా వస్తారు.

అభ్యాసమాలిక 14

1. సరియైన పర్యాయాన్ని ఎంచుకోండి.

(i) 120 మరియు 150 ల గసాభా .... అగును

(1) 30 (2) 45 (3) 20 (4) 120

(ii) కింది వాటిలో ఈ .... సంఖ్యల గసాభా 1 కాదు.

(1) 13, 17 (2) 29, 20 (3) 40, 20 (4) 14, 15

2. గసాభా మరియు కసాగులను కనుగొనుము.

(i) 14, 28 (ii) 32, 16 (iii) 17, 102, 170 (iv) 23, 69 (v) 21, 49, 84

3. కసాగు కనుగొనుము.

(i) 36, 42 (ii) 15, 25, 30 (iii) 18, 42, 48 (iv) 4, 12, 20 (v) 24, 40, 80, 120

4. ఒక సంఖ్యను 8, 9, 10, 15, 20 ఈ సంఖ్యలచే భాగించినపుడు ప్రతిసారి 5 శేషం మిగులుతుంది. అయిన అలాంటి అతి చిన్న సంఖ్యను రాయుము.

5. $\frac{348}{319}, \frac{221}{247}, \frac{437}{551}$ ఈ భిన్నాలకు కనిష్ఠ రూపాన్నివ్వండి.

6. రెండు సంఖ్యల కసాగు మరియు గసాభా వరసగా 432 మరియు 72. రెండు సంఖ్యలలో ఒక సంఖ్య 216 అయినచో రెండవ సంఖ్యను కనుగొనుము?

7. రెండంకెలు గల రెండు సంఖ్యల లబ్ధం 765, వాటి గసాభా 3 అయినచో వాటి కసాగును కనుగొనము.

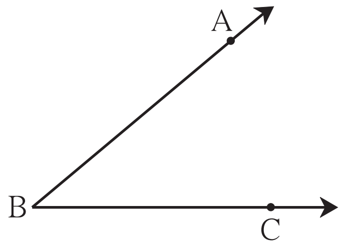
8. ఒక విక్రేత వద్ద 392 మీటర్లు, 308 మీటర్లు, 490 మీటర్ల పొడవైన ప్లాస్టిక్ త్రాళ్ళ చుట్టలు కలవు. తాడు మిగలని విధంగా ఈ మూడు చుట్టలలోని తాడు ఒకే పొడవుగల ముక్కలుగా చేసినచో, ప్రతిముక్క ఎక్కువలో ఎక్కువ ఎంత పొడవు ఉండగలదు.?

9*. రెండు వరుస సరిసంఖ్యల కసాగు 180 అయినచో ఆ సంఖ్యలేవి?

❑❑❑

4 కోణాలు మరియు కోణాల జతలు

కొంచెం గుర్తు తెచ్చుకొందాం.

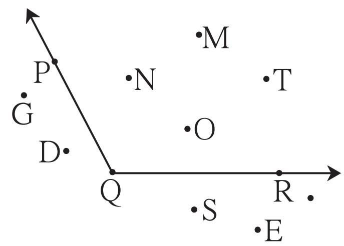


- ప్రక్కనున్న కోణం పేరు రాయండి. ....
- కోణంయొక్క శీర్షబిందువు పేరు రాయండి. ....
- కోణం యొక్క భుజాల పేర్లు రాయండి. ....
- భుజాలపై చూపబడిన బిందువుల పేర్లు రాయండి. ....

తెలుసుకొందాం.

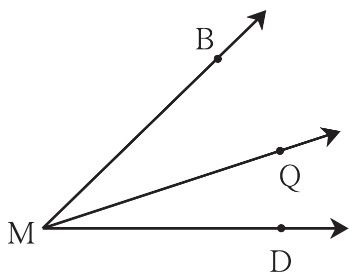
కోణాల అంతర్భాగం మరియు బాహ్యభాగం

ప్రక్కనున్న పటంలో సమతలంలో నున్న కోణాల యొక్క భుజాలపై నున్న బిందువులుగాకుండా బిందువు N, బిందువు M, బిందువు T లాంటి బిందువుల సమూహమే ∠PQR యొక్క అంతర్భాగం అవుతుంది. (Interior of an angle)



సమతలంలో ఏ బిందువులు కోణం యొక్క భుజంపై మరియు కోణం యొక్క అంతర్భాగంలోను లేవో అలాంటివి బిందువు G, బిందువు D, బిందువు E లాంటి బిందువుల సమూహమే ∠PQR యొక్క బాహ్య భాగమవుతుంది. (Exterior of an angle)

ఆసన్నకోణాలు (సమీప కోణాలు) (Adjacent angles)



ప్రక్కనున్న పటంలోని కోణాలను చూడండి. ∠BMQ మరియు ∠QMD ఈ కోణాలకు కిరణం MQ అనే ఒక భుజం ఉమ్మడిగానుంది. అలాగే శీర్షబిందువు M ఉమ్మడిగా ఉంది. ఈ కోణాల అంతర్భాగాలలో ఒక బిందువు గూడా ఉమ్మడిగాలేదు. అవి ఒకదాని కొకటి ప్రక్కన ఉన్నాయి. ఇలాంటి కోణాలను ఆసన్నకోణాలని అంటారు.

అసన్న కోణాలకు ఒక భుజం ఉమ్మడిగానుండి మిగిలిన రెండు భుజాలు ఉమ్మడి భుజానికి వ్యతిరేక దిశలో ఉంటాయి. అలాగే వాటి శీర్ష బిందువు ఉమ్మడిగా ఉంటుంది. ఆసన్న కోణాల అంతర్భాగం భిన్నంగా ఉంటుంది.

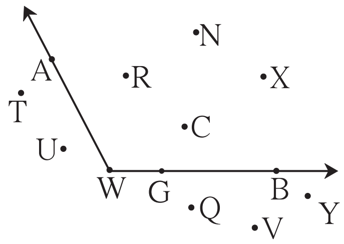
పై పటంలో ∠BMD మరియు ∠BMQ ఈ కోణాలకును MB అనే భుజం ఉమ్మడిగా ఉంది కానీ, అవి ఆసన్న కోణాలుకావు. ఎందుకనగా వాటి అంతర్భాగాలు భిన్నంగా లేవు.

ఇదినాకర్థమైంది.

- ఏరెండు కోణాలకు శీర్షబిందువు ఉమ్మడిగా ఉంటుందో అలాగే ఒక భుజం ఉమ్మడిగా ఉండి వాటి అంతర్భాగం భిన్నంగా ఉంటుందో, ఆ కోణాలను ఆసన్న కోణాలని అంటారు.

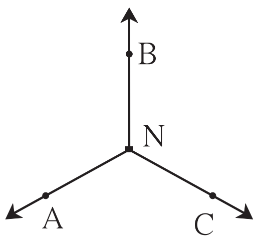
అభ్యాసమాలిక 15

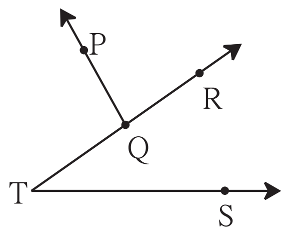
1. పటంను పరిశీలించి ∠AWB నకై పట్టికను పూర్తి చేయండి .



అంతర్భాగంలోని బిందువుల పేర్లు	
బాహ్యభాగంలోని బిందువుల పేర్లు	
కోణం యొక్క భుజాలపై నున్న బిందువుల పేర్లు	

2. కింది పటాలలో ఆసన్న కోణాల జతలను రాయండి.

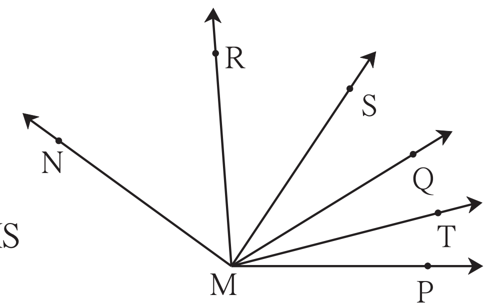




3. కింది కోణాల జతలు ఆసన్న కోణాలు అవుతాయా? అసన్నంగా లేనట్లయితే కారణం రాయండి.

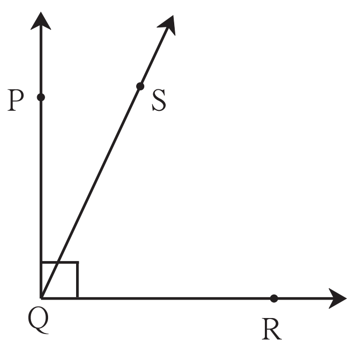
(i) ∠PMQ మరియు ∠RMQ (ii) ∠RMQ మరియు ∠SMR

(iii) ∠RMS మరియు ∠RMT (iv) ∠SMT మరియు ∠RMS



తెలుసుకొందాం.

పూరక కోణం (Complementary angles)

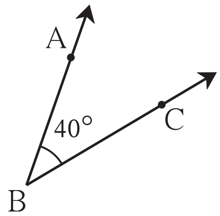


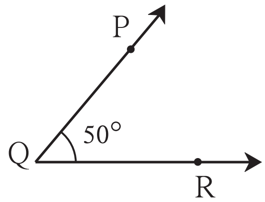
- ఒక లంబకోణం ∠PQR ను గీయండి.
- దాని అంతర్భాగంలో ఏదేని ఒక బిందువు S తీసుకోండి.
- కిరణం QS ని గీయండి.
- ∠PQS మరియు ∠SQR వీటి కొలతలను కూడండి.
- మొత్తం ఎంత వస్తుంది?

ఏ రెండు కోణాల కొలతల మొత్తం 90^0 అవుతుందో ఆ రెండు కోణాలు పరస్పరం పూరక కోణాలవుతాయని అంటారు.

ఇచ్చట ∠PQS మరియు ∠SQR లు పరస్పరం పూరక కోణాలు.

ఉదా: పటాలలోని కోణాలను పరిశీలించి, గడులలో సరియైన సంఖ్యను రాయండి.





$m\angle ABC$ = ☐ °

$m\angle PQR$ = ☐ °

$m\angle ABC + m\angle PQR$ = ☐ °

$\angle ABC$ మరియు $\angle PQR$ వీటి కోణాల కొలతల మొత్తం 90° కాబట్టి అవి పరస్పరం పూరకకోణాలు.

ఉదా: 70° కొలతగల కోణం యొక్క పూరకకోణం కొలత ఎంత?

సాధన: ఇచ్చిన కోణానికి పూరకకోణం కొలత x అనుకొందాం.

$70 + x = 90$

$\therefore 70 + x - 70 = 90 - 70$

$x = 20^\circ$

70° కొలతయొక్క పూరకకోణం కొలత 20°.

ఉదా: $(a + 15)^\circ$ మరియు $(2a)^\circ$ ఇవి ఒక దానికొకటి పూరకకోణాలు అయిన ప్రతికోణం యొక్క కొలతెంత?

సాధన: $a + 15 + 2a = 90$

$3a + 15 = 90$

$3a = 75$

$a = 25$

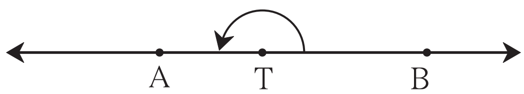
$\therefore a + 15 = 25 + 15 = 40^\circ$

మరియు $2a = 2 \times 25 = 50^\circ$

అభ్యాసమాలిక 16

1. కింద కొన్ని కోణాల కొలతలు ఇవ్వబడినవి. వాటి పూరక కోణాల కొలతలను రాయండి.
   (i) 40° (ii) 63° (iii) 45° (iv) 55° (v) 20° (vi) 90° (vii) x°
2. $(y - 20)^\circ$ మరియు $(y + 30)^\circ$ లు ఒకదానికొకటి పూరకకోణాలైన ప్రతి కోణం కొలతను కనుగొనండి.

కొంచెం గుర్తు తెచ్చుకొందాం.

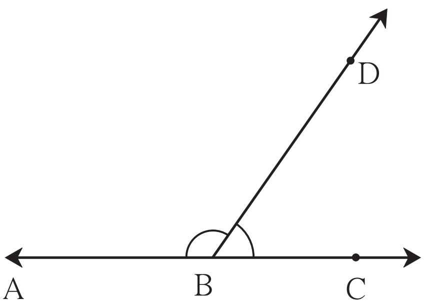


రేఖ AB పై T ఒక బిందువు.

- $\angle ATB$ అను కోణం ఏరకమైన కోణం ?
- దాని కొలతెంత?

తెలుసుకొందాం.

సంపూరకకోణం (Supplementary angles)

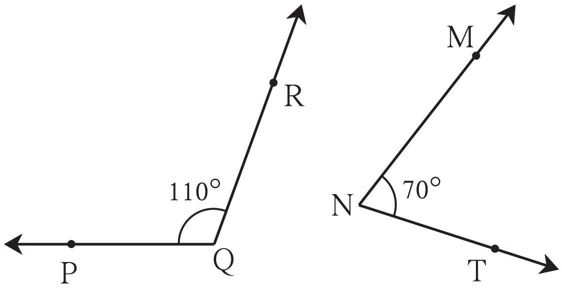


- ప్రక్కనున్న పటంలో AC అను రేఖ ఇవ్వబడినది. రేఖపైనున్న B బిందువునుంచి కిరణం BD గీయబడినది. ఇక్కడ ఎన్ని కోణాలున్నాయి?
- $m\angle ABD$ = ☐ °, $m\angle DBC$ = ☐ °
- $m\angle ABD + m\angle DBC$ = ☐ °

ఏ రెండు కోణాల కొలతల మొత్తం 180^0 అవుతుందో ఆ రెండు కోణాలను పరస్పరం సంపూరకాలని అంటారు.

ఇచ్చట $\angle ABD$ మరియు $\angle DBC$ లు పరస్పరం సంపూరకకోణాలు.

ఉదా: కింది పటాలలోని కోణాలను పరిశీలించి, గడులలో సరియైన సంఖ్యను రాయండి.



- $m\angle PQR$ = ☐ ° $m\angle MNT$ = ☐ °
- $m\angle PQR + m\angle MNT$ = ☐ °

$\angle PQR$ మరియు $\angle MNT$ పరస్పరం సంపూరక కోణాలు.

ఉదా: 135° కొలతయొక్క సంపూరక కోణం, కొలతను కనుగొనండి.

సాధన: సంపూరక కోణం కొలత p° అనుకొందాం.

సంపూరకకోణాల కొలతల మొత్తం 180° ఉంటుంది.

$$135 + p = 180$$

$$\therefore 135 + p - 135 = 180 - 135$$

$$\therefore p = 45$$

$\therefore$ 135° కొలత యొక్క సంపూరక కోణం కొలత 45°.

ఉదా: $(a + 30)^\circ$ మరియు $(2a)^\circ$ ఒకదానికొకటి సంపూరక కోణాలైన, ప్రతి కోణం కొలతెంత?

సాధన: $a + 30 + 2a = 180$

$$\therefore 3a = 180 - 30$$

$$\therefore 3a = 150$$

$$\therefore a = 50$$

$$\therefore a + 30 = 50 + 30 = 80^\circ$$

$$\therefore 2a = 2 \times 50 = 100^\circ$$

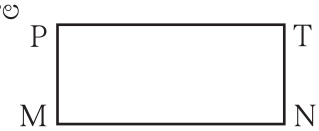
$\therefore$ ఆ కోణాల కొలతలు 80^0 మరియు 100^0.

అభ్యాసమాలిక 17

1. కిందఇచ్చిన కోణాల యొక్క సంపూరక కోణం యొక్క కొలతను రాయండి.
   (i) 15° (ii) 85° (iii) 120° (iv) 37° (v) 108° (vi) 0° (vii) a°
2. కింద కొన్ని కోణాల కొలతలివ్వబడినవి. వాటిలోనుంచి జతలను కలిపి సంపూరకోణాలు మరియు పూరక కోణాల జతలను తయారు చేయండి.

$m\angle B = 60^\circ$	$m\angle N = 30^\circ$	$m\angle Y = 90^\circ$	$m\angle J = 150^\circ$
$m\angle D = 75^\circ$	$m\angle E = 0^\circ$	$m\angle F = 15^\circ$	$m\angle G = 120^\circ$

3. ΔXYZ లో $m\angle Y=90^0$, $\angle X$ మరియు $\angle Z$ ఈ కోణాల మధ్యగల పరస్పర సంబంధాన్ని రాయండి.
4. పూరకకోణాల జతలలోని కోణాలయొక్క కొలతల మధ్య భేదం 40^0 ఉన్నచో ఆ కోణాల కొలతను కనుగొనండి.
5. ☐PTNM ఒక దీర్ఘ చతురస్రం. ఈ పటంలోని సంపూరకకోణాల జతలను రాయండి.



6*. $m\angle A=70^0$ అయినచో $\angle A$ యొక్క పూరకకోణం యొక్క సంపూరకకోణం యొక్క కొలత ఎంత?

7. $\angle A$ మరియు $\angle B$ లు పరస్పరం సంపూరక కోణాలు $m\angle B=(x + 20)^0$ అయిన $m\angle A$ ఎంత?

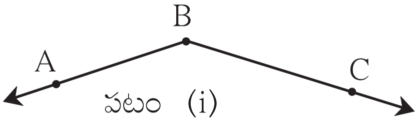
పదండి, చర్చిద్దాం.

కింది వాక్యాలను గూర్చి చర్చించండి. వాక్యం సరిగా ఉన్నచో, దానికి ఉదాహరణనివ్వండి. వాక్యం సరిగా లేనట్లయితే కారణం చెప్పండి.

- రెండు అల్పకోణాలు పరస్పరం పూరకకోణాలు కావచ్చును.
- రెండు లంబకోణాలు పరస్పరం పూరకకోణాలుగా వచ్చును.
- ఒక అల్ప కోణం మరియు ఒక అధిక కోణం పరస్పరం పూరకోణాలు గావచ్చును.
- రెండు అల్పకోణాలు పరస్పరం సంపూరకకోణాలు కావచ్చును.
- రెండు లంబకోణాలు పరస్పరం సంపూరక కోణాలు గావచ్చును.
- ఒక అల్పకోణం మరియు ఒక అధికకోణం పరస్పరం సంపూరక కోణాలు గావచ్చును.

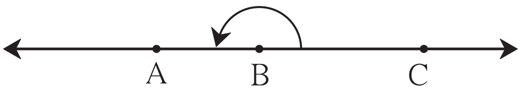
తెలుసుకొందాం.

వ్యతిరేక కిరణాలు (Opposite rays)



పటం (i)

పక్కనున్న పటాలలోని కిరణాల పేర్లు రాయండి.
కిరణాల ఆరంభబిందువు పేరు రాయండి.
పటం (i) లోని కోణం పేరు రాయండి.



పటం (ii)

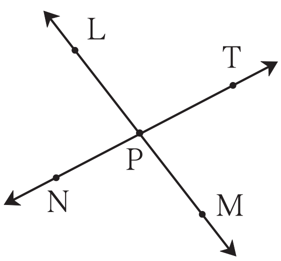
పక్కనున్న పటం (ii) లోని కోణం పేరు రాయండి.
పటంలో B ఆరంభబిందువుగల కోణాల పేర్లు రాయండి.

పటం (i)లో కిరణం BC మరియు కిరణం BA కలిసి ఒక అధిక కోణం అవుతుంది. అలాగే పటం (ii) లో కిరణం BC మరియు కిరణం BA కలిసి సరళకోణం అవుతుంది ఆలాగే ఒక సరళ రేఖ ఏర్పడుతుంది. ఇక్కడ కిరణం BC మరియు కిరణం BA ఒక దానికొకటి వ్యతిరేక కిరణాలు అవుతాయి.

ఇదినాకర్థమైంది.

- ఏ రెండు కిరణాల ఆరంభబిందువు ఉమ్మడిగా నుంటుందో ఆ కిరణాలతో ఒక రేఖ ఏర్పడుతుంది. ఆ కిరణాలను పరస్పరం వ్యతిరేక కిరణాలు అని అంటారు.

అభ్యాసమాలిక 18

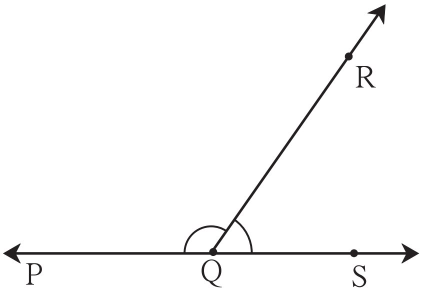


1. ప్రక్కనున్న పటంలోని వ్యతిరేక కిరణాల పేర్లు రాయండి.

2. కిరణం PM మరియు కిరణం PT లు వ్యతిరేక కిరణాలేనా? సకారణంగా తెల్పుము.

తెలుసుకొందాం.

రేఖీయ జతకోణాలు (Angles in linear pair)



- పక్కనున్న పటంలోని కోణాల పేర్లు రాయండి.
- కోణాల జతలు ఏరకమైనవి?
- కోణాలకు ఉమ్మడిగా లేని భుజాలు ఏవి?
- m∠PQR = ☐°
- m∠RQS = ☐°
- m∠PQR + m∠RQS = 180°

పటంలో ∠PQR మరియు ∠RQS లు ఆసన్న కోణాలు అలాగే అవి సంపూరక కోణాలవుతాయి. ఉమ్మడిగా లేని వాటిభుజాలు పరస్పరం వ్యతిరేక కిరణాలు, అనగా ఆ భుజాలతో ఒక రేఖ తయారవుతుంది. ఈ రెండు కోణాలు రేఖీయ జతలో గలవని అంటారు. **రేఖీయ జతకోణాలయొక్క కొలతల మొత్తం 180^0 ఉంటుంది.**

ఇది నాకర్థమైంది.

- ఏ రెండు కోణాలకు ఒక భుజం ఉమ్మడిగా ఉండి, ఉమ్మడిగా లేని భుజాలతో సరళరేఖ ఏర్పడుతుందో, వాటిని రేఖీయ జతకోణాలని అంటారు. రేఖీయ జతలోని కోణాలు పరస్పరం సంపూరక కోణాలవుతాయి.

ఉపక్రమం : స్ట్రా లేదా తిన్నని పుల్లలను తీసుకొని, నేర్చుకొన్న కోణాల జతలను తయారు చేయండి.

అభ్యాసమాలిక 19

కిందనిచ్చిన వివరాల ప్రకారం కోణాల జతలను గీయండి. గీయడం రానట్లయితే కారణం తెల్పండి.

(i) ఆసన్నంగా లేని పూరకకోణాలు

(ii) సంపూరకాలు కాని రేఖీయ జతకోణం

(iii) రేఖీయ జతలో లేని సంపూరక కోణం

(iv) రేఖీయ జతలోలేని ఆసన్నకోణాలు

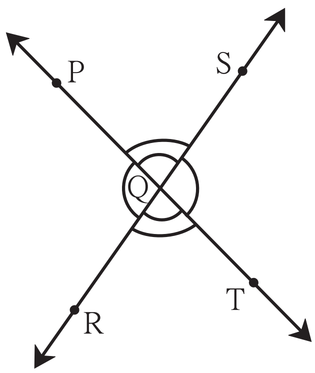
(v) పూరక కోణంకాదు, ఆసన్న కోణం కూడా కానిది.

(vi) పూరకకోణం గల రేఖీయ జతకోణం.

తెలుసుకొందాం.

శీర్షాభిముఖ కోణాలు (Vertically opposite angles)

పక్కనున్న పటంలో రేఖ PT మరియు రేఖ RS లు పరస్పరం బిందువు Q వద్ద ఖండించుకొనగా నాలుగు కోణాలు తయారైనవి. ∠PQR కోణం కిరణం QP మరియు కిరణం QR లతో తయారైంది. QP మరియు QR కిరణాల శీర్షాభిముఖ కిరణాలు వరసగా QT మరియు QS లు. ఆ వ్యతిరేక కిరణాలతో తయారైన కోణం ∠SQT గనుక ∠SQT ను ∠PQR నకు శీర్షాభిముఖ కోణం అని అంటారు.



ఇదినాకర్థమైంది.

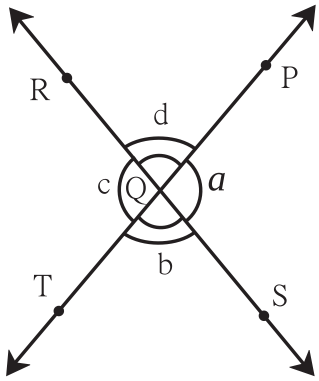
- ఏ రెండు కిరణాలతో కోణం తయారైందో, వాటి వ్యతిరేక కిరణాలతో తయారైన కోణం మొదటి కోణానికి శీర్షాభిముఖ కోణమవుతుంది.

తెలుసుకొందాం.

శీర్షాభిముఖ కోణాల ధర్మాలు.

- ఇచ్చినపటంలో $\angle PQS$ నకు వ్యతిరేక కోణమేది?

పటంలో చూపిన విధంగా $m\angle PQS = a$, $m\angle SQT = b$, $m\angle TQR = c$, $m\angle PQR = d$ అని అనుకొందాం.



$\angle PQS$ మరియు $\angle SQT$ లు రేఖీయ జత కోణాలలు

$\therefore a + b = 180^\circ$

అలాగే $m\angle SQT$ మరియు $m\angle TQR$ లు రేఖీయ జతకోణాలు.

$\therefore b + c = 180^\circ$

$\therefore a + b = b + c$

$\therefore a = c$ . . . . (రెండువైపుల నుంచి b ని తీసివేయగా)

$\therefore$ $\angle PQS$ మరియు $\angle TQR$ వీటి కొలతలు సమానం, అనగా ఆ కోణాలు సర్వసమానంగా నున్నవి.

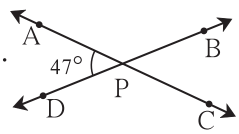
అదే విధంగా $m\angle PQR = m\angle SQT$ అనగా $\angle PQR$ మరియు $\angle SQT$ సర్వసమానంగా నున్నవి.

ఇదినాకర్థమైంది.

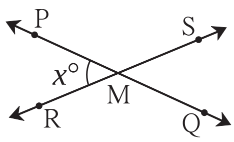
- రెండు రేఖలుఒక దానినొకటి ఖండించుకొన్నపుడు ఏర్పడే పరస్పర శీర్షాభిముఖ కోణాల కొలతలు సమానంగా ఉంటాయి.

అభ్యాసమాలిక 20

1. రేఖ AC మరియు రేఖ BD పరస్పరం P అనే బిందువు వద్ద ఖండించు కొంటున్నాయి. $m\angle APD = 47^\circ$ అయిన $\angle APB$, $\angle BPC$, $\angle CPD$ ల కొలతలు రాయండి.

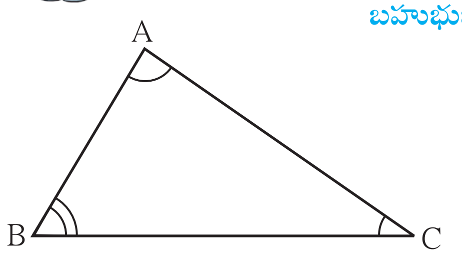


2. రేఖ PQ మరియు రేఖ RS పరస్పరం M బిందువు వద్ద ఖండించు కొంటున్నాయి. $m\angle PMR = x^\circ$ $\angle PMS$, $\angle SMQ$ మరియు $\angle QMR$ ల కొలతలు రాయండి.



తెలుసుకొందాం:

బహుభుజి అంతరకోణాలు (Interior angles of a polygon)

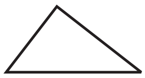
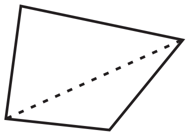
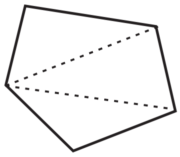
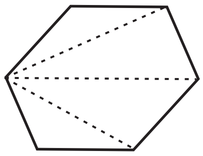
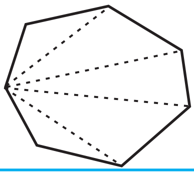


త్రిభుజ అంతరకోణాలు

ΔABC లో $\angle A$, $\angle B$ మరియు $\angle C$ లు అంతరకోణాలు.

- $m\angle ABC + m\angle BAC + m\angle ACB = \square^\circ$

క్రింది పట్టికను పరిశీలించి, ఫలితాన్ని కనుగొనండి.

భుజాల సంఖ్య	బహుభుజి పేరు	బహుభుజాకృతి	త్రిభుజాల సంఖ్య	అంతరకోణాల మొత్తం
3	త్రిభుజం		1	$180^\circ \times 1 = \square$
4	చతుర్భుజం		2	$180^\circ \times 2 = \square$
5	పంచభుజి		3	$180^\circ \times 3 = \square$
6	షడ్భుజి		4	$180^\circ \times \square = \square$
7	సప్తభుజి		5	
8	అష్టభుజి		6	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
n	n భుజాలు గల పటం		(n - 2)	$180^\circ \times (n - 2)$

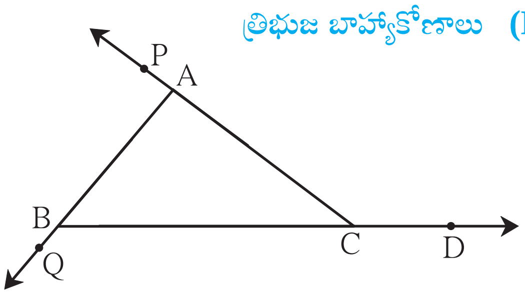
బహుభుజిలో పైవిధంగా తయారైన త్రిభుజాల సంఖ్య ఆ బహుభుజియొక్క భుజాల సంఖ్య కంటె రెండు తక్కువగా ఉంటుందని, గుర్తుంచుకోండి.

ఇదినాకర్థమైంది.

- *n* భుజాల గల బహుభుజి యొక్క అంతరకోణాల కొలతల మొత్తం = $180^\circ \times (n - 2)$

తెలుసుకొందాం.

త్రిభుజ బాహ్యకోణాలు (Exterior angle of a triangle)



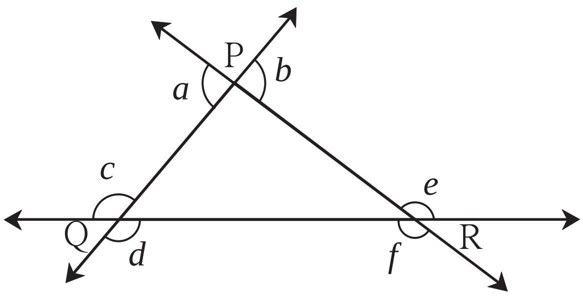
ΔABC యొక్క భుజం BC ని పటంలో చూపిన విధంగా పొడిగించినచో, ∠ACD అను కొత్త కోణం త్రిభుజం బయట ఏర్పడుతుంది.

∠ACD, ΔABC యొక్క బాహ్యకోణం, ∠ACD మరియు ∠ACB లు రేఖీయ జత కోణాలవుతాయి. ∠PAB మరియు ∠QBC ఇవికూడ ΔABC నకు బాహ్యకోణాలు.

ఇది నాకర్థమైంది.

- త్రిభుజంలోని ఒక భుజంను పొడిగించినపుడు ఏ కోణం త్రిభుజం యొక్క సమీప అంతరకోణంతో రేఖీయ జత ఏర్పరుస్తుందో, ఆ కోణాన్ని త్రిభుజం యొక్క బాహ్య కోణమని అని అంటారు.

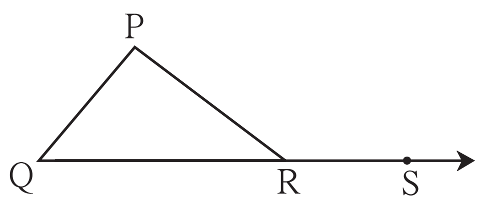
ఉదా: పక్కనున్న పటంలో త్రిభుజం యొక్క అన్ని బాహ్యకోణాలు చూపబడినవి. *a,b,c,d,e,f* లు ΔPQR యొక్క బాహ్యకోణాలు. ప్రతి త్రిభుజానికి ఈ విధంగా ఆరు బాహ్యకోణాలుంటాయి.



తెలుసుకొందాం.

త్రిభుజ బాహ్య కోణాల ధర్మాలు

పక్కనున్న పటంలో ∠PRS, ΔPQR యొక్క ఒక బాహ్య కోణం. ∠PRQ దాని సమీప అంతరకోణం. ఇతర రెండు అంతర కోణాలు, అనగా ∠P మరియు ∠Q లు ∠PRS నుంచి చాలా నిడివిగా అనగా దూరంగా ఉన్నాయి. ∠P మరియు ∠Q లను ∠PRS నకు దూరాంతరకోణాలని అంటారు.



$m\angle P + m\angle Q + m\angle PRQ = \square^\circ$ ....(త్రిభుజం యొక్క మూడు కోణాల మొత్తం)

$m\angle PRS + m\angle PRQ = \square^\circ$ ....(రేఖీయజత కోణాలు)

$\therefore\ m\angle P + m\angle Q + m\angle PRQ = m\angle PRS + m\angle PRQ$

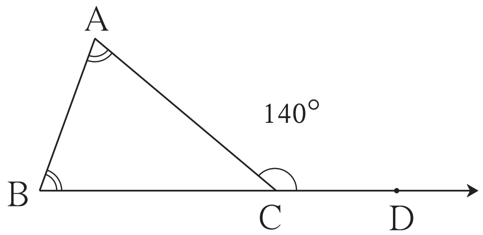
$\therefore\ m\angle P + m\angle Q = m\angle PRS$ ($m\angle PRQ$ ను రెండు వైపులనుంచి తీసివేయగా)

ఇది నాకర్థమైంది.

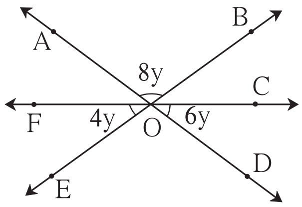
- త్రిభుజం యొక్క బాహ్య కోణం కొలత, ఆ కోణం యొక్క దూరాంతర కోణాల కొలతల మొత్తమంత ఉంటుంది.

అభ్యాసమాలిక 21

1. ΔABC నకు, $\angle ACD$ ఒక బాహ్యకోణం. $\angle A$ మరియు $\angle B$ ల కొలతలు సమానంగానున్నవి. అయితే $m\angle ACD = 140^0$ అయిన $\angle A$ మరియు $\angle B$ ల కొలతలు కనుగొనండి.



2. పక్క పటంలోని కోణాల కొలతలను చూసి, వాటిని బట్టి మిగిలిన మూడు కోణాల కొలతను రాయండి.



3*. ΔABC అను సమద్విబాహు త్రిభుజంలో $\angle A$ మరియు $\angle B$ ల కొలతలు సమానంగానున్నవి. $\angle ACD$, ΔABC నకు బాహ్యకోణం. $\angle ACB$ మరియు $\angle ACD$ ల కొలతలు వరుసగా $(3x-17)^0$ మరియు $(8x+10)^0$ ఉన్నచో, $\angle ACB$ మరియు $\angle ACD$ వీటి కొలతలు కనుగొనండి. అలాగే $\angle A$ మరియు $\angle B$ ల కొలతలు గూడా కనుగొనండి.

ICT Tools or Links

- Geogebra సహాయంతో ఒకే ఆరంభ బిందువుగల రెండు కిరణాలను గీయండి. Move Option నుపయోగించి కిరణాలను చలింప జేయండి. ఒక ప్రత్యేక స్థితిలో అవి వ్యతిరేక కిరణాలుగా ఏర్పడుతాయి. దీనిని నిరూపణ చేసుకొండి
- రేఖీయ జత కోణాలను తయారు చేయండి. ఉమ్మడి భుజాన్ని move చేసి వివిధరకాల రేఖీయ జతకోణాల జతలను తెలుసుకోండి.
- Geogebra లోని Polygon Tools నుపయోగించి వివిధ బహుభుజి పటాలను గీయండి, వాటి అంతర కోణాల యొక్క కొలతల యొక్క ధర్మాలను నిరూపణ చేసుకొండి.

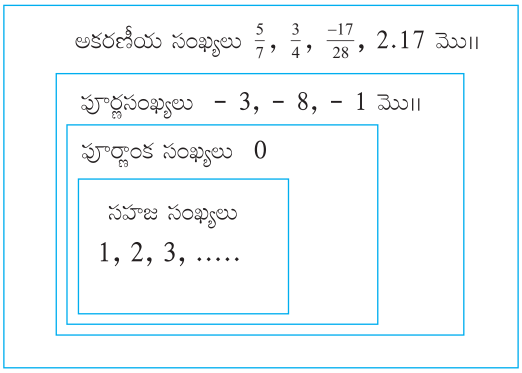
5 అకరణీయ సంఖ్యలు మరియు వాటిపై క్రియలు

తెలుసుకొందాం.

అకరణీయ సంఖ్యలు (Rational numbers)

క్రింది తరగతిలో మనం 1, 2, 3, 4, ... గణన సంఖ్యలు అనగా సహజ సంఖ్యలను, నేర్చుకొనియున్నాము. సహజ సంఖ్యలు, సున్న మరియు సహజ సంఖ్యలయొక్క వ్యతిరేక సంఖ్యలు కలిసి తయారైన పూర్ణ సంఖ్యల సమూహం మనకు తెలుసు. అలాగే $\frac{7}{11}, \frac{2}{5}, \frac{1}{7}$ ఇలాంటి భిన్నాలు కూడా మనకు పరిచయమే. పూర్ణ సంఖ్యలు మరియు భిన్నాలు, ఇలాంటి, అన్ని సంఖ్యలను ఇముడ్చుకొనే ఏదేని సంఖ్యా సమూహముందా? అని ఆలోచిద్దాం.

$4 = \frac{12}{3}, 7 = \frac{7}{1}, -3 = \frac{-3}{1}, 0 = \frac{0}{2}$ ఈ విధంగా అన్ని పూర్ణసంఖ్యలను మనం $\frac{m}{n}$ రూపంలో రాయగలమని మనకు తెలుసు. అయితే m ఏదేని పూర్ణ సంఖ్య మరియు n ఏదేని శూన్యేతర పూర్ణసంఖ్య అయినట్లయితే $\frac{m}{n}$ అను సంఖ్యను అకరణీయ సంఖ్యయని అంటారు. ఇలాంటి అకరణీయ సంఖ్యల సమూహం పైనున్న అన్నిరకాల సంఖ్యలను ఇముడ్చుకొంటుంది.



కింది పట్టికను పూర్తి చేయండి.

	-3	$\frac{3}{5}$	-17	$-\frac{5}{11}$	5
సహజ సంఖ్యలు	×				✓
పూర్ణ సంఖ్యలు	✓				
అకరణీయ సంఖ్యలు	✓				

అకరణీయ సంఖ్యలపై క్రియలు

అకరణీయ సంఖ్యలను లవ, హారములనుపయోగించి సామాన్య భిన్న రూపంలో రాయబడుతాయి, కాబట్టి అకరణీయ సంఖ్యలపై క్రియలు, భిన్నాలపై క్రియల మాదిరిగానే చేస్తారు.

(1) $\frac{5}{7} + \frac{9}{11} = \frac{55+63}{77} = \frac{118}{77}$

(2) $\frac{1}{7} - \frac{3}{4} = \frac{4-21}{28} = \frac{-17}{28}$

(3) $2\frac{1}{7} + 3\frac{8}{14} = \frac{15}{7} + \frac{50}{14}$

$= \frac{30}{14} + \frac{50}{14}$

$= \frac{80}{14} = \frac{40}{7}$

(4) $\frac{9}{13} \times \frac{4}{7} = \frac{9\times4}{13\times7} = \frac{36}{91}$

(5) $\frac{3}{5} \times \frac{(-4)}{5} = \frac{3\times(-4)}{5\times5} = \frac{-12}{25}$

(6) $\frac{9}{13} \times \frac{26}{3} = \frac{3\times2}{1} = \frac{6}{1}$

కొంచెం గుర్తు తెచ్చుకొందాం.

ఏదేని ఒక సంఖ్యను రెండవ సంఖ్యచే భాగించడమనగా, ఆ సంఖ్యను రెండవ సంఖ్యయొక్క గుణకార విలోమముచే గుణించడం.

$\frac{5}{6}$ మరియు $\frac{6}{5}$, $\frac{2}{11}$ మరియు $\frac{11}{2}$ ఇవి గుణకారవిలోమ సంఖ్యల జతలని మనం తెలుసుకొన్నాం.

అలాగే, $\left(\frac{-5}{4}\right) \times \left(\frac{-4}{5}\right) = 1$; $\left(\frac{-7}{2}\right) \times \left(\frac{-2}{7}\right) = 1$ దీనిని బట్టి $\left(\frac{-5}{4}\right)$, $\left(\frac{-4}{5}\right)$ మరియు $\left(\frac{-7}{2}\right)$, $\left(\frac{-2}{7}\right)$ లు గుణకార విలోమ సంఖ్యల జతలు అవుతాయి. అనగా $\frac{-5}{4}$ మరియు $\frac{-4}{5}$ లు ఒకదానికొకటి గుణకార విలోమం అలాగే $\frac{-7}{2}$ మరియు $\frac{-2}{7}$ ఇవి కూడా పరస్పరం గుణకార విలోమం అవుతాయి.

జాగ్రత్త పడండోయ్!

ఉదా: $\frac{-11}{9}$ మరియు $\frac{9}{11}$ లబ్ధం -1 అవుతుంది. కాబట్టి $\frac{-11}{9}$, $\frac{9}{11}$ లు గుణకార విలోమాల జత **కాదు**.

పదండి, చర్చిద్దాం.

మనం వివిధ సంఖ్యాసమూహాల ప్రత్యేకతలను చూద్దాం. అందుకై జట్టులో చర్చిస్తూ కింది పట్టికను పూర్తిచేయండి. సహజ సంఖ్యల సమూహం, పూర్ణ సంఖ్యల సమూహం మరియు అకరణీయ సంఖ్యల సమూహాన్ని గూర్చి ఆలోచిద్దాం. ప్రతి సంఖ్యా సమూహానికి ఎదురుగా కూడిక, తీసివేత, గుణకారం మరియు భాగహార క్రియలు చేయడం వలన వచ్చే ఫలితం (✓) లేదా (×) ఈ గుర్తులచే చూపండి. సున్నతో భాగహారం చేయరాదని తెలుసుకోండి.

- సహజ సంఖ్యలను కూడినట్లయితే సమాధానం ఎల్లప్పుడు సహజ సంఖ్యయే వస్తుంది కాబట్టి, సహజ సంఖ్యల సమూహానికి ఎదురుగా కూడిక గడిక్రింద (✓) గుర్తు పెట్టండి.
- రెండు సహజసంఖ్యలను తీసివేసినట్లయితే సమాధానం ఎల్లప్పుడు సహజ సంఖ్యయే రాకపోవచ్చు. ఎందుకంటే $7 - 10 = -3$ ఇలా అసంఖ్యాక ఉదాహరణాలున్నాయి. కాబట్టి తీసివేత గడిక్రింద (×) గుర్తు పెట్టండి. పట్టికలో (×) గుర్తు వచ్చినట్లయితే దానికి కారణం తెల్పండి. (×) కారణాన్ని సోదాహరణంగా ఇస్తున్నపుడు, అసంఖ్యాక ఉదాహరణలలోనుంచి ఒక్కటి చాలు.

సంఖ్యాసమూహం	కూడిక	తీసివేత	గుణకారం	భాగహారం
సహజ సంఖ్యలు	✓	× $(7 - 10 = -3)$	✓	× $(3 \div 5 = \frac{3}{5})$
పూర్ణ సంఖ్యలు				
అకరణీయ సంఖ్యలు				

ఇది నాకర్థమైంది.

- సహజ సంఖ్యల సమూహం కూడిక మరియు గుణకార క్రియలకైయుక్తమైనది. కానీ తీసివేత మరియు భాగహారక్రియలకై తగదు. అనగా రెండు సహజ సంఖ్యల యొక్క భేదం మరియు భాగఫలం సహజ సంఖ్యయే కాకపోవచ్చు.
- పూర్ణ సంఖ్యల సమూహం కూడిక, తీసివేత, గుణకార క్రియలకై యుక్తమైనది. కానీ, భాగహారక్రియకై తగదు.
- అకరణీయ సంఖ్యల సమూహం కూడిక, తీసివేత, గుణకారం మరియు భాగహార క్రియలన్నింటికిని యుక్తమైనది. కానీ సున్నతో భాగించలేము.

అభ్యాసమాలిక 22

1. కింది అకరణీయ సంఖ్యలను కూడండి.

(i) $\frac{5}{36} + \frac{6}{42}$ (ii) $1\frac{2}{3} + 2\frac{4}{5}$ (iii) $\frac{11}{17} + \frac{13}{19}$ (iv) $2\frac{3}{11} + 1\frac{3}{77}$

2. కింది అకరణీయ సంఖ్యలను తీసివేయండి.

(i) $\frac{7}{11} - \frac{3}{7}$ (ii) $\frac{13}{36} - \frac{2}{40}$ (iii) $1\frac{2}{3} - 3\frac{5}{6}$ (iv) $4\frac{1}{2} - 3\frac{1}{3}$

3. కింది అకరణీయ సంఖ్యలను గుణించండి.

(i) $\frac{3}{11} \times \frac{2}{5}$ (ii) $\frac{12}{5} \times \frac{4}{15}$ (iii) $\frac{(-8)}{9} \times \frac{3}{4}$ (iv) $\frac{0}{6} \times \frac{3}{4}$

4. గుణకార విలోమ సంఖ్యను రాయండి.

(i) $\frac{2}{5}$ (ii) $\frac{-3}{8}$ (iii) $\frac{-17}{39}$ (iv) 7 (v) $-7\frac{1}{3}$

5. కింది అకరణీయ సంఖ్యలను భాగించండి.

(i) $\frac{40}{12} \div \frac{10}{4}$ (ii) $\frac{-10}{11} \div \frac{-11}{10}$ (iii) $\frac{-7}{8} \div \frac{-3}{6}$ (iv) $\frac{2}{3} \div (-4)$

(v) $2\frac{1}{5} \div 5\frac{3}{6}$ (vi) $\frac{-5}{13} \div \frac{7}{26}$ (vii) $\frac{9}{11} \div (-8)$ (viii) $5 \div \frac{2}{5}$

తెలుసుకొందాం.

అకరణీయ సంఖ్యల మధ్యన గలసంఖ్యలు

- 2 నుంచి 9 వరకు సహజ సంఖ్యల మధ్య ఎన్ని సహజ సంఖ్యలున్నాయి? వాటిని రాయండి.
- – 4 నుంచి 5 లమధ్య ఏ పూర్ణసంఖ్యలు గలవు? వాటిని రాయండి.
- $\frac{1}{2}$ మరియు $\frac{3}{4}$ వీటిమధ్య ఏ అకరణీయ సంఖ్యలుండవచ్చును?

ఉదా: $\frac{1}{2}$ మరియు $\frac{4}{7}$ ఈ అకరణీయ సంఖ్యల మధ్యనగల అకరణీయ సంఖ్యలను వెదుకుదాం. అందుకు ఈ సంఖ్యలకు సమహారరూపాన్నిద్దాం.

$$\frac{1}{2} = \frac{1\times 7}{2\times 7} = \frac{7}{14}, \qquad \frac{4}{7} = \frac{4\times 2}{7\times 2} = \frac{8}{14}$$

7 మరియు 8 సమీప సహజసంఖ్యలు, మరి $\frac{7}{14}$ మరియు $\frac{8}{14}$ సమీప అకరణీయ సంఖ్య లేనా?
ఏదేని అకరణీయ సంఖ్యయొక్క హారం పెద్దగా చేయవచ్చు. అదే ప్రమాణంలో దాని లవం కూడా పెద్దగా అవుతుంది.

$$\frac{7}{14} = \frac{70}{140}, \qquad \frac{8}{14} = \frac{80}{140} \ldots$$ (లవం మరియు హారంను 10 చే గుణించగా)

ఇపుడు $\frac{70}{140} < \frac{71}{140} \ldots\ldots < \frac{79}{140} < \frac{80}{140}$ ఇచ్చట $\frac{7}{14}$ మరియు $\frac{8}{14}$ ల మధ్య ఎన్ని సంఖ్యలు లభించాయి?

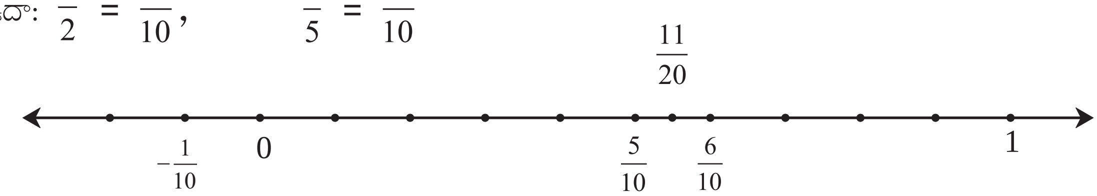
అలాగే $\frac{7}{14} = \frac{700}{1400}$, $\frac{8}{14} = \frac{800}{1400} \ldots$ (లవం మరియు హారంను 100 చే గుణించగా)

కాబట్టి $\frac{700}{1400} < \frac{701}{1400} \ldots\ldots < \frac{799}{1400} < \frac{800}{1400}$

దీనిని బట్టి, అకరణీయ సంఖ్యలను హెచ్చిస్తు పెద్ద హారంగల సమానవిలువగల సంఖ్యలలోకి రూపాంతరం చేసిన, వాటి మధ్య అనేక అకరణీయ సంఖ్యలను వ్యక్తపరచవచ్చు.

ఉదా:, $\frac{1}{2}$ మరియు $\frac{3}{5}$ వీటి మధ్యగల అకరణీయ సంఖ్యలను వెదుకుదాం. $\frac{1}{2}$ మరియు $\frac{3}{5}$ ఈ అకరణీయ సంఖ్యలకు ముందుగా సమహార రూపాన్నిద్దాం.

ఉదా: $\frac{1}{2} = \frac{5}{10}$, $\frac{3}{5} = \frac{6}{10}$



సంఖ్యారేఖపై $\frac{5}{10}$, $\frac{6}{10}$ ఈ సంఖ్యలను సూచించు బిందువులు గలవు. వాటిని కలిపే రేఖాఖండం మధ్య బిందువును వెదుకుదాం, ఆ బిందువు ఏ సంఖ్యను చూపుతుందో చూద్దాం.

$$\frac{1}{2}\left(\frac{5}{10}+\frac{6}{10}\right) = \frac{11}{20}$$ ఇప్పుడీబిందువు ఆ రేఖాఖండపు మధ్యబిందువు.

ఎందుకనగా, $\frac{6}{10} - \frac{11}{20} = \frac{12-11}{20} = \frac{1}{20}$ అలాగే $\frac{11}{20} - \frac{5}{10} = \frac{11-10}{20} = \frac{1}{20}$

$\therefore$ $\frac{5}{10}$ మరియు $\frac{6}{10}$ వీటి నడుమ సరిగా మధ్యన $\frac{11}{20}$ ఈ సంఖ్య ఉంటుంది. అనగా $\frac{1}{2}$ మరియు $\frac{3}{5}$ వీటి మధ్యన $\frac{11}{20}$ ఈ సంఖ్య ఉంటుంది. అదే ప్రకారంగా $\frac{1}{2}$, $\frac{11}{20}$, $\frac{11}{20}$ మరియు $\frac{3}{5}$ ల మధ్యనగల సంఖ్యలను వెదకవచ్చును.

ఇది నాకర్థమైంది.

- రెండు అకరణీయ సంఖ్యల మధ్యన అనేక అకరణీయ సంఖ్యలుంటాయి.

అభ్యాసమాలిక 23

⊙ కిందనిచ్చిన రెండు సంఖ్యల మధ్యనున్న మూడు అరకణీయ సంఖ్యలను రాయండి.

(i) $\frac{2}{7}$, $\frac{6}{7}$ (ii) $\frac{4}{5}$, $\frac{2}{3}$ (iii) $-\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$ (iv) $\frac{7}{9}$, $-\frac{5}{9}$

(v) $\frac{-3}{4}$, $\frac{+5}{4}$ (vi) $\frac{7}{8}$, $\frac{-5}{3}$ (vii) $\frac{5}{7}$, $\frac{11}{7}$ (viii) 0, $\frac{-3}{4}$

అధిక వివరాలకై

m ఒక పూర్ణ సంఖ్య అయినచో m +1 సమీప పెద్ద పూర్ణసంఖ్య అవుతుంది. m మరియు m +1 వీటి మధ్య ఒక్క పూర్ణసంఖ్య గూడా ఉండదు. వరసగా లేని ఏవేని రెండు పూర్ణసంఖ్యల మధ్యనున్న పూర్ణసంఖ్యలను లెక్కించవచ్చునని తెలుసుకోండి. కానీ ఏవేని రెండు అకరణీయ సంఖ్యల మధ్య మాత్రం అనేక అకరణీయ సంఖ్యలుంటాయి.

కొంచెం గుర్తుతెచ్చుకొందాం.

దశాంశభిన్నాల గుణకారం మరియు భాగహారం ఎలా చేయాలో మనం చూసాం.

$$\frac{35.1}{10} = 35.1 \times \frac{1}{10} = \frac{351}{10} \times \frac{1}{10} = \frac{351}{100} = 3.51$$

$$\frac{35.1}{100} = \frac{35.1}{1} \times \frac{1}{100} = \frac{351}{10} \times \frac{1}{100} = \left(\frac{351}{1000}\right) = 0.\ 351$$

$$35.1 \times 10 = \frac{351}{10} \times 10 = 351.0$$

$$35.1 \times 1000 = \frac{351}{10} \times 1000 = \left(\frac{351000}{10}\right) = 35100.0$$

దీన్ని బట్టి తెలుస్తున్నదేమిటంటే, దశాంశభిన్నాన్ని 100 చే భాగించడమనగా దశాంశ బిందువును 2 స్థానాలు ఎడమవైపుకు జరపడం 1000 చే గుణించడమనగా దశాంశ బిందువు మూడు స్థానాలు కుడివైపుకు జరపడం ఇలా భాగహారం మరియు గుణకారం చేస్తున్నపుడు కింది నియమాలు ఉపయోగపడతాయి.

దశాంశ భిన్నం యొక్క దశాంశ భాగం తర్వాత ఎన్నిసున్నలు రాసినను లేదా పూర్ణాంక భాగానికి ముందు ఎన్ని సున్నలు రాసినను దశాంశ భిన్నం యొక్క విలువమారదు.

$$1.35 = \frac{135}{100} \times \frac{100}{100} = \frac{13500}{10000} = 1.3500$$

$0.35 = \frac{35}{100} \times \frac{1000}{1000} = \frac{35000}{100000} = 0.35000$ మొ॥

$1.35 = 001.35$ ఇది ఎలా ఉపయోగపడుతుందో చూడండి.

$\frac{1.35}{100} = \frac{001.35}{100} = 0.0135$

తెలుసుకొందాం.

ఆకరణీయ సంఖ్యల దశాంశరూపం (Decimal representation of rational numbers)

ఉదా: $\frac{7}{4}$ అను అకరణీయ సంఖ్యను దశాంశరూపంలో రాయుము.

$$\begin{array}{r} 1.75 \\ 4\overline{)7.000} \\ -4 \\ \hline 30 \\ -28 \\ \hline 20 \\ -20 \\ \hline 00 \end{array}$$

(1) 7 = 7.0 = 7.000 (దశాంశ భాగం తర్వాత ఎన్ని సున్నలైనను రాయవచ్చు.)

(2) 7 ను 4 చే భాగించినపుడు 1 సారి పోవడంతో శేషం 3 మిగులుతుంది. ఇపుడు 1 పూర్ణాంకం తర్వాత దశాంశబిందువును రాద్దాం. శేషం 3కు పక్కన భాజ్యంలోని 0ను రాసి 30ని 4 చే భాగించగా వచ్చే భాగఫలం దశాంశభాగం కాబట్టి భాగఫలంలో దశాంశబిందువు తర్వాత 7 రాద్దాం. ఇపుడు భాజ్యంలోని ఇంకొక సున్నను కిందికి తెచ్చుకొని భాగహారమును పూర్తి చేద్దాం.

ఈ భాగహారంలో దశాంశభిన్నభాగం తర్వాత రాయబడిన సున్నాలు ఉపయోగించాము.

ఉదా: $2\frac{1}{5}$ దశాంశరూపంలో రాయుము.

$2\frac{1}{5} = \frac{11}{5}$ దీనిదశాంశ రూపాన్ని మూడు రకాలుగా వెదుకుదాం.

$\frac{1}{5}$ యొక్క దశాంశ రూపాన్ని కనుగొందాం.

(I)

$$\begin{array}{r} 0.2 \\ 5\overline{)1.0} \\ -0 \\ \hline 10 \\ -10 \\ \hline 00 \end{array}$$

$\frac{1}{5} = 0.2$

$\therefore 2\frac{1}{5} = 2.2$

(II)

$$\begin{array}{r} 2.2 \\ 5\overline{)11.000} \\ -10 \\ \hline 010 \\ -10 \\ \hline 00 \end{array}$$

(III) $\frac{11}{5} = \frac{11\times 2}{5\times 2} = \frac{22}{10} = 2.2$

$\frac{11}{5} = 2.2$

ఉదా: $\frac{-5}{8}$ అను అకరణీయ సంఖ్యను దశాంశ రూపంలో రాయుము.

$\frac{5}{8}$ ఈ దశాంశరూపంను భాగించగా 0.625 వస్తుంది. $\therefore \frac{-5}{8} = -0.625$

పై అన్ని ఉదాహరణాలలో శేషం సున్న వచ్చింది. భాగహారక్రియ పూర్తయింది. అకరణీయ సంఖ్యల యొక్క ఇలాంటి దశాంశరూపమును అనావర్త దశాంశ రూపమని అంటారు.

ఉదా: కొన్ని అకరణీయ సంఖ్యల దశాంశరూపమెలా వేరుగా ఉంటుందో చూద్దాం.

(i) $\frac{5}{3}$ ఈ సంఖ్యను దశాంశరూపంలో రాయుము.

```
    1.66
 3)5.00
  - 3
  ----
    2 0
  - 1 8
  -----
      20
    - 18
    ----
       2
```

$\therefore \frac{5}{3} = 1.666.......$

$\therefore \frac{5}{3} = 1.\dot{6}$

(ii) $\frac{2}{11}$ ఈ సంఖ్యను దశాంశ రూపంలో రాయుము.

```
     0.18
 11)2.00
   - 0
   -----
     20
   - 11
   -----
      90
    - 88
    ----
      20
```

$\therefore \frac{2}{11} = 0.1818.......$

$\therefore \frac{2}{11} = 0.\overline{18}$

(iii) $2\frac{1}{3}$ యొక్క దశాంశ రూపాన్ని కనుగొనుము. $2\frac{1}{3} = \frac{7}{3}$

```
    2.33
 3)7.00
  - 6
  ----
    1 0
  -   9
  -----
     10
  -   9
  -----
     01
```

$2\frac{1}{3} = 2.33...$

$\therefore 2\frac{1}{3} = 2.\dot{3}$

(iv) $\frac{5}{6}$ యొక్క దశాంశరూపాన్ని కనుగొనుము.

```
   0.833
 6)50
  - 48
  ----
   020
  -  18
  -----
     020
   -  18
   -----
      02
```

$\frac{5}{6} = 0.833...$

$\therefore \frac{5}{6} = 0.8\dot{3}$

పై అన్ని ఉదాహరణాలలో భాగహార క్రియ పూర్తికావడం లేదు. **దశాంశ బిందువునకు కుడివైపున ఒక అంకె లేదా కొన్ని అంకెల సమూహం మళ్ళీ మళ్ళీ వస్తుంది, ఇలాంటి భిన్నాలను ఆవర్తదశాంశ భిన్నాలని అంటారు.**

ఏ దశాంశ భిన్నంలో దశాంశ బిందువునకు కుడివైపున ఒకే అంకె మళ్ళీ మళ్ళీ వస్తుందో దానిపై చుక్కపెడతారు. ఉదా., $2\frac{1}{3} = 2.33... = 2.\dot{3}$ అలాగే దశాంశ బిందువుకు కుడివైపున ఏ అంకెల సమూహం మళ్ళీమళ్ళీ వస్తుందో ఆ సమూహంపై అడ్డుగీత గీస్తారు, $\frac{2}{11} = 0.1818........ = 0.\overline{18}$ మరియు $\frac{5}{6} = 0.8\dot{3}$

ఇది నాకర్థమైంది.

- కొన్ని అకరణీయ సంఖ్యల దశాంశరూపం అనావర్తితమైతే మరి కొన్ని అకరణీయ సంఖ్యల దశాంశరూపం ఆవర్తమవుతుంది.

పదండి, చర్చిద్దాం.

- భాగహారం చేయకుండా, ఏ హారం గల ఆకరణీయసంఖ్యల దశాంశరూపంను అనావర్తరూపంలో ఉంటుందో తెలుసుకోండి.

అభ్యాసమాలిక 24

⊙ కింది అకరణీయ సంఖ్యలను దశాంశరూపంలో రాయుము.

(i) $\frac{13}{4}$ (ii) $\frac{-7}{8}$ (iii) $7\frac{3}{5}$ (iv) $\frac{5}{12}$ (v) $\frac{22}{7}$ (vi) $\frac{4}{3}$ (vii) $\frac{7}{9}$

పదండి, చర్చిద్దాం.

కూడిక, తీసివేత, గుణకారం మరియు భాగహార చిహ్నాలుపయోగించి రాసిన సంఖ్యల అమరికయే సమాసం అవుతుంది.

$72 \div 6 + 2 \times 2$ ఈ సమాసమును సాధించి సమాధానం కనుగొనుము.

హాసిని పద్ధతి	**మాధవ్ పద్ధతి**
$72 \div 6 + 2 \times 2$	$72 \div 6 + 2 \times 2$
$= 12 + 2 \times 2$	$= 12 + 2 \times 2$
$= 12 + 4$	$= 14 \times 2$
$= 16$	$= 28$

రెండు సమాధానాలు వేర్వేరుగా వచ్చాయి. ఎందుకనగా ఇద్దరు వేర్వేరు క్రమంలో క్రియలు చేశారు. ఈ విధంగా క్రియలక్రమాన్ని వేరుగా తీసుకున్నట్లయితే సమాధానాలు వేర్వేరుగా వస్తాయి. ఇలాగాకుండా ఉండాలనే క్రియల క్రమాన్ని నిర్ణయించడానికి కొన్ని నియమాలు ఏర్పరిచారు. ఆ నియమాలను పాటించినట్లయితే ఒకే సమాధానం వస్తుంది. ఆ నియమాలను చూద్దాం. అప్పుడప్పుడు ఏదేని క్రియను ముందు చేయాలని ఆశించినపుడు సమాసంలో కుండలీకరణాలనుపయోగిస్తారు.

సమాసం సాధన నియమాలు

(1) సమాసంలో ఒకటికంటె ఎక్కువ క్రియలున్నచో, గుణకారం మరియు భాగాహార క్రియలు ఎడమనుంచి కుడివైపునకు ఏ క్రమంలో వచ్చాయో, అదే క్రమంలో చేయాలి.

(2) తర్వాత కూడిక, తీసివేత క్రియలు ఎడమనుంచి కుడివైపునకు ఏక్రమంలో వచ్చాయో, అదేక్రమంలో చేయాలి.

(3) కుండలీకరణాలలో ఒకటికంటె ఎక్కువ క్రియలున్నచో పై నియమాలను పాటిస్తూ, ఆయా క్రియలను ముందుగా చేయాలి.

పైనియామాలనుపయోగించినచో హాసిని పద్ధతి సరిగా ఉన్నదని అర్థమవుతుంది. $\therefore 72 \div 6 + 2 \times 2 = 16$

క్రింది సమాసములను సాధిద్దాం :

ఉదా: $40 \times 10 \div 5 + 17$
$= 400 \div 5 + 17$
$= 80 + 17$
$= 97$

ఉదా: $80 \div (15 + 8 - 3) + 5$
$= 80 \div (23 - 3) + 5$
$= 80 \div 20 + 5$
$= 4 + 5$
$= 9$

ఉదా: $2 \times \{25 \times [(113 - 9) + (4 \div 2 \times 13)]\}$

$= 2 \times \{25 \times [104 + (4 \div 2 \times 13)]\}$

$= 2 \times \{25 \times [104 + (2 \times 13)]\}$

$= 2 \times \{25 \times [104 + 26]\}$

$= 2 \times \{25 \times 130\}$

$= 2 \times 3250$

$= 6500$

ఉదా: $\frac{3}{4} - \frac{5}{7} \times \frac{1}{3}$

$= \frac{3}{4} - \frac{5}{21}$ (ముందు గుణకారం)

$= \frac{3 \times 21 - 5 \times 4}{84}$ (తర్వాత తీసివేత)

$= \frac{63 - 20}{84} = \frac{43}{84}$

గుర్తుంచుకోండి :

క్రియల క్రమాన్ని స్పష్టం చేయుటకు ఒకసారికంటె ఎక్కువ కుండలీకరణాలను ఉపయోగించవలసి వస్తుంది. అందుకై సాధారణ కుండలీకరణాలు ( ), చతురస్రాకార కుండలీకరణాలు [ ], బాణపుకుండలీకరణాలు { }ఉపయోగించబడతాయి. కుండలీకరణాలను సాధిస్తున్నపుడు, అన్నింటికంటెలోపలి కుండలీకరణంలోని క్రియను ముందుచేస్తారు. తర్వాత వరసగా బయటి కుండలీకరణాలలోని క్రియలను చేస్తారు.

అభ్యాసమాలిక 25

క్రింది సమాసములను సాధించుము.

1. $50 \times 5 \div 2 + 24$
2. $(13 \times 4) \div 2 - 26$
3. $140 \div [(-11) \times (-3) - (-42) \div 14 - 1)]$
4. $\{(220 - 140) + [10 \times 9 + (-2 \times 5)]\} - 100$
5. $\frac{3}{5} + \frac{3}{8} \div \frac{6}{4}$

ఉపక్రమం: గడులలోని అంకెలను, చిహ్నాలనుపయోగించి విలువ 112 వచ్చునట్లుగా సమాసమును తయారు చేయండి.

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9	+ × ÷ −

✻ అధికవివరాలకై

సమాసమును సాధిస్తున్నపుడు చిహ్నాలక్రమం

కుం →	చే →	భా →	గు →	కూ →	తీ
( )	×	÷	×	+	−
కుండలీకరణం లోని క్రియ అన్నింటి కంటె ముందు	లను చే,లో, తో గుణించి ఉదా: 200 లో $\frac{1}{4}$ $= 200 \times \frac{1}{4}$	భాగహారం	గుణకారం	కూడిక	తీసివేత

❑❑❑

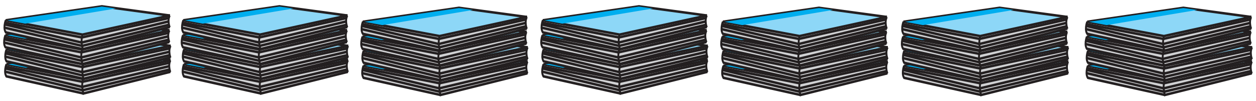
6 ఘాతాంకాలు

RN9ASJ

కొంచెం గుర్తు తెచ్చుకొందాం.

7 గురు పిల్లలకు ప్రతి ఒక్కరికి 4 నోటు పుస్తకాలు పంచారు.

మొత్తం నోటుపుస్తకాలు = 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 = 28 నోటుపుస్తకాలు



పైన కూడిక క్రియను అనేక సార్లు చేశారు.

ఒకే సంఖ్యను అనేకసార్లు వేసుకొని చేసిన కూడికను గుణకారరూపంలోను అమర్చవచ్చు.

మొత్తం నోటుపుస్తకాలు = 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 = 4 × 7 = 28

తెలుసుకొందాం.

భూమి మరియు ఘాతాంకం (Base and Index)

ఇప్పుడు 2 అనే సంఖ్యను అనేక సార్లు వేసుకొని చేసిన గుణకార అమరికను సంక్షిప్తంగా ఎలా చేస్తారో చూద్దాం.

$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$ ఇక్కడ 2 ను 8 సార్లు వేసుకొని గుణకారం చేసాము.

ఈ అమరికను సంక్షిప్తంగా 2^8 అని చేస్తారు. 2^8 అనునది గుణకారం యొక్క ఘాతాంక రూపం అవుతుంది.

దీనిలో 2 భూమి మరియు 8 ఘాతాంకం అవుతుంది.

8 ⟵	ఘాతాంకం
2 ⟵	భూమి

ఉదా: $5 \times 5 \times 5 \times 5 = 5^4$ 5^4 అనునది ఘాతాంక సంఖ్య అవుతుంది.

5^4 అను ఘాతాంక రూపంలోని సంఖ్యలో 5 అను సంఖ్యను భూమి మరియు 4 అను సంఖ్యను ఘాతాంకం అంటారు. దీనిని 5 ఘాతాంకం 4 అని, లేదా 5కు నాలుగవ ఘాతం అని చదువుతారు.

సామాన్యంగా a అనునది ఏదేని సంఖ్యయినపుడు, $a \times a \times a \times \dots\dots\dots$ (m సార్లు) $= a^m$

a^m ను **'a ఘాతాంకం m' లేదా 'a కు m వ ఘాతాంకం అని చదువుతారు.**

ఇచ్చుట m ఒక సహజ సంఖ్య

$\therefore$ $5^4 = 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 625$ అనగా 5^4 అను ఘాతాంక సంఖ్యయొక్క విలువ 625.

అలాగే $\left[\frac{-2}{3}\right]^3 = \frac{-2}{3} \times \frac{-2}{3} \times \frac{-2}{3} = \frac{-8}{27}$ అనగా $\left[\frac{-2}{3}\right]^3$ యొక్క విలువ $\frac{-8}{27}$ అవుతుంది.

$7^1 = 7$, $10^1 = 10$ అని గుర్తుంచుకోండి, **ఏ సంఖ్యకైన ఒకటవ ఘాతమనగా అదే సంఖ్య అవుతుంది.** సంఖ్య యొక్క ఘాతాంకం 1 అయినచో, అది రాయ కూడదని నియమము. ఉదా. $5^1 = 5$, $a^1 = a$

అభ్యాసమాలిక 26

1. కింది పట్టికను పూరించండి.

క్ర.సం.	ఘాతాంక సంఖ్యలు	భూమి	ఘాతాంకం	గుణకారరూపం	విలువ
(i)	3^4	3	4	$3 \times 3 \times 3 \times 3$	81
(ii)	16^3				
(iii)		(-8)	2		
(iv)				$\frac{3}{7} \times \frac{3}{7} \times \frac{3}{7} \times \frac{3}{7}$	$\frac{81}{2401}$
(v)	$(-13)^4$				

2. విలువను కనుగొనండి.

(i) 2^{10} (ii) 5^3 (iii) $(-7)^4$ (iv) $(-6)^3$ (v) 9^3

(vi) 8^1 (vii) $\left(\frac{4}{5}\right)^3$ (viii) $\left(-\frac{1}{2}\right)^4$

వర్గం మరియు ఘనం (Square and cube)

$3^2 = 3 \times 3$

3^2 ను 3కు 2వ ఘాతాంకం

లేదా 3 యొక్క వర్గం అని చదువుతారు.

$5^3 = 5 \times 5 \times 5$

5^3 ను 5కు 3వ ఘాతాంకం

లేదా 5 యొక్క ఘనం అని చదవాలి

గుర్తుంచుకోండి.

ఏదేని సంఖ్య యొక్క రెండవ ఘాతాంకమనగా ఆ సంఖ్య యొక్క వర్గం అవుతుంది.

ఏదేని సంఖ్య యొక్క మూడవ ఘాతాంకమనగా ఆ సంఖ్య యొక్క ఘనం అవుతుంది.

తెలుసుకొందాం.

సమానభూములుగల ఘాతాంక సంఖ్యల గుణకారం

ఉదా: $2^4 \times 2^3$

$= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$

$= 2^7$

దీనిని బట్టి $2^4 \times 2^3 = 2^{4+3} = 2^7$

ఉదా: $(-3)^2 \times (-3)^3$

$= (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3)$

$= (-3)^5$

దీనిని బట్టి $(-3)^2 \times (-3)^3 = (-3)^{2+3} = (-3)^5$

ఉదా: $\left(\frac{-2}{5}\right)^2 \times \left(\frac{-2}{5}\right)^3 = \left(\frac{-2}{5}\right) \times \left(\frac{-2}{5}\right) \times \left(\frac{-2}{5}\right) \times \left(\frac{-2}{5}\right) \times \left(\frac{-2}{5}\right) = \left(\frac{-2}{5}\right)^5$

దీనిని బట్టి $\left(\frac{-2}{5}\right)^2 \times \left(\frac{-2}{5}\right)^3 = \left(\frac{-2}{3}\right)^{2+3} = \left(\frac{-2}{5}\right)^5$

ఇది నాకర్థమైంది.

- a అనేది ఏదేని అకరణీయ సంఖ్యయిన, m మరియు n లు ధనపూర్ణ సంఖ్యలయినపుడు, $a^m \times a^n = a^{m+n}$

అభ్యాసమాలిక 27

సూక్ష్మీకరించండి.

(i) $7^4 \times 7^2$

(ii) $(-11)^5 \times (-11)^2$

(iii) $\left(\frac{6}{7}\right)^3 \times \left(\frac{6}{7}\right)^5$

(iv) $\left(-\frac{3}{2}\right)^5 \times \left(-\frac{3}{2}\right)^3$

(v) $a^{16} \times a^7$

(vi) $\left(\frac{P}{5}\right)^3 \times \left(\frac{P}{5}\right)^7$

తెలుసుకొందాం.

సమానభూములు గల ఘాతాంక సంఖ్యల భాగహారం

ఉదా: $6^4 \div 6^2 = \ ?$

$$\frac{6^4}{6^2} = \frac{6\times6\times6\times6}{6\times6}$$
$$= 6 \times 6$$
$$= 6^2$$
$$\therefore\ 6^4 \div 6^2 = 6^{4-2} = 6^2$$

ఉదా: $(-2)^5 \div (-2)^3 = \ ?$

$$\frac{(-2)^5}{(-2)^3} = \frac{(-2)\times(-2)\times(-2)\times(-2)\times(-2)}{(-2)\times(-2)\times(-2)}$$
$$= (-2)^2$$
$$\therefore\ (-2)^5 \div (-2)^3 = (-2)^2$$

ఇది నాకర్థమైంది.

- a ఏదేని ఒక శూన్యేతర అకరణీయ, m మరియు n లు ధనపూర్ణ సంఖ్యలయి $m > n$ అయినట్లయితే $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

a^0 యొక్క అర్థం

$a \neq 0$ అయినచో

$\frac{a^m}{a^m} = 1$ అలాగే

$\frac{a^m}{a^m} = a^{m-m} = a^0$

$$\therefore\ \boxed{a^0 = 1}$$

a^{-m} యొక్క అర్థం

$$a^{-m} = a^{-m} \times 1$$
$$= a^{-m} \times \frac{a^m}{a^m}$$
$$= \frac{a^{-m+m}}{a^m}$$
$$= \frac{a^0}{a^m} = \frac{1}{a^m}$$
$$\boxed{a^{-m} = \frac{1}{a^m}}$$

$a^{-m} = \frac{1}{a^m} \quad \therefore\ a^{-1} = \frac{1}{a}$

అలాగే $a \times \frac{1}{a} = 1$ అనగా $a \times a^{-1} = 1$

$\therefore\ a^{-1}$ అనునది a నకు గుణకార విలోమం అవుతుంది.

అదేవిధంగా $\frac{5}{3}$ నకు గుణకార విలమం $\frac{3}{5}$ అవుతుంది.

$$\therefore\ \boxed{\left(\frac{5}{3}\right)^{-1} = \frac{3}{5}}$$

ఉదా: $\left(\frac{4}{7}\right)^{-3}$ అను ఘాతాంక సంఖ్యను చూద్దాం.

$$\left(\frac{4}{7}\right)^{-3} = \frac{1}{\frac{4}{7}\times\frac{4}{7}\times\frac{4}{7}} = \frac{1}{\frac{64}{343}} = \frac{343}{64} = \left(\frac{7}{4}\right)^{3}$$

ఇది నాకర్థమైంది.

- దీనిని బట్టి, $a \neq 0,\ b \neq 0,\ m$ ఒక ధనపూర్ణసంఖ్య అయినచో $\left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\frac{b}{a}\right)^{m}$.

కింది ఉదాహరణలను పరిశీలించి ఏ నియమం పొందవచ్చో, చూద్దాం.

ఉదా: $(3)^4 \div (3)^6$

$$= \frac{3^4}{3^6}$$

$$= \frac{3\times3\times3\times3}{3\times3\times3\times3\times3\times3} = \frac{1}{3^2}$$

$$\therefore\ 3^4 \div 3^6 = 3^{4-6} = 3^{-2}$$

ఉదా: $\left(\frac{3}{5}\right)^2 \div \left(\frac{3}{5}\right)^5$

$$= \frac{\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}}{\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}} = \frac{1}{\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}} = \frac{1}{\left(\frac{3}{5}\right)^3}$$

$$\therefore\ \left(\frac{3}{5}\right)^2 \div \left(\frac{3}{5}\right)^5 = \left(\frac{3}{5}\right)^{2-5} = \left(\frac{3}{5}\right)^{-3}$$

ఇది నాకర్థమైంది.

- a ఒక అకరణీయ సంఖ్య అయినచో $a \neq 0$, m మరియు n లు పూర్ణ సంఖ్యలయినచో $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

తెలుసుకొందాం.

భూమి (-1) అయినపుడు ఘాతాంకం పూర్ణాంక సంఖ్య అయినచో, ఏమవుతుందో చూద్దాం.

$$(-1)^6 = \underline{(-1)\times(-1)}\times\underline{(-1)\times(-1)}\times\underline{(-1)\times(-1)} = 1\times1\times1 = 1$$

$$(-1)^5 = \underline{(-1)\times(-1)}\times\underline{(-1)\times(-1)}\times(-1) = 1\times1\times(-1) = -1$$

m సరిసంఖ్య అయినచో $(-1)^m = 1$ మరియు m బేసి సంఖ్యఅయినచో $(-1)^m = -1$

అభ్యాసమాలిక 28

1. సూక్ష్మీకరించండి.

   (i) $a^6 \div a^4$ (ii) $m^5 \div m^8$ (iii) $p^3 \div p^{13}$ (iv) $x^{10} \div x^{10}$

2. విలువను కనుగొనండి.

   (i) $(-7)^{12} \div (-7)^{12}$ (ii) $7^5 \div 7^3$ (iii) $\left(\frac{4}{5}\right)^3 \div \left(\frac{4}{5}\right)^2$ (iv) $4^7 \div 4^5$

తెలుసుకొందాం.

రెండు సంఖ్యల యొక్క గుణకారం మరియు భాగహారాల ఘాతం

కింది ఉదాహరణలను పరిశీలించి, ఏ నియమం పొందవచ్చో చూద్దాం.

ఉదా: $(2 \times 3)^4$

$= (2 \times 3) \times (2 \times 3) \times (2 \times 3) \times (2 \times 3)$

$= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 2^4 \times 3^4$

ఉదా: $\left(\frac{4}{5}\right)^3$

$= \frac{4}{5} \times \frac{4}{5} \times \frac{4}{5}$

$= \frac{4 \times 4 \times 4}{5 \times 5 \times 5} = \frac{4^3}{5^3}$

ఇది నాకర్థమైంది.

a మరియు b లు శూన్యేతర అకరణీయ సంఖ్యలయి, m పూర్ణసంఖ్య అయినచో,

(1) $(a \times b)^m = a^m \times b^m$ (2) $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$

$(a^m)^n$ అనగా ఘాతాంక సంఖ్య యొక్క ఘాతం.

ఉదా: $(5^2)^3$

$= 5^2 \times 5^2 \times 5^2$

$= 5^{2+2+2}$

$= 5^{2 \times 3}$

$= 5^6$

ఉదా: $(7^{-2})^{-5} = \frac{1}{(7^{-2})^5}$

$= \frac{1}{7^{-2} \times 7^{-2} \times 7^{-2} \times 7^{-2} \times 7^{-2}}$

$= \frac{1}{7^{(-2)\times 5}}$

$= \frac{1}{7^{-10}} = 7^{10}$

$a^{-m} = \frac{1}{a^m}$

ఉదా: $\left(\left(\frac{2}{5}\right)^{-2}\right)^3$

$= \left(\frac{2}{5}\right)^{-2} \times \left(\frac{2}{5}\right)^{-2} \times \left(\frac{2}{5}\right)^{-2} = \left(\frac{2}{5}\right)^{(-2)+(-2)+(-2)} = \left(\frac{2}{5}\right)^{-6}$

$(a^m)^n = a^m \times a^m \times a^m \times \ldots\ldots\ldots$ n సార్లు $= a^{m+m+m\ldots\ldots\ldots \text{ n సార్లు}} = a^{m \times n}$

పై ఉదాహరణను బట్టి ఈ నియమాన్ని పొందవచ్చు.

ఇది నాకర్థమైంది.

- a ఒక శూన్యేతర అకరణీయ సంఖ్య m మరియు n లు పూర్ణసంఖ్యలయినపుడు $(a^m)^n = a^{m \times n} = a^{mn}$

గుర్తుంచుకోండి:

a మరియు b లు శూన్యేతర అకరణీయ సంఖ్యలయి m మరియు n లు పూర్ణసంఖ్యలయినపుడు.

- $a^m \times a^n = a^{m+n}$
- $a^m \div a^n = a^{m-n}$
- $a^1 = a$
- $a^0 = 1$
- $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$
- $(ab)^m = a^m \times b^m$
- $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$
- $(a^m)^n = a^{mn}$
- $\left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\frac{b}{a}\right)^m$

అభ్యాసమాలిక 29

1. సూక్ష్మీకరించండి.

(i) $\left[\left(\frac{15}{12}\right)^3\right]^4$ (ii) $\left(3^4\right)^{-2}$ (iii) $\left(\left(\frac{1}{7}\right)^{-3}\right)^4$ (iv) $\left(\left(\frac{2}{5}\right)^{-2}\right)^{-3}$ (v) $\left(6^5\right)^4$

(vi) $\left[\left(\frac{6}{7}\right)^5\right]^2$ (vii) $\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{-4}\right]^5$ (viii) $\left[\left(\frac{5}{8}\right)^3\right]^{-2}$ (ix) $\left[\left(\frac{3}{4}\right)^6\right]^1$ (x) $\left[\left(\frac{2}{5}\right)^{-3}\right]^2$

2. క్రింది సంఖ్యలను ధనఘాతాంకమునుపయోగించి రాయుము.

(i) $\left(\frac{2}{7}\right)^{-2}$ (ii) $\left(\frac{11}{3}\right)^{-5}$ (iii) $\left(\frac{1}{6}\right)^{-3}$ (iv) $(y)^{-4}$

సామాన్య, ఖగోళశాస్త్రాలలో : గణితం నాతోడు

(1) దశాంశమానపద్ధతిలో సంఖ్యలను రాయుచున్నపుడు 10 యొక్క ఘాతాలను చాలాబాగా ఉపయోగించవచ్చు. భూమి మరియు చంద్రుని మధ్యన 38,40,00,000 మీటర్ల దూరం గలదు. ఈ మధ్య దూరం ను 10ఘాతాలను ఉపయోగించి కింది విధముగా రాస్తారు.

384 000 000 = 384×10^6

38 4000000 = 38.4×10^7

3 84000000 = 3.84×10^8 (ప్రామాణికరూపం)

ఏదేని అతి పెద్దసంఖ్య లేదా అతి చిన్నసంఖ్యను రాస్తున్నపుడు ఒక అంకె పూర్ణాంకంగల దశాంశభిన్న సంఖ్య మరియు 10ల సరియైన ఘాతంలచే గుణించి రాస్తారు. దీనిని ఆ సంఖ్యయొక్క ప్రామాణిక రూపమని అంటారు. (Standard form)

(2) ఆక్సిజన్ అణువుల వ్యాసం మి.మీ. లలో క్రింద నీయబడినది.

0.0000000000000356 = 3.56×10^{-14}

(3) క్రింది సంఖ్యలను ప్రామాణిక రూపంలో రాసేందుకు ప్రయత్నించడి.

సూర్యుని వ్యాసం 1400000000 మీటర్లు గలదు.

కాంతివేగం = 300000000 మీటర్లు/సెకండ్గలదు.

(4) ప్రక్కనున్న పటంలో Googol అనే సంఖ్య చూపబడినది. దానిని 10 యొక్క ఘాతాంకరూపంలో రాసేందుకు ప్రయత్నించండి.

Googol

10000000000000000000000000
0000000000000000000000000
0000000000000000000000000
0000000000000000000000000

కొంచెం గుర్తు తెచ్చుకొందాం.

సంపూర్ణ వర్గ సంఖ్యల వర్గమూలం కనుగొనుట

ఇచ్చిన సంఖ్యను అదే సంఖ్యచే గుణించగా వచ్చేలబ్ధం, ఆ సంఖ్య యొక్క వర్గం అవుతుంది.

ఉదా: $6 \times 6 = 6^2 = 36$

$6^2 = 36$ దీనిని మనం 6 యొక్క వర్గం 36 అని చదువుతాం.

ఉదా: $(-5) \times (-5) = (-5)^2 = 25$

$(-5)^2 = 25$ దీనిని (-5) యొక్క వర్గం 25 అని చదవాలి.

తెలుసుకొందాం.

✸ ఇచ్చిన సంఖ్య యొక్క వర్గమూలంను కనుగొనుట.

ఉదా: $3 \times 3 = 3^2 = 9$ ఇచ్చట 3 యొక్క వర్గం 9 అవుతుంది.

ఈ వివరణనే 9 యొక్క వర్గమూలం 3 అను రూపంలో రాయవచ్చు.

వర్గమూలంనకై $\sqrt{\ }$ ఈ గుర్తునుపయోగిస్తారు, $\sqrt{9}$ అనగా 9 యొక్క వర్గమూలం $\therefore \sqrt{9} = 3$ అవుతుంది.

ఉదా: $7 \times 7 = 7^2 = 49$ $\therefore \sqrt{49} = 7$

ఉదా: $8 \times 8 = 8^2 = 64$ దీనిని బట్టి $\sqrt{64} = 8$

$(-8) \times (-8) = (-8)^2 = 64$ దీనిని బట్టి 64 యొక్క వర్గమూలం -8 అని కూడా పొందవచ్చు.

x ఒక ధన సంఖ్యయినపుడు దానికి రెండు వర్గమూలాలుంటాయి.

వాటిలో ఋణ వర్గమూలంను $-\sqrt{x}$ గా, ధన వర్గమూలంను $\sqrt{x}$ గా సూచిస్తారు.

ఉదా: 81 యొక్క వర్గమూలంను కనుగొనండి.

$81 = 9 \times 9 = -9 \times -9$ $\therefore \sqrt{81} = 9$ మరియు $-\sqrt{81} = -9$

మనం చాలాసార్లు ధనవర్గమూలాలను గూర్చే ఆలోచిస్తాం.

✸ ఇచ్చిన సంఖ్యయొక్క వర్గమూలంను కారణాంకాల పద్ధతిలో కనుగొనుట.

ఉదా: 144 యొక్క వర్గమూలంను కనుగొనండి.

ఇచ్చిన సంఖ్యయొక్క ప్రధాన కారణాంకాలనుంచి సమాన కారణాంకాల జతలు చేయండి.

2	144
2	72
2	36
2	18
3	9
3	3
	1

$$144 = 2 \times 72$$
$$= 2 \times 2 \times 36$$
$$= 2 \times 2 \times 2 \times 18$$
$$= \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times \underline{3 \times 3}$$

వచ్చిన కారణాంకాలలో నుంచి సమానకారణాంకాల జతలు తయారు చేయండి.

ప్రతి జతలోని ఒక కారణాంకను తీసుకొని వాటిని, గుణించండి.

$\sqrt{144} = 2 \times 2 \times 3 = 12$ $\therefore \sqrt{144} = 12$

ఉదా: 324 యొక్క వర్గమూలంను కనుగొనండి.

ఇచ్చిన సంఖ్యయొక్క ప్రధానకారణాంకాలను కనుగొని సమాన కారణాంకాల జతలుగా చేయండి.

$$
\begin{aligned}
324 &= 2 \times 162 \\
&= 2 \times 2 \times 81 \\
&= 2 \times 2 \times 3 \times 27 \\
&= 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 9 \\
&= \underline{2 \times 2} \times \underline{3 \times 3} \times \underline{3 \times 3}
\end{aligned}
$$

2	324
2	162
3	81
3	27
3	9
3	3
	1

వర్గమూలానికై ప్రతి జతలోని ఒక అంకెను తీసుకొని, గుణించండి.

$\sqrt{324} = 2 \times 3 \times 3 = 18$

$\therefore \sqrt{324} = 18$

అభ్యాసమాలిక 30

⊙ వర్గమూలం కనుగొనండి.

(i) 625 (ii) 1225 (iii) 289 (iv) 4096 (v) 1089

✱ అధిక వివరాలకై (భాగహార పద్ధతిలో వర్గమూలం)

(1) 9801 యొక్క వర్గమూలం కనుగొనండి.(2) 19321 యొక్క వర్గమూలం కనుగొనండి. (3) 141.61 యొక్క వర్గమూలం కనుగొనండి.

	99
9	$\overline{98}\,\overline{01}$
+ 9	− 81
189	1701
+ 9	− 1701
198	0000

$\sqrt{9801} = 99$

	139
1	$\overline{1}\,\overline{93}\,\overline{21}$
+ 1	− 1
23	093
+ 3	− 69
269	2421
+ 9	− 2421
278	0000

	11.9
1	$\overline{1}\,\overline{41}.\overline{61}$
+ 1	− 1
21	041
+ 1	− 21
229	2061
+ 9	− 2061
238	0000

ఏ సంఖ్యకు ప్రధానకారణాంకాలు చాలా పెద్దగా ఉంటాయో, దానివలన కారణాంకాలుగా విభజించడం కష్టమయిన పుడు దాని వర్గమూలం కనుగొనడానికి ఈ పద్ధతి ఉపయోగపడుతుంది.

ఇప్పుడు ఇంకొక ఉపయోగమును తెలుసుకోవడానికి $\sqrt{137}$ ను కనుగొందాం.

	11.7
1	$\overline{1}\,\overline{37}.\overline{00}$
+ 1	−1
21	037
+ 1	− 21
227	1600
+ 7	− 1589
234	11

$\sqrt{137} > 11.7$

కానీ $(11.8)^2 = 139.24$

$\therefore 11.7 < \sqrt{137} < 11.8$

ఈ విధంగా $\sqrt{137}$ యొక్క సమీపసంఖ్యను తెలుసుకోవచ్చు.

ఏ సంఖ్యయొక్క వర్గమూలం పూర్ణాంకం కాదో, దాని వర్గమూలానికి సమీప దశాంశభిన్నం ఈ పద్ధతిలో పొందవచ్చును.

7 సంయుక్త కమ్మీరేఖాచిత్రాలు

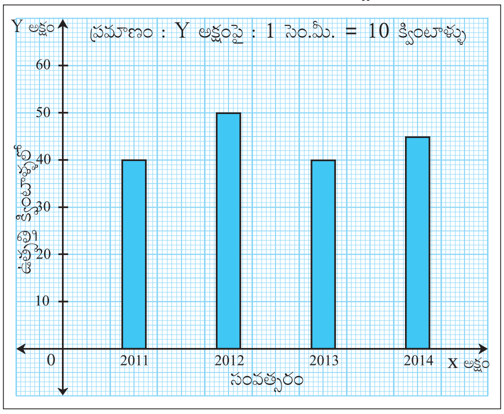
RNI6U7

చదవండి, చర్చిద్దాం.

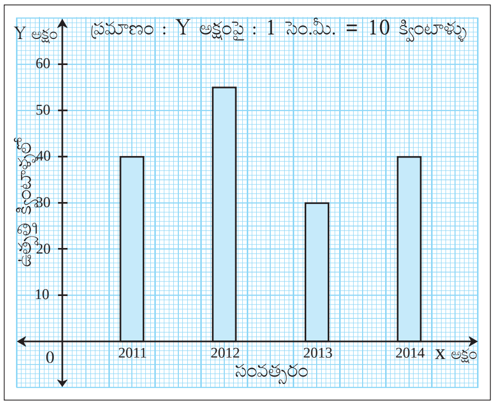
సంయుక్త కమ్మీ రేఖా చిత్రాలు

అజయ్ మరియు విజయ్‌ల పొలంలోని గోధుమ ఉత్పత్తి క్వింటాళ్ళలో ఎంతగలదో ఆ వివరణను క్రింద రెండు కమ్మీరేఖా చిత్రాలలో చూపబడింది. దానిని పరిశీలించండి.

అజయ్ యొక్క గోధుమ ఉత్పత్తి

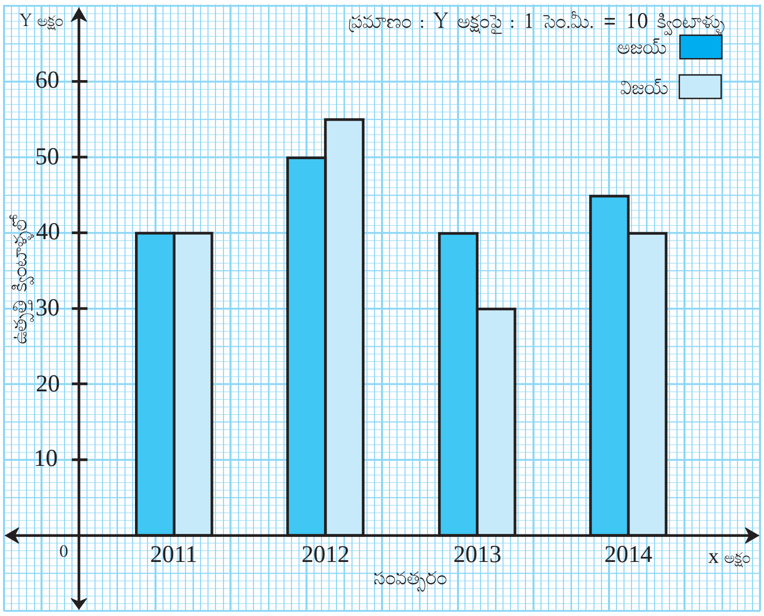


విజయ్ యొక్క గోధుమ ఉత్పత్తి



రెండు రేఖాచిత్రాలలోని వివరాలను ఒకే రేఖా చిత్రంలో చూపవచ్చునో లేదో చూద్దాం. కింది రేఖాచిత్రాన్ని చూడండి. ఈ విధంగా తక్కువ స్థలంలో అధిక వివరాలను ఇవ్వవచ్చు, అలాగే అజయ్ మరియు విజయ్‌ల గోధుమ ఉత్పత్తిని పోల్చి చూడటం సులభమవుతుంది. ఇలాంటి కమ్మీరేఖాచిత్రాలను సంయుక్త కమ్మీరేఖాచిత్రాలంటారు.

అజయ్ మరియు విజయ్‌ల గోధుమ ఉత్పత్తి

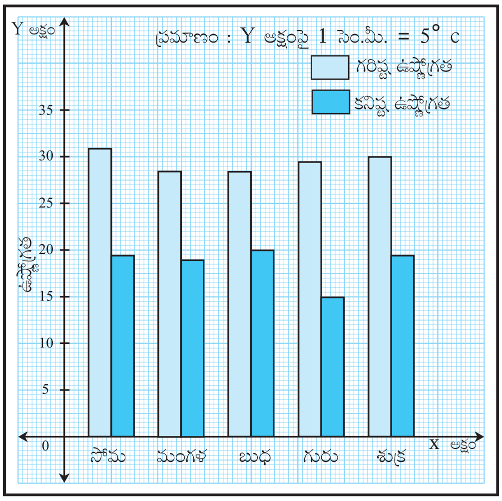


సంయుక్త కమ్మీరేఖాచిత్రాలను పరిశీలించి క్రింది ప్రశ్నలకు జవాబులివ్వండి.

- ఏ సంవత్సరంలో ఇరువురి గోధుమ ఉత్పత్తి ఒకే విధంగా ఉన్నది?
- 2014 వ సంవత్సరంలో ఎవరి గోధుమ ఉత్పత్తి అధికంగా ఉంది?
- 2013 వ సంవత్సరంలో ప్రతి ఒక్కరి గోధుమ ఉత్పత్తి ఎంత ఉండెను?

సంయుక్త కమ్మీరేఖాచిత్రాలను చదువుట

పుణే పట్టణంలో అయిదు రోజుల కనిష్ఠ మరియు గరిష్ఠ ఉష్ణోగ్రత (°C లలో) ఇవ్వబడినది. సంయుక్తకమ్మీ రేఖా చిత్రాలను పరిశీలించి క్రింది ప్రశ్నలకు సమాధానములు ఇవ్వండి.



- X – అక్షంపై ఏ వివరాలను సూచించారు?
- Y – అక్షంపై ఏ వివరాలను సూచించారు?
- ఏరోజు అత్యధిక ఉష్ణోగ్రత గలదు?
- కనిష్ఠ ఉష్ణోగ్రత ఏ రోజున అత్యధికంగా గలదు?
- గురువారం గరిష్ఠ మరియు కనిష్ఠ ఉష్ణోగ్రతల మధ్య ఎంత భేదంకలదు?
- ఏ రోజున గరిష్ఠ మరియు కనిష్ఠ ఉష్ణోగ్రతల మధ్య భేదం అత్యధికంగా గలదు?

తెలుసుకొందాం.

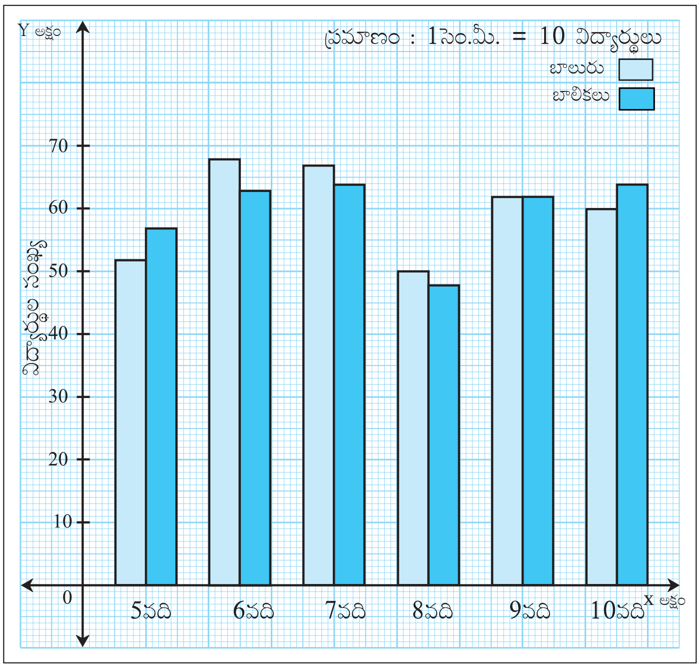
సంయుక్తకమ్మీ రేఖాచిత్రాలు (Joint bar graph) గీయుట.

ఒక పాఠశాలలోని బాలురు మరియు బాలికల సంఖ్య ఇవ్వబడినది. వివరాలను బట్టి సంయుక్త కమ్మీరేఖాచిత్రాలు గీయండి.

తరగతి	5వది	6వది	7వది	8వది	9వది	10వది
బాలురు	52	68	67	50	62	60
బాలికలు	57	63	64	48	62	64

సంయుక్త కమ్మీ రేఖా చిత్రాలకై మెట్లు

1. రేఖా చిత్ర కాగితంపై x అక్షం మరియు y అక్షం, వాటి ఖండన బిందువును చూపండి.
2. రెండు సంయుక్త కమ్మీరేఖాచిత్రాల మధ్య దూరం సమానంగా ఉంచి X అక్షంపై తరగతులను చూపండి.
3. Y అక్షంపై ప్రమాణంను నిర్ణయించండి ఉదా., 1 ప్రమాణం = 10 బాలురు/బాలికలు Y అక్షంపై బాలుర /బాలికల సంఖ్యను సూచించండి.
4. నిర్ణయించబడిన ప్రమాణమును బట్టి ప్రతి తరగతిలోని బాలుర మరియు బాలికల సంఖ్యను చూపే కమ్మీల ఎత్తు నిర్ణయించి కమ్మీరేఖాచిత్రాలు గీయుము. రెండు కమ్మీలు వేరుగా చూపడానికి వేరేరంగునుప యోగించండి.

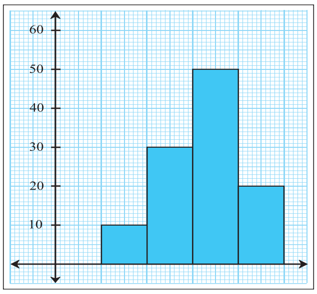


ఇది నాకర్థమైంది.

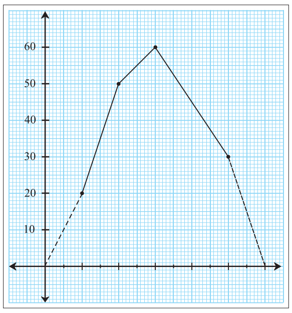
- సంయుక్త కమ్మీరేఖాచిత్రాలలో అన్ని కమ్మీల వెడల్పు సమానంగా ఉండాలి.
- ప్రక్కప్రక్కనున్న రెండు కమ్మీల జతల మధ్య సమానదూరం ఉండాలి.
- సంయుక్తకమ్మీ రేఖాచిత్రాలను తులనాత్మక అభ్యాసానికై ఉపయోగిస్తారు.

వార్తాపత్రిక, మాసపత్రిక, సమాచార సమర్పణలో : గణితంనాతోడు

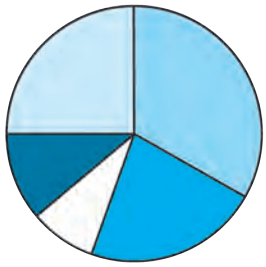
- వార్తా పత్రికలలోని వివిధ రకాల రేఖాచిత్రాలను సేకరించి వాటిపై చర్చించండి.



1. దీర్ఘచతురస్రరేఖాచిత్రం



2. రేఖీయరేఖాచిత్రం



3. వృత్తరేఖా చిత్రం

ICT Tools or Links

సమాచారాన్ని సమర్పిస్తున్నపుడు సంయుక్త కమ్మీరేఖాచిత్రాలకు బదులుగా వివిధ రేఖా చిత్రాలనుపయోగిస్తారు. Ms-Excell, Graph Matica, Geogebra వీటిలో ఉన్న రకరకాల రేఖాచిత్రాలను ఉపాధ్యాయుల సహాయంతో చూడండి.

అభ్యాసమాలిక 31

1. ప్రపంచ వృక్షదినంన రెండు పాఠశాలల వారు నాటిన మొక్కల సంఖ్యను పట్టికలో ఇవ్వబడినది. దానిని బట్టి సంయుక్త కమ్మీరేఖాచిత్రాలను గీయుము.

మొక్కల పేరు / పాఠశాల పేరు	బదాం	జీడి మామిడి	వేప	అశోక	గుల్‌మోహార్
నూతన్ విద్యాలయం	40	60	72	15	42
భారత్ విద్యాలయం	42	38	60	25	40

2. ఒక జ్యూస్ సెంటర్‌లో శనివారం మరియు ఆదివారం రకరకాల పండ్ల జ్యూస్ తీసుకోవడానికి వచ్చిన వినియోగదారుల సంఖ్య పట్టికలో సూచించ బడినది. ఈ వివరాలను బట్టి సంయుక్త కమ్మీరేఖాచిత్రాలను గీయండి.

పండ్లు / వారం	బత్తాయి	నారింజ	ఆపిల్	అనానస్
శనివారం	43	30	56	40
ఆదివారం	59	65	78	67

3. గ్రామ పంచాయతీ ఎన్నికలలో అయిదు పోలింగ్ కేంద్రాలలో క్రింది విధంగా ఓటింగ్ జరిగింది. దానిని బట్టి సంయుక్త కమ్మీరేఖాచిత్రాలను గీయండి.

వ్యక్తి \ కేంద్రం నం.	1	2	3	4	5
పురుషులు	200	270	560	820	850
స్త్రీలు	700	240	340	640	470

4. భారత దేశంలోని అయిదు నగరాల గరిష్ఠ మరియు కనిష్ఠ ఉష్ణోగ్రతలు °C లలో ఇవ్వబడినవి. దానిని బట్టి సంయుక్త కమ్మీరేఖాచిత్రాన్ని గీయండి.

ఉష్ణోగ్రత \ నగరం	ఢిల్లీ	ముంబయి	కోల్‌కత్తా	నాగపూర్	కపుర్తలా
గరిష్ఠ ఉష్ణోగ్రత	35	32	37	41	37
కనిష్ఠ ఉష్ణోగ్రత	26	25	26	29	26

5. పట్టికలో షోలాపూర్, పుణెలోని ప్రభుత్వ ఆసుపత్రిలో ఒక రోజులో టీకాలు వేయబడిన పిల్లల సంఖ్యను ఇచ్చారు. దానిని బట్టి సంయుక్త కమ్మీరేఖాచిత్రాలను గీయండి.

పట్టణం \ టీకాపేరు	డి.పి.టి. సప్లిమెంట్	పోలియో సప్లిమెంట్	మశూచికం	కామెర్లు
షోలాపూర్	65	60	65	63
పుణే	89	87	88	86

6. మహారాష్ట్ర మరియు గుజరాత్ రాష్ట్రాలలో అక్షరాస్యుల ప్రమాణం శాతాలలో ఇవ్వబడినది. దానిని బట్టి సంయుక్త కమ్మీ రేఖాచిత్రాలను గీయుము.

రాష్ట్రం \ సం॥	1971	1981	1991	2001	2011
మహారాష్ట్ర	46	57	65	77	83
గుజరాత్	40	45	61	69	79

గణిత గమ్మత్తు

$$1 + 3 = 2^2$$

$$1 + 3 + 5 = 3^2$$

$$1 + 3 + 5 + 7 = 4^2$$

దీనిని బట్టి $1 + 3 + \dots + (2n - 1) = n^2$ ఈ సూత్రం గుర్తుకు వస్తుందా?

ఈ సూత్రాన్ని $n = 5, 6, 7, 8, \dots$ ఈ సంఖ్యలకు అన్వయించి నిరూపణ చేసుకొని చూడండి.

శాస్త్రప్రయోగాలలో నమోదును బట్టి ఫలితాలను తెలుసుకోవడానికి అలాగే భూగోళం, అర్థశాస్త్రం వీటిలోను సంయుక్త కమ్మీ రేఖా చిత్రాలుపయోగపడతాయి.

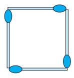
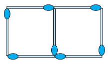
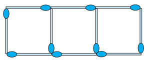
8 బీజీయ సమాసాలు మరియు వాటిపై క్రియలు

RNS2VU

తెలుసుకొందాం.

బీజీయ సమాసాలు (Algebraic expressions)

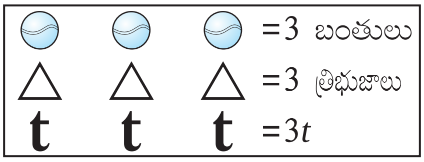
- క్రిందనీయబడిన పుల్లల నిర్మాణాన్ని చూసి, ఆ చిత్రాకృతిని పరిశీలించండి.

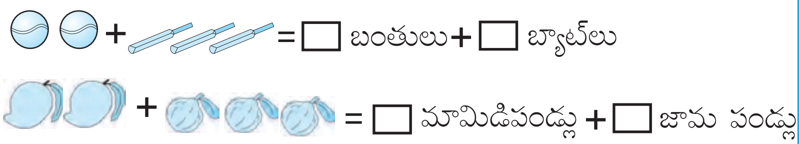
పుల్లల నిర్మాణం				......	..	......	..	......
చతురస్రం	1	2	3	4	..	10	..	n
పుల్లల సంఖ్య	4	7	10	13	..	......	..	......
	3 + 1	6 + 1	9 + 1	12 + 1	..	......	..	......
	$3 \times 1 + 1$	$3 \times 2 + 1$	$3 \times 3 + 1$	$3 \times 4 + 1$		$3 \times 10 + 1$		$3 \times n + 1$

పై చిత్రాకృతిని పరిశీలించినపుడు, పుల్లల సంఖ్య = 3 × చతురస్రాల సంఖ్య + 1 అని దృష్టికివస్తుంది.

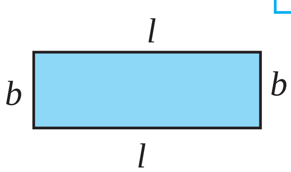
చతురస్రాల సంఖ్య మారుతుంది. అవి 2, 3, 4 ... 10, ... వీటిలో ఏవైనా కావచ్చు. చతురస్రాల సంఖ్య తెలియనట్లయితే దానిని అక్షరంతో చూపిస్తారు. ఇక్కడ చతురస్రాల సంఖ్య n అనే అక్షరంతో చూపబడింది.

n ఒక చరరాశి. చరరాశిని ఉపయోగించి నటువంటి 3×n+1 అనగా 3n+1 ఇదొక బీజీయ సమాసమవుతుంది.





$x + x + y + y + y = 2x + 3y$



దీర్ఘచతురస్రం చుట్టుకొలత $= 2l + 2b$

$= 2(l + b)$

ఇది నాకర్థమైంది.

- $3n + 1$, $3t$, $2x + 3y$, $2(l + b)$ ఇవి బీజీయ సమాసములు.
ఈ సమాసములలో n, t, y, l, b, x లు చరరాశులు.

తెలుసుకొందాం.

$3x$ అను సమాసంలో 3, x అనే చరరాశికి సహగుణకం (Coefficient) అవుతుంది.

$-15t$ లో -15, t అనే చరరాశికి సహగుణకం అవుతుంది.

ఏ సమాసంలో గుణకారం అనే ఒకే ఒక క్రియ ఉంటుందో ఆ సమాసంను పదం (term) అని అంటారు.

బీజీయ సమాసం ఏకపదికావచ్చు లేదా అనేక పదాల యొక్క కూడిక కావచ్చు.

పదం	సహగుణకం	చరరాశులు
$11mn$	11	m, n
$-9x^2y^3$	-9	x, y
$\frac{5}{6}p$	$\frac{5}{6}$	p
a	1	a

ఉదా: $4x^2 - 2y + \frac{5}{6}xz$ ఒక బీజీయసమాసం.

ఈ సమాసంలో $4x^2$ మొదటి పదం, దీనిలో 4 సహగుణకం.

$-2y$ రెండవపదం, దీనిలో -2 సహగుణకం

$\frac{5}{6}xz$ మూడవ పదం, దీనిలో $\frac{5}{6}$ సహగుణకం.

గుర్తుంచుకోండి:

- $15 - x$ ఈ బీజీయ సమాసంలో రెండు పదములున్నాయి. మొదటి పదం 15 ఒక సంఖ్య.
  $15 - x = 15 + (-x)$ $\therefore$ రెండవ పదం $-x$ ఈ పదంలోని x చరరాశి సహగుణకం (-1)
- ఏ పదంలో చరరాశులు మరియు వాటి ఘాతాంకాలు సమానంగా ఉంటాయో, ఆ పదాలను సరూప పదాలు (సజాతి పదాలు) అని అంటారు.

సజాతి పదాలు (సరూప పదాలు) (Like terms)

(i) $2x$, $5x$, $-\frac{2}{3}x$ (ii) $-5x^2y$, $\frac{6}{7}yx^2$

విజాతి పదాలు (భిన్నరూప) (Unlike terms)

(i) $7xy$, $9y^2$, $-2xyz$, $8mn$, $8m^2n^2$, $8m^3n$

బీజీయ సమాసముల రకాలు (Types of algebraic expressions)

సమాసంలోని పదాల సంఖ్యను బట్టి సమాసం పేరు నిర్ణయించబడుతుంది. ఒక పదమున్నచో ఏకపద సమాసం, రెండు పదములున్నచో ద్విపద సమాసం, మూడు పదములున్నచో త్రిపద సమాసం, మూడుకంటె ఎక్కువ పదములున్నచో బహుపద సమాసం అని పేరు ఇవ్వబడుతుంది.

ఏకపద సమాసం	ద్విపద సమాసం	త్రిపద సమాసం	బహుపద సమాసం
• $4x$	• $2x - 3y$	• $a + b + c$	• $a^3 - 3a^2b + 3ab - b^3$
• $\frac{5}{6}m$	• $2l + 2b$	• $x^2 - 5x + 6$	• $4x^4 - 7x^2 + 9 - 5x^3 - 16x$
• -7	• $3mn - 5m^2n$	• $8a^3 - 5a^2b + c$	• $5x^5 - \frac{1}{2}x + 8x^3 - 5$

అభ్యాసమాలిక 32

కింది సమాసములలో పదముల సంఖ్యను బట్టి ఏకపద సమాసం, ద్విపద సమాసం, మొదలైన రకాలుగా వర్గీకరించుము.

(i) $7x$ (ii) $5y - 7z$ (iii) $3x^3 - 5x^2 - 11$ (iv) $1 - 8a - 7a^2 - 7a^3$

(v) $5m - 3$ (vi) a (vii) 4 (viii) $3y^2 - 7y + 5$

తెలుసుకొందాం.

బీజీయ సమాసములు కూడిక (Addition of algebraic expressions)

✱ ఏకపదుల కూడిక (Addition of monomials)

ఉదా: 3 జామపండ్లు + 4 జామపండ్లు = (3+4) జామపండ్లు = 7 జామపండ్లు

ఉదా: $3x + 4x = (3 + 4)\,x = 7x$

సజాతి పదముల కూడిక ఒకేరకమైన వస్తువుల కూడిక మాదిరిగా చేస్తారు.

ఉదా: కూడండి.

(i) $-3x - 8x + 5x = (-3 - 8 + 5)x = -6x$

(ii) $\frac{2}{3}ab - \frac{5}{7}ab = (\frac{2}{3} - \frac{5}{7})\,ab = \frac{-1}{21}\,ab$

(iii) $-2p^2 + 7p^2 = (-2 + 7)p^2 = 5p^2$

> ఆలోచించండి.
>
> $3x + 4y$ = ఎంత ?
>
> 3 జామపండ్లు + 4 మామిడిపండ్లు = 7 జామపండ్లు?
>
> $7m - 2n = 5m$?

✱ ద్విపద సమాసముల కూడిక (Addition of binomial expressions)

అడ్డం అమరిక

ఉదా: $(2x + 4y) + (3x + 2y)$

$= 2x + 3x + 4y + 2y$

$= 5x + 6y$

నిలువు అమరిక

$$\begin{array}{r} 2x + 4y \\ +\;\; 3x + 2y \\ \hline 5x + 6y \end{array}$$

సజాతి పదాలను కూడుచున్నపుడు ఆ పదముల యొక్క సహగుణకాలను కూడి దానిముందు చరరాశిని రాస్తారు.

ఉదా: కూడండి . $9x^2y^2 - 7xy$; $3x^2y^2 + 4xy$

అడ్డం అమరిక

$(9x^2y^2 - 7xy) + (3x^2y^2 + 4xy)$

$= 9x^2y^2 - 7xy + 3x^2y^2 + 4xy$

$= (9x^2y^2 + 3x^2y^2) + (-7xy + 4xy)$

$= 12x^2y^2 - 3xy$

నిలువు అమరిక

$$\begin{array}{r} 9x^2y^2 - 7xy \\ +\;\; 3x^2y^2 + 4xy \\ \hline 12x^2y^2 - 3xy \end{array}$$

జాగ్రత్త పడండోయ్!

$3x + 7y$ ఈ రెండు పదములు సజాతి పదములు కావు, అందువల్ల వాటి మొత్తం $3x+7y$ లేదా $7y+3x$ అని ఇలాగే రాయవలసి వస్తుంది.

అభ్యాసమాలిక 33

⊙ కూడండి

(i) 9p + 16q ; 13p + 2q

(ii) 2a + 6b + 8c; 16a + 13c + 18b

(iii) $13x^2 - 12y^2$; $6x^2 - 8y^2$

(iv) $17a^2b^2 + 16c$; $28c - 28a^2b^2$

(v) $3y^2 - 10y + 16$; $2y - 7$

(vi) $-3y^2 + 10y - 16$; $7y^2 + 8$

తెలుసుకొందాం.

బీజీయ సమాసముల తీసివేత (Subtraction of algebraic expressions)

పూర్ణసంఖ్యల తీసివేత చేస్తున్నపుడు ఒక పూర్ణ సంఖ్యనుంచి రెండవ పూర్ణసంఖ్యను తీసివేయడమనగా మొదటి పూర్ణసంఖ్యలో, రెండవ పూర్ణ సంఖ్యయొక్క వ్యతిరేక సంఖ్యను కలపడం అని మనం నేర్చుకొన్నాం.

ఇదే నియమాన్ని మనం బీజీయ సమాసముల తీసివేతకై ఉపయోగించబోతున్నాం.

ఉదా: $18 - 7$

$= 18 + (-7) = 11$

ఉదా: $9x - 4x$

$= [9 + (-4)]x = 5x$

ఉదా: మొదటి సమాసమునుంచి రెండవ సమాసమును తీసివేయుము.

$16x + 23y + 12z$; $9x - 27y + 14z$

అడ్డం అమరిక

$(16x + 23y + 12z) - (9x - 27y + 14z)$

$= 16x + 23y + 12z - 9x + 27y - 14z$

$= (16x - 9x) + (23y + 27y) + (12z - 14z)$

$= 7x + 50y - 2z$

నిలువు అమరిక

$$\begin{array}{rrrr} & 16x & + 23y & + 12z \\ - & \oplus 9x & \ominus 27y & \oplus 14z \\ & - & + & - \\ \hline & 7x & + 50y & - 2z \end{array}$$

ఏ సమాసమును తీసివేయాలో అసమాసంలో ప్రతిపదం యొక్క చిహ్నాన్ని మార్చి కూడాలి.

అభ్యాసమాలిక 34

⊙ మొదటి సమాసం నుంచి రెండవ సమాసంను తీసివేయుము.

(i) $(4xy - 9z)$; $(3xy - 16z)$ (ii) $(5x + 4y + 7z)$; $(x + 2y + 3z)$

(iii) $(14x^2 + 8xy + 3y^2)$; $(26x^2 - 8xy - 17y^2)$

(iv) $(6x^2 + 7xy + 16y^2)$; $(16x^2 - 17xy)$ (v) $(4x + 16z)$; $(19y - 14z + 16x)$

తెలుసుకొందాం.

బీజీయసమాసముల గుణకారం (Multiplication of algebraic expressions)

✸ ఏక పదిని, ఏకపదిచే గుణించుట.

ఉదా: $3x \times 12y$

$= 3 \times 12 \times x \times y$

$= 36xy$

ఉదా: $(-12x) \times 3y^2$

$= -12 \times 3 \times x \times y \times y$

$= -36xy^2$

ఉదా: $2a^2 \times 3ab^2$

$= 2 \times 3 \times a^2 \times a \times b^2$

$= 6a^3 b^2$

ఉదా: $(-3x^2) \times (-4xy)$

$= (-3) \times (-4) \times x^2 \times x \times y$

$= 12x^3y$

రెండు ఏక పదులను గుణించునపుడు, ముందుగా చిహ్నాలను దృష్టిలో పెట్టుకొని సహగుణకాలను చిహ్నాలతో సహా గుణించాలి, తర్వాత చరరాశులను గుణించాలి.

✸ ద్విపదిని ఏకపదిచే గుణించుట

ఉదా: $x\,(x + y)$

$= x \times x + x \times y$

$= x^2 + xy$

ఉదా: $(7x - 6y) \times 3z = 7x \times 3z - 6y \times 3z$

$= 7 \times 3 \times x \times z - 6 \times 3 \times y \times z$

$= 21xz - 18yz$

✸ ద్విపదిని, ద్విపదిచే గుణించుట

ఉదా:

$$\begin{array}{rll} & 3x + 4y & \\ \times & 5x + 7y & \\ \hline & 15x^2 + 20xy & [5x \text{ చే గుణించగా}] \\ & + 21xy + 28y^2 & [7y \text{ చే గుణించగా}] \\ \hline & 15x^2 + 41xy + 28y^2 & [\text{కూడగా}] \end{array}$$

$(3x + 4y)\ (5x + 7y)$

$= 3x\,(5x + 7y) + 4y\,(5x + 7y)$

$= 3x \times 5x + 3x \times 7y + 4y \times 5x + 4y \times 7y$

$= 15x^2 + 21xy + 20xy + 28y^2$

$= 15x^2 + 41xy + 28y^2$

ఉదా: ఒక దీర్ఘ చతురస్రాకార పొలం పొడవు $(2x+7)$ మీ, వెడల్పు $(x+2)$ మీ. అయినచో, ఆ పొలం వైశాల్యం కనుగొనుము.

సాధన: దీర్ఘ చతురస్రాకార పొలం వైశాల్యం = పొడవు × వెడల్పు $= (2x + 7) \times (x + 2)$

$= 2x\,(x + 2) + 7\,(x + 2)$

$= 2x^2 + 11x + 14$

దీర్ఘ చతురస్రాకార పొలం వైశాల్యం $(2x^2 + 11x + 14)$ మీ^{2}

అభ్యాసమాలిక 35

1. గుణించండి.

   (i) $16xy \times 18xy$ (ii) $23xy^2 \times 4yz^2$

   (iii) $(12a + 17b) \times 4c$ (iv) $(4x + 5y) \times (9x + 7y)$

2. ఒక దీర్ఘచతురస్రం పొడవు $(8x+5)$ సెం.మీ., వెడల్పు $(5x+3)$ సెం.మీ. ఉన్నచో ఆ దీర్ఘచతురస్రం వైశాల్యమును కనుగొనండి.

కొంచెం గుర్తు తెచ్చుకొందాం.

ఏక చరరాశి సమీకరణాలు (Equations in one variable)

- కింది సమీకరణాలను సాధించుము.

(1) $x + 7 = 4$ (2) $4p = 12$ (3) $m - 5 = 4$ (4) $\frac{t}{3} = 6$

తెలుసుకొందాం.

ఉదా: $2x + 2 = 8$

$\therefore\ 2x + 2 - 2 = 8 - 2$

$\therefore\ 2x = 6$

$\therefore\ x = 3$

ఉదా: $3x - 5 = x - 17$

$3x - 5 + 5 - x = x - 17 + 5 - x$

$\therefore\ 2x = -12$

$\therefore\ x = -6$

ఉదా: ఒక దీర్ఘచతురస్రం యొక్క పొడవు, దాని వెడల్పునకు రెండు రెట్లకంటె 1 సెం.మీ. ఎక్కువ గలదు. చుట్టుకొలత 50 సెం.మీ. ఉన్నచో, దాని పొడవెంత??

సాధన : దీర్ఘ చతురస్రం వెడల్పు x అనుకొందాం.

దీర్ఘచతురస్రం పొడవు $(2x+1)$ సెం.మీ. అవుతుంది.

$2 \times$ పొడవు $+ 2 \times$ వెడల్పు = దీర్ఘ చతురస్రం చుట్టుకొలత

$$2(2x + 1) + 2x = 50$$

$$\therefore \ 4x + 2 + 2x = 50$$

$$6x + 2 = 50$$

$$6x = 50 - 2$$

$$\therefore \ 6x = 48 \ \therefore \ x = 8$$

దీర్ఘ చతురస్రం వెడల్పు 8 సెం.మీ. గలదు.

దీర్ఘచతురస్రం పొడవు $= 2x + 1 = 2 \times 8 + 1$

$\therefore$ దీర్ఘ చతురస్రం పొడవు = 17 సెం.మీ.

ఉదా: ఒక సహజ సంఖ్య మరియు దాని సమీప తర్వాత సంఖ్యల మొత్తం 69 అయినచో, ఆ సంఖ్య ఏది?

సాధన : ఒక సహజ సంఖ్యను x అనుకొందాం.

సమీప తర్వాత సంఖ్య $x+1$ అవుతుంది.

$$(x) + (x + 1) = 69$$

$$\therefore \ x + x + 1 = 69$$

$$\therefore \ 2x + 1 = 69$$

$$2x = 69 - 1$$

$$\therefore 2x = 68 \ \therefore \ x = 34$$

సహజ సంఖ్య = 34

సమీప తర్వాత సహజ సంఖ్య $= 34 + 1$

$= 35$

గుర్తుంచుకోండి :

ఏదేని ఒక పదం సమీకరణంలోని '=' చిహ్నానికి ఒకవైపునుంచి రెండవ వైపుకు తీసుకెళ్ళినపుడు వాటి చిహ్నాలు మార్చవలసి వస్తుంది.

అభ్యాసమాలిక 36

1. $(3x - 11y) - (17x + 13y)$ ఈ తీసివేతకై, సరియైన పర్యాయాన్ని ఎన్నుకోండి.
   (i) $7x - 12y$ (ii) $-14x - 54y$ (iii) $-3(5x + 4y)$ (iv) $-2(7x + 12y)$
2. $(23x^2y^3z) \times (-15x^3yz^2)$ దీని సమాధానం .... వస్తుంది.
   (i) $-345x^5y^4z^3$ (ii) $345x^2y^3z^5$ (iii) $145x^3y^2z$ (iv) $170x^3y^2z^3$
3. కింది సమీకరణాలను సాధించుము.
   (i) $4x + \frac{1}{2} = \frac{9}{2}$ (ii) $10 = 2y + 5$ (iii) $5m - 4 = 1$
   (iv) $6x - 1 = 3x + 8$ (v) $2(x - 4) = 4x + 2$ (vi) $5(x + 1) = 74$
4. రాకేశ్ వయసు సానియా వయసు కంటె 5 సంవత్సరాలు తక్కువ గలదు. వారి వయసుల మొత్తం 27 సంవత్సరములైనచో ప్రతి ఒక్కరి వయసెంత?
5. ఒక తోటలో అశోక చెట్లు ఎన్నినాటారో, దానికంటె అల్ల నేరేడువి 60 చెట్లు అధికంగా నాటిరి. రెండు రకాలవి మొత్తం చెట్లు 200 ఉన్నచో, అల్ల నేరేడు చెట్లు ఎన్ని నాటారు?
6. శుభాంగివద్ద 50 రూపాయలవి ఎన్ని నోట్లున్నాయో, వాటికి రెట్టింపుగా 20 రూపాయల నోట్లు గలవు. ఆమె వద్ద మొత్తం 2700 రూపాయలున్నచో, 50 రూపాయల నోట్లెన్ని?
7*. విరాట్ చేసిన పరుగులు, రోహిత్ పరుగులకు రెట్టింపు. అయితే ఇద్దరు కలిపి చేసిన పరుగులు రెండు శతకాలకు రెండు తక్కువైనచో, ఇరువురిలో ప్రతి ఒక్కరు ఎన్ని పరుగులు తీసారు?

1వ సంకీర్ణ ప్రశ్న సంగ్రహం

1. క్రింది ఉదాహరణాలను సాధించుము.

   (i) $(-16) \times (-5)$ (ii) $(72) \div (-12)$ (iii) $(-24) \times (2)$

   (iv) $125 \div 5$ (v) $(-104) \div (-13)$ (vi) $25 \times (-4)$

2. ప్రధాన కారణాంకాలుగా విభజించి, క్రింది సంఖ్యల గసాభా మరియు కసాగును కనుగొనండి.

   (i)75, 135 (ii) 114, 76 (iii) 153, 187 (iv) 32, 24, 48

3*. సంక్షిప్త రూపాన్నివ్వండి.

   (i) $\frac{322}{391}$ (ii) $\frac{247}{209}$ (iii) $\frac{117}{156}$

4. క్రింది సంఖ్యల వర్గమూలాలను కనుగొనండి.

   (i) 784 (ii) 225 (iii) 1296 (iv) 2025 (v) 256

5. ఎన్నికలకోసం నాలుగు పోలింగ్ కేంద్రాలు ఇవ్వబడినవి. ప్రతి కేంద్రంలో స్త్రీలు మరియు పురుషులు వేసిన ఓట్ల సమాచారాన్ని పట్టికలో ఇవ్వబడింది. దానిని బట్టి సంయుక్త కమ్మీరేఖాచిత్రాన్ని గీయండి.

పోలింగ్ కేంద్రం	నవోదయ విద్యాలయం	విద్యానికేతన్ పాఠశాల	సిటి హైస్కూల్	ఏకలవ్య పాఠశాల
స్త్రీలు	500	520	680	800
పురుషులు	440	640	760	600

6. సమాసమును సాధించండి.

   (i) $45 \div 5 + 20 \times 4 - 12$ (ii) $(38 - 8) \times 2 \div 5 + 13$

   (iii) $\frac{5}{3}+\frac{4}{7}\div\frac{32}{21}$ (iv) $3 \times \{ 4 [85 + 5 - (15 \div 3)] + 2 \}$

7. సాధించండి.

   (i) $\frac{5}{12}+\frac{7}{16}$ (ii) $3\frac{2}{5} - 2\frac{1}{4}$ (iii) $\frac{12}{5}\times\frac{(-10)}{3}$ (iv*) $4\frac{3}{8} \div \frac{25}{18}$

8. ΔABC లో $m\angle A=55^0$, $m\angle B=60^0$ మరియు $l(AB)$ =5.9 సెం.మీ. ఉండునట్లుగా త్రిభుజంను గీయుము.

9. ΔXYZ లో $l(XY)$=3.7 సెం.మీ., $l(YZ)$=7.7 సెం.మీ., మరియు $l(XZ)$ =6.3 సెం.మీ. ఉండునట్లుగా త్రిభుజంను గీయుము.

10. ΔPQR లో $m\angle P=80^0$, $m\angle Q=70^0$ మరియు $l(QR)$ =5.7 సెం.మీ. ఉండునట్లుగా త్రిభుజంను గీయుము.

11. ఇచ్చిన కొలతలను బట్టి ΔEFG ను గీయుము, $m(FG)$=5 సెం.మీ., $m\angle EFG=70^0$, $l(EG)$= 7 సెం.మీ.

12. ΔLMN లో $l(LM)$=6.2 సెం.మీ., $m\angle LMN=60^0$, $l(MN)$=4 సెం.మీ., అయిన ΔLMN ను గీయుము.

13. క్రింది కోణాలకు పూరక కోణం కొలత రాయుము.

    (i) 35° (ii) a° (iii) 22° (iv) $(40-x)^\circ$

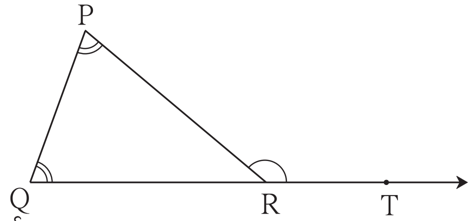
14. క్రింది కోణాలకు సంపూరక కోణం కొలతను రాయుము.

    (i) 111° (ii) 47° (iii) 180° (iv) $(90-x)^\circ$

15. క్రింది పటాలను గీయుము.

    (i) ఆసన్నకోణాలజత (ii) సంపూరక కోణం, కానీ ఆసన్నంగా లేనటువంటికోణం

    (iii) రెండు ఆసన్న పూరక కోణాలజత.

16. 

ΔPQR లో $\angle$P మరియు $\angle$Q ల కొలతలు సమానం. $m\angle PRQ=70^\circ$ అయిన క్రింది కోణాల విలువను కనుగొనండి.

(i) $m\angle PRT$ (ii) $m\angle P$ (iii) $m\angle Q$

17. సూక్ష్మీకరించండి.

(i) $5^4 \times 5^3$ (ii) $\left(\frac{2}{3}\right)^6 \div \left(\frac{2}{3}\right)^9$ (iii) $\left(\frac{7}{2}\right)^8 \times \left(\frac{7}{2}\right)^{-6}$ (iv) $\left(\frac{4}{5}\right)^2 \div \left(\frac{5}{4}\right)$

18. విలువను కనుగొనండి.

(i) $17^{16} \div 17^{16}$ (ii) 10^{-3} (iii) $(2^3)^2$ (iv) $4^6 \times 4^{-4}$

19. సాధించండి.

(i) $(6a-5b-8c) + (15b+2a-5c)$ (ii) $(3x+2y)(7x-8y)$

(iii) $(7m-5n) - (-4n-11m)$ (iv) $(11m-12n+3p) - (9m+7n-8p)$

20. క్రింది సమీకరణాలను సాధించండి.

(i) $4(x + 12) = 8$ (ii) $3y + 4 = 5y - 6$

బహుపర్యాయాల ప్రశ్నలు

క్రింది ప్రశ్నలకు పర్యాయసమాధానాలివ్వబడినవి. ఆ సమాధానాలలోంచి సరియైన పర్యాయాన్ని ఎన్నుకోండి.

1. త్రిభుజంలో మూడు కోణ సమద్విఖండరేఖలు మిళిత రేఖలవుతాయి. వాటి మిళిత బిందువును .... అని అంటారు.

(i) పరివృత్తకేంద్రం (ii) శీర్షబిందువు (iii) అంతః వృత్తకేంద్రం (iv) ఖండన బిందువు

2. $\left[\left(\frac{3}{7}\right)^{-3}\right]^4 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

(i) $\left(\frac{3}{7}\right)^{-7}$ (ii) $\left(\frac{3}{7}\right)^{-10}$ (iii) $\left(\frac{7}{3}\right)^{12}$ (iv) $\left(\frac{3}{7}\right)^{20}$

3. $5 \div \left(\frac{3}{2}\right) - \frac{1}{3}$ దీని సరళరూపం ....

(i) 3 (ii) 5 (iii) 0 (iv) $\frac{1}{3}$

4. $3x - \frac{1}{2} = \frac{5}{2} + x$ ఈ సమీకరణానికి .... సాధన అవుతుంది.

(i) $\frac{5}{3}$ (ii) $\frac{7}{2}$ (iii) 4 (iv) $\frac{3}{2}$

5*. క్రింది వాటిలో ఏ సమాసం విలువ 37 అవుతుంది ?

(i) $10 \times 3 + (5 + 2)$ (ii) $10 \times 4 + (5 - 3)$

(iii) $8 \times 4 + 3$ (iv) $(9 \times 3) + 2$

9 అనులోమానుపాతం మరియు విలోమానుపాతం

రెండవ విభాగం

చదవండి, చర్చిద్దాం.

అనులోమానుపాతం (Direct proportion)

మనం క్రింది తరగతిలో రెండు సంఖ్యలను పోల్చి దానిని నిష్పత్తి రూపంలో ఎలా రాయాలో నేర్చుకున్నాం.

ఉదా: క్రింది చిత్రాలను చూడండి., వృత్తాలలో గీయబడిన వ్యాసాల వలన వృత్తాలలో ఏర్పడిన భాగాలను చూపబడినవి.

(A) (B) (C) (D)

పైన వ్యాసాల సంఖ్య, వృత్తాలలో తయారైన భాగాల సంఖ్యకు ఏమైనా సంబంధం కనిపిస్తుందా?

- పటం (A) లో **ఒక** వ్యాసం వలన వృత్తంలో ☐ భాగాలేర్పడినవి.
- పటం (B) లో **రెండు** వ్యాసాల వలన వృత్తంలో ☐ భాగాలేర్పడినవి.
- పటం (D) లో **నాలుగు** వ్యాసాల వలన వృత్తంలో ☐ భాగాలేర్పడినవి.

$\frac{\text{వ్యాసాల సంఖ్య}}{\text{భాగాల సంఖ్య}} = \frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8}$ ఇచ్చట వ్యాసాల సంఖ్య మరియు వాటి వలన ఏర్పడిన భాగాల సంఖ్యల నిష్పత్తి స్థిరంగానున్నది.

ఉదా: నగరపాలిక పాఠశాలలోని విద్యార్థులకు లభించిన నోటు పుస్తకాల సంఖ్యను క్రింది పట్టికలో చూపబడినది.

పిల్లలు	15	12	10	5
నోటు పుస్తకాలు	90	72	60	30

$\frac{\text{పిల్లల సంఖ్య}}{\text{నోటు పుస్తకాల సంఖ్య}} = \frac{15}{90} = \frac{12}{72} = \frac{10}{60} = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}$

అనగా 1:6 అను నిష్పత్తి స్థిరంగా లేదా నిశ్చలంగా (Constant) ఉంటుంది.

పై రెండు ఉదాహరణాలను బట్టి వ్యాసాల సంఖ్య పెరిగినచో, వృత్తాలలో భాగాల సంఖ్య పెరుగుతుంది. విద్యార్థుల సంఖ్య తగ్గినచో నోటు పుస్తకాల సంఖ్య కూడా తగ్గుతుంది. వ్యాసాల సంఖ్య మరియు వృత్తభాగాల సంఖ్య అనులోమాను పాతంలోనున్నవి, అలాగే విద్యార్థుల సంఖ్య మరియు నోటు పుస్తకాల సంఖ్య అనులోమానుపాతంలో ఉన్నవి అని తెలుస్తుంది.

సాధన : ✱ మోటార్ సైకిల్‌లోనింపిన పెట్రోల్ మరియు అది ప్రయాణించిన దూరం, ఇవి అనులోమానుపాతంలో ఉంటాయా? ఆలోచించండి.

✱ వైజ్ఞానిక మరియు దైనందిన వ్యవహారంలో అనులోమానుపాతంలో మారే సంఖ్యల ఉదాహరణలివ్వవచ్చునా? దీనిని చర్చించండి.

ఉదా: 10 కలముల విలువ 60 రూపాయలు ఐనచో, 13 కలముల విలువ ఎన్ని రూపాయలు?

సాధన : 13 కలముల విలువ కనుగొనాలి. వాటికి x రూపాయలు అవుతాయని అనుకొందాం.

కలముల సంఖ్య, వాటి విలువ అనులోమాను పాతంలో నున్నందున, వాటిని నిష్పత్తి రూపంలో అమర్చి సమీకరణాన్ని పొందుదాం.

$$\frac{10}{60} = \frac{13}{x}$$

$\therefore\ 10x = 780$ (రెండు వైపులా $60x$ చేగుణించాం)

$$x = 78$$

13 కలముల విలువ 78 రూపాయలు అవుతుంది.

అభ్యాసమాలిక 37

1. 7 కి.గ్రా. ఉల్లిగడ్డలు 140 రూపాయలైన, 12 కి.గ్రా. ఉల్లిగడ్డలు ఎన్ని రూపాయలకు లభించును?
2. 600 రూపాయలలో 15 కుప్పల పశుగ్రాసము లభించినచో, 1280 రూపాయలలో ఎన్నికుప్పల పశుగ్రాసము లభించును?
3. రోజు 13 కి.గ్రా. 500 గ్రా.ల పౌష్టిక ఆహారం 9 ఆవులకు సరిపోతుంది. అదే ప్రమాణంలో 12 ఆవులకు ఎంత పౌష్టిక ఆహారం కావలెను?
4. 12 క్వింటాళ్ళ సోయాబిన్ 36,000 రూపాయలకు లభిస్తే, 8 క్వింటాళ్ళ సోయాబిన్ విలువెంత?
5. రెండు మొబైల్‌ల విలువ 16,000 రూపాయలు గలదు. అయితే 12 మొబైల్‌లు కొనుగోలు చేసినచో, మొత్తం ఎన్ని రూపాయలు కావలెను?

తెలుసుకొందాం.

విలోమానుపాతం (Inverse proportion)

మొక్కలు నాటుటకై 90 గుంతలు త్రవ్వవలసి ఉంది. అందుకై కొంత మంది స్వయంసేవకులు పోగయ్యారు. ఒక స్వయంసేవకుడు రోజుకు ఒక గుంతత్రవ్వుతాడు.

15 మంది స్వయంసేవకులకు గుంతలను త్రవ్వడానికి $\frac{90}{15} = 6$ రోజులు పడుతుంది.

10 మంది స్వయంసేవకులకు గుంతలు త్రవ్వడానికి $\frac{90}{10} = 9$ రోజులు పడుతుంది.

స్వయంసేవకుల సంఖ్య మరియు గుంతలు త్రవ్వడానికి పట్టిన రోజులు అనులోమాను పాతంలోనున్నాయా?

స్వయంసేవకుల సంఖ్య **తగ్గినచో**పట్టు రోజులు **పెరుగు**తాయి, దీనికి విరుద్ధంగా స్వయంసేవకులు సంఖ్య పెరిగినచో పనిరోజులు తగ్గుతాయి. స్వయంసేవకులు, రోజులు ఈ సంఖ్యల లబ్దం స్థిరంగా ఉంటుంది. ఈ సంఖ్య విలోమానుపాతంలో ఉంది అని అంటారు.

ఉదా: సుధ, ఒక సంగ్రహంలోని 48 ఉదాహరణాలు సాధించాలనుకోండి. ఆమె రోజు 1 ఉదాహరణ చేసినచో ఆమెకు సంగ్రహం పూర్తి చేయుటకు 48 రోజులు పడుతుంది. రోజు 8 ఉదాహరణలు సాధించినచో, సంగ్రహం పూర్తి చేయుటకు ఆమెకు $\frac{48}{8} = 6$ రోజులు పట్టును. రోజు 12 ఉదాహరణలు చేసినట్లయితే ఆమెకు $\frac{48}{12} = 4$ రోజులు పడుతుంది.

రోజు సాధించిన ఉదాహరణలు, పట్టిన రోజులు విలోమాను పాతంలో ఉన్నాయి. వీటి లబ్దం స్థిరంగా ఉంటుంది.

$8 \times 6 = 12 \times 4 = 48 \times 1$ అని గుర్తుంచుకోండి.

ఉదా: ఒక పెద్ద గోడ కట్టడానికి 15 మంది కూలీలకు 8 గంటలు పడుతుంది. అయిన 12 మంది కూలీలకు అదే పని చేయుటకు ఎన్నిగంటలు పట్టును?

సాధన : కూలీల సంఖ్య పెరిగినచో, పనిగంటలు తగ్గుతాయి.

కూలీల సంఖ్యకు, వారికి పట్టు సమయాల నిష్పత్తి విలోమంలో ఉన్నది.

కూలీల సంఖ్య, గోడకట్టడానికి పట్టే సమయం వీటి లబ్ధం స్థిరంగా ఉన్నది.

ఇప్పుడు x చరరాశినుపయోగించి ఈ ఉదాహరణను సాధించుదాం.

12 మంది కూలీలకు x గంటలు పడుతుందని అనుకొందాం.

15 మంది కూలీలకు 8 గంటలు పడుతుంది

12 మంది కూలీలకు x గంటలు పడుతుంది.

$12 \times x = 15 \times 8$

$\therefore \quad 12x = 120$

$\therefore \quad x = 10$

దీనిని బట్టి 12 మంది కూలీలకు గోడ కట్టడానికి 10 గంటలు పడుతుంది.

ఉదా: తరగతిలో 40 పేజీల హస్త లిఖిత సంచిక తయారు చేసే పని మొదలైంది. ఒక విద్యార్థికి ఈ సంచిక తయారు చేయడానికి 80 రోజులు పడుతుంది. ఐన 4గురు విద్యార్థులకు సంచిక తయారు చేయుటకు ఎన్ని రోజులుపట్టును?

సాధన: ఒకే పనిని ఎక్కువ మంది విద్యార్థులు చేసినట్లయితే తక్కువ రోజులు పడుతుంది, అనగా విద్యార్థుల సంఖ్య మరియు రోజుల సంఖ్యలు విలోమానుపాతంలో ఉన్నవి. 4 గురు విద్యార్థులకు x రోజులు పడుతుందని అనుకొందాం.

విద్యార్థులు	రోజులు
1	80
4	x

$4x = 80 \times 1$

$x = \frac{80}{4}$

$x = 20$ $\quad\therefore$ 4 గురు విద్యార్థులకు 20 రోజులు పట్టును.

ఉదా: ఒక పాఠశాలలోని 7వ తరగతి విద్యార్థులు విహారయాత్రకై ఒక తోటకు బస్‌లో వెళ్ళిరి. అప్పుడు వారి అనుభవాలు కొన్ని చూద్దాం. ప్రతి అనుభవంలోని సంఖ్యలు అనులోమాను పాతంలో ఉన్నాయా, విలోమాను పాతంలో ఉన్నాయో రాయండి.

- విహారయాత్రకై ప్రతి విద్యార్థినుంచి ఖర్చులకై 60 రూపాయలు తీసుకొన్నారు.

  మొత్తం విద్యార్థులు 45 మంది గనుక ☐ రూపాయలు పోగయ్యాయి.

  ఒక వేళ 50 మంది విద్యార్థులున్నచో ☐ రూపాయలు పోగయ్యేవి గావచ్చు.

  విద్యార్థుల సంఖ్య, పోగయ్యే డబ్బులు ... పాతంలో ఉన్నాయి.

- పాఠశాల దగ్గరి మిఠాయి కొట్టతను విహార యాత్రకై 90లడ్డూలిచ్చాడు.

  45 మంది విద్యార్థులు విహార యాత్రకు వచ్చినచో, ప్రతి ఒక్కరికి ☐ లడ్డూలు లభిస్తాయి.

  30 మంది విద్యార్థులు విహారయాత్రకు వచ్చినచో, ప్రతి ఒక్కరికి ☐ లడ్డూలు లభించేవి.

  విద్యార్థుల సంఖ్య, ప్రతి ఒక్కరికి లభించే లడ్డూలు .... పాతంలోఉన్నాయి.

- విహారయాత్ర స్థలం పాఠశాలనుంచి 120 కి.మీ.ల దూరంలో ఉంది.

  తోటకు వెళుతున్నపుడు బస్ వేగం గంటకు 40 కి.మీ. ఉండెను కాబట్టి ☐ గంటలు పట్టింది.

  తిరిగి వచ్చునపుడు బస్ వేగం గంటకు 60 కి.మీ. ఉండెను కాబట్టి ☐ గంటలు పట్టింది.

  బస్ వేగం, పట్టు సమయం ఇవి .... పాతంలో ఉన్నాయి.

- రైతు తన చెట్లనుంచి రేగుపండ్లు పోగుచేసెను. అవి 180 అయినవి.

వాటిని అతను 45 మంది విద్యార్థులకు సమానంగా పంచెను. ప్రతి ఒక్కరికి ☐ రేగుపండ్లు లభించాయి.

ఒక వేళ 60 మంది విద్యార్థులున్నచో ప్రతి ఒక్కరికి ☐ రేగుపండ్లులభించేవి.

విద్యార్థుల సంఖ్య, ప్రతి ఒక్కరికి లభించే రేగుపండ్లసంఖ్య .... పాతంలో ఉన్నాయి.

అభ్యాసమాలిక 38

1. ఒక పొలంలో కలుపుతీత పూర్తి చేయుటకు 5గురు కూలీలకు 12 రోజులు పడుతుంది. ఐన 6గురు కూలీలకు ఎన్ని రోజులు పట్టును? 15 మంది కూలీలకు ఎన్ని రోజులు పట్టును ?
2. మోహన్‌రావ్ రోజు 40 పేజీల చొప్పున ఒక పుస్తకం చదివినచో, 10 రోజుల్లో చదవడం పూర్తవుతుంది. అదే పుస్తకాన్ని 8 రోజులలో చదువుటను పూర్తి చేయవలెనన్న ప్రతి రోజు ఎన్ని పేజీలు చదవాలి?
3. మేరి సైకిల్ నడుపు వేగం గంటకు 6 కి.మీ. అయితే ఆమె 12 కి.మీ.ల దూరంలోనున్న పిన్నివాళ్ళింటికి వెళ్ళాలంటే ఎంత సమయం పట్టును? ఆమె సైకిల్ నడుపువేగం గంటకు 4 కి.మీ. అయిన ఆమెకు ఎంత సమయం పట్టును?
4. ఒక ప్రభుత్వ గోదాములోని ధాన్యపు నిలువలు 4000 మందికి 30 రోజులకు సరిపోయినచో, ఆధాన్యపు నిల్వలు 6000 మందికి ఎన్ని రోజులకు సరిపోవును?

తెలుసుకొందాం.

భాగస్వామ్యం (Partnership)

ఏదైన వ్యాపారం ప్రారంభిస్తున్నపుడు స్థలం, ముడి సరుకులు మొదలైన వాటికి డబ్బు అవసరం. ఆ సొమ్మును మూలధనం అని అంటారు. అనేక సార్లు ఇద్దరు లేక అధిక వ్యక్తుల కలిసి మూలధనంను సేకరిస్తారు. అనగా ఆ వ్యక్తులు భాగస్వామ్యంలో పెట్టుబడి పెట్టి వ్యాపారం ప్రారంభిస్తారు. భాగస్వామ్య వ్యాపారంలో బ్యాంక్‌లో భాగస్వాముల ఉమ్మడిఖాతా ఉంటుంది. ఆ వ్యాపారంలో మూలధనంలో ఏ నిష్పత్తిలో పెట్టుబడి ఉంటుందో, ఆ నిష్పత్తిలో వ్యాపారంలో వచ్చిన లాభం లేదా నష్టాల పంపిణీ చేయబడుతుంది.

ఉదా: జేలం మరియు అథర్వ్‌లు వరసగా 2100 మరియు 2800 రూపాయల పెట్టుబడితో వ్యాపారాన్ని ప్రారంభించారు. వారికి 3500 రూపాయల లాభం వచ్చిన, దానిని ఎలాపంచాలి?

సాధన : పెట్టుబడి నిష్పత్తిని కనుగొందాం 2100:2800 అనగా $\frac{2100}{2800} = \frac{3}{4}$ గనుక పెట్టుబడి నిష్పత్తి 3:4 అవుతుంది.

లాభాలపంపిణీ పెట్టుబడి నిష్పత్తిని బట్టి చేయవలసి ఉంటుంది. జేలం లాభం $3x$ అథర్వ్ లాభం $4x$ అనుకొందాం.

$\therefore\ 3x + 4x = 3500$ మొత్తం లాభం 3500.

$\therefore\ 7x = 3500 \qquad \therefore\ x = 500$

జేలంకు $3x = 1500$ రూపాయలు మరియు అథర్వ్‌కు $4x = 2000$ రూపాయల లాభం లభిస్తుంది.

ఉదా: ఒక వ్యాపారంలో చిన్మయ్ మరియు శ్యామ్‌లు 130000 రూపాయలు 3:2 ఈనిష్పత్తిలో పెట్టుబడి పెట్టినచో, ఒక్కొక్కరి పెట్టుబడి ఎంత? ఈ వ్యాపారంలో వారికి 36000 రూపాయల లాభం కలిగినచో, ఒక్కొక్కరి లాభం ఎంత ఉంటుంది?

సాధన : చిన్మయ్, శ్యామ్‌ల పెట్టుబడుల నిష్పత్తి 3:2. పెట్టుబడుల నిష్పత్తిలోనే లాభాల పంపిణీ జరుగుతుంది. కాబట్టి, లాభాల నిష్పత్తి 3:2 గా ఉంటుంది.

చిన్మయ్ పెట్టుబడి $3y$, శ్యామ్ పెట్టుబడి $2y$ అనుకొందాం

$3y + 2y$ = మొత్తం పెట్టుబడి.

$\therefore 5y = 130000$

$\frac{5y}{5} = \frac{130000}{5}$ ..... (5 చే భాగించగా)

$\therefore y = 26000$

$\therefore$ చిన్మయ్ పెట్టుబడి $= 3y$

$= 3 \times 26000$

$= 78,000$

శ్యామ్ పెట్టుబడి $= 2y$

$= 2 \times 26000$

$= 52000$

చిన్మయ్ లాభం $3x$ మరియు శ్యామ్ లాభం $2x$ అనుకొందాం.

$3x + 2x$ = మొత్తం లాభం

$5x = 36000$

$\frac{5x}{5} = \frac{36000}{5}$ ..... (5 చే భాగించగా)

$\therefore x = 7200$

$\therefore$ చిన్మయ్‌లాభం $= 3x$

$= 3 \times 7200$

$= 21600$

శ్యామ్ లాభం $= 2x$

$= 2 \times 7200$

$= 14400$

ఉదా: అబ్దుల్, సేజల్ మరియు సోహంలు సాయిలీకి 30 రూపాయలు, 70 రూపాయలు మరియు 50 రూపాయలు ఇచ్చారు. సాయిలీ వాటికి 150 రూపాయలు కలిపి కాగితం, రంగులు లాంటి వస్తువులు తెచ్చింది. వాటితో అందరు గ్రీటింగ్ కార్డులు తయారు చేసి, ఆ గ్రీటింగ్ కార్డులన్నింటిని అమ్మారు. వారికి మొత్తం 420 రూపాయల లాభం వచ్చినచో, ప్రతిఒక్కరికి ఎంత లాభం లభించింది?

సాధన : నలుగురివి కలిపి మొత్తం పెట్టుబడి 300 రూపాయలు అయినవి. వాటిలో 150 రూపాయలు సాయిలీవి గనుక సగం పెట్టుబడి ఆమెది అవుతుంది. వారికి మొత్తం 420 రూపాయల లాభం వచ్చింది కాబట్టి సాయిలీ లాభం 420లో సగం అనగా 210 రూపాయలవుతుంది. మిగిలిన 210 రూపాయల లాభం అబ్దుల్, సేజల్ సోహంలకు పంచాలి.

అబ్దుల్, సేజిల్, సోహంల పెట్టుబడి వరసగా 30 రూపాయలు, 70 రూపాయలు, 50 రూపాయలు అవుతాయి. పెట్టుబడుల నిష్పత్తి, 30:70:50 అవుతుంది. అనగా 3:7:5 ముగ్గురి లాభం 210 రూపాయలు.

వారి లాభాలు వరసగా $3k$, $7k$, $5k$ అనుకొందాం. $3k + 7k + 5k = 210$

$\therefore 15k = 210$

$\therefore k = 14$

అనగా అబ్దుల్ యొక్క లాభం $= 3k = 3 \times 14 = 42$ రూపాయలు

సెజల్ లాభం $= 7k = 7 \times 14 = 98$ రూపాయలు, సోహం లాభం $= 5k = 5 \times 14 = 70$ రూపాయలు

ఉదా: సరిత, ఆయేశా, మీనాక్షిలు ఒక్కొక్కరు 2400, 5200 మరియు 3400 రూపాయల పెట్టుబడితో వ్యాపారం ప్రారంభించారు. వారికి 50% లాభం కలిగింది. అవి వారెలా పంచుకోవాలి? అవి తీసుకోకుండా తర్వాతసంవత్సరానికి వ్యాపారంలో పెట్టుబడిగా పెట్టినచో, తర్వాత సంవత్సరంలో ఒక్కొక్కరి భాగస్వామ్యమెంత ఉండవచ్చు?

సాధన : మొత్తం పెట్టుబడి $= 2400 + 5200 + 3400 = 11000$ రూపాయిలు

ఈ పెట్టుబడిపై 50% లాభం కలిగింది.

$\therefore$ మొత్తం లాభం $= \frac{11000 \times 50}{100} = 5500$

పెట్టుబడుల నిష్పత్తిలో లాభాలను పంచవలసి ఉంటుంది.

మనం రెండు సంఖ్యల నిష్పత్తి, రెండు సంఖ్యలను ఉమ్మడి కారణాంకంచే భాగించి సులభం చేసుకొంటాం. అదే విధంగా రెండు కంటె ఎక్కువగల సంఖ్యల నిష్పత్తిని సులభతరం చేయవచ్చు.

భాగస్వామ్యనిష్పత్తి = 2400 : 5200 : 3400

= 24 : 52 : 34 (100 చే భాగించగా)

= 12 : 26 : 17 (2 చే భాగించగా)

సరిత లాభం =12p, ఆయేశాలాభం = 26p, మీనాక్షిలాభం = 17p అనుకొందాం.

$\therefore 12p + 26p + 17p = 55p = 5500 \therefore p = \frac{5500}{55} = 100$

$\therefore$ సరిత లాభం = 12 × 100 = 1200, ఆయేశాలాభం = 26 × 100 = 2600 మరియు

మీనాక్షి లాభం = 17 × 100 = 1700,

లాభాలను పంచుకోకుండా, మూలధనంలో కలిపినచో, ప్రతి ఒక్కరి నూతనమూల ధనాన్ని కనుగొందాం

తర్వాత సంవత్సరానికి సరిత పెట్టుబడి = 2400 + 1200 = ₹ 3600

తర్వాత సంవత్సరానికి ఆయేశ పెట్టుబడి = 5200 + 2600 = ₹ 7800

తర్వాత సంవత్సరానికి మీనాక్షి పెట్టుబడి = 3400 + 1700 = ₹ 5100

పదండి, చర్చిద్దాం.

- పై ఉదాహరణలో సరిత, మీనాక్షి మరియు ఆయేశా వీరిలో ప్రతి వారు లాభాన్ని తీసుకోకుండా స్వంత పెట్టుబడిలో కలిపినట్లయితే తర్వాత సంవత్సరంలో వారి పెట్టుబడుల నిష్పత్తిని కనుగొనండి.

అభ్యాసమాలిక 39

1. సురేశ్, రమేశ్‌లు 144000 రూపాయలు 4:5 నిష్పత్తిలో పెట్టుబడి పెట్టి, ఒక స్థలం కొనుగోలు చేశారు. కొన్ని సంవత్సరాలకు దానిని అమ్మగా వారికి 20% లాభం వచ్చినచో ఒక్కొక్కరికి ఎంత లాభం లభిస్తుంది?
2. విరాట్, సామ్రాట్‌లు వరుసగా 50000 రూపాయలు మరియు 120000 రూపాయలు పెట్టుబడి పెట్టి వ్యాపారాన్ని ప్రారంభించారు. ఆ వ్యాపారంలో వారికి 20% నష్టం కలిగినచో, ఒక్కొక్కరికి ఎంత నష్టం వచ్చింది?
3. శ్వేత, పియూష్, నచికేత్‌లు ముగ్గురు కలిసి షోలాపూర్ దుప్పట్లు మరియు టవల్స్ అమ్మే వ్యాపారాన్ని 80000 రూపాయల పెట్టుబడితో ప్రారంభించారు. దీనిలో శ్వేత యొక్క మూలధనం 30000 రూపాయలు మరియు పియూష్ మూలధనం 12000 రూపాయలు గలదు. వారికి సంతవ్సరాంతమున 24% లాభం కల్గినచో నచికేత్ భాగస్వామ్యమెంత గలదు? నచికేత్‌కు లభించిన లాభమెంత?
4. ఎ మరియు బి లకు వచ్చిన లాభం 24500 రూపాయలను 3:7 నిష్పత్తిలో పంచుకొన్నారు. ప్రతిఒక్కరు తమకు వచ్చిన లాభంనుంచి 2% సొమ్ము సైనిక సంక్షేమ నిధికిచ్చినచో, ఒక్కొక్కరు ఎంత సొమ్ము నిధికిచ్చారు?

5*. జయా, సీమా, నిఖిల్ మరియు నీలేష్ వీరు వ్యాపారం చేయడానికై 3:4:7:5 ఈ నిష్పత్తిలో 360000 రూపాయలు జమ చేసిరి. అయితే జయ యొక్క మూలధనం ఎంత? వారికి ఈ వ్యాపారంలో 12% లాభం వచ్చిన, నిఖిల్ వాటాకు ఎన్ని రూపాయిలు లభించును?

10 బ్యాంక్ మరియు సరళవడ్డీ

RPATZ5

కొంచెం గుర్తు తెచ్చుకొందాం.

బ్యాంక్, డబ్బు యొక్క లావాదేవిలు జరిపే ప్రభుత్వామోదితసంస్థ. బ్యాంకుల వలన డబ్బుప్రణాళిక అనగా ఆర్థికప్రణాళికను చేయడం సులభమవుతుంది. బ్యాంక్‌లో డబ్బు నింపడం లేదా డబ్బు తీసుకోవడంలాంటి లావాదేవిలు చేయవచ్చును. అందుకొరకు బ్యాంక్‌లో ఖాతా తెరువలసి ఉంటుంది. బ్యాంక్‌లలో వివిధరకాల ఖాతాలుంటాయి.

తెలుసుకొందాం.

వివిధ అకౌంటులు

✸ కరంట్ అకౌంట్ (Current account)

కరంట్ అకౌంట్ ముఖ్యంగా వ్యాపారస్తులకోసం మరియు రోజు డబ్బుతో లావాదేవీలు జరిపే వారికోసం ఉద్దేశించినవి. దీంట్లో ఖాతాదారుడు ఒకరోజులో ఎన్ని సార్లయినను లావాదేవీలు జరపవచ్చు. బ్యాంక్‌లు ఈ ఖాతాలకు పాస్‌బుక్ మరియు కోరినట్లయితే చెక్‌బుక్‌లిస్తుంది. ఈ రకమైన ఖాతాలపై బ్యాంక్‌లు వడ్డీఇవ్వవు. చెక్ సహాయంతో బ్యాంక్‌లో సొమ్ము నింపవచ్చును. లేదా బ్యాంక్ నుంచి సొమ్ము తీసుకొనవచ్చును.

✸ పొదుపు ఖాతా (Savings account)

ఖాతాదరునకు నిర్ణీత మొత్తాన్ని బ్యాంక్‌లో నింపి పొదుపు ఖాతా తెరవవచ్చును. కొన్ని బ్యాంక్‌లలో ఎలాంటి సొమ్ము నింపకుండానే ఖాతాను తెరువ వచ్చును. ఈ ఖాతాలో ప్రతిరోజు నిలువ ఉన్నదానిని బట్టి బ్యాంక్ కొంతవడ్డీనిస్తుంది. చాలా సార్లు నిర్ణీతకాలంలో డబ్బు ఎన్నిసార్లు తీసుకోవాలన్న దానిపై నిర్బంధం ఉంటుంది. ఈ ఖాతాకై బ్యాంక్ పాస్‌బుక్ మరియు కోరినయెడల చెక్‌బుక్ ఇస్తుంది.

✸ ఆవర్తిత ఖాతా (Recurring deposit account)

ఈ ఖాతాలో ప్రతినెల నిర్ణీత మొత్తం నింపుతారు. ఎంతమొత్తం నింపాలో, దీనిని బ్యాంక్ ఖాతాదారుడు నిర్ణయించుకొంటాడు. ఈ రకమైన డిపాజిట్‌పై బ్యాంక్ వడ్డీనిస్తుంది. ఈ వడ్డీ పొదుపుఖాతా (సేవింగ్ అకౌంట్) కంటె అధికంగా ఉంటుంది. ఇలాంటి ఖాతాలవలన ఖాతాదారునకు నిర్బంధ పొదుపు అలవడుతుంది.

పై ఖాతాలకై బ్యాంక్‌లో అప్పుడప్పుడు సంయుక్తంగా ఖాతా ఉండటం సౌకర్యవంతంగా ఉంటుంది. ఉదా: భార్య-భర్తలు, పాలకులు-పిల్లలు మొదలగువారు. అలాగే వ్యాపారంలో భాగస్వామ్యులు, హౌసింగ్ సోసైటీ, సేవాభావ సంస్థలు మొదలైన వాటికి, బ్యాంక్‌లో ఖాతాను ఒకరికంటె ఎక్కువ మంది వ్యక్తులు నిర్వహించడం అవసరమవుతుంది.

✸ స్థిరడిపాజిట్ (Fixed deposit)

డిపాజిట్‌దారు నిర్ణీత మొత్తం, నిర్ణీత కాలవ్యవధికై బ్యాంక్‌లోజమ చేస్తారు. ఈ రకమైన డిపాజిట్‌పై బ్యాంక్ పొదుపు ఖాతాకంటె ఎక్కువ వడ్డీరేటు నిస్తుంది. స్థిర డిపాజిట్లపై వడ్డీ ప్రతి బ్యాంక్‌లో భిన్నంగా ఉండవచ్చు, జ్యేష్ఠ నాగరికులకు సాధారణవడ్డీకంటె కొంచెం ఎక్కువ వడ్డీరేటు లభిస్తుంది.

క్రెడిట్, ఏ.టి.ఎమ్. కార్డ్/డెబిట్‌కార్డ్ : బ్యాంక్‌లోకి వెళ్ళకుండానే సొమ్ము పొందడానికి ATM (Automated Teller Machines) కార్డు ఉపయోగపడుతుంది. నగదు సొమ్ము లేకుండానే లావాదేవీలు జరపడానికి క్రెడిట్‌కార్డ్, డెబిట్ కార్డ్‌లు ఉపయోగించవచ్చును. ఈ కార్డులు కోరిన మీదట ఆ బ్యాంక్ ఖాతాదారునకు దొరకవచ్చును.

చదవండి, చర్చిద్దాం.

- మీరు బ్యాంక్ పాస్‌బుక్‌ను చూసారా?

క్రింది బ్యాంక్‌పాస్‌బుక్‌లోని ఒకపేజి ఇవ్వబడినది. దానిలో నమోదు చేసిన దానిని పరిశీలించండి.

వరుస సం. पंक्ति क्र. LINE NO.	తేది दिनांक DATE	వివరాలు ब्यौरा PARTICULARS	చెక్ నంబరు चेक क्रमांक CHEQUE No.	తీసిన మొత్తం निकाली गई रक्कम AMOUNT WITHDRAWN	జమచేసిన మొత్తం जमा की गई रक्कम AMOUNT DEPOSITED	మిగిలినది बाकी जमा BALANCE
1.	2.2.2016	cash			1500.00	7000.00
2.	8.2.2016	cheque	232069		5000.00	12000.00
3.	12.2.2016	cheque	243965	3000.00		9000.00
4.	15.2.2016	self		1500.00		7500.00
5.	26.2.2016	interest			135.00	7635.00

- తేది 2-2-2016 రోజున బ్యాంక్‌లో జమచేసిన మొత్తం [ ] రూపాయలు. మిగిలిన మొత్తం [ ] రూపాయలు.
- తేది 12-2-2016 రోజున చెక్ నం. 243965 తో [ ] మొత్తం తీసారు. మిగిలిన మొత్తం [ ] రూపాయలు.
- తేది 26-2-2016 రోజున బ్యాంక్ వడ్డీ(Interest) ఇచ్చింది. ఆ మొత్తం [ ] రూపాయలు.

పొదుపు ఖాతా మరియు ఆవర్తితఖాతాలకు పాస్‌బుక్ ఉంటుంది. ఆ పాస్‌బుక్‌లో తేదీలవారీగా నింపిన డబ్బు, తీసినడబ్బు, మిగిలినది ఇవన్నియు నమోదు చేస్తారు.

ఉపక్రమం : మీ ఇంట్లోని పెద్దవారి అనుమతితో వారిబ్యాంక్ పాస్‌బుక్‌లో నమోదు చేసిన వాటిని అర్థాన్ని తెలుసుకోండి.

కొంచెం గుర్తు తెచ్చుకొందాం.

సువిద్య కంప్యూటర్‌ను కొనటానికి సం॥నూ॥కి 8రూ॥ రేటు చొప్పున బ్యాంక్ నుండి 30000 రూపాయలు ఒక సంవత్సరానికి అప్పుగా తీసుకొన్నది. కాలం పూర్తయిన తర్వాత ఆమె తీసుకున్న సొమ్ముకంటె 2400 రూపాయలు అధికంగా చెల్లించ వలసివచ్చింది.

- ఈ వివరాలను బట్టి క్రింది గడులలో సరియైన సంఖ్యను రాయండి.

అసలు = ₹ [ ] , వడ్డీరేటు = ₹ [ ] , వడ్డీ = ₹ [ ] , కాలం = [ ] సంవత్సరాలు

బ్యాంక్‌కు తిరిగి చెల్లించిన మొత్తంసొమ్ము = 30000 + 2400 = [ ]

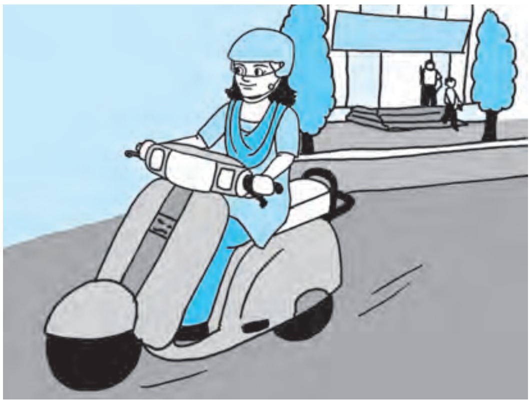
తెలుసుకొందాం.

పై ఉదాహరణలో సువిద్య బ్యాంక్‌లో మొత్తం ఎంత సొమ్మునింపినది కనుగొనుటకు అసలు మరియు వడ్డీ వీటిని కూడాము. ఈ సొమ్మును మొత్తం అని అంటారు.

అసలు + వడ్డీ = మొత్తం.

ఉదా: నేహ ద్విచక్రవాహనం తీసుకోవడానికి సం||నూ||కి 12 రూ|| రేటు చొప్పున బ్యాంక్ నుంచి 50,000 రూపాయల అప్పు తీసుకొన్నది. ఒక సంవత్సరం తర్వాత ఆమె బ్యాంక్‌నకు మొత్తం ఎంత సొమ్ము తిరిగి చెల్లిస్తుంది?

సాధన : పై ఉదాహరణలో కాలవ్యవధి తర్వాత బ్యాంక్‌నకు తిరిగి చెల్లించిన పూర్తి సొమ్మును కనుగొనాలి, అనగా మొత్తంను కనుగొనాలి. ఇచ్చట అసలు 50000 రూపాయలు. సం||నూ||కి 12 చొప్పున అనగా 100 రూపాయల అసలుపై 1 సంవత్సరమునకు వడ్డీ 12 రూపాయలవుతుంది. వడ్డీతో అసలుకు గల నిష్పత్తిని రెండు రకాలుగా రాసి సమీకరణాన్ని పొందుదాం.



50000 రూపాయల అసలుపై లభించే వడ్డీ x రూపాయలనుకొందాం.

100 రూపాయల అసలుపై లభించే వడ్డీ 12 రూపాయలవుతుంది.

$$\frac{x}{50000} = \frac{12}{100}$$

$$\frac{x}{50000} \times 50000 = \frac{12}{100} \times 50000$$ (రెండు వైపులా 50000ల చేగుణించుదాం)

$$x = 6000$$

(బ్యాంక్‌నకు తిరిగి చెల్లించే సొమ్ము) మొత్తం = అసలు + వడ్డీ

= 50000 + 6000

∴ బ్యాంక్‌నకు తిరిగి చెల్లించే సొమ్ము = ₹ 56000

ఉదా: ఆకాశ్ సం||నూ||కి 8 చొప్పున బ్యాంక్‌లో 25000 రూపాయలను 3 సంవత్సరాలకై డిపాజిట్ చేశాడు. అతనికి ప్రతి సంవత్సరం ఎంతవడ్డీ లభిస్తుంది? మొత్తం ఎంత వడ్డీ లభించింది?

సాధన : ఈ ఉదాహరణలో అసలు 25000 రూపాయలు, కాలం 3 సంవత్సరాలు, వడ్డీరేటు నూటికి 8.

100 రూపాయల అసలుపై 8 రూపాయలు వడ్డీ అవుతుంది కావున 25000 రూపాయల అసలుపై 1 సంవత్సరమునకు x రూపాయలవడ్డీ అనుకుందాం. వడ్డీతో అసలుకుగల నిష్పత్తిని చూద్దాం.

$$\frac{x}{25000} = \frac{8}{100}$$

$$\therefore \frac{x}{25000} \times 25000 = \frac{8}{100} \times 25000$$ (రెండు వైపులా 25000 లచే గుణించుదాం)

$$\therefore x = 2000$$

ఆకాశ్‌కు 1 సంవత్సరమునకు 2000 రూపాయల వడ్డీ లభించింది.

ఆకాశ్‌కు 3 సంవత్సరాలకు మొత్తం = 2000 × 3 = 6000 రూపాయల వడ్డీ లభించింది.

తెలుసుకొందాం.

సరళవడ్డీ ఉదాహరణాలు సాధించునపుడు ఒక సూత్రాన్ని ఉపయోగిస్తారు, ఆ సూత్రాన్ని చూద్దాం.

ప్రతి సంవత్సరం అసలును అలాగే ఉంచి ఒకే రేటుతో వడ్డీ లెక్కిస్తారు. ఈ లెక్కింపును సరళవడ్డీ లెక్కింపు అని అంటారు. 'అ' అసలు 'కా' కాలము, వడ్డీ రేటు, సం॥నూ॥కి 'రే' అయినచో మొత్తం ఎంత వడ్డీ లభిస్తుందో, చూద్దాం అ అసలుపై 1 సంవత్సరం వడ్డీని 'వ' అనుకొందాం.

1 సంవత్సర వడ్డీ, అసలుల వీటి నిష్పత్తిని చూద్దాం

$$\frac{వ}{అ} = \frac{రే}{100} \qquad \therefore వ = \frac{అ \times రే}{100}$$

$$కా\ సంవత్సరానికి = వ \times కా = \frac{అ \times రే \times కా}{100}$$

$$\therefore వడ్డీ = \frac{అసలు \times రేటు \times కాలం}{100}$$

ఇంతకు ముందటి ఉదాహరణను సూత్రంనుపయోగించి సాధించుదాం.

పై ఉదాహరణలో అ = 25000, రే = 8, కా = 3

$$వడ్డీ = \frac{అ \times రే \times కా}{100}$$

$$= \frac{25000 \times 8 \times 3}{100}$$

$$= 6000$$

కావున వడ్డీ 6000 రూ పాయలవుతుంది.

ఇది నాకర్థమైంది.

- మొత్తం వడ్డీ $= \dfrac{అ \times రే \times కా}{100}$ దీనిలో అ=అసలు, రే=వడ్డీరేటు, కా=కాలం (సంవత్సరములు)

ఉదా: సందీప్ కుమారుని విద్యకోసం సం॥నూ॥కి $8\frac{1}{2}$ రేటు చొప్పున బ్యాంక్‌నుంచి 120000 రూపాయలు విద్యారుణం 4 సంవత్సరాలకై తీసుకొనెను. అతను గడువు పూర్తయ్యాక బ్యాంక్‌నకు మొత్తం ఎంతసొమ్ము తిరిగి చెల్లించాలి?

సాధన : ఈ ఉదాహరణలో అసలు 120000 రూపాయలు. సూత్రాన్నుపయోగించి వడ్డీ కనుగొందాం.

అ = 120000, రే = 8.5, కా = 4

$$\therefore మొత్తం\ వడ్డీ = \frac{అ \times రే \times కా}{100} = \frac{120000 \times 8.5 \times 4}{100}$$

$$= \frac{120000 \times 85 \times 4}{100 \times 10}$$

$$= 120 \times 85 \times 4$$

$$= 40800$$

బ్యాంక్‌నకు తిరిగి చెల్లించిన పూర్తి సొమ్ము అనగా మొత్తం = 120000 + 40800 = 160800 రూపాయలు చెల్లించాడు.

అభ్యాసమాలిక 40

1. రిహానా 1500 రూపాయలు పాఠశాలలోని సంచయికలో సం॥నూ॥కి 9 చొప్పున 2 సంవత్సరాలకై ఉంచినచో, ఆమెకు మొత్తం ఎంతసొమ్ము లభిస్తుంది?
2. జితాలాల్ బ్యాంక్ నుంచి సం॥నూ॥కి 10 చొప్పున 2,50,000 రూపాయలు 5 సంవత్సరాల కాలానికై గృహరుణం తీసుకొన్నాడు. అయిన అతను ప్రతి సంవత్సరం ఎంత వడ్డీ చెల్లించవలెను? అలాగే అతను బ్యాంక్‌నకు మొత్తం ఎంతసొమ్ము చెల్లించవలసి వస్తుంది?

3*. శ్రీకాంత్ 85,000 రూపాయలు సం॥నూ॥కి. 7 చొప్పున $2\frac{1}{2}$ సంవత్సరాలకై బ్యాంక్‌లో పొదుపు చేసెను. అయితే అతనికి తుదిగడువు వరకు ఎంత సరళ వడ్డీ లభిస్తుంది?

4. కొంత వడ్డీ రేటుతో 5000 రూపాయల అసలుపై 4సంవత్సరాలలో 1200 రూపాయలవడ్డీ అవుతుంది. అయితే అదే వడ్డీ రేటుతో అంతే కాలానికి 15000 రూపాయల అసలుకు ఎంత వడ్డీ అవుతుంది.
5. పంకజ్ 1,50,000 రూపాయలను సం॥నూ॥కి 10 చొప్పున 2 సంవత్సరాలకై బ్యాంక్‌లో డిపాజిట్ చేసినచో గడువు ముగిసిన తర్వాత మొత్తం ఎంతసొమ్ము అతనికి తిరిగి లభిస్తుంది?

తెలుసుకొందాం.

అసలు, కాలం, రేటు, మొత్తం వీటిలో ఏవేని మూడు విషయాలిచ్చిన, నాలుగోవిషయం కనుగొనుట.

సూత్రంలో కనుగొను సంఖ్యకై అక్షరమును అనుకొని సమీకరణంగా అమర్చి సమస్యను సాధించవచ్చును.

ఉదా: అసలు = 25000 రూపాయలు, మొత్తం = 31,000 రూపాయలు. కాలం = 4 సంవత్సరాలు అయిన వడ్డీరేటు ఎంత? ఇచ్చట మొత్తం – అసలు = వడ్డీ

31000 – 25000 = 6000

అసలు = 25000 రూపాయలు, కాలం = 4 సంవత్సరములు, వడ్డీ = 6000 రూపాయలు

ఇప్పుడు మనం సూత్రం సహాయంతో వడ్డీ రేటును కనుగొందాం. రేటును = రే అనుకొందాం.

$$\text{సరళవడ్డీ} = \frac{\text{అసలు} \times \text{రేటు} \times \text{కాలం}}{100}$$

$$6000 = \frac{25000 \times \text{రే} \times 4}{100}$$

$$\text{రే} = \frac{6000 \times 100}{25000 \times 4}$$

$\therefore$ రే = 6 $\quad\therefore$ వడ్డీరేటు సం॥నూ॥కి 6 రూపాయలు.

ఉదా: ఉన్మేష్ కొంతసొమ్మును 5 సంవత్సరాలకై సరళ వడ్డీతో ఋణం తీసుకొన్నాడు. వడ్డీ రేటు సం॥నూ॥కి 9. గడువు అనంతరం మొత్తం 17400 రూపాయలు తిరిగి చెల్లించెను. అయిన అతను ఎంత ఋణం తీసుకొన్నాడు?

$$\text{వడ్డీ} = \frac{\text{అసలు} \times \text{రేటు} \times \text{కాలం}}{100}$$ సమస్యను సాధించుటకు ఈ సూత్రాన్ని వెంటనే ఉపయోగించలేము.

ఎందుకనగా వడ్డీ మరియు అసలు రెండునూ తెలియవు; 100 రూపాయల అసలుపై 5 సంవత్సరాలకు 45 రూపాయల వడ్డీ అవుతంది. కాబట్టి 100+45=145 మొత్తం అవుతుంది. ఇప్పుడు అసలు మరియు మొత్తంల నిష్పత్తిని రెండు రకాలుగా అమర్చి సమీకరణాన్ని పొందదాం.

ఉన్మేష్ అసలు 'అ' అయినచో $\frac{అ}{17400} = \frac{100}{145}$

$\therefore$ అ $= \frac{100 \times 17400}{145} = 12000$

$\therefore$ ఉన్మేష్ రుణం 12000 రూపాయలు.

పదండి, చర్చిద్దాం.

- సూత్రాన్నుపయోగించి కొత్తరకమైన సమీకరణంగా అమర్చి ఈ ఉదాహరణను సాధించవచ్చునా?

అభ్యాసమాలిక 41

1. 1700 రూపాయలకు సం॥నూ॥కి కొంత రేటుతో 2 సంవత్సరాలకు వడ్డీ 340 రూపాయలయినచో వడ్డీరేటు నూ॥కి ... అవుతుంది.
   (i) 12 % (ii) 15 % (iii) 4 % (iv) 10 %
2. 3000 రూపాయలకు కొంత రేటుతో, కొన్ని సంవత్సరాలకు వడ్డీ 600 రూపాయలు ఐన, 1500 రూపాయలకు అదే రేటుతో అన్నే సంవత్సరాలకు వడ్డీ ఎన్ని రూపాయలవుతుంది?
   (i) 300 రూ॥ (ii) 1000 రూ॥ (iii) 700 రూ॥ (iv) 500 రూ॥
3. జావేద్ 12000 రూపాయలను సం॥నూ॥కి 9 చొప్పున కొన్ని సంవత్సరాల కోసం బ్యాంక్‌లో ఉంచెను. అతను ప్రతి సంవత్సరం వడ్డీ సొమ్ము తీసుకొనేవాడు. ఎన్ని సంవత్సరాలలో అతనికి వడ్డీతో సహా మొత్తం 17400 రూపాయలు లభిస్తాయి?

4*. లతాబేన్ కుటీర పరిశ్రమ ప్రారంభించడానికి బ్యాంక్ నుంచి కొంత సొమ్ము సం॥నూ॥కి 10 చొప్పున $2\frac{1}{2}$ సంవత్సరాల కోసం ఋణంగా తీసుకొనెను. ఆమె ఋణం చెల్లింపుకోసం మొత్తం 10250 రూపాయలు వడ్డీ చెల్లించెను. అయిన ఆమె మొత్తం ఎంత సొమ్ము ఋణంగా తీసుకొన్నది?

5. క్రింది పట్టికలోని ఖాళీలను పూరించుము.

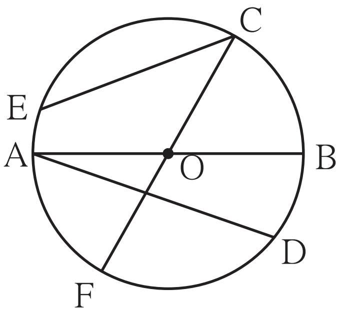
	అసలు	వడ్డీ రేటు (సం॥ నూ॥కి)	కాలం	వడ్డీ	మొత్తం
(i)	4200	7%	3 సం॥	......	......
(ii)	......	6%	4 సం॥	1200	......
(iii)	8000	5%	......	800	......
(iv)	......	5%	......	6000	18000
(v)	......	$2\frac{1}{2}$ %	5 సం॥	2400	......

ఉపక్రమం: ✷ వివిధ బ్యాంక్‌లను ప్రత్యక్షంగా సందర్శించి, వారు వివిధ ఖాతాలపై ఇచ్చే వడ్డీని గూర్చి తెలుసుకొండి.

✷ పాఠశాలలో ఉపాధ్యాయుని సహాయంతో సంచయిక (పొదుపు బ్యాంక్)ను తయారు చేసి, దానిలోఖాతా తెరిచి ఆర్థిక పొదుపు చేయండి.

11 వృత్తం

కొంచెం గుర్తు తెచ్చుకొందాం.



- పక్కనున్న వృత్తంలో వ్యాసార్థం, జ్యా మరియు వ్యాసాలను గుర్తించి వాటి పేర్లను క్రింది పట్టికలో వ్రాయండి.

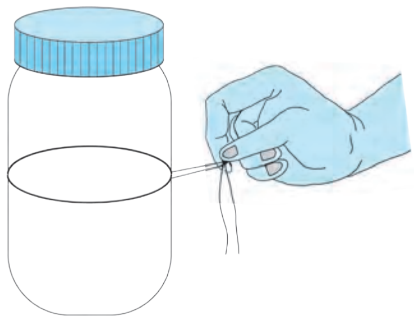
వ్యాసార్థం				
జ్యా				
వ్యాసం				

వృత్తం యొక్క పరిధి (Circumference of a circle)

కృత్యం I స్థూపాకార నీళ్ళ సీసాను కాగితంపై ఉంచి దాని అడుగుచుట్టు వృత్తంను గీయండి. దారం సహాయంతో వృత్తం యొక్క పరిధిని కొలవండి.

కృత్యం II చేతి గాజు యొక్క పరిధిని దారంతో కొలవండి.

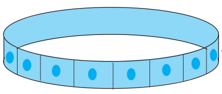
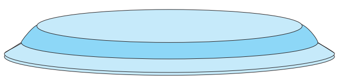
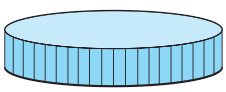
కృత్యం III ఏదేని ఒక వృత్తాకార వస్తువు పరిధిని దారం సహాయంతో కొలవండి.



తెలుసుకొందాం.

వృత్త పరిధి మరియు వ్యాసాల మధ్య సంబంధం

కృత్యం I కింద ఇవ్వబడిన వస్తువుల పరిధి మరియు వ్యాసాలను కొలిచి, పరిధి, వ్యాసాల యొక్క నిష్పత్తిని కింది పట్టికలో రాయండి.

క్ర.సం.	వస్తువు	పరిధి	వ్యాసం	పరిధితో వ్యాసం నకుగల నిష్పత్తి
1.	 చేతిగాజు	19 సెం.మీ.	6 సెం.మీ.	$\frac{19}{6} = 3.16$
2.	వృత్తాకారపు పళ్ళెం అడుగుభాగం 	....	....	....
3.	 సీసా మూత	....	....	....

పై పట్టిక నుండి పరిధి, వ్యాసాల యొక్క నిష్పత్తిని పరీక్షించండి. మీకు ఏమి తెలిసింది?

ఏదైనా వృత్తం యొక్క పరిధి మరియు దాని వ్యాసంతో గల నిష్పత్తి మూడురెట్లకంటె కొంచెం ఎక్కువ ఉండి స్థిరంగా ఉంటుంది. ఈ స్థిరాంకంను π (పై) అనే గ్రీకు అక్షరంతో సూచిస్తారు. ఇది అకరణీయ సంఖ్య కాదు. దీనిని గొప్ప గణిత శాస్త్రవేత్తలు శ్రమించి నిరూపించారు. వ్యవహారంలో π యొక్క విలువ $\frac{22}{7}$ లేదా 3.14 గా తీసుకుంటాము. ఉదాహరణలో π యొక్క విలువ ఇవ్వనట్లయితే అది $\pi = \frac{22}{7}$ గా భావించుకొంటాం.

వ్యాసార్థం 'r' వ్యాసం 'd' మరియు పరిధి 'c' అయినట్లయితే $\frac{\text{వృత్తపరిధి (c)}}{\text{వృత్తవ్యాసం (d)}} = \pi$ అనగా $\boxed{c = \pi d}$

కానీ $d = 2r$ $\therefore c = \pi \times 2r$ అనగా $\boxed{c = 2\pi r}$

ఉదా: ఒక వృత్తం యొక్క వ్యాసం 14 సెం.మీ. అయితే దాని వృత్త పరిధిని కనుగొనండి.

సాధన : వృత్తం యొక్క వ్యాసం : d = 14 సెం.మీ.

వృత్త పరిధి $= \pi d$

$c = \frac{22}{7} \times 14$

$\therefore$ వృత్తం యొక్క పరిధి = 44 సెం.మీ.

ఉదా: ఒక వృత్తం యొక్క వ్యాసార్థం 35 సెం.మీ. అయితే దాని పరిధిని కనుగొనండి.

సాధన : వృత్త వ్యాసార్థం r = 35 సెం.మీ.

వృత్త పరిధి $= 2\pi r$

$c = 2 \times \frac{22}{7} \times 35$

$\therefore$ వృత్త పరిధి = 220 సెం.మీ.

ఉదా: ఒక వృత్తం యొక్క పరిధి 198 సెం.మీ. అయిన దాని వ్యాసార్థం మరియు వ్యాసంలను కనుగొనండి.

సాధన : వృత్తం యొక్క పరిధి, $c = 2\pi r$

$198 = 2 \times \frac{22}{7} \times r$

$r = 198 \times \frac{1}{2} \times \frac{7}{22}$

వ్యాసార్థం = 31.5 సెం.మీ.

$\therefore$ వ్యాసం = 2 × 31.5 = 63 సెం.మీ.

ఉదా: ఒక వృత్తం యొక్క పరిధి 62.80 సెం.మీ. $\pi = 3.14$ గా తీసుకుని. వృత్త వ్యాసంను కనుగొనండి.

సాధన : వృత్తం యొక్క పరిధి, $c = \pi d$

$62.80 = 3.14 \times d$

$\frac{62.80}{3.14} = d$

$20 = d$

$\therefore$ వ్యాసం = 20 సెం.మీ.

ఉదా: ఒక వృత్తాకార స్థల వ్యాసార్థం 7.7 మీ . ఆ స్థలానికి మూడు వరుసలు తీగతోకంచె వేయుటకు ఒక మీటరుకు 50 రూపాయల చొప్పున మొత్తం ఎంత ఖర్చు అవుతుంది?

సాధన : వృత్తాకార స్థల పరిధి $= 2\pi r = 2 \times \frac{22}{7} \times 7.7 = 48.4$

ఒక వరుస కంచె వేయడానికి కావలసిన తీగ పొడవు = 48.4 మీ.

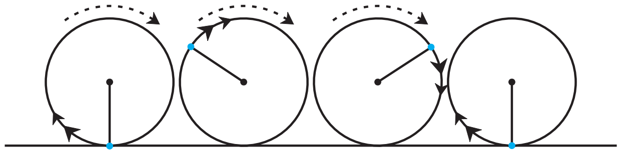
ఒక వరుస కంచెకు అయ్యే ఖర్చు = తీగ పొడవు × ఒక మీటరు ధర

$= 48.4 \times 50$

= 2420 రూ॥లు

$\therefore$ మూడు వరుసల కంచెకు అయ్యే ఖర్చు = 3 × 2420 = 7260 రూ॥లు

ఉదా: ఒక బస్సు చక్రం యొక్క వ్యాసం 0.7 మీ. రెండు ఊళ్ళ మధ్యనున్న దూరం 22 కి.మీ. పూర్తి చేయడానికి చక్రం ఎన్ని చుట్లు తిరుగుతుంది?



సాధన : చక్రం యొక్క పరిధి = πd

$$= \frac{22}{7} \times 0.7$$

$$= 2.2 \text{ మీ.}$$

సజాతీయ రాశుల నిష్పత్తి కనుగొనుటకు వాటి ప్రమాణాలు సమానంగా ఉండాలి.

22 కి.మీ. = 22 × 1000 = 22000 మీ.

అనగా చక్రం ఒక చుట్టు తిరిగే సరికి అది 2.2 మీ. దూరం ప్రయాణిస్తుంది. (1 చుట్టు = 1 పరిధి)

చక్రం యొక్క మొత్తం చుట్లు = $\frac{\text{దూరం}}{\text{పరిధి}} = \frac{22000}{2.2} = \frac{220000}{22} = 10000$

22 కి.మీ. దూరం ప్రయాణించుటకు బస్సు చక్రం 10000 చుట్లు తిరుగును.

అభ్యాసమాలిక 42

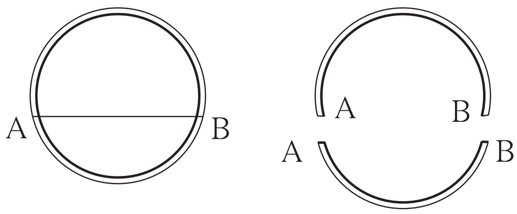
1. కింది పట్టికను పూరించండి.

క్ర.సం.	వ్యాసార్థం (r)	వ్యాసం (d)	పరిధి (c)
(i)	7 సెం.మీ.	………	………
(ii)	………	28 సెం.మీ.	………
(iii)	………	………	616 సెం.మీ.
(iv)	………	………	72.6 సెం.మీ.

2. ఒక వృత్తం యొక్క పరిధి 176 సెం.మీ. అయిన దాని వ్యాసార్థంను కనుగొనండి.
3. ఒక వృత్తాకార తోట వ్యాసార్థం 56 మీ. గలదు. తోట చుట్టు తీగతో నాలుగు వరసల కంచె వేయడానికి ఒక మీటరుకు 40 రూ||ల చొప్పున ఎంత ఖర్చువుతుంది?
4. ఒక ఎడ్లబండి చక్రం యొక్క వ్యాసం 1.4 మీ. ఆ ఎడ్లబండి 1.1 కి.మీ. దూరం ప్రయాణించుటకు దాని చక్రం ఎన్ని చుట్లు తిరగవలెను?

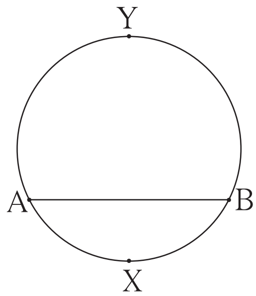
కొంచం గుర్తుతెచ్చుకుందాం.

వృత్త చాపం (Arc of the circle)



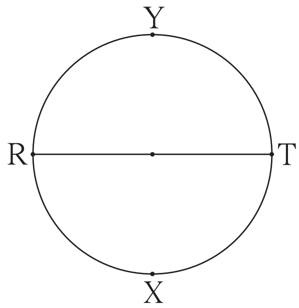
పక్క పటంలో ఒక ప్లాస్టిక్ వృత్తాకారపు చేతి గాజు చూపబడింది. ఈ గాజు A మరియు B బిందువుల వద్ద విరిగింది అనుకుందాం. అయితే చిత్రంలోని విరిగిన ప్రతి గాజుముక్కను వృత్తానికి సంబంధించి ఏమని పిలుస్తారు?

తెలుసుకొందాం.



పక్కనివ్వబడిన పటంలో జ్యా AB వలన వృత్తం రెండు భాగాలు అయింది. వాటిలో చాపం AXB చిన్నది. దానిని **అల్పవృత్తచాపం** అంటాం మరియు చాపం AYB పెద్దది, దానిని **అధిక వృత్త చాపం** అంటారు. అల్పవృత్తచాపం AXB ను చాపం AB అని కూడా రాస్తారు.

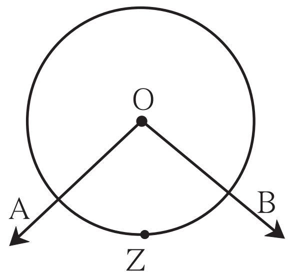
ఏ రెండు వృత్తచాపాలకు అంత్యబిందువులు ఉమ్మడిగా ఉంటాయో మరియు ఆ రెండు వృత్తచాపములు కలిసి వృత్తం పూర్తవుతుందో ఆ చాపములు ఒకదానికొకటి సంగత చాపములవుతాయి. చాపం AYB, చాపం AXB లు ఒకదానికొకటి సంగత చాపములు.



పక్కనున్న పటంలో జ్యా RT వృత్తం యొక్క వ్యాసం. వ్యాసం వలన వృత్తంలోని రెండు చాపములు సమానం అవుతాయి. వాటిని **అర్ధ వృత్త చాపములు** అంటారని గుర్తుంచుకోండి.

కేంద్రీయ కోణము మరియు చాపం కొలత (Central angle and Measure of an arc)

ప్రక్కనున్న పటంలో వృత్త కేంద్రం 'O', ∠AOB యొక్క శీర్ష బిందువు. వృత్తకేంద్ర బిందువు ఏ కోణానికి శీర్షబిందువు అవుతుందో ఆ కోణాన్ని 'కేంద్రీయ కోణం' అంటారు. పటంలోని ∠AOB చాపము AZB నకు సంబంధించిన కేంద్రీయ కోణం అవుతుంది. **వృత్తచాపం ఏర్పరచిన కేంద్రీయ కోణం కొలతను ఆ చాపం కొలతగా భావిస్తారు.**

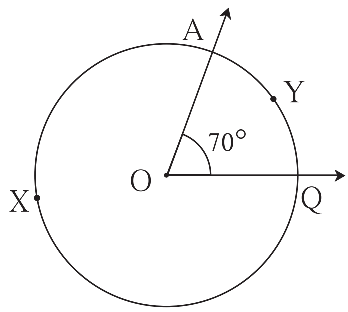


✸ అల్ప వృత్తచాపం కోణం కొలత

ప్రక్కనున్న పటంలో ∠AOQ యొక్క కేంద్రీయకోణం కొలత 70°.

∴ అల్ప వృత్త చాపము AYQ యొక్క కొలత 70^0.

∴ m(చాపం AYQ) = 70^0 గా దీనిని రాస్తాము.

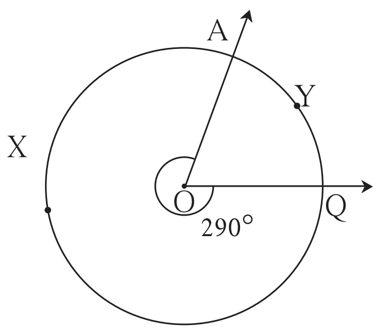


✸ అధిక వృత్త చాపం కోణం కొలత

అధిక వృత్త చాపం కోణం కొలత = 360^0 – సంగత అల్ప వృత్తచాపం కొలత

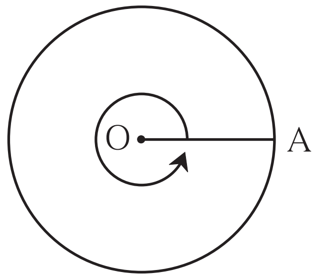
∴ పటంలోని అధిక వృత్త చాపం AXQ యొక్క కొలత

$360^\circ - 70^\circ = 290^\circ$ అవుతుంది.



✸ వృత్త కోణము కొలత

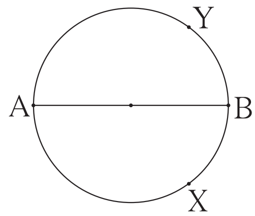
పటంలో చూపిన విధంగా వృత్త వ్యాసార్థం 'OA' గడియారంలోని ముల్లుకు వ్యతిరేక దిశలో ఒక పూర్తి భ్రమణం చేసింది. అప్పుడు ఏర్పడే కోణం 360^0 అవుతుంది. దాని యొక్క మొన A పూర్తి వృత్తంను చుట్టి వస్తుంది. వృత్తం ఏర్పరచిన కేంద్రీయ కోణం = 360°



∴ పూర్తి వృత్తం యొక్క కోణం కొలత 360° ఉంటుంది.

✸ అర్థవృత్త చాపం కోణం కొలత

ఇప్పుడు పటంను చూసి అర్థవృత్త చాపంకోణం AXB మరియు అర్థవృత్త చాపం కోణం AYB ల కొలతను నిర్ణయించండి.



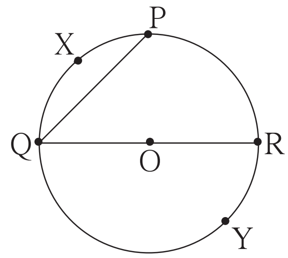
ఇది నాకర్థమైంది.

- అల్పవృత్త చాపం కోణం కొలత దాని సంబంధిత కేంద్రీయ కొలతంత ఉంటుంది.
- అధిక వృత్త చాపము కోణం కొలత = 360^0 – సంగత అల్ప వృత్త చాపం కోణం కొలత.
- అర్థవృత్త చాపము కోణం కొలత 180^0 ఉంటుంది.

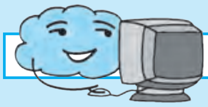
అభ్యాసమాలిక 43

1. సరియైన సమాధానంను గుర్తించండి.
   చాపము AXB మరియు చాపము AYB అనేవి ఒకదానికొకటి సంగత చాపములు అయిన m (చాపము AXB) = 120^0 అయితే m(చాపము AYB) = ఎంత?
   (i) 140° (ii) 60° (iii) 240° (iv) 160°

2. 'O' కేంద్రంగల వృత్తంలో కొన్ని చాపములు చూపబడినవి. వాటిలో అల్ప వృత్త చాపము, అధిక వృత్త చాపము, మరియు అర్థవృత్తచాపముల పేర్లను రాయండి.



3. O కేంద్రంగల వృత్తంలో అల్పవృత్త చాపము PXQ యొక్క కొలత 110^0 అయితే అధికవృత్త చాపము PYQ యొక్క కొలతను కనుగొనండి.



ICT Tools or Links

Geogebra Software ను ఉపయోగించి కేంద్రీయ కోణం మరియు చాపముల వివిధ కొలతల యొక్క పరస్పర సంబంధం move option ద్వారా చేసి చూడండి.

12 చుట్టు కొలత మరియు వైశాల్యం

కొంచెం గుర్తు తెచ్చుకొందాం.

చుట్టు కొలత (Perimeter)

సంవృత్తపటం యొక్క అన్ని భుజాల పొడవుల మొత్తం, ఆ పటం యొక్క చుట్టుకొలత అవుతుంది.

బహు భుజిపటం యొక్క చుట్టుకొలత = అన్ని భుజాల పొడవుల మొత్తం.

∴ చతురస్రం చుట్టుకొలత = 4×భుజం

a భుజంగల చతురస్రం చుట్టుకొలత = $4a$

దీర్ఘ చతురస్రం చుట్టుకొలత = 2 పొడవులు + 2 వెడల్పులు

పొడవు l మరియు వెడల్పు b గల దీర్ఘ చతురస్రం చుట్టుకొలత = $2l+2b$

ఉదా: ఒక దీర్ఘచతురస్రం చుట్టుకొలత 64 సెం.మీ. గలదు. దాని పొడవు 17 సెం.మీ. ఉన్నచో, వెడల్పు ఎంత ఉండవచ్చును?

సాధన: దీర్ఘచతురస్రం వెడల్పును x సెం.మీ. అనుకొందాం.

2 పొడవు + 2 వెడల్పు = చుట్టుకొలత

2 (పొడవు + వెడల్పు) = 64

$$2\,(17 + x) = 64$$

$$\frac{2(17+x)}{2} = \frac{64}{2}$$

$$17 + x = 32$$

$$x = 15$$

దీర్ఘచతురస్రం వెడల్పు 15 సెం.మీ. గలదు.

ఉదా: పొడవు 28 సెం.మీ. మరియు వెడల్పు 20 సెం.మీ. గల ఒక దీర్ఘచతురస్రం చుట్టుకొలత, చతురస్రం చుట్టుకొలత అంతేగలదు. అయిన ఆ చతురస్రం భుజం ఎంత?

సాధన : దీర్ఘచతురస్రం చుట్టుకొలత = 2 (పొడవు + వెడల్పు)

$$= 2\,(28 + 20)$$

$$= 96$$

చతురస్రం భుజం a అయినచో $4a = 96$

చతురస్రం చుట్టుకొలత = 96

$$4a = 96$$

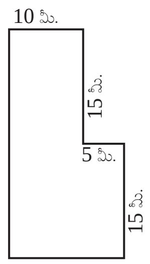
$$\therefore\ a = \frac{96}{4} = 24$$

చతురస్రం భుజం కొలత 24 సెం.మీ. గలదు.

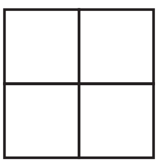
అభ్యాసమాలిక 44

1. ఒక దీర్ఘచతురస్రం పొడవు, వెడల్పులను రెట్టింపు చేసినచో, ఆ దీర్ఘచతురస్రం యొక్క చుట్టుకొలత తొలి దీర్ఘచతురస్రం చుట్టుకొలతకు ఎన్ని రెట్లవుతుంది?

2. ఒక చతురస్రం భుజమును మూడు రెట్లు చేసినచో, దాని చుట్టుకొలత తొలి చతురస్రం చుట్టుకొలతకు ఎన్ని రెట్లు అవుతుంది?



3. ప్రక్కన మైదానం యొక్క పటం ఇవ్వబడినది. దానిలో భుజాల పొడవుల కొలతలు ఇవ్వబడినవి. దానినిబట్టి మైదానం చుట్టు కొలతను కనుగొనండి.



4. ఒక మీటరు పొడవుగల చతురస్రాకార గుడ్డముక్క తీసుకొని పటంలో చూపిన విధంగా నాలుగు సమాన ఆకారంగల రుమాళ్ళు చేసారు. అన్నిరుమాళ్ళకు చుట్టు లేసు వేయడానికి ఎంత పొడవుగల లేసు అవసరం?

కొంచెం గుర్తు తెచ్చుకొందాం.

వైశాల్యం (Area)

- చతురస్రం వైశాల్యం = భుజం × భుజం = (భుజం)^2
- దీర్ఘ చతురస్రం వైశాల్యం = పొడవు × వెడల్పు = $l \times b$

వైశాల్యంను చదరపు మీటర్లు, చదరపు సెం.మీ., చదరపు కి.మీ. మొదలైన ప్రమాణాలలో కొలుస్తారు.

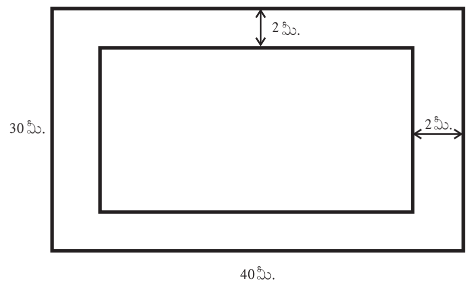
కృత్యం I

ఖో-ఖో, కబడ్డీ ఆటలకై గీయబడిన క్రీడాంగణం, టెన్నిస్ కోర్ట్, బ్యాడ్మింటన్ కోర్ట్ వీటిలో సాధ్యమైన వాటి పొడవు, వెడల్పులను కొలిచి, చుట్టుకొలత మరియు వైశాల్యంను కనుగొనండి.

కృత్యం II

అనిరుద్ధ్ ఇంట్లోని ఒక గోడకు కొత్తరంగు వేయాలి. గోడపొడవు 7 మీటర్లు, ఎత్తు 5 మీటర్లు గలదు. రంగులు వేసేవాడు రంగు వేయుటకు చదరపు మీటరుకు 120 రూపాయల ధర చెప్పినచో, అతను రంగులు వేయు వానికి ఎన్ని రూపాయలివ్వవలసి వస్తుందో నిర్ణయించండి.

ఉదా: 40 మీటర్ల పొడవు, 30 మీటర్ల వెడల్పుగల ఒక దీర్ఘ చతురస్రాకార తోట లోపల కంచెవెంబడి తోట చుట్టు 2 మీటర్ల వెడల్పుతో బాట ఏర్పాటు చేయాలి. ఆ బాటపై 25 సెం.మీ. × 20 సెం.మీ. ఆకారంగల నాపరాళ్ళు పరచవలసి ఉన్నచో, ఎన్ని నాపరాళ్ళు తీసుక రావలసి వస్తుంది?



నాపరాళ్ల పరిచే భాగం వైశాల్యంను కనుగొందాం.

తోట వైశాల్యం = 40 × 30 = 1200 చ.మీటర్లు

బాట విడిచి లోపలి తోట వైశాల్యం = 36 × 26 = 936 చ.మీ.

∴ నాపరాళ్ళు పరచవలసిన భాగం = 1200 − 936 = 264 చ.మీ.

> 100 సెం.మీ. = 1 మీ
>
> 25 సెం.మీ. = $\frac{25}{100}$ మీ

నాపరాయి వైశాల్యం = $\frac{25}{100} \times \frac{20}{100} = \frac{1}{20}$ చ.మీ.

ఒక నాపరాయి వైశాల్యం $\frac{1}{20}$ చ.మీ. అయిన 264 చ.మీ.ల స్థలంలో పరచవలసిన నాపరాళ్ళ సంఖ్యను కనుగొందాం.

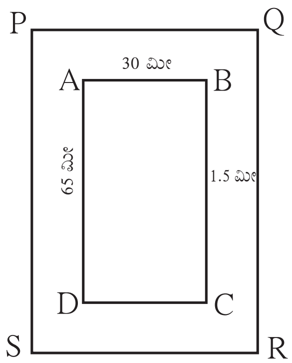
నాపరాళ్ళ సంఖ్య = $\frac{\text{మొత్తం స్థల వైశాల్యం}}{\text{ఒక నాపరాయి వైశాల్యం}}$

$= 264 \div \frac{1}{20}$

$= 264 \times 20 = 5280$

5280 నాపరాళ్ళు తీసుక రావలసి వస్తుంది.

ಉದಾ. ಒಂದು ಆಯತಾಕೃತಿ ಆಟದ ಬಯಲಿನ ಉದ್ದ 65 ಮೀಟರ ಹಾಗೂ ಅಗಲ 30 ಮೀಟರ ಇದೆ. ಆ ಆಟದ ಬಯಲಿಗೆ ಹೊಂದಿಕೊಂಡು ಹೊರಗೆ ನಾಲ್ಕೂ ಬದಿಗಳಿಗೆ 1.5 ಮೀಟರ ಅಗಲದ ರಸ್ತೆ ಇದೆ. ಆ ರಸ್ತೆಯ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ ತೆಗೆಯಿರಿ.



ಸ್ಪಷ್ಟೀಕರಣ: ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ ಆಟದ ಬಯಲಿನ ಆಕಾರ ಆಯತಾಕೃತಿ ಇದೆ.

☐ ABCD ಇದು ಆಟದ ಬಯಲು ಇದೆ. ಅದರ ಸುತ್ತಲು 1.5 ಮೀಟರ ಅಗಲದ ರಸ್ತೆ ಇದೆ.

☐ ABCD ಯ ಎಲ್ಲ ಬದಿಯಿಂದ 1.5 ಮೀಟರ ಅಂತರವನ್ನು ಇಡಲಾಗಿ

☐ PQRS ಈ ಆಯತ ದೊರೆಯುತ್ತದೆ.

ಆಯತ PQRS ದ ಉದ್ದ = 65 + 1.5 + 1.5 = 68 ಮೀಟರ

ಆಯತ PQRS ದ ಅಗಲ = 30 + 1.5 + 1.5 = 33 ಮೀಟರ

ರಸ್ತೆಯ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ = ಆಯತ PQRSನ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ – ಆಯತ ABCDಯ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ

= 68 × 33 – 65 × 30 = ☐ – ☐ = ☐ ಚೌರಸ ಮೀಟರ

ನಡೆಯಿರಿ, ಚರ್ಚಿಸೋಣ.

- ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿಯ ರಸ್ತೆಯ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವನ್ನು ಬೇರೆ ವಿಧಾನದಿಂದ ತೆಗೆಯಲು ಬರುವುದೇ ?

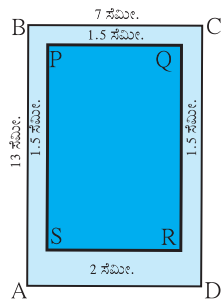
ಉದಾ. ಒಂದು ಮೊಬಾಯಿಲದ ಉದ್ದ 13 ಸೆಮೀ ಅಗಲ 7 ಸೆಮೀ ಇದೆ ಇದರ ಮೇಲಿಂದ PQRS ಈ ಸ್ಕ್ರೀನ ಆಕೃತಿಯಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ಇದೆ. ಹಾಗಾದರೆ ಸ್ಕ್ರೀನದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ ಎಷ್ಟು ?

ಉತ್ತರ: ಮೊಬಾಯಿಲದ ಬದಿಗಳಿಂದ ತಯಾರಾದ ಆಯತ ABCD ಎಂದು ತಿಳಿಯುವಾ ಅದರ ಉದ್ದ 13 ಸೆಮೀ ಮತ್ತು ಅಗಲ 7 ಸೆಮೀ ಇದೆ. AB, ಹಾಗೂ DC ಬದಿಯಿಂದ 1.5 ಸೆಮೀ ಅಂತರ ಬಿಟ್ಟು ಹಾಗೂ DA ಬದಿಯಿಂದ 2 ಸೆಮೀ ಅಂತರ ಬಿಟ್ಟಾಗ ತಯಾರಾಗುವ ಆಯತ PQRS ಎಂದು ತಿಳಿಯೋಣ.

ಆಯತ PQRSದ ಉದ್ದ = ☐ ಸೆಮೀ

ಆಯತ PQRSದ ಅಗಲ = ☐ ಸೆಮೀ

ಸ್ಕ್ರೀನದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ = ಆಯತ PQRSದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ = ... × .... = ☐ ಚೌಸೆಮೀ



ಕೃತಿ

ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಆಕಾರಗಳ ಮೊಬಾಯಿಲಗಳನ್ನು ನೋಡಿರಿ. ಅವುಗಳ ಮೇಲಿರುವ ಸ್ಕ್ರಿನದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ ತೆಗೆಯಿರಿ.

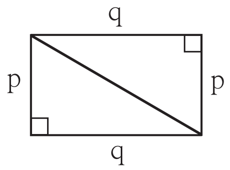
ಅಭ್ಯಾಸ ಸಂಚ 45

1. ಒಂದು ಚೌರಸದ ಭುಜ 12 ಸೆಮೀ ಇದ್ದರೆ ಆ ಚೌರಸದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ ತೆಗೆಯಿರಿ.
2. ಒಂದು ಆಯತದ ಉದ್ದ 15 ಸೆಮೀ ಹಾಗೂ ಅಗಲ 5 ಸೆಮೀ ಇದ್ದರೆ, ಆ ಆಯತದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ ತೆಗೆಯಿರಿ.
3. ಒಂದು ಆಯತದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ 102 ಚೌಸೆಮೀ ಇದೆ. ಆಯತದ ಉದ್ದ 17 ಸೆಮೀ ಹಾಗಾದರೆ ಆಯತದ ಪರಿಮಿತಿ ಎಷ್ಟು?
4*. ಒಂದು ಚೌರಸದ ಭುಜ ಮೂರು ಪಟ್ಟು ಮಾಡಿದರೆ ಅದರ ಮೂಲ ಚೌರಸದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲದ ಎಷ್ಟು ಪಟ್ಟು ಆಗುವುದು ?

తెలుసుకొందాం.

లంబకోణం త్రిభుజ వైశాల్యం (Area of right angled triangle)

కృత్యం ఒకే కొలతవి రెండు లంబ కోణత్రిభుజాలను కత్తిరించండి. వాటిని పటంలో చూపిన విధంగా కలపండి. ఒక దీర్ఘచతురస్రం తయారవుతుందని తెలుసుకోండి. త్రిభుజంలో లంబకోణాన్ని ఏర్పరుచు భుజాలు p మరియు q పొడవుగలవి అలాగే అవి దీర్ఘ చతురస్రమునకు కూడా భుజాలు అవుతాయి. పటం ద్వారా తెలుస్తున్న దేమిటంటే, దీర్ఘచతురస్ర వైశాల్యం = 2 × లంబకోణం త్రిభుజ వైశాల్యం.



$\therefore$ 2 × లంబకోణ త్రిభుజవైశాల్యం = p × q

$\therefore$ లంబకోణ త్రిభుజం యొక్క వైశాల్యం = $\dfrac{p \times q}{2}$

ఇది నాకర్థమైంది.

లంబకోణం త్రిభుజం యొక్క వైశాల్యం = $\dfrac{1}{2}$ × లంబకోణాన్ని ఏర్పరుచు భుజాల పొడవుల లబ్ధం.

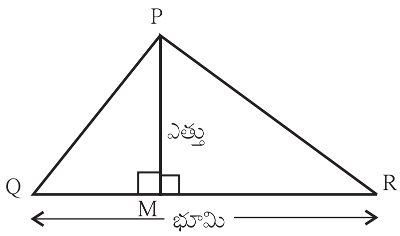
లంబకోణం త్రిభుజంలో లంబకోణాన్ని ఏర్పరుచు రెండు భుజాలలో ఒక భుజంను భూమిగా భావించినచో లంబకోణాన్ని ఏర్పరిచే రెండవభుజం అప్పుడు దాని ఎత్తు అవుతుంది.

లంబకోణం త్రిభుజం యొక్క వైశాల్యం = $\dfrac{1}{2}$ భూమి × ఎత్తు

ΔABC ఏదేని ఒక త్రిభుజమైనచో, భూమిగా ఏదేని ఒక భుజాన్ని తీసుకొంటారు. ఆ భుజానికి ఎదురుగానున్న శీర్షబిందువునుంచి భూమిపైకి గీయబడిన లంబం యొక్క కొలత ఆ త్రిభుజానికి ఎత్తు అవుతుంది.

ΔPQR ఏదేని ఒక త్రిభుజంలో భూమిగా QR ను తీసుకొన్నాం. P నుంచి QR అను భూమిపై PM అను లంబమును గీసాం.

పటం 1 : బిందువు M, రేఖ QR పై ఉన్నది.



ΔPMR మరియు ΔPMQ లంబకోణ త్రిభుజాలు.

A(ΔPQR) = A (ΔPMQ) + A(ΔPMR)

$= \dfrac{1}{2} \times l(QM) \times l(PM) + \dfrac{1}{2} \times l(MR) \times l(PM)$

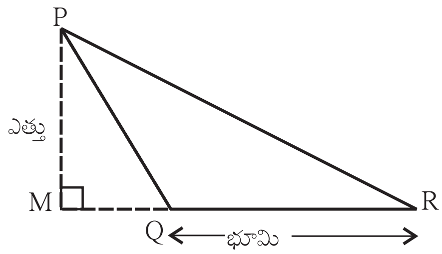
$= \dfrac{1}{2} [l(QM) + l(MR)] \times l(PM)$

$= \dfrac{1}{2} l(QR) \times l(PM)$

= $\dfrac{1}{2}$ × భూమి × ఎత్తు

A(ΔPQR) = $\dfrac{1}{2}$ × భూమి × ఎత్తు

పటం 2 : బిందువు M, రేఖ QR నకు బయటనున్నది.



ΔPMR మరియు ΔPMQ లంబకోణ త్రిభుజాలు.

A(ΔPQR) = A(ΔPMR) – A (ΔPMQ)

$= \dfrac{1}{2} \times l(MR) \times l(PM) - \dfrac{1}{2} \times l(MQ) \times l(PM)$

$= \dfrac{1}{2} [l(MR) - l(MQ)] \times l(PM)$

$= \dfrac{1}{2} \times l(QR) \times l(PM)$

= $\dfrac{1}{2}$ × భూమి × ఎత్తు

A(ΔPQR) = $\dfrac{1}{2}$ × భూమి × ఎత్తు

ఇది నాకర్థమైంది.

$$\text{త్రిభుజవైశాల్యం} = \frac{1}{2} \times \text{భూమి} \times \text{ఎత్తు}$$

ఉదా: ఒక లంబకోణ త్రిభుజంలో లంబకోణాన్ని ఏర్పరుచు భుజాలు. 3.5 సెం.మీ., 4.2 సెం.మీ. ఉన్నచో, ఆ త్రిభుజ వైశాల్యంను కనుగొనండి.

సాధన: లంబకోణత్రిభుజ వైశాల్యం $= \frac{1}{2} \times$ లంబకోణాన్ని ఏర్పరిచే భుజాల పొడవుల లబ్ధం

$= \frac{1}{2} \times 3.5 \times 4.2$

$= 7.35$ చ.సెం.మీ.

ఉదా: ఒక త్రిభుజం యొక్క భూమి 5.6 సెం.మీ. ఎత్తు 4.5 సెం.మీ. ఉన్నచో, ఆ త్రిభుజం యొక్క వైశాల్యం మెంత?

సాధన: త్రిభుజం యొక్క వైశాల్యం $= \frac{1}{2} \times$ భూమి $\times$ ఎత్తు

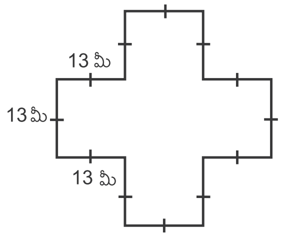
$= \frac{1}{2} \times 5.6 \times 4.5$

$= 12.6$ సెం.మీ.^{2}

(చ.సెం.మీ.లను (సెంమీ)^2 అని కూడా రాస్తారు.)

అభ్యాసమాలిక 46

1. ఒక క్యాలెండర్ పేజీ పొడవు 45 సెం.మీ. వెడల్పు 26 సెం.మీ. గలదు. అయిన ఆ పేజీ వైశాల్యమెంత?
2. ఒక త్రిభుజం ఎత్తు 3.6 సెం.మీ., భూమి 4.8 సెం.మీ. ఉన్నచో, ఆ త్రిభుజ వైశాల్యమెంత?
3. ఒక దీర్ఘచతురస్రాకార స్థలం పొడవు 75.5 మీటర్లు, వెడల్పు 30.5 మీటర్లు గలదు. చదరపు మీటరుకు దానిధర 1000 రూపాయలున్నచో, ఆస్థలం విలువెంత?
4. దీర్ఘ చతురస్రాకార సభాగృహం యొక్క పొడవు 12 మీటర్లు, వెడల్పు 6 మీటర్లు గలదు. ఆ గదిలో 30 సెం.మీ. భుజంగల చతురస్రాకార నాపరాళ్ళను పరచవలసి ఉన్నచో, మొత్తం సభాగృహంలో ఎన్ని నాపరాళ్ళు పట్టును? ఈ ఉదాహరణలో 15 సెం.మీ. భుజం గల చతురస్రాకార నాపరాళ్ళను తీసుకొన్నచో, ఎన్ని నాపరాళ్ళు కావలెను?
5. ప్రక్కనున్న పటంలో చూపిన విధంగా కొలతలుగల తోట చుట్టుకొలత మరియు వైశాల్యంను కనుగొనండి.

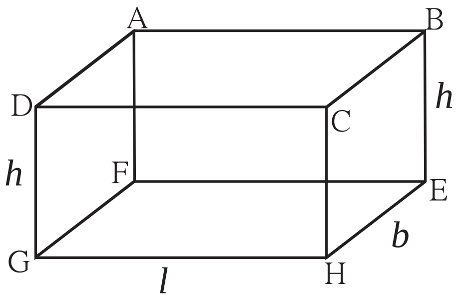


తెలుసుకొందాం.

ఉపరి తలవైశాల్యం (Surface area)

ఏదేని త్రిమితీయ వస్తువు యొక్క అన్ని తలాల వైశాల్యాల మొత్తం అనగా ఆ వస్తువు యొక్క ఉపరి తలవైశాల్యం అవుతుంది.

✱ దీర్ఘఘనం యొక్క సంపూర్ణతల వైశాల్యం.



- దీర్ఘఘనానికి ఆరు తలాలుంటాయి.
- ప్రతి తలం దీర్ఘచతురస్రాకారంగా ఉంటుంది.
- ఎదురెదురుగానున్న దీర్ఘ చతురస్రాకార తలాల వైశాల్యాలు సమానంగా ఉంటాయి.
- ప్రతి అంచు దానిని కలిపే ఇతర రెండు అంచులకు లంబంగా ఉంటుంది.
- దీర్ఘఘనం యొక్క అడ్డు తలం పొడవును l చే, వెడల్పును b చే సూచిస్తాం. నిలువు తలం ఎత్తును h చే సూచిస్తాం.

దీర్ఘచతురస్రం ABCD వైశాల్యం = దీర్ఘచతురస్రం GHEF వైశాల్యం = పొడవు × వెడల్పు = $l \times b$

దీర్ఘచతురస్రం ADGF వైశాల్యం = దీర్ఘచతురస్రం BCHE వైశాల్యం = వెడల్పు × ఎత్తు = $b \times h$

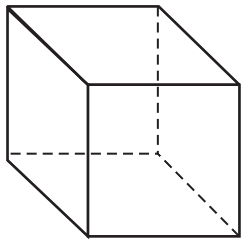
దీర్ఘచతురస్రం CHGD వైశాల్యం = దీర్ఘచతురస్రం ABEF వైశాల్యం = పొడవు × ఎత్తు = $l \times h$

దీర్ఘఘనం సంపూర్ణతలవైశాల్యం = అన్ని దీర్ఘచతురస్రాల వైశాల్యాల మొత్తం

దీర్ఘఘనం సంపూర్ణతలవైశాల్యం = 2(పొడవు × వెడల్పు + వెడల్పు × ఎత్తు + పొడవు × ఎత్తు)

$= 2\ (l \times b + b \times h + l \times h) = 2\ (lb + bh + lh)$

ఘనం తల వైశాల్యం



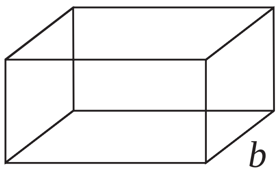
- ఘనానికి 6 తలములుంటాయి.
- ప్రతి తలం చతురస్రాకారంగా ఉంటుంది.
- అన్ని తలముల వైశాల్యం సమానంగా ఉంటుంది.
- చతురస్రం భుజంను l అనుకొందాం.
- ఘనం యొక్క ఒకతలం వైశాల్యం = చతురస్రం యొక్క వైశాల్యం
- ఘనం సంపూర్ణతల వైశాల్యం = 6 చతురస్రాల వైశాల్యాల మొత్తం

$= 6 \times (\text{భుజం})^2$

$= 6 \times l^2$

ఉదా: పొడవు 1.5 మీటర్లు, వెడల్పు 1.2 మీటర్లు, ఎత్తు 1.3 మీటర్లు, ఇలాంటి కొలతలుగల మూసివున్న దీర్ఘఘనాకార రేకుపెట్టె తయారు చేయవలెనన్నచో దానికి ఎంత రేకు పట్టును?

సాధన : పెట్టె పొడవు $= l = 1.5$ మీటర్లు, వెడల్పు $= b = 1.2$ మీటర్లు, ఎత్తు $= h = 1.3$ మీటర్లు



పెట్టె యొక్క తలవైశాల్యం $= 2\ (l \times b + b \times h + l \times h)$

$= 2\ (1.5 \times 1.2 + 1.2 \times 1.3 + 1.5 \times 1.3)$

$= 2\ (1.80 + 1.56 + 1.95)$

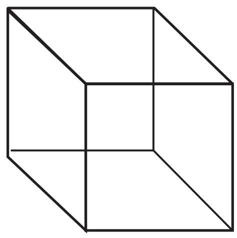
$= 2\ (5.31)$

$= 10.62$ చ.మీ.

పెట్టె తయారు చేయుటకు మొత్తం 10.62 చ.మీ. రేకు పట్టును.

ఉదా: ఒక ఘనాకారా పెట్టె భుజం 0.4 మీ. గలదు. ఆ పెట్టెకు బయటినుంచి రంగు వేయుటకు ప్రతి చదరపు మీటరుకు 50 రూపాయల చొప్పున ఎంత ఖర్చు వస్తుంది?

సాధన : భుజం $= l = 0.4$ మీటర్లు



ఘనం సంపూర్ణతల వైశాల్యం $= 6 \times (l)^2$

$= 6 \times (0.4)^2$

$= 6 \times 0.16 = 0.96$ చ.మీ.

1 చ.మీ. రంగు వేయుటకగు ఖర్చు 50 రూపాయలు.

$\therefore$ 0.96 చ.మీ. లకు రంగు వేయుటకగు ఖర్చు $= 0.96 \times 50$

$= 48$ రూపాయలు

పెట్టెకు రంగు వేయుటకు 48 రూపాయల ఖర్చు వస్తుంది.

అభ్యాసమాలిక 47

1. ఘనాల భుజం క్రింది విధంగా ఉన్నచో, వాటి సంపూర్ణతల వైశాల్యంను కనుగొనండి.
   (i) 3 సెం.మీ. (ii) 5 సెం.మీ. (iii) 7.2 మీ. (iv) 6.8 మీ. (v) 5.5 మీ.
2. క్రింద దీర్ఘఘనం యొక్క పొడవు, వెడల్పు, ఎత్తులు వరసగా ఇవ్వబడినవి. దానిని బట్టి వాటి సంపూర్ణతల వైశాల్యంను కనుగొనండి.
   (i) 12 సెం.మీ., 10 సెం.మీ., 5 సెం.మీ.. (ii) 5 సెం.మీ., 3.5 సెం.మీ., 1.4 సెం.మీ..
   (iii) 2.5 సెం.మీ., 2 మీ., 2.4 మీ.. (iv) 8 మీ., 5 మీ., 3.5 మీ..
3. ఒక అగ్గిపెట్టె పొడవు 4 సెం.మీ., వెడల్పు 2.5 సెం.మీ. ఎత్తు 1.5 సెం.మీ. గలదు. ఆ అగ్గి పెట్టెకు బయటనుంచి రంగుకాగితం కచ్చితంగా సరిపోవునట్లు అతికించవలసినచో, మొత్తం ఎంత కాగితం పడుతుంది?
4. తోటలోని ఆకులు అలములు ట్రాలీపై తీసుకెళ్ళడానికి మూతలేని రేకు పెట్టె తయారు చేయాలి. దానిపొడవు 1.5 మీటరు, వెడల్పు 1 మీటరు, ఎత్తు 1 మీటరు గలదు. అందుకై మొత్తం ఎంత రేకు కావాలి? ఆ పెట్టెకు లోపలినుంచి, బయటి నుంచి త్రుప్పునిరోధక రంగుతో, రంగువేయాలి, అయితే ప్రతి చదరపు మీటరుకు 150 రూపాయల చొప్పున, ఆ పెట్టెకు రంగు వేయుటకు ఎంత ఖర్చు వస్తుంది?

గణితగమ్మత్తు

కొన్ని మూడంకెల సంఖ్యలు ఇలా వుంటాయికదా అంటే, అందులోని అంకెలను గుణించగా వచ్చు లబ్ధంతో, ఆ సంఖ్య భాగించబడుతుంది.

ఉదా: (i) 175 ఈ సంఖ్యను తీసుకోండి, 1 × 7 × 5 = 35, $\frac{175}{35} = 5$

(ii) 816 ఈ సంఖ్యను తీసుకోండి, 8 × 1 × 6 = 48, $\frac{816}{48} = 17$

(iii) 612 ఈ సంఖ్యను తీసుకోండి, 6 × 1 × 2 = 12, $\frac{612}{12} = 51$

ఇలా 135, 312,672 లాంటి సంఖ్యలు కూడా ఉన్నాయి.

ఇలాంటివి మరికొన్ని సంఖ్యలు వెదకండి.

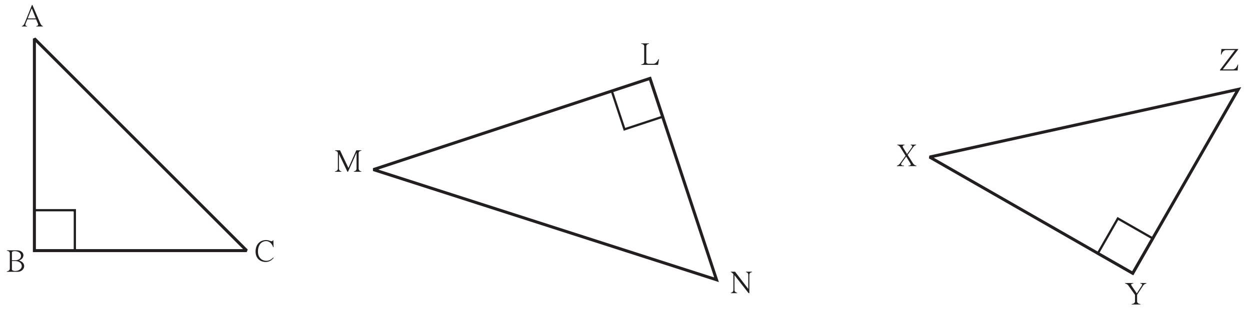
13 పైథాగోరస్ సిద్ధాంతం

కొంచెం గుర్తు తెచ్చుకొందాం.

లంబకోణ త్రిభుజం (Right angled triangle)

ఏ త్రిభుజంలో ఒక కోణం లంబకోణం అవుతుందో, ఆ త్రిభుజంను లంబకోణ త్రిభుజమని అంటారు. ఆ లంబకోణానికి ఎదురుగానున్న భుజంను కర్ణం అని అంటారని మీకు తెలుసు.

- కింది లంబకోణ త్రిభుజాలలోని కర్ణాల పేర్లను రాయండి.



ΔABC యొక్క కర్ణం ☐ ΔLMN యొక్క కర్ణం ☐ ΔXYZ యొక్క కర్ణం ☐

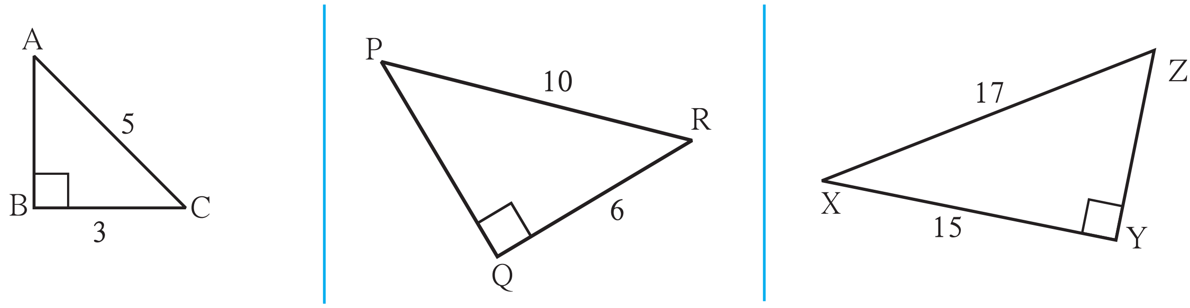
పైథాగోరస్ సిద్ధాంతం (Theorem of Pythagoras)

పైథాగోరస్ అనే గొప్ప గ్రీకు గణిత శాస్త్రజ్ఞుడు క్రీస్తుపూర్వం ఆరవ శతాబ్దంనకు చెందినవాడు. గణిత విషయంలో ఆయన చేసిన కృషి చాలాగొప్పది. గణిత బోధనలో ఆయన నైపుణ్యం అనన్య సామాన్యమైనదిగా పేరుపొందింది. ఆయన అనేక మంది శిష్యులను తయారు చేసేను.

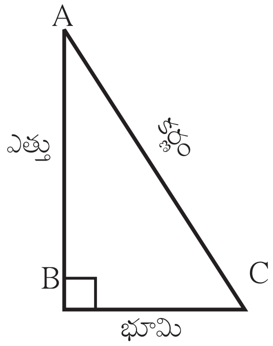
లంబకోణం త్రిభుజానికి సంబంధించి ఒక సిద్ధాంతం చాలాకాలంనుంచే అనేక దేశాలలోని ప్రజలకు తెలుసు. భారతదేశంలోని శుల్వసూత్రమనే గ్రంథంలో కూడా ఇది ఉంది. ఆ సిద్ధాంతం యొక్క నిరూపణను పైథాగోరస్ తొలిసారిగా ప్రతిపాదించినందున, ఆయన పేరును ఆ సిద్ధాంతానికి ఇచ్చారు. **లంబకోణ త్రిభుజంలో కర్ణం యొక్క వర్గం ఇతర రెండు భుజాల వర్గాల మొత్తానికి సమానంగా ఉంటుంది.** ఇదే ఆ పైథాగోరస్ సిద్ధాంతం.

కృత్యం కర్ణం మరియు లంబకోణాన్ని ఏర్పరుచు ఒక భుజం కొలత ఇచ్చినపుడు కింది చిత్తుపటాలలోని కొలతలప్రకారం లంబకోణ త్రిభుజంను గీసి మూడవ భుజం పొడవును కొలవండి. పైథాగోరస్ సిద్ధాంతమును పరీక్షించుకోండి.

(i) (ii) (iii)



తెలుసుకొందాం.



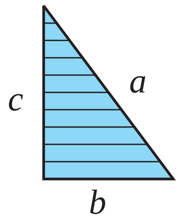
ప్రక్కనున్న పటంను బట్టి, పైథాగోరస్ సిద్ధాంతమును క్రిందివిధంగా రాస్తారు. ΔABC లో $\angle B$ లంబకోణమైనచో,

$$[l(AC)]^2 = [l(AB)]^2 + [l(BC)]^2$$

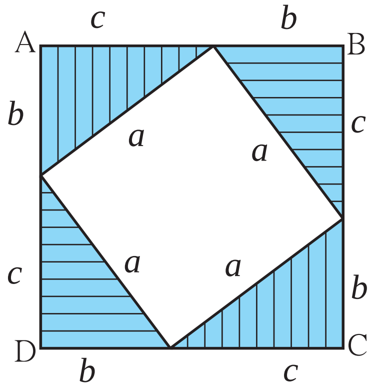
సామాన్యంగా లంబకోణ త్రిభుజంలో లంబకోణాన్ని ఏర్పరుచు భుజాలలో ఒక భుజంను భూమిగా, రెండవభుజంను ఎత్తుగా తీసుకొంటారు. ఈ సిద్ధాంతాన్ని **(కర్ణం)^2 = (భూమి)^2 + (ఎత్తు)^2** ఇలారాస్తారు.

పైథాగోరస్ సిద్ధాంతాన్ని నిరూపణ చేసుకొనుటకై క్రింది కృత్యంను చేయండి.

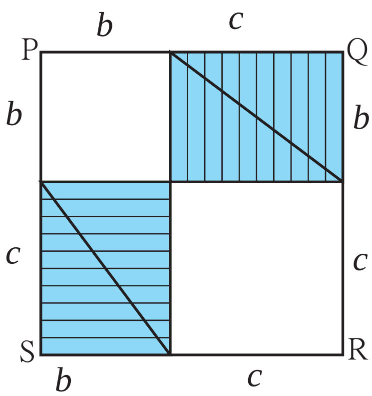
కృత్యం ఒక కార్డుషీట్‌ను సమాన కొలతలుగల 8 లంబకోణ త్రిభుజాలుగా కత్తిరించండి. వాటి భుజాల పొడవులు ఎంతైన ఉండవచ్చు. ఆ త్రిభుజ కర్ణం 'a' ప్రమాణం, లంబకోణాన్ని ఏర్పరిచేభుజాలు 'b' ప్రమాణం వ ఎరియు 'c' ప్రమాణం గలవని అనుకొందాం. అప్పుడు ఆ త్రిభుజవైశాల్యం $\frac{bc}{2}$ అవుతుందని గుర్తుంచుకోండి.



ఇప్పుడు వేరే కార్డ్‌షీట్‌పై (b+c) ప్రమాణం భుజాలు గల రెండు చతురస్రాలను పెన్సిల్‌తో గీయండి. పటంలో చూపిన విధంగా ముందు కత్తిరించుకొన్న 8 త్రిభుజాలలోనుంచి 4 త్రిభుజాలు, ABCD చతురస్రంలో పెట్టండి. మిగిలిన 4 త్రిభుజాలను పటంలో చూపిన విధంగా PQRS చతురస్రంలో పెట్టండి. త్రిభుజాలతో మూయబడిన భాగాలను రేఖాంకితం చేయండి.



పటం (i)



పటం (ii)

పటాలను పరిశీలించండి. పటం (i) లో ఖాళీస్థలంలో దేని భుజం 'a' గలదో, ఆ చతురస్రం తయారయింది. పటం (ii) లో ఖాళీ స్థలంలో 'b' మరియు 'c' భుజాలుగల రెండు చతురస్రాలు తయారాయినవి. రెండు చతురస్రాలలో రేఖాంకితం చేయబడిన భాగాలు, సమానంగా అనగా నాలుగు లంబకోణ త్రిభుజాల వైశాల్యాలంత ఉంటుంది.

పటం (i) లో చతురస్రం ABCD వైశాల్యం = $a^2+4\times$ లంబకోణం త్రిభుజాల వైశాల్యం.

$$= a^2 + 4 \times \frac{1}{2}\ bc$$

$$= a^2 + 2bc$$

పటం (ii) లో చతురస్రం PQRS వైశాల్యం = $b^2+c^2+4 \times$ లంబకోణ త్రిభుజాల వైశాల్యం

$$= b^2 + c^2 + 4 \times \frac{1}{2} bc$$

$$= b^2 + c^2 + 2bc$$

చతురస్రం ABCD వైశాల్యం = చతురస్రం PQRS వైశాల్యం.

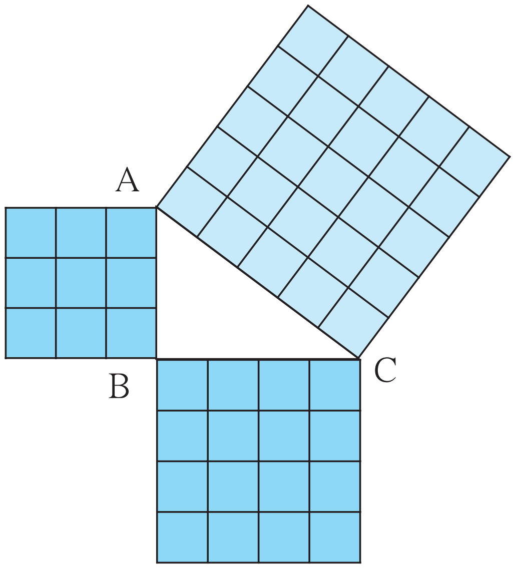
$$\therefore \quad a^2 + 2bc = b^2 + c^2 + 2bc$$

$$\therefore a^2 = b^2 + c^2$$

పదండి, చర్చిద్దాం.

- పటం (i) లో ఖాళీ చతురస్రంలోని ప్రతి కోణం లంబకోణం. దీనిని కోణమానిని ఉపయోగించకుండా పరీక్షించుకొని చూడవచ్చా?

కృత్యం ఒక కార్డు షీట్‌పై 3 సెం.మీ., 4 సెం.మీ., 5 సెం.మీ. ల కొలతగల ఒక లంబకోణ త్రిభుజంను గీయండి. ప్రతి భుజంపై చతురస్రాన్ని గీయండి. ప్రతి చతురస్రం యొక్క వైశాల్యంను కనుగొని పైథాగోరస్ సిద్ధాంతాన్ని పరీక్షించుకోండి.



పైథాగోరస్ సిద్ధాంతాన్ని ఉపయోగించి లంబకోణ త్రిభుజం యొక్క రెండు భుజాల కొలతలు ఇచ్చినచో, మూడవ భుజం గీయవచ్చు.

ఉదా: ΔABC లో $\angle C = 90^\circ$, $l(AC) = 5$ సెం.మీ., $l(BC) = 12$ సెం.మీ., అయిన $l(AB)$ = ఎంత?

సాధన : లంబకోణం త్రిభుజం ABC లో $\angle C = 90^\circ$ కాబట్టి భుజం AB కర్ణం అవుతుంది. పైథాగోరస్ సిద్ధాంతం ప్రకారం.

$$l(AB)^2 = l(AC)^2 + l(BC)^2$$

$$= 5^2 + 12^2$$

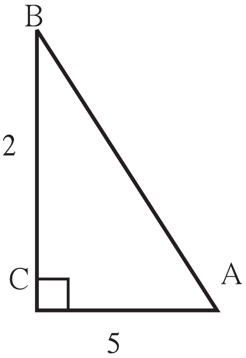
$$= 25 + 144$$

$$\therefore l(AB)^2 = 169$$

$$\therefore l(AB)^2 = 13^2$$

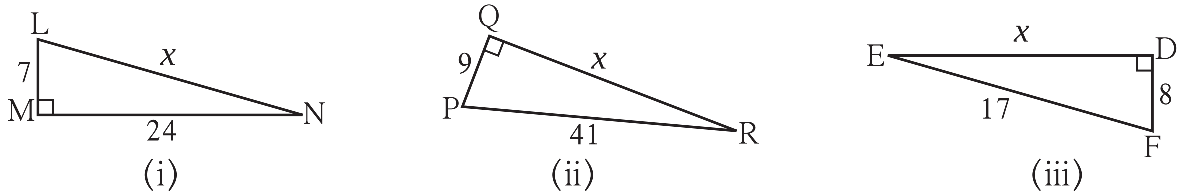
$$\therefore l(AB) = 13$$

$\therefore$ రేఖ AB పొడవు = 13 సెం.మీ.



అభ్యాసమాలిక 48

1. క్రింది పటాలను చూసి x విలువను కనుగొనండి.



2. లంబకోణ ΔPQR లో $\angle P = 90^0$, $l(PQ) = 24$ సెం.మీ. మరియు $l(PR) = 10$ సెం.మీ. అయినచో, రేఖ QR పొడవును కనుగొనండి.
3. లంబకోణ ΔLMN లో $\angle M = 90^0$, $l(LM) = 12$ సెం.మీ. మరియు $l(LN) = 20$ సెం.మీ. అయినచో, రేఖ MN పొడవును కనుగొనండి.
4. 15 మీ. పొడవైన ఒక నిచ్చెన నేల నుంచి 9 మీటర్ల ఎత్తులోనున్న కిటికీ వరకు చేరుతుంది. అయితే గోడపునాది మరియు నిచ్చెన అడుగుభాగంల మధ్యదూరాన్ని కనుగొనండి.

తెలుసుకొందాం.

సహజ సంఖ్యలలోని త్రికుటాలలో పెద్ద సంఖ్య యొక్క వర్గం ఇతర రెండు సంఖ్యల వర్గాల మొత్తమంత ఉన్నచో, వాటిని **పైథాగోరియస్ త్రికుటం** అని అంటారు. ఏ త్రిభుజంయొక్క భుజాల పొడవులు ఇలా త్రికుటంలోని సంఖ్యలచే చూపబడిన, ఆ త్రిభుజం లంబకోణత్రిభుజం అవుతుంది.

ఉదా: (7, 24, 25) ఈ సంఖ్యాసమూహం పైథాగరస్ త్రికుటమేనా?

7, 24, 25 ప్రతి సంఖ్య వర్గాన్ని రాద్దాం.

$7^2 = 49,\ 24^2 = 576,\ 25^2 = 625$

$\therefore\ 49 + 576 = 625$

$\therefore\ 7^2 + 24^2 = 25^2$

$\therefore$ 7, 24 మరియు 25 లు పైథా గోరియస్ త్రికుటం.

ఉపక్రమం : 1 నుంచి 50 వరకు గల సంఖ్యా సమూహంలోని సంఖ్యలను చూసి, వాటిలో పైథాగోరస్ త్రికుటాలను వెదకండి.

అభ్యాసమాలిక 49

1. క్రింద కొన్ని త్రికుటములు ఇవ్వబడినవి. వాటిలో పైథాగోరియస్ త్రికుటము లేవో నిర్ణయించండి.

   (i) 3 , 4 , 5   (ii) 2 , 4 , 5

   (iii) 4 , 5 , 6   (iv) 2 , 6 , 7

   (v) 9 , 40 , 41   (vi) 4 , 7 , 8

2. క్రింద కొన్ని త్రిభుజముల భుజాలు ఇవ్వబడినవి. వాటిని బట్టి ఏ త్రిభుజాలు లంబకోణ త్రిభుజాలో గుర్తించండి.

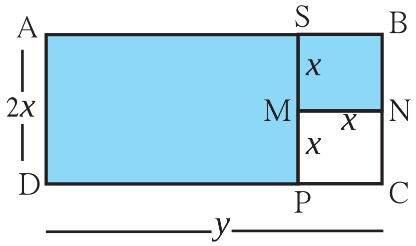
   (i) 8, 15, 17   (ii) 11, 12, 15   (iii) 11, 60, 61   (iv) 1.5, 1.6, 1.7

   (v) 40, 20, 30

14 బీజీయసూత్రాలు – వర్గాల విస్తరణ

RQCD6Q

కొంచెం గుర్తు తెచ్చుకొందాం.



ప్రక్కనున్న పటంలో దీర్ఘచతురస్రం ABCD చూపబడినది. ఈ దీర్ఘచతురస్రం పొడవు y ప్రమాణం మరియు వెడల్పు $(2x)$ ప్రమాణం గలవు. ఈ దీర్ఘచతురస్రాకార ముక్కనుంచి x ప్రమాణం భుజం గల చతురస్రం కత్తిరించబడినది. రంగు వేయబడిన భాగం వైశాల్యం కనుగొనడానికి. బీజీయ రాశులపై చేయు క్రియలను ఉపయోగించవచ్చు.

దీర్ఘచతురస్రం ABCD వైశాల్యంను A(□ABCD) అని రాస్తాం.

రంగువేసిన భాగంవైశాల్యం = A(□ABCD) – A(□MNCP) = $2xy - x^2$

రంగువేసిన భాగంవైశాల్యం = A(□ASPD) + A(□SBNM) = $(y - x) \times 2x + x^2$

$= 2xy - 2x^2 + x^2$

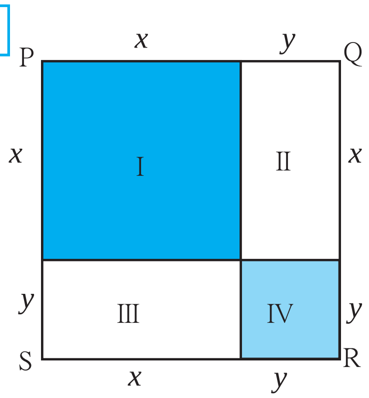
$= 2xy - x^2$

తెలుసుకొందాం.

వర్గాల విస్తరణ

బీజీయ సమాసములను గుణించగా వచ్చురాశి, ఆ గుణకారము యొక్క విస్తరణ అవుతుంది. ప్రత్యేక రకమైన రాశుల విస్తరణ సులువుగా రాయడానికి సూత్రాలు తయారు చేయబడుతాయి. వాటిలో కొన్ని సూత్రాలను మనం చూద్దాం.

కృత్యం I



- ప్రక్కనున్న పటం □PQRS అను చతురస్రం యొక్క భుజం $(x + y)$.

  ∴ A (□PQRS) = $(x + y)^2$

PQRS చతురస్రం I, II, III, IV ఇలా విభజించబడినది. PQRS చతురస్రం వైశాల్యం I, II, III, IV దీర్ఘచతురస్రాల యొక్క వైశాల్యాలమొత్తం అవుతుంది.

∴ A (□PQRS)=A (దీర్ఘచతురస్రం I)+A (దీర్ఘచతురస్రం II)+A (దీర్ఘచతురస్రం III)+A (దీర్ఘచతురస్రం IV)

$(x + y)^2 = x^2 + xy + xy + y^2 = x^2 + 2xy + y^2$

$\therefore \ (x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

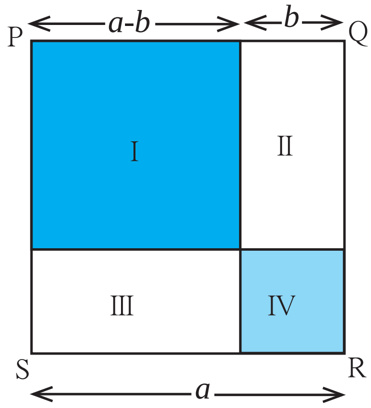
ఇప్పుడు $(x + y)^2$ ఈ బీజీయ రాశులను గుణిద్దాం.

$(x + y)(x + y) = x(x + y) + y(x + y)$

$= x^2 + xy + yx + y^2 \qquad \therefore \ (x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

$(x + y)$ ఈ ద్విపది యొక్క వర్గం ద్వారా లభించిన బీజీయ రాశి, వైశాల్యం యొక్క కొలతలను బట్టి లభించిన రాశి యంతనే ఉంది. ∴ $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ ఇది ద్విపది వర్గ విస్తరణ సూత్రం అవుతుంది.

కృత్యం II ప్రక్కనున పటం PQRS అనునది a భుజంగల చతురస్రం. దీనిని 4 దీర్ఘచతురస్రాలుగా విభజించారు.
ఉదా.: $(a - b)$ భుజంగల చతురస్రం, b భుజంగల చతురస్రం, $(a-b)$ మరియు b భుజాలుగల 2 దీర్ఘచతురస్రాలు.
A (చతురస్రం I)+A (దీర్ఘచతురస్రం II)+A (దీర్ఘచతురస్రం III) + A (చతురస్రం IV) = A (□PQRS)



$$(a - b)^2 + (a - b)\,b + (a - b)\,b + b^2 = a^2$$

$$(a - b)^2 + 2ab - 2b^2 + b^2 = a^2$$

$$(a - b)^2 + 2ab - b^2 = a^2$$

$$\therefore\ (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

బీజీయ రాశులను గుణించి సూత్రాన్ని తయారు చేద్దాం.

$$(a - b)^2 = (a - b) \times (a - b)$$
$$= a\,(a - b) - b\,(a - b)$$
$$= a^2 - ab - ab + b^2$$
$$= a^2 - 2ab + b^2$$

ఇది నాకర్థమైంది.

- $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

వర్గ విస్తరణ సూత్రాలలో a మరియు b లకై ఏ సంఖ్యలను తీసుకొన్నను, దానిని పరీక్షించుకోవచ్చు.
ఉదా: $a = 5,\ b = 3$

$(a + b)^2 = (5 + 3)^2 = 8^2 = 64$
$a^2 + 2ab + b^2 = 5^2 + 2 \times 5 \times 3 + 3^2$
$= 25 + 30 + 9 = 64$

$(a - b)^2 = (5 - 3)^2 = 2^2 = 4$
$a^2 - 2ab + b^2 = 5^2 - 2 \times 5 \times 3 + 3^2$
$= 25 - 30 + 9 = 4$

క్రింది విలువలు తీసుకొని వర్గసూత్రాలను పరీక్షించండి.

(i) $a = -7,\ b = 8$ (ii) $a = 11,\ b = 3$ (iii) $a = 2.5,\ b = 1.2$

విస్తరించండి.

ఉదా: $(2x + 3y)^2$
$= (2x)^2 + 2(2x) \times (3y) + (3y)^2$
$= 4x^2 + 12xy + 9y^2$

ఉదా: $(5x - 4)^2$
$= (5x)^2 - 2(5x) \times (4) + 4^2$
$= 25x^2 - 40x + 16$

ఉదా: $(51)^2$
$= (50 + 1)^2$
$= 50^2 + 2 \times 50 \times 1 + 1 \times 1$
$= 2500 + 100 + 1$
$= 2601$

ఉదా: $(98)^2$
$= (100 - 2)^2$
$= 100^2 - 2 \times 100 \times 2 + 2^2$
$= 10000 - 400 + 4$
$= 9604$

అభ్యాసమాలిక 50

1. విస్తరించండి:

   (i) $(5a + 6b)^2$ (ii) $\left(\frac{a}{2}+\frac{b}{3}\right)^2$ (iii) $(2p - 3q)^2$ (iv) $\left(x-\frac{2}{x}\right)^2$

   (v) $(ax + by)^2$ (vi) $(7m - 4)^2$ (vii) $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2$ (viii) $\left(a-\frac{1}{a}\right)^2$

2. $(8 - \frac{1}{x})$ ఈ ద్విపది యొక్క వర్గం కిందివాటిలో ఏది? సరియైన పర్యాయాన్ని రాయండి.

   (i) $64 - \frac{1}{x^2}$ (ii) $64 + \frac{1}{x^2}$ (iii) $64 - \frac{16}{x} + \frac{1}{x^2}$ (iv) $64 + \frac{16}{x} + \frac{1}{x^2}$

3. $m^2n^2 + 14mnpq + 49p^2q^2$ ఈ వర్గ విస్తరణరూపం క్రింది వాటిలో ఏ సమాసమునకు చెందినది?

   (i) $(m + n)(p + q)$ (ii) $(mn - pq)$ (iii) $(7mn + pq)$ (iv) $(mn + 7pq)$

4. విస్తరణ సూత్రాన్ని ఉపయోగించి విలువను కనుగొనండి.

   (i) $(997)^2$ (ii) $(102)^2$ (iii) $(97)^2$ (iv) $(1005)^2$

తెలుసుకొందాం.

✻ $(a + b)$ $(a - b)$ యొక్క విస్తరణ

$$\begin{aligned}(a + b)(a - b) &= (a + b) \times (a - b)\\ &= a\,(a - b) + b\,(a - b)\\ &= a^2 - ab + ba - b^2\\ &= a^2 - b^2\\ (a + b)(a - b) &= a^2 - b^2\end{aligned}$$

ఇది నాకర్థమైంది.

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

ఉదా: $(3x + 4y)(3x - 4y) = (3x)^2 - (4y)^2 = 9x^2 - 16y^2$

ఉదా: $102 \times 98 = (100 + 2)(100 - 2) = (100)^2 - (2)^2 = 10000 - 4 = 9996$

అభ్యాసమాలిక 51

1. విస్తరణ సూత్రాన్నుపయోగించి క్రింది వాటి లబ్ధాన్ని రాయండి.

   (i) $(x + y)(x - y)$ (ii) $(3x - 5)(3x + 5)$

   (iii) $(a + 6)(a - 6)$ (iv) $\left(\frac{x}{5}+6\right)\left(\frac{x}{5}-6\right)$

2. విస్తరణ సూత్రాన్నుపయోగించి విలువను కనుగొనండి.

   (i) 502×498 (ii) 97×103 (iii) 54×46 (iv) 98×102

తెలుసుకొందాం.

బీజీయ సమాసములను కారణరాసులుగా విభజించుట.

మనం పూర్ణాంక సంఖ్యలను కారణాంకాలుగా విభజించడం నేర్చుకొనియున్నాం. ఇప్పుడు బీజీయసమాసమును కారణరాసులుగా విభజించే క్రియను చూద్దాం. ముందుగా, ఏకపది యొక్క కారణరాసులను చూద్దాం.

$15 = 3 \times 5$ అనగా 3 మరియు 5, 15 యొక్క కారణాంకాలవుతాయి.

అలాగే $3x = 3 \times x$ అనగా 3 మరియు x లు $3x$ యొక్క కారణరాసులవుతాయి.

$5t^2$ ఈ రాశిని చూడండి.. $5t^2 = 5 \times t^2 = 5 \times t \times t$

$1, 5, t, t^2, 5t, 5t^2$ ఇవన్నియు $5t^2$ యొక్క కారణరాసులవుతాయి.

$6\ ab^2 = 2 \times 3 \times a \times b \times b$

ఏకపదిని కారణరాసులుగా విభజించుచున్నపుడు ముందుగా సహగుణకంను కారణరాసులుగా విభజించవస్తే, విభజించండి. తర్వాత చరరాశిని కారణరాసులుగా విభజించాలి.

అభ్యాసమాలిక 52

⦿ క్రింది రాశుల అన్ని కారణరాసులను విడదీసి, ఆరాశిని గుణకారరూపంలో రాయండి.

(i) $201\ a^3 b^2$ (ii) $91\ xyt^2$ (iii) $24\ a^2 b^2$ (iv) tr^2s^3

తెలుసుకొందాం.

ద్విపదిని కారణరాసులుగా విభజించుట.

$4xy + 8xy^2$ ఈ ద్విపదిలో ప్రతి పదమునకు $4x$ మరియు y లు కారణరాసులవుతాయి.

$\therefore \quad 4xy + 8xy^2 = 4(xy + 2xy^2) = 4x\ (y + 2xy) = 4xy\ (1 + 2y)$

రెండు పదములకు ఉమ్మడి కారణాంకాన్ని వెదికి, దానిని బ్రాకెట్ బయట లబ్దరూపంలో రాస్తూ పోయినచో, ద్విపదిని కారణరాసులుగా విభజించవచ్చు.

$9a^2bc+12abc^2 = 3(3a^2bc+4abc^2)=3abc\ (3a+4c)$ ఈ విధంగా కారణరాసులుగా విభజించవచ్చును.

$(a + b)\ (a - b) = a^2 - b^2$ ఈ సూత్రం మనకు తెలుసుకదా.

దీనిని బట్టి, $a^2 - b^2 = (a + b)\ (a - b)$ ఇలాకూడా కారణరాసులను పొందవచ్చు..

కారణారాసులుగా విభజించండి :

ఉదా: $a^2 - 4b^2 = a^2 - (2b)^2$
$= (a + 2b)\ (a - 2b)$

ఉదా: $3a^2 - 27b^2 = 3(a^2 - 9b^2)$
$= 3(a + 3b)\ (a - 3b)$

అభ్యాసమాలిక 53

⦿ క్రింది రాశులను కారణరాసులుగా విభజించండి.

(i) $p^2 - q^2$ (ii) $4x^2 - 25y^2$ (iii) $y^2 - 4$ (iv) $p^2 - \frac{1}{25}$

(v) $9x^2 - \frac{1}{16}y^2$ (vi) $x^2 - \frac{1}{x^2}$ (vii) $a^2b - ab$ (viii) $4x^2y - 6x^2$

(ix) $\frac{1}{2}y^2 - 8z^2$ (x) $2x^2 - 8y^2$

❑❑❑

15 సాంఖ్యకశాస్త్రం

RQL980

తెలుసుకొందాం.

సరాసరి

అస్మితాకు రోజు ఇంటినుండి సైకిల్‌పై పాఠశాలకు వెళ్ళడానికి సరాసరి ఎన్ని నిమిషాలు పడుతుందో క్రింద ఇచ్చారు అస్మితాకు సోమవారం నుంచి శనివారం వరకు సైకిల్‌పై పాఠశాలకు వెళ్ళడానికి పట్టు సమయం క్రింది పట్టికలో ఇవ్వబడినది.

వారం	సోమవారం	మంగళవారం	బుధవారం	గురువారం	శుక్రవారం	శనివారం
నిమిషాలు	20	20	22	18	18	20

దీనిని బట్టి చూస్తే, ఆమెకు ఒకసారి 18 నిమిషాలు, మరోసారి 22 నిమిషాలు, ఇంకోసారి 20 నిమిషాలు పడుతుందని తెలుస్తుంది. పాఠశాలకు వెళ్ళే 6 రోజులనుగూర్చి ఆలోచించినచో, ఆమెకు ప్రతి రోజు పాఠశాలకు వెళ్ళడానికి సుమారుగా ఎన్ని నిమిషాలు పడుతుంది?

గణితంలో ఇలా సుమారుగా చెప్పడానికి సరాసరిని తీస్తారు. 6 రోజుల నిమిషాలను కూడి, ఆమొత్తాన్ని 6చే భాగించగా ఏ సంఖ్యవస్తుందో అది సుమారుగా రోజు పట్టే సమయమవుతుంది. అది ఈ అన్ని సంఖ్యల సరాసరి అవుతుంది.

$$\text{సరాసరి} = \frac{\text{ఆరు రోజులు పాఠశాలకు వెళ్ళడానికి పట్టు నిమిషాల మొత్తం}}{\text{మొత్తం రోజులు}}$$

$$= \frac{20 + 20 + 22 + 18 + 18 + 20}{6} = \frac{118}{6} = 19\frac{2}{3}$$

అస్మితాకు పాఠశాలకు వెళ్ళడానికి రోజు సరాసరి $19\frac{2}{3}$ నిమిషాల సమయం పడుతుంది.

ఉదా: ఒక పాఠశాల వారు, విద్యార్థుల ఇళ్ళు పాఠశాలనుంచి ఎంత దూరంలో ఉన్నాయో తెలుసుకోవడానికి సర్వే చేశారు. వాటిలోనుంచి క్రింది ఆరుగురు విద్యార్థులవి వారి ఇళ్ళనుంచి పాఠశాలకుగల మధ్య దూరాలనిచ్చారు. ఆ దూరాల సరాసరిని కనుగొందాం.

950 మీ., 800 మీ., 700 మీ., 1.5 కి.మీ., 1 కి.మీ., 750 మీ.

సాధన : విద్యార్థుల ఇళ్ళనుంచి పాఠశాల వరకు గల మధ్య దూరాల సరాసరిని కనుగొనడానికై అన్ని దూరాలను ఒకే ప్రమాణంలో లెక్కించవలసి వస్తుంది.

$$\text{సరాసరి} = \frac{\text{ఆరుగురు విద్యార్థుల ఇళ్ళు మరియు పాఠశాల మధ్య దూరాల మొత్తం}}{\text{మొత్తం విద్యార్థులు}}$$

1 కి.మీ. = 1000 మీటర్లు
1.5 కి.మీ. = 1500 మీటర్లు

$$= \frac{950 + 800 + 700 + 1500 + 1000 + 750}{6} = \frac{5700}{6} = 950 \text{ మీ}$$

పాఠశాలలోని విద్యార్థుల యొక్క ఇళ్ళు మరియు పాఠశాల మధ్య దూరం సరాసరి 950 మీటర్లుగలదు.

పదండి, చర్చిద్దాం.

ఉదా: ఒక వారంలో ఏడు రోజులూ రుత్వికా తాడు గెంతడం అభ్యాసం చేస్తుండేది. ప్రతి రోజు ఆమె ఒక నిమిషంలో వేసిన గెంతుల సంఖ్య క్రిందనీయబడినది.

60, 62, 61, 60, 59, 63, 58

$$\text{సరాసరి} = \frac{\text{ఏడు రోజులలో వేసిన గెంతుల మొత్తం}}{\text{మొత్తం రోజులు}}$$

$$= \frac{\square + \square + \square + \square + \square + \square + \square}{7} = \frac{\square}{\square}$$

ఒక నిమిషంలో వేసిన గెంతుల సరాసరి = 60.42

ఏ సంఖ్యను గూర్చి వివరాలు కావాలో, వాటి నమూనాలు ఎన్ని మనకిచ్చిన అంశాలలో దొరుకుతాయో, వాటిని దత్తాంశాలు అని అంటారు.

తాడు గెంతులను సహజ సంఖ్యలలో లెక్కిస్తారని మనకు తెలుసు. ఏ రోజుగూడా దశాంశసంఖ్యలో గెంతులు వేయలేదు. కానీ సరాసరి దశాంశ రూపంలో రావచ్చును.

ఇది నాకర్థమైంది.

$$\text{సరాసరి} = \frac{\text{ఇచ్చిన వివరాలలోని అన్ని దత్తాంశాల మొత్తం}}{\text{మొత్తం దత్తాంశాల సంఖ్య}}$$

ఉపక్రమం:
- తరగతిలోని విద్యార్థులను 10 మందిని ఒక సమూహంగా చేసి, సమూహంలోని పిల్లల యొక్క ఎత్తుల సరాసరిని కనుగొనండి.
- తరగతి ఉపాధ్యాయుని నుంచి హాజరు పట్టికను తీసుకొని ఒక వారం రోజుల సరాసరి హాజరును కనుగొనండి.

అభ్యాసమాలిక 54

1. ఒక పట్టణంలో ఒక వారంలో కురిసిన వర్షం మి.మీ.లలో ఇవ్వబడినది. దానినిబట్టి ఆ వారంలో వర్షం సరాసరిని కనుగొనండి.
   9, 11, 8, 20, 10, 16, 12
2. పాఠశాల స్నేహసమ్మేళనంలో స్వయంసిద్ధి మహిళా పొదుపు సంఘంవారు తమ ఆహారపదార్థాల స్టాల్ పెట్టారు. ప్రతి గంటకు జరిగిన అమ్మకాలు ₹ 960, ₹ 830, ₹ 945, ₹ 800, ₹ 847, ₹ 970 ఈ విధంగా ఉండెను. అయిన గంటకు సరాసరి ఎన్ని రూపాయల అమ్మకాలు జరిగాయి?
3. విదర్భలో 5 సంవత్సరాలలో కురిసిన వర్షపాతం నమోదు క్రిందచూపబడినది. దానిని బట్టి 5 సంవత్సరాలలోని వర్షం సరాసరిని కనుగొనండి.
   900 మి.మీ., 650 మి.మీ., 450 మి.మీ., 733 మి.మీ., 400 మి.మీ.
4. ఒక రైతు పశుగ్రాసం సంచులను తెచ్చాడు. వాటి బరువులు కి.గ్రా. లలో క్రిందనీయబడినవి. అయితే సంచుల సరాసరి బరువును కనుగొనండి.
   49.8, 49.7, 49.5, 49.3, 50, 48.9, 49.2, 48.8

తెలుసుకొందాం.

పౌనఃపున్య విభజన పట్టిక (Frequency distribution table)

అప్పుడప్పుడు ఇచ్చిన వివరాలలో కొన్ని దత్తాంశాలు అనేకసార్లు వస్తాయి. **ఏదేని దత్తాంశం ఎన్ని సార్లు వచ్చిందో చూపే సంఖ్యను, ఆ దత్తాంశాల పౌనః పున్యం అని అంటారు.** అలాంటపుడు పౌనః పున్య పట్టికను తయారు చేస్తారు. ఈ పట్టికలో దత్తాంశాలు, గణన చిహ్నాలు మరియు పౌనః పున్యం ఇలామూడు స్తంభాలుంటాయి.

1. మొదటి స్తంభంలో చిన్న సంఖ్యనుంచి ప్రారంభించి పెద్ద సంఖ్యవరకుగల దత్తాంశాలను రాయండి.
   ఉదా: 1, 2, 3, 4, 5, 6 సంఖ్యలను క్రమ పద్ధతిలో రాయిండి.
2. వివరాలలోని సంఖ్యలను వరసగా చదవండి. ప్రతీసారి వివరాలలోని సంఖ్యను చదవగానే పట్టికలో ఆ సంఖ్య దగ్గరున్న స్తంభంలో 'ǀ' ఇలా గుర్తును గీయండి. ఈ గుర్తును గణన చిహ్నం అని అంటారు.

   ఉదా: 3 అనే సంఖ్యను చదివి ఆ సంఖ్యకు ఎదురుగా రెండవ స్తంభంలో 'ǀ' ఇలా గుర్తును గీయండి. నాలుగు గుర్తు లవరకు ǀǀǀǀ ఇలా గుర్తులను గీసాక, ఐదవ గుర్తును 卌 ఇలా గీయండి. అందువల్ల మొత్తం గణన గుర్తులను లెక్కించడం సులువవుతుంది.
3. ప్రతి సంఖ్యకు ఎదురుగా మొత్తం గణన గుర్తుల సంఖ్యను లెక్కించి రాయండి. దీనినే పౌనఃపున్యం అని అంటారు. మూడవస్తంభంలో పౌనఃపున్యంను రాయండి.
4. చివరగా అన్ని పౌనః పున్యాలను కూడతారు. దానిని N అక్షరంతో సూచిస్తారు. ఈ మొత్తం అన్ని దత్తాంశాల మొత్తమంత ఉంటుంది.

ఇచ్చిన సమాచారాన్ని బట్టి పౌనఃపున్య పట్టికను తయారు చేయుట.

ఉదా: ఒక తరగతిలోని కొంతమంది అమ్మాయిల ఇంటినుంచి పాఠశాలవరకు మధ్యగల దూరం (కి.మీ.) లలో ఇవ్వబడినది.

1, 3, 2, 4, 5, 4, 1, 3, 4, 5, 6, 4, 6, 4, 6

దీనిని బట్టి పౌనఃపున్య పట్టిక నెలాతయారు చేస్తారో చూద్దాం.

దత్తాంశాలు	గణన చిహ్నాలు	పౌనః పున్యం
1	ǀǀ	2
2	ǀ	1
3	ǀǀ	2
4	卌	5
5	ǀǀ	2
6	ǀǀǀ	3
	మొత్తం పౌనఃపున్యం	N = 15

దత్తాంశాలను లెక్కిస్తున్నపుడు, ఏ సంఖ్యను లెక్కించామో ఆ సంఖ్య గుర్తుండడానికి దానిపై గీతను గీస్తారు. మొదటి మూడు దత్తాంశాలను లెక్కించిన తర్వాత, దత్తాంశాల పట్టిక ఇవ్వబడినది

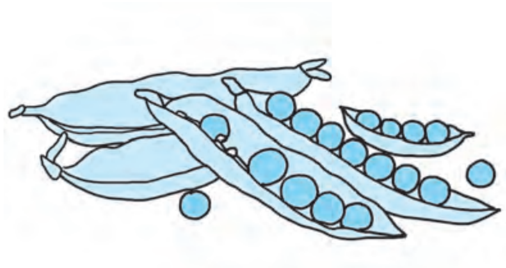
(~~1~~, ~~3~~, ~~2~~, 4, 5, 4, 1, 3, 4, 5, 6, 4, 6, 4, 6)

గణితం నా తోడు: ఇంట్లో, బజారులో

ప్రియ వాళ్ళ అమ్మ బజారు నుంచి బఠాణీ కాయలను తెచ్చింది. వాళ్ళమ్మ కాయలను తొలచడం ప్రారంభించింది. ప్రియ దగ్గరలోనే కూర్చుండి గణితం అభ్యాసం చేయుచుండెను. అనుకోకుండా ఆమె దృష్టి అమ్మ తొలుస్తున్న కాయలవైపు మళ్ళింది. కొన్నికాయలనుంచి 4 గింజలు మరికొన్ని కాయలనుంచి 7 గింజలు బయటపడ్డాయి. తర్వాత ప్రియ వాటిలో నుంచి 50 కాయలను తీసుకొని, వాటిలోని గింజలసంఖ్యను నమోదు చేసుకొంది.

ప్రియ బఠాణీ కాయలోని గింజల పౌనఃపున్య పట్టికనుతయారు చేసింది.

గింజల సంఖ్య	కాయలు–గణన చిహ్నాలు	పౌనః పున్యం
2	~~||||~~ |||	8
3	~~||||~~ ~~||||~~ ~~||||~~	15
4	~~||||~~ ~~||||~~ ||	12
5				2
6	~~||||~~ ||	7
7					3
8					3
	మొత్తం పౌనఃపుల్యం	N = 50



4, 3, 2, 4, 3, 4, 3, 3, 2, 8
2, 3, 3, 4, 3, 4, 4, 5, 2, 8
8, 2, 5, 3, 4, 4, 3, 6, 2, 3
4, 4, 3, 3, 2, 6, 4, 4, 7, 2
3, 6, 3, 6, 6, 6, 7, 6, 7, 3

అమ్మ : నీవు తొలిచిన కాయలలో సరాసరి ఎన్ని గింజలు వచ్చాయో తెలుసుకోవచ్చునా?

ప్రియా : ఈ 50 సంఖ్యలను కూడి మొత్తంను 50 చే భాగించాలి గదా? క్లిష్టమైన పని.

అమ్మ : మనం ఈ పనిని సులభం చేద్దాం. పౌనఃపున్య పట్టికలో 2 గింజలు ఎన్ని కాయలలో, 3 గింజలు ఎన్నికాయలలో మొదలైన వివరాలున్నాయి కదా?

ప్రియా : ఔను! 2 గింజలు 8 కాయలలో, 3 గింజలు 15 కాయలలో, 4 గింజలు 12 కాయలలో వగైరా వివరాలున్నాయి. ఇప్పుడు గుర్తొచ్చింది. 2×8, 3×15, 4×12 ఇలా గుణించి, వాటిని కూడితే, ఆ యాభై సంఖ్యల మొత్తం లభిస్తుంది.

అమ్మ : ఏడు చిన్న గుణకారాలు, మళ్ళీ వాటిని కూడటం కొంచెం సులభమే కదా! చాలా పెద్ద అంశాలున్నపుడు పౌనఃపున్య పట్టిక ఇలా ఉపయోగపడుతుంది.

ప్రియా : మరి, అన్ని దత్తాంశాల మొత్తం 206 వచ్చింది గనుక సరాసరి = $\frac{206}{50}$ = 4.12 అయింది.

అమ్మ : ఏ కాయలలోనైనా బఠాణీగింజలు పూర్ణాంకం లోనే ఉంటాయి. కానీ, సరాసరి దశాంశాలలో రావచ్చు. ఇక్కడ ప్రతి కాయలోను సామాన్యంగా 4 గింజలున్నాయని అనుకోవచ్చు.

ఇది నాకర్థమైంది.

- దత్తాంశాల వర్గీకరణ సులభపద్ధతిలో చేయడానికి గణన చిహ్నాలను ఉపయోగించవచ్చు.
- చిహ్నాలసంఖ్య పౌనఃపున్యమును చూపుతుంది. ఈరకమైన పట్టికను పౌనఃపున్య పట్టిక అని అంటారు.
- దత్తాంశాల సంఖ్య ఎక్కువగానున్నపుడు పౌనఃపున్య పట్టిక సరాసరిని కనుగొనడానికి ఉపయోగపడుతుంది.

అభ్యాసమాలిక 55

1. ఒక తరగతిలోని 30 మంది పిల్లల ఎత్తు (సెం.మీ.) లలో ఇవ్వబడినవి. దానిని బట్టి పౌనఃపున్య పట్టికను తయారు చేయండి.

   131, 135, 140, 138, 132, 133, 135, 133, 134, 135, 132, 133, 140, 139, 132, 131, 134, 133, 140, 140, 139, 136, 137, 136, 139, 137, 133, 134, 131, 140

2. ఒక వాడలో 50 కుటుంబాలు నివసిస్తున్నాయి. ప్రతికుటుంబలోని వ్యక్తుల సంఖ్య క్రిందనీయబడినది. దానిని బట్టి పౌనః పున్య పట్టికను తయారు చేయండి.

   5, 4, 5, 4, 5, 3, 3, 3, 4, 3, 4, 2, 3, 4, 2, 2, 2, 2, 4, 5, 1, 3, 2, 4, 5, 3, 3, 2, 4, 4, 2, 3, 4, 3, 4, 2, 3, 4, 5, 3, 2, 3, 2, 3, 4, 5, 3, 2, 3, 2.

3. ఒక పాచికను 40 సార్లు వేయగా, పై తలంపై వచ్చిన సంఖ్యలను నమోదు చేసారు. దానిని బట్టి పౌనఃపున్య పట్టికను తయారు చేయండి.

   3, 2, 5, 6, 4, 2, 3, 1, 6, 6, 2, 3, 5, 3, 5, 3, 4, 2, 4, 5, 4, 2, 6,
   3, 3, 2, 4, 3, 3, 4, 1, 4, 3, 3, 2, 2, 5, 3, 3, 4,

4. ఒక వసతిగృహం యొక్క భోజనశాలలో 30 మంది బాలురకు భోజనంలో క్రింది విధంగా రొట్టెల సంఖ్య కావాలి. దానిని బట్టి పౌనఃపున్య పట్టికను తయారు చేయండి.

   3, 2, 2, 3, 4, 5, 4, 3, 4, 5, 2, 3, 4, 3, 2, 5, 4, 4, 4, 3, 3, 2, 2, 2, 3, 4, 3, 2, 3, 2

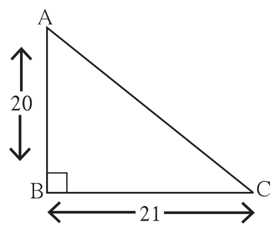
సామాన్య శాస్త్రంలోని అన్ని శాఖలకు, వైద్యశాఖ, భూగోళం, ఆర్థికశాస్త్రం,
సమాజశాస్త్రం మొదలైన విషయాలలో సరాసరి ఉపయోగ పడుతుంది.

2వ సంకీర్ణ ప్రశ్న సంగ్రహం

1. అంజలి 15000 రూపాయలు సం॥నూ॥కి 9 చొప్పున కొన్ని సంవత్సరాల కోసం బ్యాంక్‌లో పెట్టెను, ఆమెకు గడువు చివర 5400 రూపాయల సరళవడ్డీ లభించినచో, ఆమె ఎన్ని సంవత్సరాల కోసం డబ్బు పెట్టెను?
2. ఒక రోడ్డుపై తారువేయు పని చేయుటకు 10 మంది కూలీలకు 4 రోజులు పట్టినచో 8 మంది కూలీలకు ఎన్ని రోజులు పట్టును?
3. నసీరుద్దీన్ మరియు మహేశ్‌లు, ఒక్కొక్కరు ₹ 40,000 మరియు ₹ 60,000 పెట్టుబడితో వ్యాపారాన్ని ప్రారంభించారు. ఆ వ్యాపారంలో వారికి 30% లాభంకల్గినచో, ఒక్కొక్కరికి ఎంత లాభం వచ్చింది?
4. ఒక వృత్త వ్యాసం 5.6 సెం.మీ. ఉన్నచో, దాని పరిధిని కనుగొనండి.
5. విస్తరించండి.

   (i) $(2a - 3b)^2$ (ii) $(10 + y)^2$ (iii) $\left(\frac{p}{3}+\frac{q}{4}\right)^2$ (iv) $\left(y-\frac{3}{y}\right)^2$
6. సూత్రమునుపయోగించి గుణించండి.

   (i) $(x - 5)(x + 5)$ (ii) $(2a - 13)(2a + 13)$

   (iii) $(4z - 5y)(4z + 5y)$ (iv) $(2t - 5)(2t + 5)$
7. ఒక ఎడ్లబండి చక్రం యొక్క వ్యాసం 1.05 మీటర్లుగలదు, చక్రం 1000 చుట్లు తిరిగినచో ఎడ్లబండి ఎన్ని కిలోమీటర్ల దూరం ప్రయాణించును?
8. 40 మీ. పొడవుగల ఒక దీర్ఘచతురస్రాకార తోట వైశాల్యం 1000 చ.మీ. గలదు. అయిన తోట వెడల్పు మరియు దాని చుట్టుకొలతను కనుగొనండి. ద్వారానికి 4 మీటర్ల స్థలం వదిలి తోట చుట్టు 3వరసల కంచె వేయాలి. దాని ఖర్చు ఒకమీటరుకు 250 రూ॥ అయినచో, కంచెవేయుటకు అయ్యే ఖర్చును కనుగొనండి.
9. 

   పటంలో ఇచ్చిన వివరాలను బట్టి కర్ణం AC కనుగొనండి. అలాగే ΔABC చుట్టుకొలత కనుగొనండి.
10. ఒక ఘనం యొక్క భుజం 8 సెం.మీ. ఉన్నచో, ఆ ఘనం సంపూర్ణతల వైశాల్య మెంత?
11. కారణాంకాలుగా విభజించండి. $365y^4z^3 - 146y^2z^4$

బహుపర్యాయాల ప్రశ్నలు

క్రింది పశ్నలకు పర్యాయ సమాధానాలు ఇవ్వబడినవి. ఆ సమాధానాలలోనుంచి సరియైన పర్యాయాన్ని ఎన్నుకోండి.

1. 33, 34, 35, x, 37, 38, 39 ఈ సంఖ్యల సరాసరి 36 అయినచో, x విలువ .... అవుతుంది.

   (i) 40 (ii) 32 (iii) 42 (iv) 36
2. $(61^2 - 51^2)$ ఈ వర్గసంఖ్యలను తీసివేయగా .... వస్తుంది.

   (i) 1120 (ii) 1230 (iii) 1240 (iv) 1250
3. 2600 రూపాయలను 8:5 నిష్పత్తిలో సమీర్ మరియు సునీతా వీరిద్దరికి పంచినచో, ఒక్కొక్కరి వంతుకు .... మరియు ...... రూపాయలువచ్చును.

   (i) ₹ 1500, ₹ 1100 (ii) ₹ 1300, ₹ 900

   (iii) ₹ 800, ₹ 500 (iv) ₹ 1600, ₹ 1000

సమాధానాల సూచిక

అభ్యాసమాలిక 1 **1.** -- **2.** -- **3.** త్రిభుజ అంతర్భాగంలో **4.** లంబకోణ త్రిభుజ కర్ణంపై **5.** త్రిభుజ పరివృత్త కేంద్రం గీయుట.

అభ్యాసమాలిక 2 -- **అభ్యాసమాలిక 3** --

అభ్యాసమాలిక 4 -- **అభ్యాసమాలిక 5** --

అభ్యాసమాలిక 6 **1.**(i) రేఖ MG $\cong$ రేఖ GR (ii) రేఖ MG $\cong$ రేఖ NG (iii) రేఖ GC $\cong$ రేఖ GB (iv) రేఖ GE $\cong$ రేఖ GR

2. (i) రేఖ AB $\cong$ రేఖ WA (ii) రేఖ AP $\cong$ రేఖ YC (iii) రేఖ AC $\cong$ రేఖ PY (iv) రేఖ PW $\cong$ రేఖ BY (v) రేఖ YA $\cong$ రేఖ YQ (vi) రేఖ BW $\cong$ రేఖ ZX

(పై ప్రశ్నలకు ప్రతిదానికి సరియైన సమాధానాలు అనేకం రావచ్చు.)

అభ్యాసమాలిక 7 ⦿ $\angle AOB \cong \angle BOC$, $\angle AOB \cong \angle RST$, $\angle AOC \cong \angle PQR$, $\angle DOC \cong \angle LMN$, $\angle BOC \cong \angle RST$

అభ్యాసమాలిక 8 ⦿(i) 35 (ii) −54 (iii) −36 (iv) −56 (v) 124 (vi) 84 (vii) 441 (viii) −105

అభ్యాసమాలిక 9 **1.** (i) −6 (ii) $\frac{-7}{2}$ (iii) $\frac{-3}{4}$ (iv) $\frac{-2}{3}$ (v) $\frac{-17}{4}$ (vi) 6 (vii) $\frac{5}{3}$ (viii) $\frac{-1}{6}$ (ix) $\frac{6}{5}$ (x) $\frac{1}{63}$

2. $24 \div 5$, $72 \div 15$, $-48 \div (-10)$ మొ.

3. $-5 \div 7$, $-15 \div 21$, $20 \div (-28)$ మొదలగునవి.

అభ్యాసమాలిక 10 **1.** 1 **2.** 4,5 మరియు 17,19

3. 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97 మొత్తం 16 ప్రధానసంఖ్యలు

4. 59 మరియు 61, 71 మరియు 73 **5.** (2,3),(5,7),(11,12),(17,19),(29,30) మొదలగునవి **6.** 2

అభ్యాసమాలిక 11 ⦿ (i) $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$ (ii) 3×19 (iii) 23 (iv) $2 \times 3 \times 5 \times 5$ (v) $2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3$ (vi) $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 13$ (vii) $3 \times 3 \times 5 \times 17$ (viii) $2 \times 3 \times 3 \times 19$ (ix) 13×29 (x) 13×43

అభ్యాసమాలిక 12 **1.**(i) 5 (ii) 8 (iii) 5 (iv) 1 (v) 2 (vi) 7 (vii) 3 (viii) 3 (ix) 1 (x) 21

2.(i) గసాభా 25, కనిష్ఠరూపం $\frac{11}{21}$

(ii) గసాభా 19, కనిష్ఠరూపం $\frac{4}{7}$

(iii) గసాభా 23, కనిష్ఠరూపం $\frac{7}{3}$

అభ్యాసమాలిక 13 **1.** (i) 60 (ii) 120 (iii) 288 (iv) 60 (v) 3870 (vi) 90 (vii) 1365 (viii) 180 (ix) 567 (x) 108

2. (i) 1; 1184 (ii) 1; 2346 (iii) 15; 60 (iv) 9; 126 (v) 26; 312

అభ్యాసమాలిక 14 **1.** (i) 30 (ii)40, 20

2. (i) 14; 28 (ii) 16; 32 (iii) 17; 510 (iv) 23; 69 (v) 7; 588

3. (i) 252 (ii) 150 (iii) 1008 (iv) 60 (v)240

4. 365 **5.** (i) $\frac{12}{11}$ (ii) $\frac{17}{19}$ (iii) $\frac{23}{29}$ **6.** 144

7. 255 **8.** 14 మీ. **9.** 18 మరియు 20

అభ్యాసమాలిక 15 **1.** అంతర్భాగంలోని బిందువులు : R,C,N,X

బాహ్యభాగంలోని బిందువులు : T, U, Q, V, Y

కోణం యొక్క భుజంపైన గల బిందువులు : A, W, G, B

2. $\angle ANB$ మరియు $\angle BNC$, $\angle BNC$ మరియు $\angle ANC$, $\angle ANC$ మరియు $\angle ANB$, $\angle PQR$ మరియు $\angle PQT$

3. (i) ఆసన్నంగా ఉన్నాయి. (ii) మరియు (iii) ఆసన్నంగా లేవు ఎందుకంటే అంతర్భాగం భిన్నంగా లేదు. (iv) ఆసన్నంగా ఉన్నాయి.

అభ్యాసమాలిక 16 **1.** (i) 50° (ii) 27° (iii) 45° (iv) 35° (v) 70° (vi) 0° (vii) $(90-x)^\circ$

2. 20° మరియు 70°

అభ్యాసమాలిక 17 **1.** (i) 165° (ii) 95° (iii) 60° (iv) 143° (v) 72° (vi) 180° (vii) $(180-a)^\circ$

2. పూరకకోణాల జతలు : (i) $\angle B$ మరియు $\angle N$

(ii) ∠D మరియు ∠F (iii) ∠Y మరియు ∠E

సంపూరకకోణాల జతలు : (i) ∠B మరియు ∠G (ii) ∠N మరియు ∠J. **3.** ∠X మరియు ∠Z ఒక దానికొకటి పూరక కోణాలు. **4.** 65° మరియు 25°

5. (i) ∠P మరియు ∠M (ii) ∠T మరియు ∠N (iii) ∠P మరియు ∠T (iv) ∠M మరియు ∠N(v) ∠P మరియు ∠N (vi) ∠M మరియు ∠T

6. 160° **7.** $m\angle A = (160-x)°$

అభ్యాసమాలిక 18 **1.** కిరణం PL మరియు కిరణం PM; కిరణం PN మరియు కిరణం PT.

2. కాదు ఎందుకంటే ఆ కిరణాలతో ఒక రేఖ తయారుకాదు.

అభ్యాసమాలిక 19 ---

అభ్యాసమాలిక 20 **1.** $m\angle APB = 133°$, $m\angle BPC = 47°$, $m\angle CPD = 133°$

2. $m\angle PMS = (180 - x)°$, $m\angle SMQ = x°$, $m\angle QMR = (180 - x)°$

అభ్యాసమాలిక 21 **1.** $m\angle A = m\angle B = 70°$

2. 40°, 60°, 80° **3.** $m\angle ACB = 34°$, $m\angle ACD = 146°$, $m\angle A = m\angle B = 73°$

అభ్యాసమాలిక 22 **1.** (i) $\frac{71}{252}$ (ii) $\frac{67}{15}$ (iii) $\frac{430}{323}$ (iv) $\frac{255}{77}$ **2.** (i) $\frac{16}{77}$ (ii) $\frac{14}{45}$ (iii) $\frac{-13}{6}$ (iv) $\frac{7}{6}$

3. (i) $\frac{6}{55}$ (ii) $\frac{16}{25}$ (iii) $-\frac{2}{3}$ (iv) 0

4. (i) $\frac{5}{2}$ (ii) $-\frac{8}{3}$ (iii) $-\frac{39}{17}$ (iv) $\frac{1}{7}$ (v) $-\frac{3}{22}$

5. (i) $\frac{4}{3}$ (ii) $\frac{100}{121}$ (iii) $\frac{7}{4}$ (iv) $-\frac{1}{6}$

(v) $\frac{2}{5}$ (vi) $-\frac{10}{7}$ (vii) $-\frac{9}{88}$ (viii) $\frac{25}{2}$

అభ్యాసమాలిక 23 ⊙(i) $\frac{3}{7},\frac{4}{7},\frac{5}{7}$ (ii) $\frac{23}{30},\frac{22}{30},\frac{21}{30}$

(iii) $-\frac{9}{15},-\frac{7}{15},\frac{4}{15}$ (iv) $\frac{6}{9},0,-\frac{4}{9}$ (v) $-\frac{2}{4},-\frac{1}{4},\frac{3}{4}$

(vi) $\frac{17}{24},\frac{11}{24},\frac{-13}{24}$ (vii) $\frac{6}{7},\frac{8}{7},\frac{9}{7}$

(viii) $-\frac{1}{8},-\frac{2}{8},-\frac{5}{8}$ మొదలగునవి.

అభ్యాసమాలిక 24 ⊙(i) 3.25 (ii) −0.875 (iii) 7.6 (iv) 0.416 (v) $3.\overline{142857}$ (vi) 1.3 (vii) 0.7

అభ్యాసమాలిక 25 **1.** 149 **2.** 0 **3.** 4 **4.** 60 **5.** $\frac{17}{20}$

అభ్యాసమాలిక 26 **1.** -- **2.**(i) 1024 (ii) 125 (iii) 2401 (iv) −216 (v) 729 (vi) 8 (vii) $\frac{64}{125}$ (viii) $\frac{1}{16}$

అభ్యాసమాలిక 27 ⊙(i) 7^6 (ii) $(-11)^7$ (iii) $\left(\frac{6}{7}\right)^8$

(iv) $\left(-\frac{3}{2}\right)^8$ (v) $(a)^{23}$ (vi) $\left(\frac{p}{5}\right)^{10}$

అభ్యాసమాలిక 28

1. (i) a^2 (ii) m^{-3} (iii) p^{-10} (iv) 1

2.(i) 1 (ii) 49 (iii) $\frac{4}{5}$ (iv) 16

అభ్యాసమాలిక 29 **1.** (i) $\left(\frac{15}{12}\right)^{12}$ (ii) 3^{-8}

(iii) $\left(\frac{1}{7}\right)^{-12}$ (iv) $\left(\frac{2}{5}\right)^{6}$ (v) 6^{20} (vi) $\left(\frac{6}{7}\right)^{10}$

(vii) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-20}$ (viii) $\left(\frac{5}{8}\right)^{-6}$ (ix) $\left(\frac{3}{4}\right)^{6}$ (x) $\left(\frac{2}{5}\right)^{-6}$

2. (i) $\left(\frac{7}{2}\right)^{2}$ (ii) $\left(\frac{3}{11}\right)^{5}$ (iii) $\left(\frac{6}{1}\right)^{3}$ లేదా 6^3

(iv) $\frac{1}{y^4}$

అభ్యాసమాలిక 30 **1.** (i) 25 (ii) 35 (iii) 17 (iv) 64 (v) 33

అభ్యాసమాలిక 31 --

అభ్యాసమాలిక 32 ⊙(i) ఏకపది = $7x$; a ; 4

(ii) ద్విపది = $5y - 7z$; $5m - 3$

(iii) త్రిపది = $3x^3 - 5x^2 - 11$; $3y^2 - 7y + 5$

(iv) బహుపది = $1 - 8a - 7a^2 - 7a^3$

అభ్యాసమాలిక 33 ⊙(i) $22p + 18q$

(ii) $18a + 24b + 21c$ (iii) $19x^2 - 20y^2$

(iv) $-11a^2b^2 + 44c$ (v) $3y^2 - 8y + 9$

(vi) $4y^2 + 10y - 8$

అభ్యాసమాలిక 34 ⊙(i) $xy + 7z$
(ii) $4x + 2y + 4z$
(iii) $-12x^2 + 16xy + 20y^2$
(iv) $-10x^2 + 24xy + 16y^2$
(v) $-12x + 30z - 19y$

అభ్యాసమాలిక 35 **1.** (i) $288x^2y^2$ (ii) $92xy^3z^2$
(iii) $48ac + 68bc$ (iv) $36x^2 + 73xy + 35y^2$
2. $(40x^2 + 49x + 15)$ చ.సెం.మీ.

అభ్యాసమాలిక 36 **1.** $-2(7x + 12y)$
2. $-345x^5y^4z^3$ **3.** (i) 1 (ii) $\frac{5}{2}$ (iii) 1 (iv) 3
(v) −5 (vi) $\frac{69}{5}$ **4.** 16 సంవత్సరాలు, 11 సంవత్సరాలు
5. 130 **6.** 30 నోట్లు **7.** 132, 66

సంకీర్ణ ప్రశ్న సంగ్రహం 1 **1.** (i) 80 (ii) −6 (iii) −48 (iv) 25 (v) 8 (vi) −100 **2.** (i) 15; 675 (ii) 38; 228 (iii) 17; 1683 (iv) 8; 96
3. (i) $\frac{14}{17}$ (ii) $\frac{13}{11}$ (iii) $\frac{3}{4}$ **4.** (i) 28 (ii) 15 (iii) 36 (iv) 45 (v) 16 **5.** --
6. (i) 77 (ii) 25 (iii) $\frac{49}{24}$ (iv) 1026
7. (i) $\frac{41}{48}$ (ii) $\frac{23}{20}$ (iii) −8 (iv) $\frac{63}{20}$ **8.** --
9. -- **10.** -- **11.** -- **12.** -- **13.** (i) 55° (ii) $(90 - a)°$ (iii) 68° (iv) $(50 + x)°$
14. (i) 69° (ii) 133° (iii) 0° (iv) $(90 + x)°$
15. -- **16.** (i) 110° (ii) 55° (iii) 55°
17. (i) 5^7 (ii) $\left(\frac{3}{2}\right)^3$ (iii) $\left(\frac{7}{2}\right)^2$ (iv) $\left(\frac{4}{5}\right)^3$
18. (i) 1 (ii) $\frac{1}{1000}$ (iii) 64 (iv) 16
19. (i) $8a + 10b - 13c$
(ii) $21x^2 - 10xy - 16y^2$
(iii) $18m - n$ (iv) $2m - 19n + 11p$
20. (i) $x = -10$ (ii) $y = 5$

బహుళైచ్ఛిక ప్రశ్నలు **1.** పరివృత్త కేంద్రం **2.** $\left(\frac{7}{3}\right)^{12}$ **3.** 3
4. $\frac{3}{2}$ **5.** $10 \times 3 + (5 + 2)$

అభ్యాసమాలిక 37 **1.** ₹ 240 **2.** 32 కుర్చీలు.
3. 18 కి.గ్రా. **4.** ₹ 24000 **5.** ₹ 104000

అభ్యాసమాలిక 38 **1.** 10 రోజులు; 4 రోజులు **2.** 50 పేజీలు **3.** 2 గంటలు; 3 గంటలు **4.** 20 రోజులు

అభ్యాసమాలిక 39 **1.** ₹ 12800; ₹ 16000
2. ₹ 10000; ₹ 24000 **3.** ₹ 38000; ₹ 9120
4. ₹ 147; ₹ 343 **5.** ₹ 54000; ₹ 15120

అభ్యాసమాలిక 40 **1.** ₹ 1770
2. ₹ 25000; ₹ 375000 **3.** ₹ 14875
4. ₹ 3600 **5.** ₹ 180000

అభ్యాసమాలిక 41 **1.** 10% **2.** ₹ 300 **3.** 5 సం.
4. ₹ 41000 **5.** (i) ₹ 882, ₹ 5082
(ii) ₹ 5000, ₹ 6200 (iii) 2 సం., ₹ 8800
(iv) ₹ 12000, 10 సం. (v) ₹ 19200, ₹ 21600

అభ్యాసమాలిక 42 **1.** (i) 14 సెం.మీ.; 44 సెం.మీ.
(ii) 14 సెం.మీ.; 88 సెం.మీ. (iii) 98 సెం.మీ.; 196 సెం.మీ. (iv) 11.55 సెం.మీ.; 23.1 సెం.మీ.
2. 28 సెం.మీ. **3.** ₹ 56320 **4.** 250 చుట్లు

అభ్యాసమాలిక 43 **1.** 240°
2. అల్పవృత్తం చాపం పేర్లు : చాపం PXQ, చాపం PR, చాపం RY, చాపం XP, చాపం XQ, చాపం QY
అధిక వృత్తం చాపం పేర్లు : చాపం PYQ, చాపం PQR, చాపం RQY, చాపం XQP, చాపం QRX
అర్ధవృత్తం చాపం పేర్లు : చాపం QPR, చాపం QYR
3. 250°

అభ్యాసమాలిక 44 **1.** 2 రెట్లు **2.** 3 రెట్లు
3. 90 మీ. **4.** 8 మీ.

అభ్యాసమాలిక 45 **1**. 144 చ.సెం.మీ. **2**. 75 చ.సెం.మీ.
3. 46 సెం.మీ. **4**. 9 రెట్లు

అభ్యాసమాలిక 46 **1**. 1170 చ.సెం.మీ.
2. 8.64 చ.సెం.మీ. **3**. ₹ 2302750
4. 800 నాపరాళ్ళు ; 3200 నాపరాళ్ళు
5. 156 మీ.; 845 చ.మీ.

అభ్యాసమాలిక 47 **1**. (i) 54 చ.సెం.మీ. (ii) 150 చ.సెం.మీ. (iii) 311.04చ.మీ. (iv) 277.44 చ.మీ. (v) 181.5 చ.మీ.
2. (i) 460 చ.సెం.మీ. (ii) 58.8 చ.సెం.మీ. (iii) 31.6 చ.మీ. (iv) 171 చ.సెం.మీ. **3**. 39.5 చ.సెం.మీ. **4**. 6.5 చ.మీ., ₹ 1950

అభ్యాసమాలిక 48 **1**. (i) 25 ప్రమాణాలు (ii) 40 ప్రమాణాలు (iii) 15 ప్రమాణాలు **2**. 26 సెం.మీ. **3**. 16 సెం.మీ.
4. 12 మీ.

అభ్యాసమాలిక 49 **1**. (i) ఔను (ii) కాదు (iii) కాదు (iv) కాదు (v) ఔను (vi) కాదు
2. (i) ఔను (ii) కాదు (iii) ఔను (iv) కాదు (v) కాదు

అభ్యాసమాలిక 50 **1**. (i) $25a^2+60ab+36b^2$
(ii) $\frac{a^2}{4}+\frac{ab}{3}+\frac{b^2}{9}$ (iii) $4p^2-12pq+9q^2$
(iv) $x^2-4+\frac{4}{x^2}$ (v) $a^2x^2+2abxy+b^2y^2$
(vi) $49m^2-56m+16$ (vii) $x^2+x+\frac{1}{4}$
(viii) $a^2-2+\frac{1}{a^2}$ **2**. $64-\frac{16}{x}+\frac{1}{x^2}$
3. $(mn+7pq)^2$ **4**. (i) 994009 (ii) 10404
(iii) 9409 (iv) 1010025

అభ్యాసమాలిక 51 **1**. (i) x^2-y^2 (ii) $9x^2-25$
(iii) a^2-36 (iv) $\frac{x^2}{25}-36$ **2**. (i) 249996
(ii) 9991 (iii) 2484 (iv) 9996

అభ్యాసమాలిక 52 ⊙(i) $3\times67\times a\times a\times a\times b\times b$
(ii) $13\times7\times x\times x\times y\times t\times t$
(iii) $2\times2\times2\times3\times a\times a\times b\times b$
(iv) $t\times r\times r\times s\times s\times s$

అభ్యాసమాలిక 53 ⊙(i) $(p+q)(p-q)$
(ii) $(2x+5y)(2x-5y)$ (iii) $(y+2)(y-2)$
(iv) $\left(p+\frac{1}{5}\right)\left(p-\frac{1}{5}\right)$ (v) $\left(3x+\frac{1}{4}y\right)\left(3x-\frac{1}{4}y\right)$
(vi) $\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x-\frac{1}{x}\right)$ (vii) $ab(a-1)$
(viii) $2x^2(2xy-3x)$ (ix) $\frac{1}{2}(y+4z)(y-4z)$
(x) $2(x+2y)(x-2y)$

అభ్యాసమాలిక 54 **1**. 12.29 మి.మీ. **2**. ₹ 892
3. 626.6 మి.మీ. **4**. 49.4 కి.గ్రా.

అభ్యాసమాలిక 55 **1**.

ఎత్తు	131	132	133	134	135	136	137	138	139	140	మొత్తం
పిల్లలు	3	3	5	3	3	2	2	1	3	5	30

2.

వ్యక్తులు	1	2	3	4	5	మొత్తం
కుటుంబాలు	1	13	16	13	7	50

3.

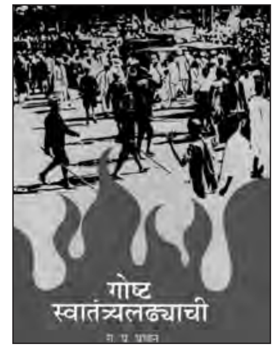
దత్తాంశం	1	2	3	4	5	6	మొత్తం
పౌనఃపున్యం	2	8	13	8	5	4	40

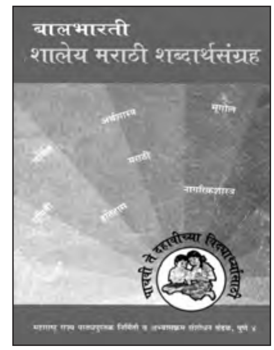
4.

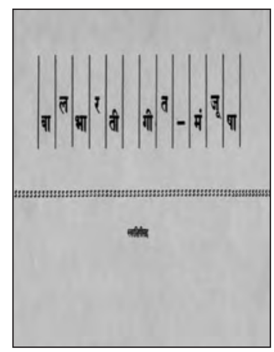
రొట్టెలు	2	3	4	5	మొత్తం
బాలురు	9	10	8	3	30

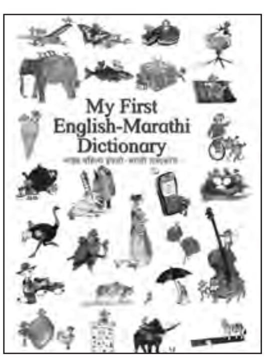
సంకీర్ణ ప్రశ్నసంగ్రహం 2 **1**. 4 సంవత్సరాలు **2**. 5 రోజులు
3. ₹ 12000 ; ₹ 18000 **4**. 17.6 సెం.మీ.
5. (i) $4a^2-12ab+9b^2$ (ii) $100+20y+y^2$
(iii) $\frac{p^2}{9}+\frac{pq}{6}+\frac{q^2}{16}$ (iv) $y^2-6+\frac{9}{y^2}$
6. (i) x^2-25 (ii) $4a^2-169$ (iii) $16z^2-25y^2$
(iv) $4t^2-25$ **7**. 3.3 కి.మీ.
8. 25 మీ.; 130 మీ ; ₹ 94500
9. 29 ప్రమాణాలు ; 70 ప్రమాణాలు **10**. 384 సెం.మీ.^{2}
11. $73y^2z^3(5y^2-2z)$

బహు పర్యాయప్రశ్నలు **1**. 36 **2**. 1120
3. ₹ 1600, ₹ 1000.









- पाठ्यपुस्तक मंडळाची वैशिष्ट्यपूर्ण पाठ्येत्तर प्रकाशने.
- नामवंत लेखक, कवी, विचारवंत यांच्या साहित्याचा समावेश.
- शालेय स्तरावर पूरक वाचनासाठी उपयुक्त.

पुस्तक मागणीसाठी www.ebalbharati.in, www.balbharati.in संकेत स्थळावर भेट द्या.

साहित्य पाठ्यपुस्तक मंडळाच्या विभागीय भांडारांमध्ये विक्रीसाठी उपलब्ध आहे.

ebalbharati

विभागीय भांडारे संपर्क क्रमांक : पुणे - ☎ २५६५९४६५, कोल्हापूर- ☎ २४६८५७६, मुंबई (गोरेगाव) - ☎ २८७७१८४२, पनवेल - ☎ २७४६२६४६५, नाशिक - ☎ २३९१५११, औरंगाबाद - ☎ २३३२१७१, नागपूर - ☎ २५४७७१६/२५२३०७८, लातूर - ☎ २२०९३०, अमरावती - ☎ २५३०९६५

మహారాష్ట్ర రాష్ట్ర పాఠ్యపుస్తక నిర్మితి మరియు పాఠ్యప్రణాళిక పరిశోధన సంస్థ, పుణె–411 004.

तेलुगु गणित इ.७वी

₹ 41.00