గణితశాస్త్రం II వ భాగం

పదవ తరగతి

భారత సంవిధానము

పార్ట్ – IV A

ప్రాథమిక బాధ్యతలు

51 ఎ) ప్రాథమిక బాధ్యతలు

ప్రతి పౌరుడు ఈ క్రింది బాధ్యతలను మనసారా స్వీకరించి బాధ్యతాయుతంగా ప్రవర్తించవలెను.

ఎ) రాజ్యాంగ శాసనబద్ధుడై యుండుట. శాసనమందలి ఆశయములనూ, శాసనం స్థాపించే సంస్థలనూ, జాతీయ పతకాన్ని, జాతీయ గీతాన్ని అంకితభావంతో గౌరవించుట.

బి) స్వాతంత్ర్యోద్యమ స్ఫూర్తితో అన్ని రంగాలలో వ్యవహరించుట.

సి) దేశ సార్వభౌమత్వాన్ని, సమన్వయతనూ, సమగ్రతను రక్షించుట.

డి) దేశరక్షణలో అనుక్షణం సంసిద్ధుడై ఉండుట.

ఇ) ప్రజాజీవనంలో అన్యోన్యతనూ, భ్రాతృభావాన్ని పోషించుట, మత, భాష, ప్రాంతీయతత్త్వాలకు వర్గవైరుధ్యములకు అతీతముగా ఉండుట. స్త్రీలను అగౌరవపరచే ఆచారములను విడనాడుట.

ఎఫ్) అమూల్యమైన భారతీయ చారిత్రక సంపదనూ, సుసంపన్న సంస్కృతినీ పరిరక్షించుట.

జి) పర్యావరణాన్ని అడవులను, కొలనులనూ, నదులనూ రక్షించుట, అభివృద్ధి పరచుట, మృగరక్షణ జలజంతు జీవరాసులపై కరుణార్ద్రత.

హెచ్) శాస్త్రీయ మరియు మానవతా దృక్పథాలను అలవరచుకొనుట, జిజ్ఞాసను పెంపొందించు కొనుట, సంస్కరణ తత్వమును పెంపొందించుట.

ఐ) హింసను విడనాడుట, ప్రజల ఆస్తుల విధ్వంసం చర్యలను నిరోధించుట.

జె) వ్యక్తిత్వ శక్తి సామర్థ్యాల ఔన్నత్యాన్ని పెంపొందించుకొనుట ద్వారా మరియూ సమిష్టి కృషి ద్వారా అన్ని రంగాలలో గణనీయమైన స్థాయిని చేరుటకొరకు, శిఖరాగ్ర సాధనకొరకు నిరంతరం కృషి సల్పుట.

కె) రక్షకులు లేదా సంరక్షకులుగా ఉన్నవారందరూ ఆరు నుంచి 14 సంవత్సరముల లోపల పసివారికి విద్యాభ్యాసము చేయు అవకాశమును కల్పించవలెను.

ప్రభుత్వ తీర్మానం క్రమ సంఖ్య : అభ్యాస్-2116/(ప్ర.క్ర.43/16) ఎస్‌డి-4 తేదీ 25.4.2016 ప్రకారం స్థాపించబడిన సమన్వయ సమితి యొక్క తేదీ 29.12.2017 రోజు సమావేశంలో ఈ పాఠ్య పుస్తకమును 2018-19 విద్యాసంవత్సరం నుంచి నిర్దేశించుటకుగాను అనుమతి ఇవ్వబడినది.

గణితశాస్త్రం

II వ భాగం

పదవ తరగతి

మహారాష్ట్ర రాష్ట్ర పాఠ్యపుస్తక నిర్మితి మరియు పాఠ్యప్రణాళిక పరిశోధన సంస్థ, పుణె-411 004.

R4G3K8

మీ స్మార్ట్‌ఫోన్‌తో DIKSHA App నుపయోగించి పాఠ్యపుస్తకం మొదటి పుటలోని QR CODE ను స్కాన్ చేసిన డిజిటల్ పాఠ్యపుస్తకం మరియు ప్రతి పాఠంలోని QR CODE ను స్కాన్ చేసిన ఆ పాఠానికి సంబంధించిన అధ్యయన-అధ్యాపనలకు ఉపయుక్తమగు దృశ్య-శ్రవణ సాహిత్యం లభిస్తుంది.

ప్రథమ ప్రచురణ : 2018
పునర్ముద్రణ : 2022

© మహారాష్ట్ర రాష్ట్ర పాఠ్యపుస్తక నిర్మితి మరియు పాఠ్య ప్రణాళిక పరిశోధన సంస్థ, పుణె-411004.

ఈ పుస్తకమునకు సంబంధించిన సర్వహక్కులు మహారాష్ట్ర రాష్ట్ర పాఠ్యపుస్తక నిర్మితి మరియు పాఠ్య ప్రణాళిక పరిశోధన సంస్థవి. ఈ పుస్తకము నందలి ఏ భాగమును సంచాలకులు, మహారాష్ట్ర రాష్ట్ర పాఠ్యప్రణాళిక పరిశోధన సంస్థ వారి లిఖిత అనుమతి లేకుండా ఉటంకించటం చేయరాదు.

గణిత విషయనిపుణుల సమితి

డా॥ మంగళ నార్లీకర్	(అధ్యక్షులు)
డా॥ జయశ్రీ అత్రే	(సభ్యులు)
శ్రీ వినాయక్ గోడ్‌బోలె	(సభ్యులు)
శ్రీ రమాకాంత్ సరోదే	(సభ్యులు)
శ్రీమతి ప్రాజక్తి గోఖలె	(సభ్యులు)
శ్రీ సందీప్ పంచ్‌భాయ్	(సభ్యులు)
శ్రీమతి పూజ జాదవ్	(సభ్యులు)
శ్రీమతి ఉజ్వల గోడ్‌బోలె	(సభ్యకార్యదర్శి)

గణిత విషయం - రాష్ట్ర అధ్యయనవర్గ సభ్యులు

శ్రీమతి జయశ్రీ పురందరె	శ్రీమతి తరూబెన్ పోపట్
శ్రీ రాజేంద్ర చౌదరి	శ్రీ. ప్రమోద్ ఠోంబరే
శ్రీ రామా వన్యాళ్‌కర్	డా. భారతి సహస్రబుద్ధే
శ్రీ అన్నాప్పా పారిట్	శ్రీ వసంత్ శెవాలే
శ్రీ అన్సార్ శేఖ్	శ్రీ ప్రసాద్ కాశిద్
శ్రీ శ్రీపాద్ దేశ్‌పాండే	శ్రీ మిలింద్ భాకరే
శ్రీ సురేష్ దాతె	శ్రీ జానేశ్వర్ మషాల్‌కర్
శ్రీ ఉమేష్ రేళే	శ్రీ గణేష్ కోల్‌తే
శ్రీ బన్సీ హావళే	శ్రీ సందేష్ సొనావ్‌ణే
శ్రీమతి రోహిణి శిర్కె	శ్రీ సుధీర్ పాటిల్
శ్రీ ప్రకాష్ జెండే	శ్రీ ప్రకాశ్ కాప్సే
శ్రీ లక్ష్మణ్ దావణ్‌కర్	శ్రీ రవీంద్ర ఖందారే
శ్రీ శ్రీకాంత్ రత్న పార్ఖీ	శ్రీమతి స్వాతి ధర్మాధికారి
శ్రీ సునిల్ శ్రీవాస్తవ్	శ్రీ అరవింద్ కుమార్ తివారి
శ్రీ అన్సారి అబ్దుల్ హమిద్	శ్రీ మల్లేషం బేతి
శ్రీమతి సువర్ణ దేశ్‌పాండే	శ్రీమతి ఆర్యా భిడె

ముఖచిత్రం మరియు కంప్యూటర్ స్కెచ్
శ్రీ సందీప్ కోళి, చిత్రకారులు, పుణె

అక్షర కూర్పు :
శ్రీ విజయ్‌కుమార్ దండే, పుణె

ప్రధాన సంయోజకులు :
శ్రీమతి ఉజ్వల శ్రీకాంత్ గోడ్‌బోలే
ఇ. విశేషాధికారిణి, గణితం
పాఠ్యపుస్తక సంస్థ, పుణె.

అనువాదం మరియు సమీక్ష : శ్రీ మల్లేషం కృష్ణహరి బేతి
శ్రీమతి ఈరబత్తి ప్రతిభ అనిల్

పునస్సమీక్ష : శ్రీ గంగాధర్ మిట్టపెల్లి

అనువాద సంయోజకులు : **డా॥ శ్రీమతి తులసీ భారత్,**
విశేషాధికారిణి-తెలుగు,
పాఠ్యపుస్తక సంస్థ, పుణె

నిర్మితి :
శ్రీ సచ్చితానంద్ ఆఫళే
ముఖ్యనిర్మితి అధికారి
శ్రీ సంజయ్ కాంబ్లే
నిర్మితి అధికారి
శ్రీ ప్రశాంత్ హరణె
నిర్మితి సహాయకులు

కాగితం :
70 జి.యస్.యమ్. క్రీమ్‌వోవ్

ముద్రణాదేశం :
N/PB/2018-19/1,000

ముద్రకులు :
SHARP INDUSTRIES, RAIGAD

ప్రకాశకులు
శ్రీ వివేక్ ఉత్తమ్ గోసావి, నియంత్రకులు,
పాఠ్యపుస్తక నిర్మితి సంస్థ,
ప్రభాదేవి, ముంబయి-25.

భారత సంవిధానము

ప్రస్తావన

భారతదేశ ప్రజలమగు మేము, భారతదేశమును **సార్వభౌమ్య**
సామ్యవాద లౌకిక ప్రజాస్వామ్య గణరాజ్యముగ
నెలకొల్పుటకు మరియు అందలి పౌరులెల్లరకు
సామాజిక, ఆర్థిక, రాజకీయ **న్యాయమును**,
భావము, భావప్రకటన, విశ్వాసము,
ధర్మము, ఆరాధన -- వీటి **స్వాతంత్ర్యమును**,
అంతస్తులోను, అవకాశములోను **సమానత్వమును**
చేకూర్చుటకు; మరియు వారందరిలో
వ్యక్తి గౌరవమును, జాత్యైక్యతను,
అఖండతను తప్పక ఒనగూర్చు **సౌభ్రాత్రమును**,
పెంపొందించుటకు; సత్యనిష్ఠా పూర్వకముగ తీర్మానించుకొని,
ఈ 1949వ సంవత్సరము నవంబరు ఇరువది యారవ
దినమున **మా సంవిధాన సభయందు ఇందుమూలముగ,**
ఈ సంవిధానమును అంగీకరించి, అధిశాసనము చేసి
మాకు మేము ఇచ్చుకొన్నవారమైతిమి.

జాతీయ గీతము

జనగణమన – అధినాయక జయ హే
భారత – భాగ్యవిధాతా
పంజాబ, సింధు, గుజరాత, మరాఠా,
ద్రావిడ, ఉత్కల, బంగ,
వింధ్య, హిమాచల, యమునా, గంగా,
ఉచ్ఛల జలధితరంగ,
తవ శుభ నామే జాగే, తవ శుభ ఆశిస మాగే,
గాహే తవ జయగాథా,
జనగణ మంగలదాయక జయ హే,
భారత – భాగ్యవిధాతా
జయ హే, జయ హే, జయ హే,
జయ జయ జయ, జయ హే

ప్రతిజ్ఞ

భారతదేశం నా మాతృభూమి. భారతీయులందరు నా సహోదరులు.

నేను నా దేశాన్ని ప్రేమిస్తున్నాను. సుసంపన్నమైన, బహువిధమైన నా దేశ వారసత్వ సంపద నాకు గర్వకారణం. దీనికి అర్హత పొందడానికి సర్వదా నేను కృషిచేస్తాను.

నా తల్లిదండ్రుల్ని, ఉపాధ్యాయుల్ని, పెద్దలందర్ని గౌరవిస్తాను. ప్రతివారితోను మర్యాదగా నడుచుకొంటాను.

నా దేశంపట్ల, నా ప్రజలపట్ల సేవానిరతితో ఉంటానని ప్రతిజ్ఞ చేస్తున్నాను. వారి శ్రేయోభివృద్ధులే నా ఆనందానికి మూలం.

ప్రస్తావన

విద్యార్థి మిత్రులారా,

పదవతరగతి పాఠ్యప్రణాళికకు మీకు స్వాగతం!

ఈ సంవత్సరం గణితం Iవ భాగం మరియు గణితం IIవ భాగం పాఠ్యపుస్తకాలను అభ్యసించాలి.

గణితం II వ భాగంలో రేఖాగణితం, త్రికోణమితి, నిరూపక రేఖాగణితం మరియు క్షేత్రమితి లాంటి ముఖ్యభాగాలున్నాయి. 9వ తరగతి వరకు పరిచయం చేయబడిన అంశాలను గూర్చి కొంత అధికంగా అభ్యాసం చేయాలి. ఇచ్చిన ఉదాహరణలనుంచి నిత్యజీవితంలో వాటి ఉపయోగం స్పష్టమవుతుంది. ఎక్కడయితే కొత్త భాగం, సూత్రాలు లేదా వాటి వినియోగం ఉన్నాయో అక్కడ సరళమైన వివరణ ఇవ్వబడినది. సాధించబడిన మాదిరి ఉదాహరణలు, అభ్యాసమునకై సమస్యలునూ ఉన్నాయి. అంతేగాక ప్రజ్ఞావంతులైన విద్యార్థులకై కొన్ని సవాళ్ళవంటి ప్రశ్నలు నక్షత్ర చిహ్నాంకితం చేసి ఇవ్వబడినవి. సామాన్య విద్యార్థులు పదవతరగతి అనంతరం గణితం అభ్యసించదలచుకోనట్లైతే, వాటిలోని మూలాధార (కనీస) సంకల్పనలను అర్థం చేసుకోవాలి, అలాగే ఇతర రంగాలలో పనిచేస్తున్నపుడు అవసరమైన గణితజ్ఞానాన్ని ఉపయోగించగల పరిజ్ఞానం వారికి ఈ పుస్తకం నుండి లభిస్తుంది. 'అధిక వివరాలకై' ఈ శీర్షిక క్రింద యివ్వబడిన సారము ఏ విద్యార్థులకయితే పదవతరగతి అనంతరం గణితాన్ని అభ్యసించి ప్రావీణ్యం పొందాలన్న కోరికకలదో, వారికి బాగా ఉపయోగపడుతుంది, కాబట్టి ఇలాంటి విద్యార్థులు దీనిని తప్పకుండా అభ్యసించాలి. మొత్తం పుస్తకాన్ని కనీసం ఒక్కసారి చదివి, అర్థం చేసుకోండి.

యాప్‌నుపయోగించి క్యు.ఆర్.కోడ్ ద్వారా ప్రతి అధ్యాయమునకు సంబంధించి ఉపయుక్తమైన దృశ్య-శ్రవణ సాహిత్యం లభిస్తుంది. అది అధ్యనయం కొరకు తప్పకుండ ఉపయోగపడుతుంది.

పదవతరగతి పరీక్షలు అతిముఖ్యమైనవిగా భావించబడుతాయి. ఈ అంశాలను గూర్చి ఒత్తిడికి లోనుగాకుండా బాగా అభ్యసించి కోరుకున్న కార్యసాఫల్యతను పొందడానికై విద్యార్థులకు శుభాకాంక్షలు.

(డా. సునీల్ మగర్)

సంచాలకులు

మహారాష్ట్ర రాష్ట్ర పాఠ్యపుస్తక నిర్మితి మరియు

పాఠ్యప్రణాళిక పరిశోధన సంస్థ, పుణె-411004.

పుణె

మార్చి 18వ తేదీ, 2018 ఉగాది

భారతీయ సౌరదినం: 27 ఫాల్గుణం 1939.

10వ తరగతి గణితశాస్త్రం IIవ భాగం పాఠ్యప్రణాళిక నుండి క్రింది సామర్థ్యాలు విద్యార్థులలో అభివృద్ధి చెందుతాయి.

క్షేత్రం	అంశాలు	సామర్థ్య వివరణ
1. రేఖాగణితం	1.1 సరూప త్రిభుజాలు 1.2 వృత్తము	• సరూప త్రిభుజాల ధర్మాలు, సర్వసమాన త్రిభుజాల ధర్మాలు మరియు పైథాగరస్ సిద్ధాంతం దానిని ఉపయోగించి ఉదాహరణలను సాధించగల్గుట. • సరూప త్రిభుజాలను నిర్మించగల్గుట. • వృత్త జ్యా మరియు స్పర్శరేఖ ధర్మములను ఉపయోగించగల్గుట. • వృత్త స్పర్శరేఖలను నిర్మించగల్గుట.
2. నిరూపక రేఖాగణితం	2.1 నిరూపక రేఖాగణితం	• రెండు బిందువుల మధ్య దూరము • విభజించే బిందు నిరూపకలను కనుగొనగల్గుట. • రేఖ యొక్క వాలును కనుగొనగల్గుట.
3.క్షేత్రమితి	3.1 ఉపరితలవైశాల్యం, ఘణపరిమాణం	• వృత్త చాప పొడవును కనుగొనగల్గుట. • వృత్త సెక్టరు, వృత్త ఖండ వైశాల్యములను కనుగొనగల్గుట. • ఇవ్వబడిన త్రిమితీయ పటాల ఉపరితల వైశాల్యం, ఘనపరిమాణంలను కనుగొనగల్గుట.
4. త్రికోణమితి	4.1 త్రికోణమితి	• త్రికోణమితీయ సర్వసమానతలను ఉపయోగించి ఉదాహరణలను సాధించగల్గుట. • వృక్షాల ఎత్తును కనుగొనుట. నదీ ప్రవాహ వెడల్పును కనుగొనుట ఇలాంటి సమస్యలకై త్రికోణమితిని ఉపయోగించగల్గుట.

ఉపాధ్యాయులకు సూచనలు

మొట్టమొదట పుస్తకమును కూలంకషంగా చదివి, దానిని అర్థం చేసుకోండి. వివిధ అంశాల వివరణ మరియు సూత్రాలను సరిచూసుకోవడంలాంటి వాటికై కృత్యాల సహాయం తీసుకోండి.

ప్రయోగాల నుండి మూల్యమాపన చేయవలసినది, అందుకై కూడా కృత్యాలుపయోగించవచ్చు. విద్యార్థులను స్వంతంగా ఆలోచించుటకై ఉత్తేజపరచండి. ఏదేని సమస్యను వేరే విధంగా, కానీ తార్కిక పద్ధతిలో సాధించిన విద్యార్థులకు ప్రత్యేక ప్రోత్సాహన్నివ్వండి.

రేఖాగణితంలోని సిద్ధాంత వాక్యాలను దృష్టియందుంచుకొని వాటిని వినియోగించి సమస్యలను సాధించే నైపుణ్యంను అభివృద్ధిపరచడానికి పుస్తకంలోని కృత్యాలేగాక మరికొన్ని కృత్యాలు తయారుచేయవచ్చు.

ప్రయోగముల పట్టిక

(1) అట్టపై ఒక త్రిభుజాన్ని కత్తిరించుకోండి. టేబల్‌పై కొవ్వొత్తి లేదా చిన్న దీపం వెలిగించండి. గోడ మరియు దీపం/కొవ్వొత్తిల మధ్య త్రిభుజాన్ని పట్టుకోండి. దాని నీడను పరిశీలించండి. నీడ మరియు త్రిభుజంలు సరూపములుగా ఉన్నాయా చూడండి. (త్రిభుజం మరియు దాని నీడ ఒకదానితొనొకటి సరూపముగా ఉండాలంటే ఎలాంటి జాగ్రత్తలు తీసుకొంటారు?)

(2) ఒకేరకమైన కొలతలుగల రెండు లంబకోణ త్రిభుజాలను కత్తిరించండి. త్రిభుజాలకు రెండువైపులా A, B, C ఇలా పేర్లివ్వండి. వాటిలోఒక లంబకోణ త్రిభుజంలో కర్ణంపై లంబశీర్షాన్ని గీయండి. లంబపాదానికి 'D' అని పేరివ్వండి. లంబంపై కత్తిరించి రెండు చిన్న లంబకోణ త్రిభుజాలను తయారు చేయండి. మూడు లంబకోణత్రిభుజాలు ఒకదానికొకటి సదృశ్యంతో ఒకదానితోనొకటి సరూపమవుతాయోరాయండి.

(3) ఒక వృత్తాన్ని గీయండి. దాని అంతర్భాగంలో, బాహ్యభాగంలో, మరియు వృత్తంపై ఒక్కొక్కటి ఇలా మూడు బిందువులను తీసుకోండి. ప్రతి బిందువునుండి వృత్తానికి ఎన్ని స్పర్శరేఖలను గీయవచ్చును? దాని పట్టికను తయారుచేయండి. పట్టికలో చిత్తుపటం గీసి చూపండి.

(4) రెండు బిందువులనుండి అసంఖ్యాకమైన వృత్తాలను గీయవచ్చు. దీనిని సూచించడానికి, ఇచ్చిన రెండు బిందువులనుండి కనీసం 5 వేర్వేరు వృత్తాలను గీయండి.

(5) వృత్తాకారంలో మేకులు అమర్చబడిన జియోబోర్డ్ తీసుకోండి. రబర్‌బాండ్‌నుపయోగించి కిందివాటిలో ఏదేని ఒక సిద్ధాంతనికి జియోబోర్డ్‌పై పటాన్ని తయారుచేయండి. (1) అంతర్లిఖితకోణాల సిద్ధాంతము (2) స్పర్శ-ఖండన రేఖల కోణ సిద్ధాంతము (3) వ్యతిరేకవృత్తఖండాలలోనికి కోణాల సిద్ధాంతము.

(6) ఒక వృత్తం, ఒక కోణం యొక్క నమూనాలను తీసుకొని వేర్వేరు స్థితులలోని అంతరఖండిత చాపాలను తయారు చేయండి. ఆ పటాలను నోట్‌బుక్‌లో గీయండి.

(7) కంపాస్ మరియు స్కేలునుపయోగించి ఒక కోణాన్ని నాలుగు సమానభాగాలు చేయండి.

(8) ఒక బీకరు తీసుకోండి. దాని ఎత్తు మరియు అడుగు యొక్క వ్యాసార్ధాన్ని కొలవండి. దానినిబట్టి అందులో ఎంత నీరు పడుతుందో దానిని సూత్రంతో కనుగొనండి. దానిని నీటితో నింపి దాని పరిమాణంను కొలపాత్ర సహాయంతో కొలవండి. రెండు సమాధానాలను బట్టి ఒక నిష్కర్షకురండి.

(9) శంకుచ్ఛేద ఆకారం గల ఒక కాగితం కప్పును తీసుకోండి. దాని అడుగు భాగం మరియు పైవృత్తాకారం యొక్క వ్యాసార్ధాలను కొలవండి. కప్పు ఎత్తును కొలవండి. ఆ కప్పులో ఎంత నీరు పడుతుందో, సూత్రంతో కనుగొనండి. దానిని నీటితో పూర్తిగా నింపి, ఆ నీటి పరిమాణంను కొలవండి. నీటిపరిమాణం, సూత్రంతో కనుగొనిన ఘనపరిమాణంలను పోల్చి, సరిచూసుకోండి.

(10) మందపాటి అట్టతో రెండు సరూప త్రిభుజాలను కత్తిరించండి. వాటివైశాల్యాల నిష్పత్తి (i) వాటి చుట్ట-కొలతల యొక్క వర్గాలు అనుపాతంలో ఉన్నాయా? లేదా? (ii) వాటి మధ్యగతల యొక్క వర్గాలు అనుపాతంలో ఉన్నాయా? దీనిని ప్రత్యక్షంగా కొలిచి నిర్ణయించండి.

విషయసూచిక

	అధ్యాయాలు	పేజీలు
1.	సరూపత	1 నుండి 29
2.	పైథాగరస్ సిద్ధాంతం	30 నుండి 46
3.	వృత్తము	47 నుండి 90
4.	రేఖాగణిత నిర్మాణములు	91 నుండి 99
5.	నిరూపక రేఖాగణితం	100 నుండి 123
6.	త్రికోణమితి	124 నుండి 139
7.	క్షేత్రమితి	140 నుండి 163
●	జవాబులు	164 నుండి 168

1 సరూపత

పదండి నేర్చుకుందాం

- రెండు త్రిభుజాల వైశాల్యాల నిష్పత్తి
- ప్రాథమిక అనుపాత సిద్ధాంతం.
- ప్రాథమిక అనుపాత సిద్ధాంత విపర్యయము
- త్రిభుజ కోణసమద్విఖండన రేఖ సిద్ధాంతం
- మూడు సమాంతర రేఖలు మరియు వాటి తిర్యగ్రేఖల వలన ఏర్పడిన అంతరఖండముల నిష్పత్తి
- త్రిభుజముల సరూపత నియమములు
- సరూప త్రిభుజాల వైశాల్యాల ధర్మములు

కొంచెం గుర్తుతెచ్చుకుందాం

మీరు నిష్పత్తి మరియు అనుపాతముల గురించి నేర్చుకున్నారు. a, b అనే రెండు సంఖ్యల నిష్పత్తి $\frac{m}{n}$, ఇదేవాక్యాన్ని a, b అను రెండు సంఖ్యలు $m{:}n$ ఈ నిష్పతిత్తలో ఉన్నాయని కూడా రాస్తారు.

వీటి గురించి మనం సాధారణంగా ధన వాస్తవ సంఖ్యలను పరిగణలోకి తీసుకొంటాం. రేఖ ఖండం యొక్క పొడవు మరియు ఏదైనా జ్యామితీయాకృతి యొక్క వైశాల్యములు ధన వాస్తవ సంఖ్యలుగా ఉంటాయని తెలుసు.

త్రిభుజము యొక్క వైశాల్య సూత్రం మనకు తెలుసు.

త్రిభుజము వైశాల్యం $= \frac{1}{2}$ భూమి $\times$ ఎత్తు

తెలుసుకొందాం

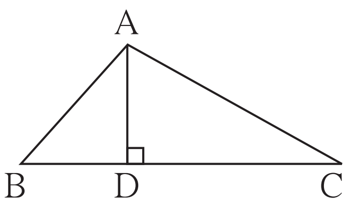
రెండు త్రిభుజాల వైశాల్యాల నిష్పత్తి (Ratio of areas of two triangles)

ఏవైనా రెండు త్రిభుజాల వైశాల్యాల నిష్పత్తిని కనుగొందాం.

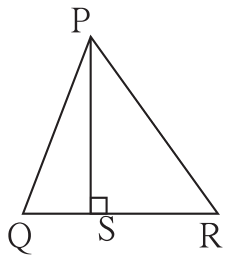
ఉదాహరణ: Δ ABC యొక్క భూమి BC మరియు ఎత్తు AD.

Δ PQR యొక్క భూమి QR ఎత్తు PS.

$$\frac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta PQR)} = \frac{\frac{1}{2} \times BC \times AD}{\frac{1}{2} \times QR \times PS}$$



పటం 1.1



పటం 1.2

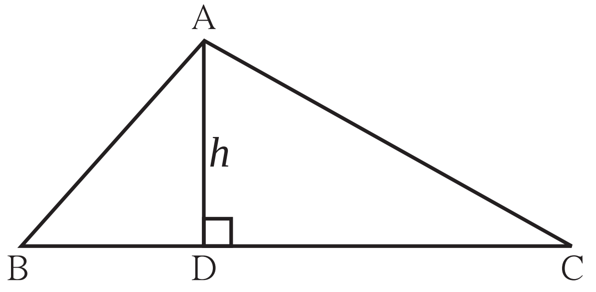
$$\therefore \frac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta PQR)} = \frac{BC \times AD}{QR \times PS}$$

దీనినుండి రెండు త్రిభుజాల వైశాల్యాల నిష్పత్తి వాటి భూములు మరియు సదృశ ఎత్తుల లబ్దాల నిష్పత్తికి సమానంగా ఉంటుంది.

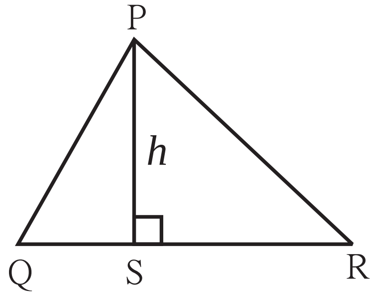
ఒక త్రిభుజము యొక్క భూమి b_1 ఎత్తు h_1 రెండవ త్రిభుజ భూమి b_2 ఎత్తు h_2 అయిన వాటి వైశాల్యాల నిష్పత్తి $= \frac{b_1 \times h_1}{b_2 \times h_2}$

ఈ రెండు త్రిభుజాలకు సంబంధించి కొన్ని షరతులను వర్తింపజేసిచూద్దాం.

షరతు 1 : రెండు త్రిభుజాల ఎత్తులు సమానము అయినట్లయితే –



పటం 1.3



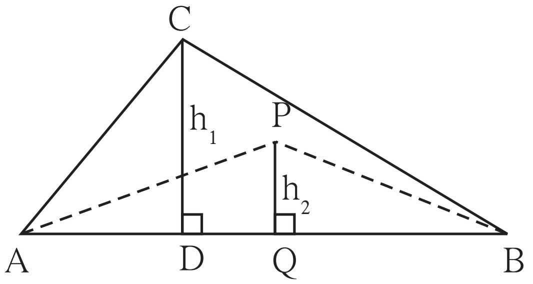
పటం 1.4

$$\frac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta PQR)} = \frac{BC \times h}{QR \times h} = \frac{BC}{QR}$$

$$\therefore \frac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta PQR)} = \frac{b_1}{b_2}$$

ధర్మము : సమాన ఎత్తులు కల్గిన త్రిభుజాల వైశాల్యాలు వాటి సదృశ భుజాలకు అనుపాతములో ఉంటాయి.

షరతు 2 : రెండు త్రిభుజాల భూములు సమానం అయినట్లయితే –



పటం 1.5

$$\frac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta APB)} = \frac{AB \times h_1}{AB \times h_2}$$

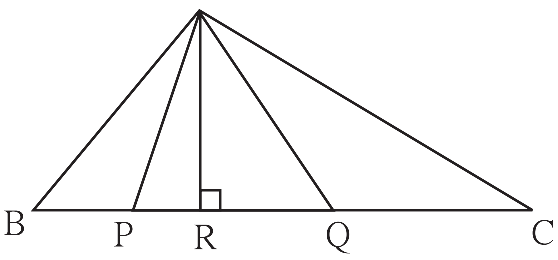
$$\therefore \frac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta APB)} = \frac{h_1}{h_2}$$

ధర్మము : సమాన పొడవుల భూములు గల రెండు త్రిభుజముల యొక్క వైశాల్యాలు వాటి సదృశ ఎత్తులకు అనుపాతంలో ఉంటాయి.

కృత్యము:

కింది ఖాళీలను సరియైన విధంగా పూరించండి.

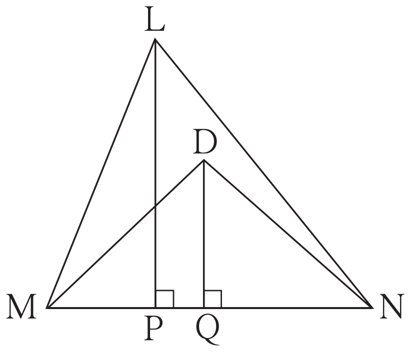
(i)



పటం 1.6

$$\frac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta APQ)} = \frac{\square \times \square}{\square \times \square} = \frac{\square}{\square}$$

(ii)



పటం 1.7

$$\frac{A(\Delta LMN)}{A(\Delta DMN)} = \frac{\square \times \square}{\square \times \square} = \frac{\square}{\square}$$

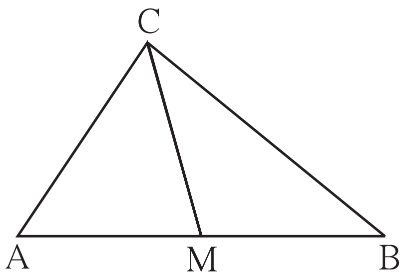
(iii) రే.ఖం. AB యొక్క మధ్య బిందువు 'M'

Δ ABC యొక్క మధ్యగతరేఖ రే.ఖం. CM.

$$\therefore \frac{A(\Delta AMC)}{A(\Delta BMC)} = \frac{\square}{\square}$$

$$= \frac{\square}{\square} = \square$$

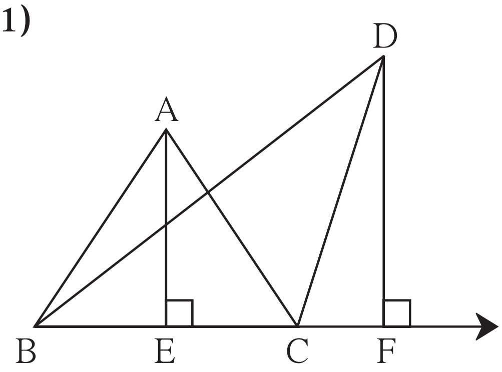
కారణములు రాయండి.



పటం 1.8

సాధించిన ఉదాహరణలు

ఉదా. (1)



పటం 1.9

పక్కనున్న పటంలో

రే.ఖం. AE $\perp$ రే.ఖం. BC, రే.ఖం. DF $\perp$ రే.ఖం. BC

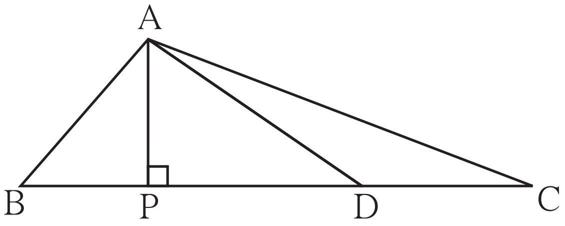
AE = 4, DF = 6 అయిన $\dfrac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta DBC)}$ ను కనుగొనండి.

సాధన : $\dfrac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta DBC)} = \dfrac{AE}{DF}$ .... భూములు సమానం కావున వైశాల్యములు ఎత్తుల అనుపాతము.

$$= \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

ఉదా. (2) Δ ABC యొక్క భుజము BC పై DC = 6, BC = 15 అయ్యేట్లు 'D' ఒక బిందువు కలదు. A(Δ ABD) : A(Δ ABC) మరియు A(Δ ABD) : A(Δ ADC) లను కనుగొనుండి.

సాధన : Δ ABD, Δ ADC, Δ ABC ఈ మూడు త్రిభుజముల ఉమ్మడి శీర్ష బిందువు A మరియు వాటి భూములు ఒకేరేఖపై ఉన్నందున వాటి ఎత్తులు సమానం.



పటం 1.10

BC = 15, DC = 6 $\therefore$ BD = BC − DC = 15 − 6 = 9

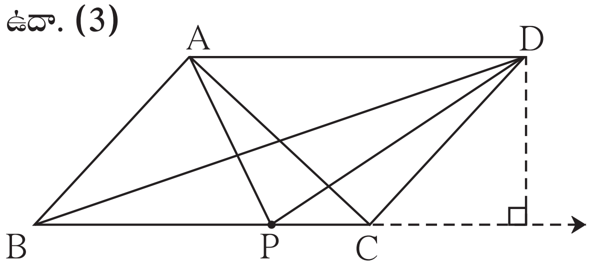
$$\frac{A(\Delta ABD)}{A(\Delta ABC)} = \frac{BD}{BC}$$ .... ఎత్తులు సమానం కావున వైశాల్యాల నిష్పత్తి భూముల అనుపాతములోనుండును.

$$= \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$$

$$\frac{A(\Delta ABD)}{A(\Delta ADC)} = \frac{BD}{DC}$$ .... ఎత్తులు సమానం కావున వైశాల్యాల నిష్పత్తి భూముల అనుపాతములోనుండును.

$$= \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$$

ఉదా. (3)



పటం 1.11

□ ABCD సమాంతర చతుర్భుజము. భుజము BC పై P అనేది ఏదేని ఒక బిందువు. అయిన సమాన వైశాల్యాలు గల త్రిభుజముల రెండు జతలను వెతకండి.

సాధన : □ ABCD ఒక సమాంతర చతుర్భుజము.

$\therefore$ AD || BC మరియు AB || DC

Δ ABC, Δ BDC లను పరిగణలోకి తీసుకోండి.

ఈ రెండు త్రిభుజాలు రెండు సమాంతర రేఖల మధ్య గీయబడ్డాయి. అందుచేత సమాంతర రేఖల మధ్యదూరం ఆ రెండు త్రిభుజాల ఎత్తులు అగును.

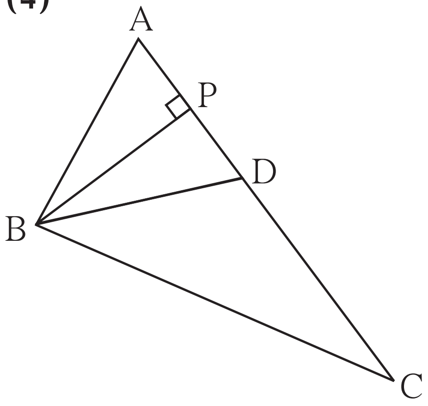
Δ ABC మరియు Δ BDC లో BC అనే భూములు సమానం అయి, ఎత్తులు సమానం

కావున A(Δ ABC) = A(Δ BDC)

Δ ABC మరియు Δ ABD లో AB అనే భూమి సమానం మరియు ఎత్తులు కూడా సమానం

$\therefore$ A(Δ ABC) = A(Δ ABD)

ఉదా. **(4)**



పటం 1.12

ప్రక్కపటంలోని Δ ABC యొక్క భుజము AC పై AC = 16, DC = 9 అయ్యేట్లు 'D' ఒక బిందువు. BP $\perp$ AC, అయిన కింది నిష్పత్తులను కనుగొనండి.

i) $\dfrac{A(\Delta ABD)}{A(\Delta ABC)}$ ii) $\dfrac{A(\Delta BDC)}{A(\Delta ABC)}$

iii) $\dfrac{A(\Delta ABD)}{A(\Delta BDC)}$

సాధన : Δ ABC యొక్క భుజము AC పై గల బిందువులు P మరియు D కావున Δ ABD, Δ BDC, Δ ABC, Δ APB ల ఉమ్మడి శీర్ష బిందువు 'B' ను పరిగణలోకి తీసుకున్నట్లయితే వాటి భుజములు AD, DC, AC, AP ఒకే రేఖలో కలవు. ఈ అన్ని త్రిభుజముల ఎత్తులు సమానం. కావున ఆ త్రిభుజ వైశాల్యములకువాటి భూములు అనుపాతములో ఉంటాయి. AC = 16, DC = 9

$\therefore$ AD = 16 – 9 = 7

$\therefore \dfrac{A(\Delta ABD)}{A(\Delta ABC)} = \dfrac{AD}{AC} = \dfrac{7}{16}$ . . . . (సమాన ఎత్తులు గల త్రిభుజాలు)

$\dfrac{A(\Delta BDC)}{A(\Delta ABC)} = \dfrac{DC}{AC} = \dfrac{9}{16}$ . . . . (సమాన ఎత్తులు గల త్రిభుజాలు)

$\dfrac{A(\Delta ABD)}{A(\Delta BDC)} = \dfrac{AD}{DC} = \dfrac{7}{9}$ . . . . (సమాన ఎత్తులు గల త్రిభుజాలు)

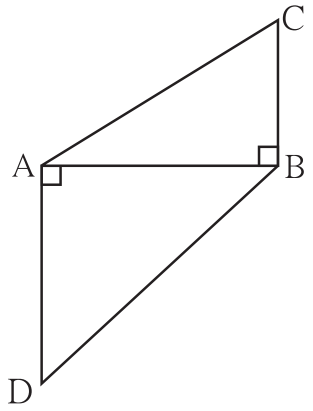
ఇది గుర్తుంచుకొందాం.

- రెండు త్రిభుజముల వైశాల్యముల నిష్పత్తి ఆ త్రిభుజముల భూముల మరియు సదృశ ఎత్తుల లబ్ధాల నిష్పత్తికి సమానం.
- సమాన ఎత్తులు గల త్రిభుజాల వైశాల్యాలు వాటి సదృశ భూములకు అనుపాతములో ఉంటాయి.
- సమాన భూములు గల త్రిభుజాల వైశాల్యాలు వాటి సదృశ ఎత్తులకు అనుపాతములో ఉంటాయి.

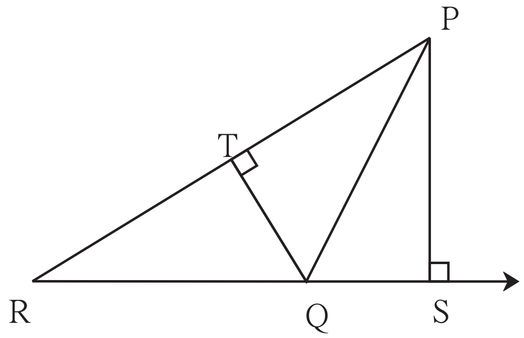
అభ్యాసమాలిక 1.1

1. ఒక త్రిభుజ భూమి 9 మరియు ఎత్తు 5 రెండవ త్రిభుజ భూమి 10 మరియు ఎత్తు 6 అయిన ఆ త్రిభుజముల యొక్క వైశాల్యముల నిష్పత్తిని కనుగొనండి.

2. ఇచ్చిన పటం 1.13 లో BC $\perp$ AB, AD $\perp$ AB, BC = 4, AD = 8 అయిన $\dfrac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta ADB)}$ ని కనుగొనండి.



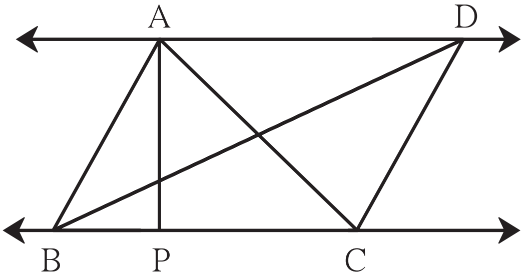
పటం 1.13



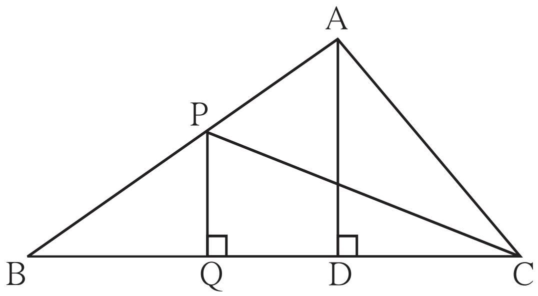
పటం 1.14

3. ప్రక్కనున్న పటం 1.14 లో రే.ఖం. PS $\perp$ రే.ఖం. RQ రే.ఖం. QT $\perp$ రే.ఖం. PR. ఒక వేళ RQ = 6, PS = 6, PR = 12 అయిన QT ని కనుగొనండి.

4. పక్కనున్నపటంలో AP $\perp$ BC, AD || BC, అయిన A(Δ ABC) : A(Δ BCD) ని కనుగొనండి.



పటం 1.15



పటం 1.16

5. పక్కనున్న పటంలో, PQ $\perp$ BC, AD $\perp$ BC అయిన కింది నిష్పత్తులను రాయండి.

i) $\dfrac{A(\Delta PQB)}{A(\Delta PBC)}$ ii) $\dfrac{A(\Delta PBC)}{A(\Delta ABC)}$

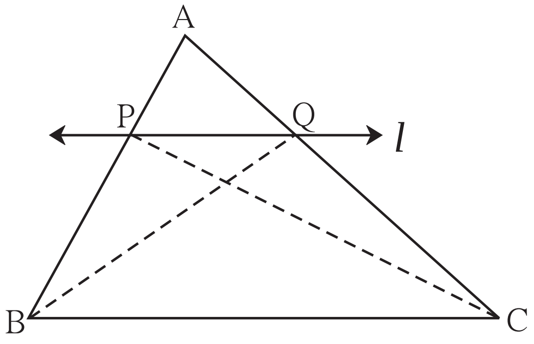
iii) $\dfrac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta ADC)}$ iv) $\dfrac{A(\Delta ADC)}{A(\Delta PQC)}$

తెలుసుకుందాం.

ప్రాథమిక అనుపాత సిద్ధాంతము (Basic Proportionality Theorem)

సిద్ధాంతము : త్రిభుజము యొక్క ఒక భుజానికి సమాంతరంగా ఉండే సరళ రేఖ దాని తక్కిన భుజములను భిన్న బిందువుల వద్ద ఖండించినట్లయితే ఆ సరళ రేఖ ఆ భుజాలను ఒకే నిష్పత్తిలో విభజించును.

దత్తాంశము : Δ ABC లో రేఖ $l \parallel$ రే.ఖం. BC, రేఖ l భుజము AB ని P వద్ద భుజము AC ని Q వద్ద ఖండించును.



పటం 1.17

సారాంశం : $\frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QC}$

నిర్మాణం : రే.ఖం. PC, రే.ఖం. BQ లను గీయుము.

ఉపపత్తి : Δ APQ మరియు Δ PQB లు సమాన ఎత్తులు గల త్రిభుజములు.

$\therefore \frac{A(\Delta APQ)}{A(\Delta PQB)} = \frac{AP}{PB}$ .... (వైశాల్యం, భూముల అనుపాతము) ..... (I)

అదేవిధంగా $\frac{A(\Delta APQ)}{A(\Delta PQC)} = \frac{AQ}{QC}$ .... (వైశాల్యం, భూముల అనుపాతము) ..... (II)

Δ PQB, Δ PQC ల భూమి రే.ఖం. PQ సమానం, రే.ఖం. PQ $\parallel$ రే.ఖం. BC

కావున Δ PQB, Δ PQC ల ఎత్తులు సమానం.

$\therefore A(\Delta PQB) = A(\Delta PQC)$ .... (III)

$\therefore \frac{A(\Delta APQ)}{A(\Delta PQB)} = \frac{A(\Delta APQ)}{A(\Delta PQC)}$ .... [(I), (II) మరియు (III)]

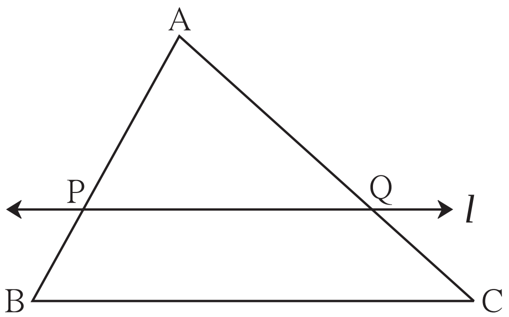
$\therefore \frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QC}$ .... [(I), (II)] ల నుండి

ప్రాథమిక అనుపాత సిద్ధాంత విపర్యయము. (converse of B.P.T.)

సిద్ధాంతము : ఏదేని ఒక రేఖ త్రిభుజము యొక్క రెండు భుజాలను భిన్న బిందువుల వద్ద ఖండించి ఒకే నిష్పత్తిలో విభజించినట్లయితే ఆ రేఖ తక్కిన భుజమునకు సమాంతరంగా ఉంటుంది.

పటం 1.18 లో రేఖ l అనేది Δ ABC యొక్క భుజము AB, భుజము AC లను వరుసగా P, Q బిందువులలో ఖండించింది. మరియు $\frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QC}$ అయిన రేఖ $l \parallel$ రే.ఖం. BC.

ఈ సిద్ధాంత నిరూపణ పరోక్ష పద్ధతిలో చేయవచ్చును.



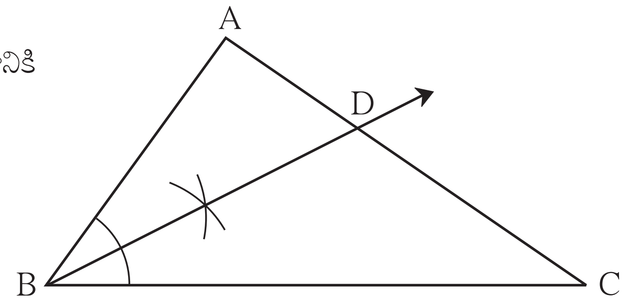
పటం 1.18

కృత్యము :

- Δ ABC అనే ఏదేని ఒక త్రిభుజమును గీయండి.
- త్రిభుజము యొక్క $\angle B$ ని సమద్విఖండనం చేయండి. అది AC ని ఎచటనైతే ఖండిస్తుందో దానికి D అని పేరు పెట్టండి.
- భుజములను కొలిచి రాయండి.

  AB=☐ సెం.మీ. BC=☐ సెం.మీ.

  AD=☐ సెం.మీ. DC=☐ సెం.మీ.



పటం 1.19

- $\frac{AB}{BC}$ మరియు $\frac{AD}{DC}$ ఈ నిష్పత్తులను కనుగొనండి.
- రెండు నిష్పత్తులు దగ్గరదగ్గర సమానం అని తెలుసుకోండి.
- ఇది త్రిభుజములోని ఇతర కోణములను సమద్విఖండనం చేసిన విధంగా నిష్పత్తులను కనుగొనండి. ఆ నిష్పత్తులు కూడా సమానంగా వస్తాయని తెలుసుకోండి.

తెలుసుకుందాం.

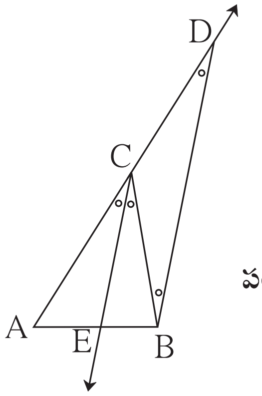
త్రిభుజ కోణసమద్విఖండన సిద్ధాంతము (Theorem of an angle bisector of a triangle)

సిద్ధాంతము : త్రిభుజము యొక్క కోణ సమద్విఖండనము కోణము ఎదుటి భుజమును తక్కిన భుజముల యొక్క పొడవుల నిష్పత్తిలో విభజిస్తుంది.

దత్తాంశము : Δ ABC లో $\angle$ C యొక్క సమద్విఖండన రే.ఖం. AB ని E బిందువు వద్ద ఖండిస్తుంది.

సారాంశము : $\frac{AE}{EB} = \frac{CA}{CB}$

నిర్మాణము : బిందువు B గుండా, కిరణం CE కి సమాంతరంగా రేఖను గీయండి. అది పొడిగించబడిన AC ని D బిందువు వద్ద ఖండిస్తుంది.



పటం 1.20

ఉపపత్తి : కిరణము CE || కిరణము BD, రేఖ AD తిర్యగ్రేఖ

∴ $\angle ACE \cong \angle CDB$ .... (సదృశ కోణములు)...(I)

ఇపుడు BC తిర్యగ్రేఖను తీసుకొనిన

$\angle ECB \cong \angle CBD$ .... (ఏకాంతర కోణములు)...(II)

కాని $\angle ACE \cong \angle ECB$ .... (దత్తాంశము)...(III)

∴ $\angle CBD \cong \angle CDB$ .... [(I), (II), (III) ల నుండి]

Δ CBD లో, భుజము CB ≅ భుజము CD .... (సర్వసమానకోణముల ఎదుటి భుజములు)

∴ CB = CD ...(IV)

ఇపుడు, Δ ABD లో, రే.ఖం. EC || భుజము BD .... (నిర్మాణము)

∴ $\frac{AE}{EB} = \frac{AC}{CD}$ .... (ప్రాథమిక అనుపాత సిద్ధాంతం)...(V)

∴ $\frac{AE}{EB} = \frac{AC}{CB}$ .... [(IV), (V) ల నుండి]

అధిక వివరాలకై :

పై సిద్ధాంత ఉపపత్తి మరొక పద్ధతిలో మీరు రాయండి.

దాని కొరకు పటం 1.21 లో చూపిన విధంగా Δ ABC ని గీయండి.

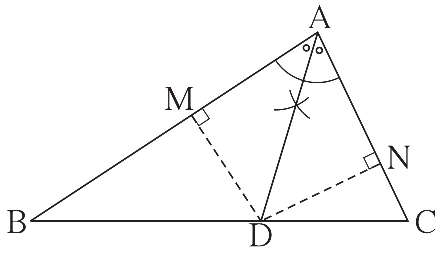
మరియు DM ⊥ AB, DN ⊥ AC లను గీయండి.

(1) సమాన ఎత్తులు గల త్రిభుజాల వైశాల్యాలు వాటి సదృశ భూములకు అనుపాతంలో ఉంటాయి.

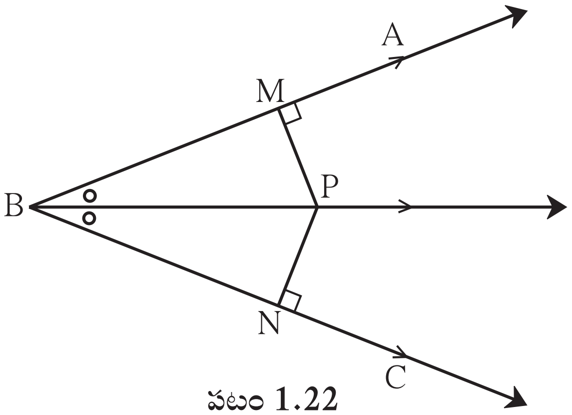
మరియు

(2) కోణ సమద్విఖండన రేఖపై ప్రతి బిందువు కోణము యొక్క భుజాల నుండి సమాన దూరంలో ఉంటుంది.

అనే ధర్మాలను ఉపయోగించండి.



పటం 1.21

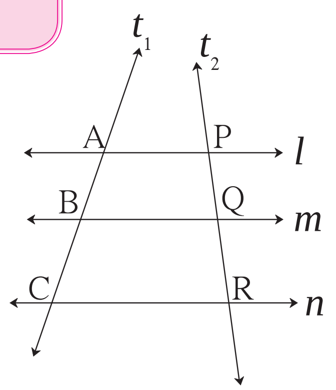


పటం 1.22

కోణసమద్విఖండన సిద్ధాంత విపర్యయము. (Converse of angle bisector of triangle)

Δ ABC యొక్క భుజము BC పై $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$, అయ్యేట్లు D బిందువు ఉన్నట్లయితే కిరణము AD, $\angle BAC$ యొక్క సమద్విఖండనము అవుతుంది.

మూడు సమాంతర రేఖలు, వాటి తిర్యగ్రేఖల ధర్మము
(Property of three parallel lines and their transversal)



పటం 1.23

కృత్యము :

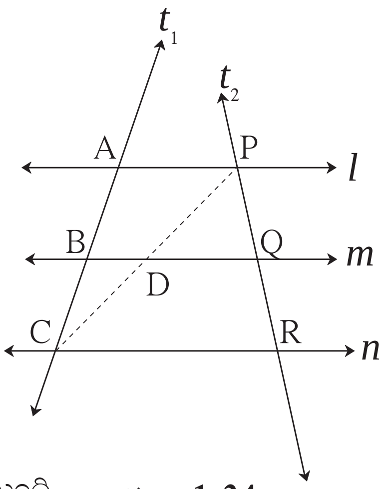
- మూడు సమాంతర రేఖలను గీయండి.
- వాటికి l, m, n అని పేర్లు పెట్టండి.
- t_1, t_2 అనే రెండు తిర్యగ్రేఖలను గీయండి.
- t_1 తిర్యగ్రేఖపై AB, BC అంతరఖండములు కలవు.
- t_2 తిర్యగ్రేఖపై PQ, QR అంతరఖండములు కలవు.
- $\frac{AB}{BC}$, $\frac{PQ}{QR}$ అనే నిష్పత్తులను కనుగొనండి. అది దగ్గరదగ్గర సమానం అని తెలుసుకోండి.

సిద్ధాంతము : మూడు సమాంతర రేఖలు, ఒక తిర్యగ్రేఖతో ఏర్పరచిన అంతర ఖండముల నిష్పత్తి అవే రేఖలు ఏదైనా మరొక తిర్యగ్రేఖపై ఏర్పరచిన అంతరఖండముల నిష్పత్తికి సమానంగా ఉంటుంది.

దత్తాంశము : రేఖ l || రేఖ m || రేఖ n

t_1, t_2 లు వాటి తిర్యగ్రేఖలు

t_1 అనే తిర్యగ్రేఖ ఆ రేఖలను వరుసగా A, B, C బిందువులలో ఖండిస్తుంది. t_2 అనే తిర్యగ్రేఖ ఈ రేఖలను వరుసగా P, Q, R బిందువులలో ఖండిస్తుంది.



పటం 1.24

సారాంశము : $\frac{AB}{BC} = \frac{PQ}{QR}$

ఉపపత్తి : రే.ఖం. PC గీసాము. ఇది రేఖ m ను D బిందువు వద్ద ఖండిస్తుంది.

Δ ACP లో BD || AP

$\therefore \frac{AB}{BC} = \frac{PD}{DC}$. . . . . (I) (ప్రాథమిక అనుపాత సిద్ధాంతం)

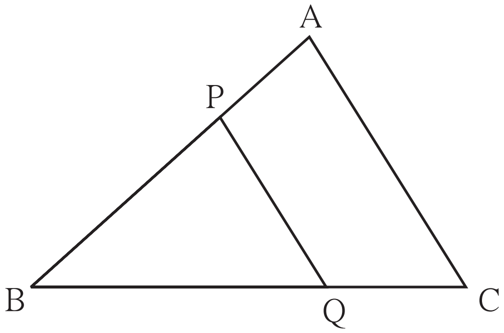
Δ CPR లో DQ || CR

$\therefore \frac{PD}{DC} = \frac{PQ}{QR}$. . . . . (II) (ప్రాథమిక అనుపాత సిద్ధాంతం)

$\therefore \frac{AB}{BC} = \frac{PD}{DC} = \frac{PQ}{QR}$. . . . . . (I),(II) ల నుండి.

$\therefore \frac{AB}{BC} = \frac{PQ}{QR}$

ఇవి గుర్తుంచుకుందాం.



పటం 1.25

(1) ప్రాథమిక అనుపాత సిద్ధాంతం

ΔABCలో రే.ఖం. PQ $\|$ రే.ఖం. AC అయిన

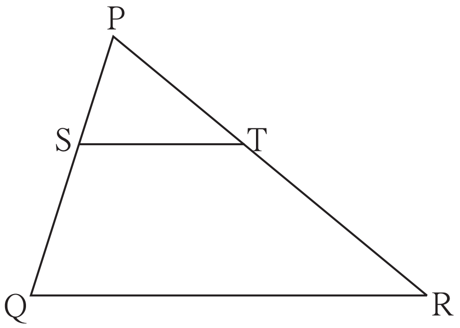
$$\frac{BP}{PA} = \frac{BQ}{QC}$$

(2) ప్రాథమిక అనుపాత సిద్ధాంత విపర్యయము.

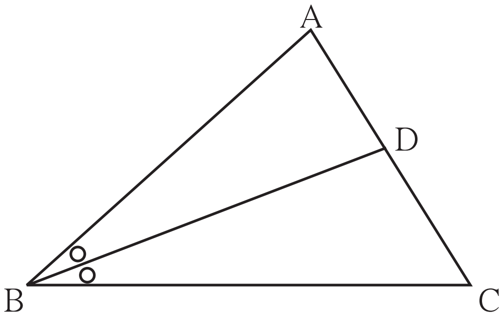
Δ PQR లో ఒక వేళ P-S-Q; P-T-R

$\frac{PS}{SQ} = \frac{PT}{TR}$ అయిన

రే.ఖం. ST $\|$ రే.ఖం. QR.



పటం 1.26



పటం 1.27

(3) కోణ సమద్విఖండన సిద్ధాంతం

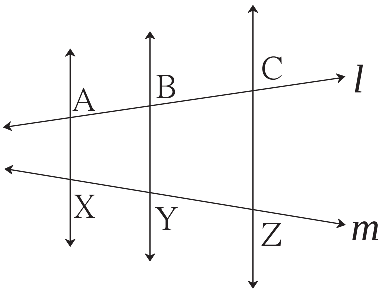
ΔABC లోని $\angle ABC$ యొక్క

సమద్విఖండనం BD, A-D-C,

అయిన $\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DC}$

(4) మూడు సమాంతర రేఖలు వాటి తిర్యగ్రేఖల ధర్మము

ఒకవేళ రేఖ AX $\|$ రేఖ BY $\|$ రేఖ CZ రేఖ l, రేఖ m లు తిర్యగ్రేఖలు వాటిని వరుసగా A, B, C మరియు X, Y, Z లలో ఖండించినట్లయితే అయిన $\frac{AB}{BC} = \frac{XY}{YZ}$.



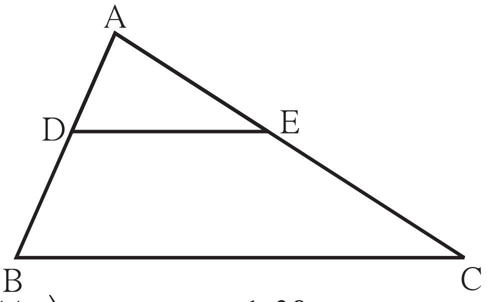
పటం 1.28

సాధించిన ఉదాహరణలు

ఉదా. (1) Δ ABC లో DE || BC (పటం 1.29)

ఒకవేళ DB = 5.4 సెం.మీ., AD = 1.8 సెం.మీ.

EC = 7.2 సెం.మీ. అయిన AE ని కనుగొనుండి.



పటం 1.29

సాధన : Δ ABC లో DE || BC

$\therefore \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ ..... (ప్రాథమిక అనుపాత సిద్ధాంతము)

$\therefore \frac{1.8}{5.4} = \frac{AE}{7.2}$

$\therefore AE \times 5.4 = 1.8 \times 7.2$

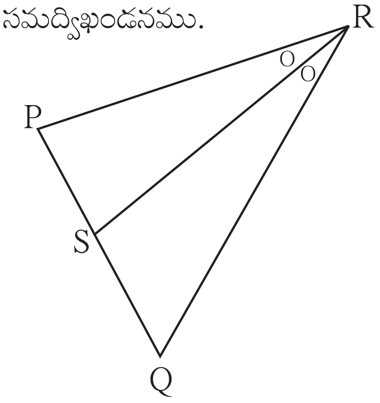
$\therefore AE = \frac{1.8 \times 7.2}{5.4} = 2.4$

AE = 2.4 సెం.మీ.

ఉదా. (2) పటం 1.30 లోని Δ PQR లో రే.ఖం. RS అనేది $\angle$ R యొక్క సమద్విఖండనము.

PR = 15, RQ = 20, PS = 12

అయిన SQ ను కనుగొనండి.



పటం 1.30

సాధన : Δ PRQ లో రే.ఖం. RS, $\angle$ R యొక్క సమద్విఖండనము

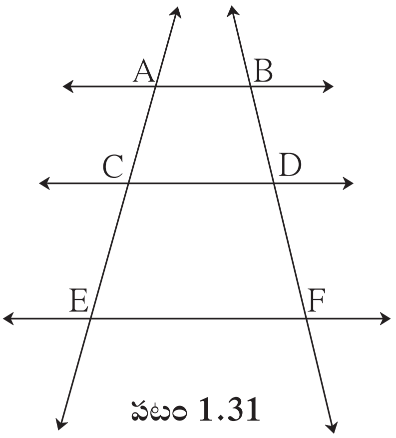
$\frac{PR}{RQ} = \frac{PS}{SQ}$ .... (కోణసమద్విఖండన సిద్ధాంతము)

$\frac{15}{20} = \frac{12}{SQ}$

$SQ = \frac{12 \times 20}{15} = 16$

$\therefore$ SQ = 16

కృత్యము :



పటం 1.31

ఇచ్చిన పటం 1.31లో, AB || CD || EF

ఒక వేళ AC = 5.4, CE = 9, BD = 7.5 అయిన

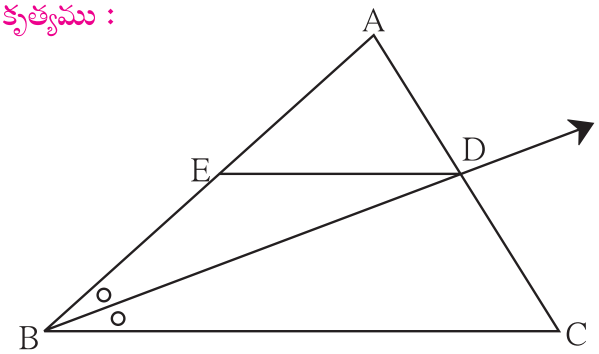
ఖాళీలను పూరించి DF ని కనుగొనండి.

సాధన : AB || CD || EF

$\frac{AC}{\square} = \frac{\square}{DF}$ . . . . . ($\square$)

$\frac{5.4}{9} = \frac{\square}{DF}$ $\therefore$ DF = $\square$

కృత్యము :



పటం 1.32

ΔABC లో కిరణం BD, $\angle ABC$ యొక్క సమద్విఖండనము. A–D–C రే.ఖం. DE || భుజము BC, A–E–B, అయిన $\frac{AB}{BC} = \frac{AE}{EB}$ అని చూపండి.

సాధన : Δ ABC లో కిరణము BD, $\angle$ B యొక్క సమద్విఖండనము.

$\therefore \frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DC}$ .... (కోణసమద్విఖండన సిద్ధాంతము) .... (I)

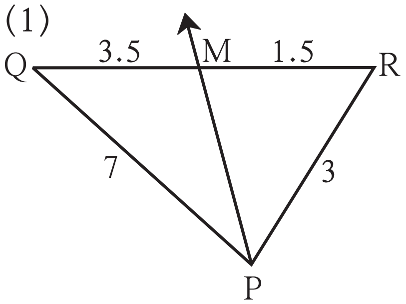
Δ ABC లో DE || BC

$\frac{AE}{EB} = \frac{AD}{DC}$ .... (. . . . .) .... (II)

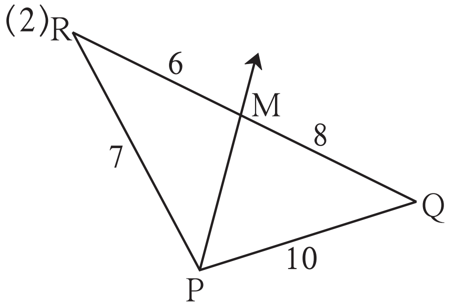
$\frac{AB}{\square} = \frac{\square}{EB}$ .... (I), (II) ల నుండి

అభ్యాసమాలిక 1.2

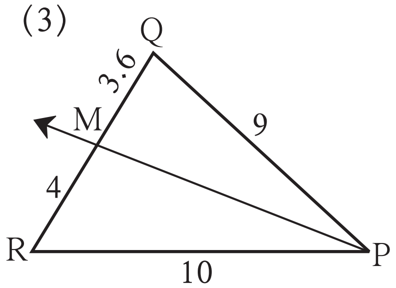
1. కింద కొన్ని త్రిభుజాలు మరియు రేఖా ఖండాల పొడవులు ఇవ్వబడినవి. వాటి నుండి ఏ పటంలో కిరణం PM, $\angle$ QPR యొక్క సమద్విఖండనము అవుతుందో గుర్తించండి.



పటం 1.33

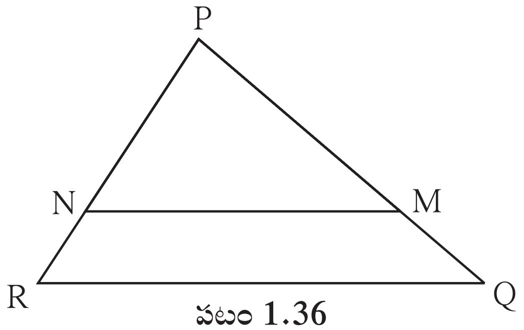


పటం 1.34



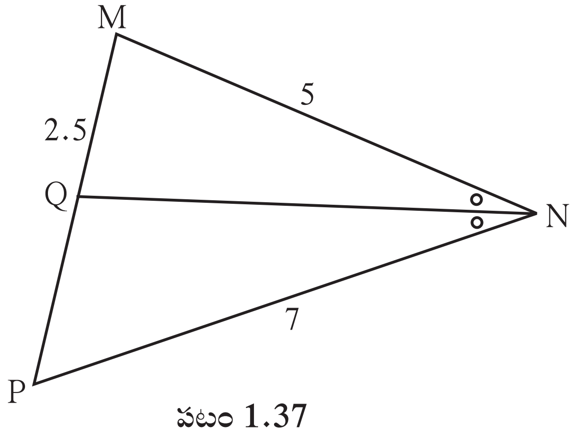
పటం 1.35

2. Δ PQR లో PM = 15, PQ = 25, PR = 20, NR = 8 అయిన రేఖ NM భుజము RQ కు సమాంతరము అవుతుందా? కారణమును రాయండి.

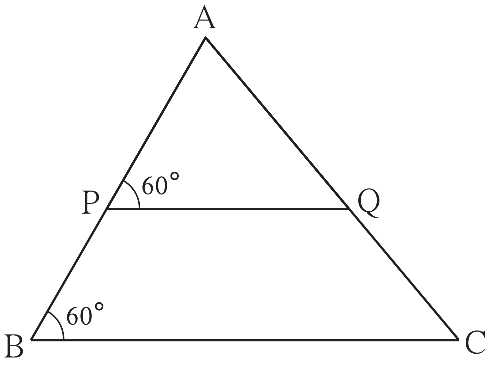


పటం 1.36

3. Δ MNP లో NQ అనేది $\angle$ N యొక్క సమద్విఖండనం. MN = 5, PN = 7, MQ = 2.5 అయితే QP ని కనుగొనండి.



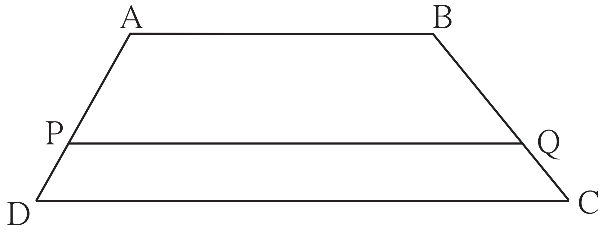
పటం 1.37



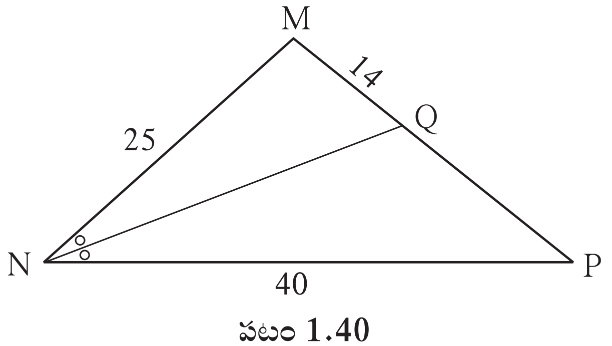
పటం 1.38

4. పటంలో కొన్ని కోణముల కొలతలు ఇవ్వబడ్డాయి. వాటి నుండి $\frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QC}$ అని చూపండి.

5. ట్రెపీజియం (సమలంబ చతుర్భుజం) ABCD లో భుజము AB || భుజము PQ || భుజము DC ఒకవేళ AP = 15, PD = 12, QC = 14 అయిన BQ ని కనుగొనండి.



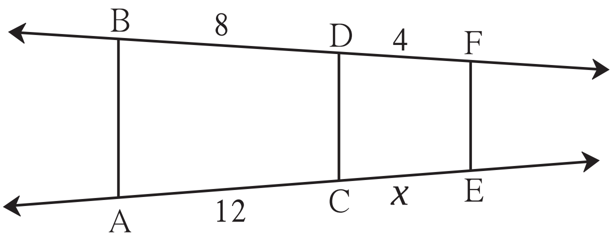
పటం 1.39



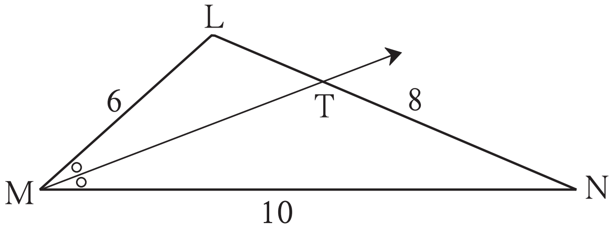
పటం 1.40

6. పటం 1.40 లో ఇవ్వబడిన సమాచారము నుండి QP ని కనుగొనండి.

7. పక్క పటం 1.41 లో AB || CD || FE అయిన x యొక్క విలువను మరియు AE ని కనుగొనండి.



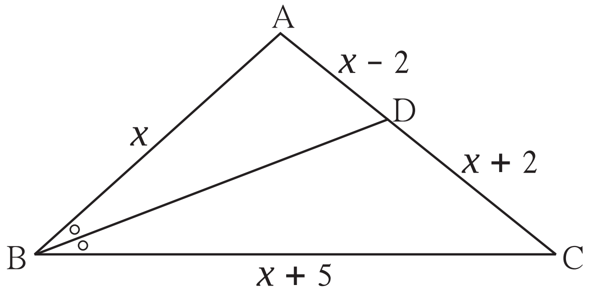
పటం 1.41



పటం 1.42

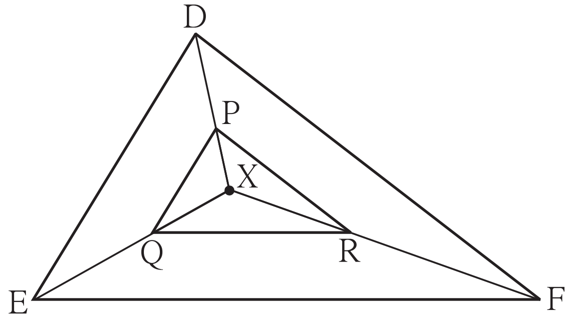
8. Δ LMN లో కిరణం MT, ∠ LMN యొక్క సమద్విఖండనం.

LM = 6, MN = 10, TN = 8 అయిన LT ని కనుగొనుండి.



పటం 1.43

9. Δ ABC లో రే.ఖం. BD, ∠ ABC యొక్క సమద్విఖండనం. AB = x, BC = x + 5, AD = x – 2, DC = x + 2 అయిన x విలువను కనుగొనండి.



పటం 1.44

10. పక్కనున్న పటం 1.44 లో త్రిభుజ అంతరములో X ఏదేని ఒక బిందువు X బిందువు త్రిభుజము యొక్క శీర్షబిందువులతో కలపబడింది. అదే విధంగా రే.ఖం. PQ || రే.ఖం. DE, రే.ఖం. QR || రే.ఖం. EF అయిన రే.ఖం. PR || రే.ఖం. DF అని నిరూపించుటకు కింది ఖాళీలను పూర్తి చేయండి.

ఉపపత్తి: Δ XDE లో PQ || DE .... ☐

$\therefore \dfrac{XP}{☐} = \dfrac{☐}{QE}$ .... (I) (ప్రాథమిక అనుపాత సిద్ధాంతము)

Δ XEF లో QR || EF .... ☐

$\therefore \dfrac{☐}{☐} = \dfrac{☐}{☐}$ ....(II) ☐

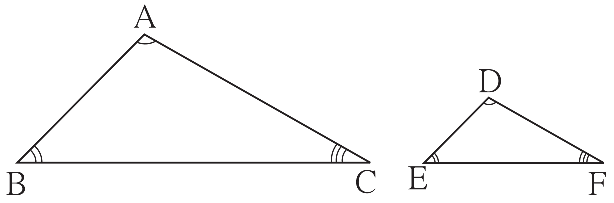
$\therefore \dfrac{☐}{☐} = \dfrac{☐}{☐}$ .... (I), (II) ల నుండి.

∴ రే.ఖం. PR || రే.ఖం. DF .... (ప్రాథమిక అనుపాత సిద్ధాంత విపర్యయము)

11★. Δ ABC లో AB = AC, ∠ B మరియు ∠ C ల సమద్విఖండనములు భుజము AC, భుజము AB లను వరసగా D, E బిందువులలో ఖండిస్తాయి. అయిన రే.ఖం. ED || రే.ఖం. BC అని నిరూపించండి.

కొంచెం గుర్తుతెచ్చుకుందాం.

సరూప త్రిభుజాలు (Similar triangles)



పటం 1.45

Δ ABC మరియు Δ DEF లో $\angle A \cong \angle D$, $\angle B \cong \angle E$, $\angle C \cong \angle F$

మరియు $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{BC}{EF} = \dfrac{AC}{DF}$

అయిన ΔABC, ΔDEF లు సరూపములు అవుతాయి.

Δ ABC, Δ DEF ల సరూపమును $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ అని రాస్తారు.

తెలుసుకుందాం.

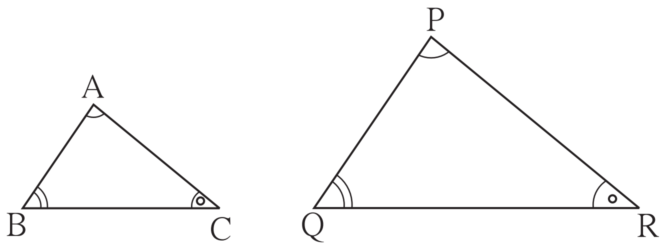
త్రిభుజముల సరూపత నియమములు (Tests for similarity of triangles)

రెండు త్రిభుజముల సరూపములు కావాలంటే వాటి మూడు సదృశ భుజములు అనుపాతములో ఉండుట మరియు మూడు సదృశ కోణములు సర్వసమానం అగుట తప్పనిసరి అవుతుంది. కాని ఈ ఆరు షరతులలోని మూడు ప్రత్యేకమైన షరతులను పాటించినట్లయితే తక్కిన షరతులు వాటింతటవే పాటించబడతాయి. అనగా రెండు త్రిభుజాలు సరూపములు కావడానికి మూడు ప్రత్యేకమైన షరతులు సరిపోతాయి. ఈ మూడు షరతులను పరీక్షించి రెండు త్రిభుజాలు సరూపములు అవుతాయని నిర్ణయించవచ్చు. ఇలాంటి సరిపడే షరతుల సమూహము అనగా సరూప నియమాలు అవుతాయి. కావున రెండు త్రిభుజాలు సరూపములు అవుతాయా అని నిర్ణయించుటకు ఆ ప్రత్యేక షరతులతో పరక్షిస్తే సరిపోతుంది.

సరూపత యొక్క కో.కో.కో. నియమము (AAA test for similarity of triangles)

రెండు త్రిభుజముల యొక్క శీర్షబిందువులలో ఇవ్వబడిన ఒకదానికొకటి సదృశమయ్యే మూడు సదృశ కోణములు సర్వసమానం అయిన ఆ త్రిభుజాలు సరూపాలు అవుతాయి.

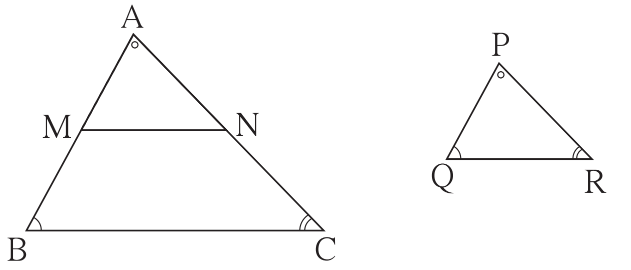
Δ ABC, Δ PQR లలో ABC $\leftrightarrow$ PQR ఈ సదృశములో $\angle A \cong \angle P$, $\angle B \cong \angle Q$, $\angle C \cong \angle R$, అయిన $\Delta ABC \sim \Delta PQR$.



పటం 1.46

అధిక వివరాలకై

కో.కో.కో. నియమము యొక్క నిరూపణ



పటం 1.47

దత్తాంశం : Δ ABC, Δ PQR లలో $\angle A \cong \angle P$, $\angle B \cong \angle Q$, $\angle C \cong \angle R$.

సారాంశం : $\Delta ABC \sim \Delta PQR$

ఉపపత్తి : Δ ABC అనేది Δ PQR కంటే పెద్దది అని అనుకుందాం. AM = PQ, AN = PR. అయ్యేట్లు AB పై M బిందువును, AC పై N బిందువును తీసుకోండి. వాటి నుండి $\Delta AMN \cong \Delta PQR$ అని చూపండి. దానినుండి MN || BC అని చూపవచ్చు.

ఇపుడు ప్రాథమిక అనుపాత సిద్ధాంతము నుండి $\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$

అనగా, $\frac{MB}{AM} = \frac{NC}{AN}$ .... (విలోమ నియమము)

$\frac{MB + AM}{AM} = \frac{NC + AN}{AN}$ .... (సంయోగ నియమము)

$\therefore \frac{AB}{AM} = \frac{AC}{AN}$

$\therefore \frac{AB}{PQ} = \frac{AC}{PR}$. అదేవిధంగా $\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR}$ అని చూపవచ్చు.

$\therefore \frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{AC}{PR}$ $\quad \therefore \Delta ABC \sim \Delta PQR$

సరూప త్రిభుజాల కో.కో. నియమము (AA test for similarity of triangles)

సదృశ శీర్షబిందువులననుసరించి ఒక త్రిభుజములోని రెండు కోణములు రెండవ త్రిభుజములోని రెండు సదృశ కోణాలకు సర్వసమానంగా ఉన్నట్లయితే మొదటి త్రిభుజ తక్కిన కోణం, రెండవ త్రిభుజ తక్కిన కోణానికి సర్వసమానంగా ఉంటుందని మనకు తెలుసు. అనగా ఒక త్రిభుజము యొక్క రెండు కోణములు రెండవ త్రిభుజ రెండు సదృశ కోణములకు సర్వసమానంగా ఉన్నపుడు కూడా ఈ షరతు (నియమము) రెండు త్రిభుజములు సరూపములు కావడానికి సరిపోతుంది.

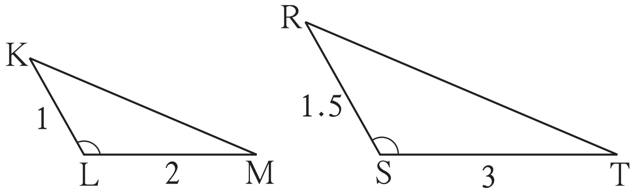
దీని నుండి ఒక త్రిభుజ రెండు కోణములు రెండవ త్రిభుజ రెండు కోణములకు సర్వసమానంగా ఉన్నట్లయితే ఆ రెండు త్రిభుజాలు సరూపాలు అవుతాయి.

ఈ ధర్మమును సరూపత యొక్క కో.కో. నియమము అంటారు.

భు.కో.భు. సరూప నియమము (SAS test for similarity of triangles)

రెండు త్రిభుజముల యొక్క సదృశ శీర్ష బిందువులననుసరించి వాటి సదృశ భుజముల రెండు జతలు ఒకే నిష్పత్తిలో ఉండి. ఆ భుజముల మధ్య కోణములు సర్వసమానంగా ఉన్నట్లయితే ఆ రెండు త్రిభుజాలు సరూపంగా ఉంటాయి.

ఉదాహరణకు : ఒకవేళ Δ KLM, Δ RST లలో



పటం 1.48

$\angle KLM \cong \angle RST$

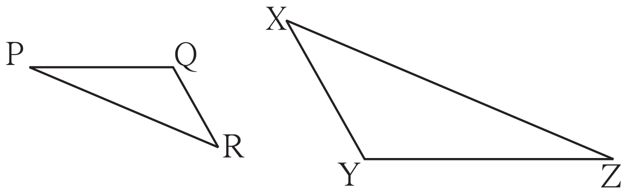
$$\frac{KL}{RS} = \frac{LM}{ST}$$

అయిన $\Delta KLM \sim \Delta RST$

భు.భు.భు. సరూప నియమము (SSS test for similarity of triangles)

రెండు త్రిభుజముల యొక్క సదృశ శీర్షబిందువులననుసరించి ఎప్పుడైతే ఒక త్రిభుజము యొక్క మూడు భుజములు రెండవ త్రిభుజము యొక్క మూడు భుజములతో ఒకే అనుపాతములో ఉన్నట్లయితే అపుడు ఆ త్రిభుజములు సరూపములవుతాయి. సరూపత యొక్క ఈ ధర్మమును భు.భు.భు. నియమము అంటారు.

ఉదా., ఒకవేళ Δ PQR మరియు Δ XYZ లలో,



పటం 1.49

$$\frac{PQ}{YZ} = \frac{QR}{XY} = \frac{PR}{XZ}$$ అయిన

$\Delta PQR \sim \Delta ZYX$

సరూప త్రిభుజాల ధర్మములు :

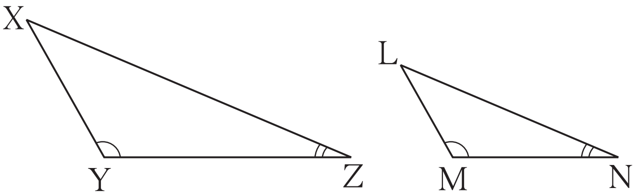
(1) $\Delta ABC \sim \Delta ABC$ – పరావర్తితము (Reflexivity)

(2) ఒకవేళ $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ అయిన $\Delta DEF \sim \Delta ABC$ – సౌష్టవత (Symmetry)

(3) ఒకవేళ $\Delta ABC \sim \Delta DEF$, $\Delta DEF \sim \Delta GHI$ అయిన $\Delta ABC \sim \Delta GHI$–సంక్రమణ (Transitivity)

సాధించిన ఉదాహరణలు

ఉదా. (1) ΔXYZ లో $\angle Y = 100^\circ$, $\angle Z = 30^\circ$, ΔLMN లో $\angle M = 100^\circ$, $\angle N = 30^\circ$, అయిన ΔXYZ, ΔLMN లు సరూపాలు అవుతాయా? అయినట్లయితే ఏ నియమము ప్రకారం?



పటం 1.50

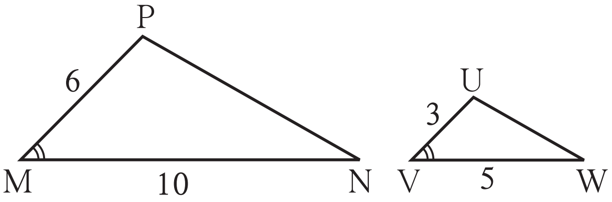
సాధన : Δ XYZ, Δ LMN లలో,

$\angle Y = 100°, \angle M = 100° \therefore \angle Y \cong \angle M$

$\angle Z = 30°, \quad \angle N = 30° \quad \therefore \angle Z \cong \angle N$

$\therefore \Delta XYZ \sim \Delta LMN$ .... (కో.కో. నియమము ప్రకారం)

ఉదా. (2) పటం 1.51 లో ఇచ్చిన సమాచారం ప్రకారం త్రిభుజముల సరూపాలు అవుతాయా? అయినట్లయితే ఏ నియమం ప్రకారం?



పటం 1.51

సాధన : Δ PMN, Δ UVW లలో

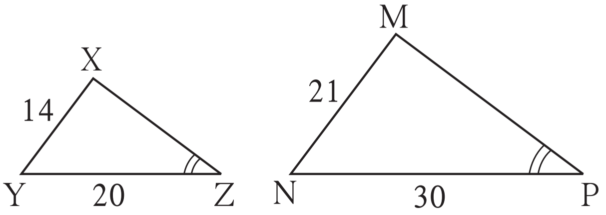
$\frac{PM}{UV} = \frac{6}{3} = \frac{2}{1}, \frac{MN}{VW} = \frac{10}{5} = \frac{2}{1}$

$\therefore \frac{PM}{UV} = \frac{MN}{VW}$

మరియు $\angle M \cong \angle V$ .... (దత్తాంశం)

$\therefore \Delta PMN \sim \Delta UVW$ .... (భు.కో.భు. సరూప నియమము)

ఉదా. (3) పటం 1.52 లో ఇచ్చిన సమాచారం నుండి త్రిభుజాలు సరూపాలు అని చెప్పవచ్చునా? చెప్పగల్గినట్లయితే ఏ నియమం ప్రకారం?



పటం 1.52

సాధన : Δ XYZ , Δ MNP లలో

$\frac{XY}{MN} = \frac{14}{21} = \frac{2}{3}$,

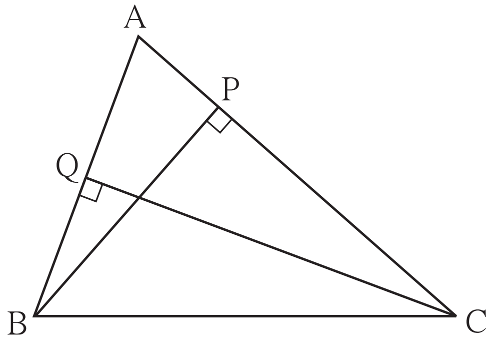
$\frac{YZ}{NP} = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}$

$\therefore \frac{XY}{MN} = \frac{YZ}{NP}$

$\angle Z \cong \angle P$ అని ఇవ్వబడింది. కాని $\angle Z, \angle P$ లు అనుపాతములో గల భుజముల మధ్య కోణములు కావు.

$\therefore \Delta XYZ, \Delta MNP$ సరూపములు అని చెప్పలేము.

ఉదా. (4)



పటం 1.53

పక్కపటంలో $BP \perp AC$, $CQ \perp AB$, $A - P - C$, $A - Q - B$ అయిన Δ APB, Δ AQC లు సరూపములు అని చూపండి.

సాధన : Δ APB, Δ AQC లలో

$\angle APB = \square^\circ$ (I)

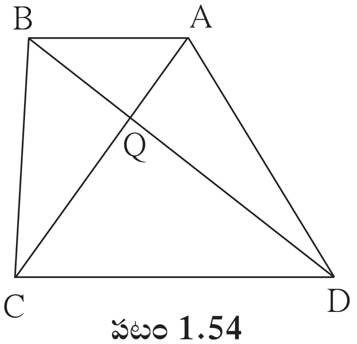
$\angle AQC = \square^\circ$ (II)

$\therefore \angle APB \cong \angle AQC$ .... (I), (II) లనుండి.

$\angle PAB \cong \angle QAC$ .... (...............)

$\therefore \Delta APB \sim \Delta AQC$ ..... (కో.కో. నియమము)

ఉదా. (5) చతుర్భుజం ABCD యొక్క కర్ణములు Q బిందువు వద్ద ఖండించుకొనిన మరియు 2QA = QC, 2QB = QD. అయిన DC = 2AB అని చూపండి.



పటం 1.54

దత్తాంశం : 2QA = QC

2QB = QD

సారాంశం : CD = 2AB

ఉపపత్తి : $2QA = QC \;\therefore \dfrac{QA}{QC} = \dfrac{1}{2}$ .... (I)

$2QB = QD \;\therefore \dfrac{QB}{QD} = \dfrac{1}{2}$ .... (II)

$\therefore \dfrac{QA}{QC} = \dfrac{QB}{QD}$ .... (I), (II) ల నుండి.

Δ AQB, Δ CQD లలో

$\dfrac{QA}{QC} = \dfrac{QB}{QD}$ .... (నిరూపించాం)

$\angle AQB \cong \angle DQC$ .... (శీర్షాభిముఖ కోణములు)

$\therefore \Delta AQB \sim \Delta CQD$ .... (భు.కో.భు. సరూప నియమము)

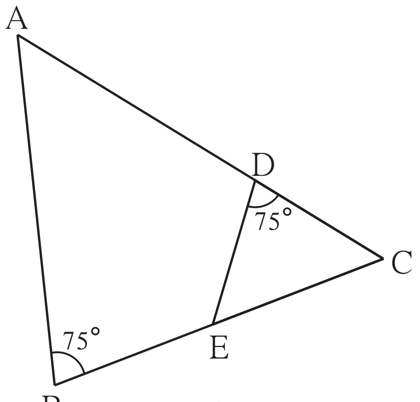
$\therefore \dfrac{AQ}{CQ} = \dfrac{QB}{QD} = \dfrac{AB}{CD}$ .... (సదృశ భుజాల అనుపాతము)

కాని, $\dfrac{AQ}{CQ} = \dfrac{1}{2} \;\therefore \dfrac{AB}{CD} = \dfrac{1}{2}$

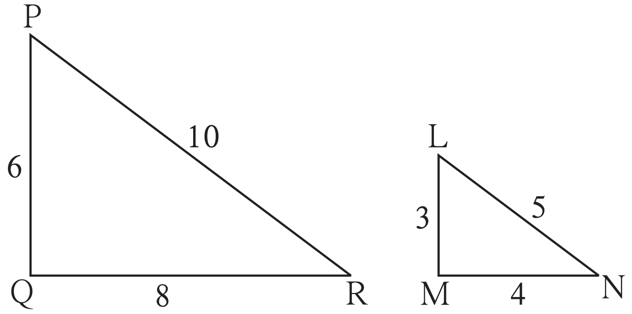
$\therefore 2AB = CD$

అభ్యాసమాలిక 1.3

1. పటం 1.55 లో $\angle ABC = 75°$, $\angle EDC = 75°$ అయిన ఏ రెండు త్రిభుజాలు ఏ నియమము ప్రకారం సరూపాలు అవుతాయి? వీటి సరూపత సరియైన సదృశ రూపంలో రాయండి.



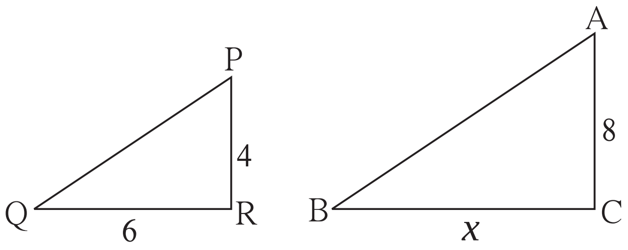
పటం 1.55



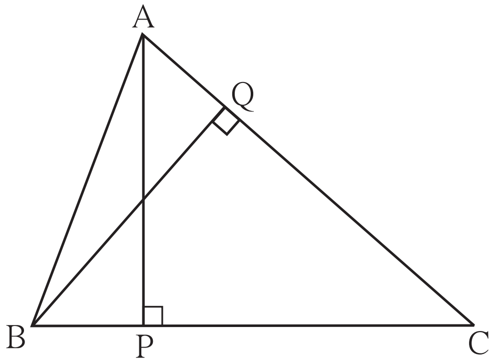
పటం 1.56

2. పటం 1.56 లోని త్రిభుజములు సరూపములా? అయినట్లయితే ఏ నియమము ప్రకారం?

3. పటం 1.57 లో చూపిన విధంగా 8 మీటర్లు, 4 మీటర్లు ఎత్తుగల రెండు స్థంభములు చదునైన నేలపై నిటారుగా ఉన్నాయి. ఎండచేత చిన్న స్థంభం యొక్క నీడ 6 మీటర్లు ఏర్పడినట్లయితే అదే సమయంలో పెద్ద స్థంభం యొక్క నీడ ఎంత పొడవు ఉంటుంది?



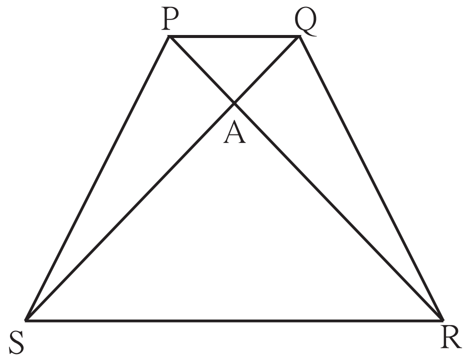
పటం 1.57



పటం 1.58

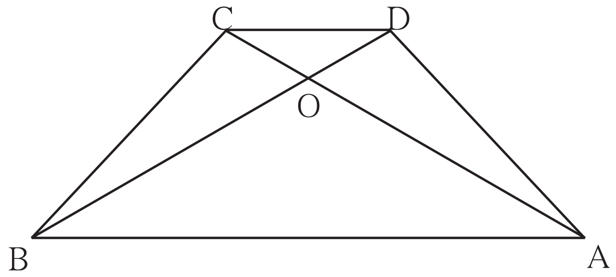
4. ΔABC లో $AP \perp BC$, $BQ \perp AC$ B- P-C, A-Q - C అయిన $\Delta CPA \sim \Delta CQB$ అని చూపండి. ఒక వేళ $AP = 7$, $BQ = 8$, $BC = 12$ అయిన AC ని కనుగొనండి.

5. పటంలో ట్రెపీజియం (సమలంబచతుర్భుజం) PQRS లో, భుజము PQ || భుజము SR, AR = 5AP, AS = 5AQ అయిన SR = 5PQ అని నిరూపించండి.



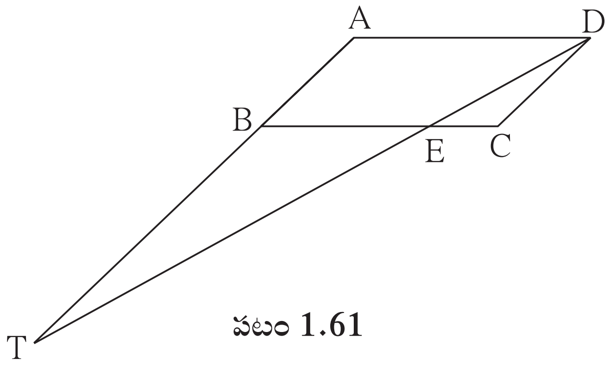
పటం 1.59

6. ట్రెపీజియం ABCD లో, (పటం 1.60) భుజము AB || భుజము DC. కర్ణములు AC, BD లు ఒకదానినొకటి O బిందువు వద్ద ఖండించు కుంటాయి. AB = 20, DC = 6, OB = 15 అయిన OD ని కనుగొనండి.



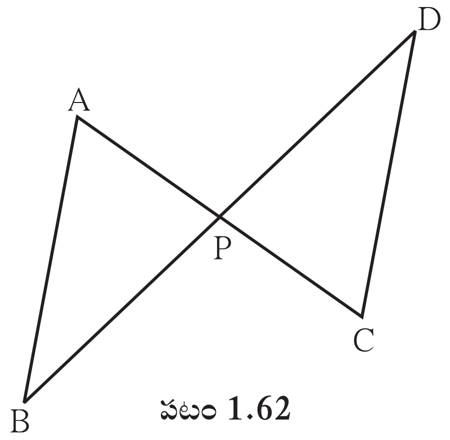
పటం 1.60

7. □ABCD ఒక సమాంతర చతుర్భుజము. భుజము BC పై E ఒక బిందువు కలదు, రేఖ DE కిరణము AB ని T బిందువు వద్ద ఖండిస్తుంది. అయిన DE × BE = CE × TE అని చూపండి.



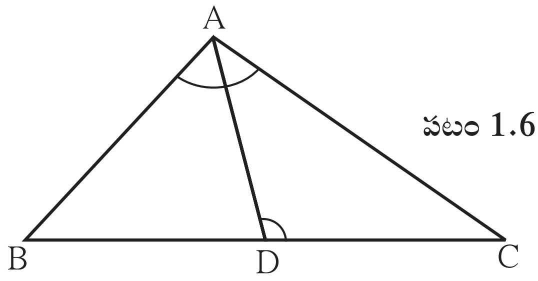
పటం 1.61

8. పటంలో రే.ఖం. AC, రే.ఖం. BD పరస్పరం P బిందువు వద్ద ఖండించుకొనిన మరియు $\frac{AP}{CP} = \frac{BP}{DP}$ అయిన $\Delta ABP \sim \Delta CDP$ అని నిరూపించండి.



పటం 1.62

9. పటంలోని ΔABC లో $\angle BAC = \angle ADC$ అయ్యేట్లు భుజము BC పై D ఒక బిందువు కలదు. అయిన, $CA^2 = CB \times CD$ అని నిరూపించండి.

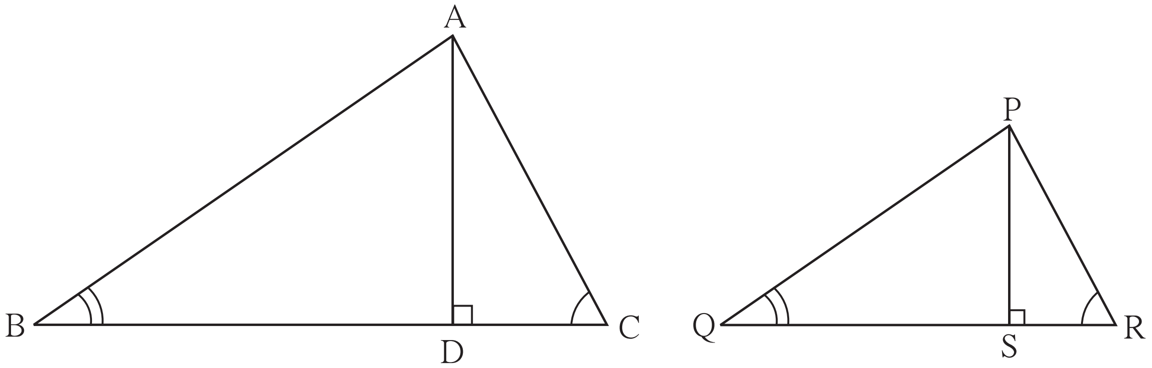


పటం 1.63

తెలుసుకుందాం.

సరూప త్రిభుజ వైశాల్యాల సిద్ధాంతం. (Theorem of areas of similar triangles)

సిద్ధాంతము : రెండు త్రిభుజాలు సరూపాలు అయిన వాటి వైశాల్యాల నిష్పత్తి వాటి సదృశ భుజాల వర్గముల నిష్పత్తికి సమానంగా ఉంటుంది.



పటం 1.64

దత్తాంశము : $\Delta\, ABC \sim \Delta\, PQR$, $AD \perp BC$, $PS \perp QR$

సారాంశము : $\dfrac{A(\Delta\, ABC)}{A(\Delta\, PQR)} = \dfrac{AB^2}{PQ^2} = \dfrac{BC^2}{QR^2} = \dfrac{AC^2}{PR^2}$

ఉపపత్తి : $\dfrac{A(\Delta\, ABC)}{A(\Delta\, PQR)} = \dfrac{BC \times AD}{QR \times PS} = \dfrac{BC}{QR} \times \dfrac{AD}{PS}$ .... (I)

$\Delta\, ABD$ మరియు $\Delta\, PQS$ లలో

$\angle B = \angle Q$ .... (దత్తాంశము)

$\angle ADB = \angle PSQ = 90^\circ$

$\therefore$ కో.కో. నియమము ప్రకారం $\Delta\, ABD \sim \Delta\, PQS$

$\therefore \dfrac{AD}{PS} = \dfrac{AB}{PQ}$ .... (II)

కాని $\Delta\, ABC \sim \Delta\, PQR$

$\therefore \dfrac{AB}{PQ} = \dfrac{BC}{QR} = \dfrac{AC}{PR}$ .... (III)

(II), (III) ల నుండి

$$\frac{A(\Delta\, ABC)}{A(\Delta\, PQR)} = \frac{BC}{QR} \times \frac{AD}{PS} = \frac{BC}{QR} \times \frac{BC}{QR} = \frac{BC^2}{QR^2} = \frac{AB^2}{PQ^2} = \frac{BC^2}{QR^2}$$

సాధించిన ఉదాహరణలు

ఉదా. (1) : $\Delta ABC \sim \Delta PQR$, $A(\Delta ABC) = 16$, $A(\Delta PQR) = 25$ అయిన $\frac{AB}{PQ}$ నిష్పత్తి యొక్క విలువను కనుగొనండి.

సాధన : $\Delta ABC \sim \Delta PQR$

$\therefore \frac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta PQR)} = \frac{AB^2}{PQ^2}$ .... (సరూపత్రిభుజాల వైశాల్యాల నిష్పత్తి సదృశ భుజాల వర్గాల నిష్పత్తికి సమానంగా ఉంటుంది.)

$\therefore \frac{16}{25} = \frac{AB^2}{PQ^2}$ $\quad \therefore \frac{AB}{PQ} = \frac{4}{5}$ .... (వర్గమూలము తీసుకొనిన)

ఉదా. (2) రెండు సరూప త్రిభుజాల సదృశ భుజాల నిష్పత్తి 2:5 చిన్న త్రిభుజ వైశాల్యము 64 చ.సెం.మీ. అయినట్లయితే పెద్ద త్రిభుజ వైశాల్యము ఎంత?

సాధన : $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ అనుకొనిన

ΔABC చిన్న త్రిభుజము అని ΔPQR పెద్ద త్రిభుజము అని అనుకొందాం.

$\therefore \frac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta PQR)} = \frac{(2)^2}{(5)^2} = \frac{4}{25}$ .... (సరూప త్రిభుజాల వైశాల్యాల నిష్పత్తి)

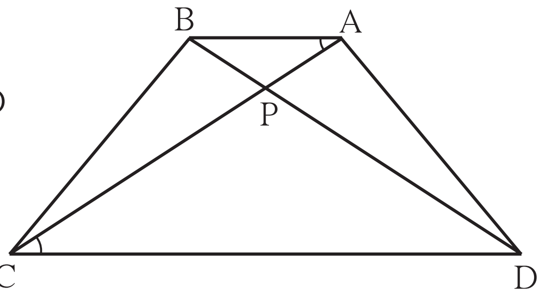
$\therefore \frac{64}{A(\Delta PQR)} = \frac{4}{25}$

$4 \times A(\Delta PQR) = 64 \times 25$

$A(\Delta PQR) = \frac{64 \times 25}{4} = 400$

$\therefore$ పెద్ద త్రిభుజ వైశాల్యము = 400 చ.సెం.మీ.

ఉదా. (3) ట్రెపీజియం ABCD లో భుజము AB || భుజము CD, కర్ణము AC, BD లు ఒకదానినొకటి P వద్ద ఖండించుకొనినట్లయితే $\frac{A(\Delta APB)}{A(\Delta CPD)} = \frac{AB^2}{CD^2}$



పటం 1.65

సాధన : ట్రెపీజియం ABCD లో భుజము AB || భుజము CD

ΔAPB మరియు ΔCPD లలో

$\angle PAB \cong \angle PCD$ ..... (ఏకాంతర కోణములు)

$\angle APB \cong \angle CPD$ .....(శీర్షాభిముఖ కోణములు)

$\therefore \Delta APB \sim \Delta CPD$ ..... (కో.కో. నియమము)

$\frac{A(\Delta APB)}{A(\Delta CPD)} = \frac{AB^2}{CD^2}$ .... (సరూప త్రిభుజ వైశాల్యాల సిద్ధాంతం)

అభ్యాసమాలిక 1.4

1. రెండు సరూప త్రిభుజాల సదృశ భుజాల నిష్పత్తి 3:5 అయిన వాటి వైశాల్యాల నిష్పత్తిని కనుగొనండి.

2. $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ మరియు $AB : PQ = 2:3$, అయిన కింది ఖాళీలను పూర్తి చేయండి.

$$\frac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta PQR)} = \frac{AB^2}{\square} = \frac{2^2}{3^2} = \frac{\square}{\square}$$

3. $\Delta ABC \sim \Delta PQR$, $A(\Delta ABC) = 16$, $A(\Delta PQR) = 25$, అయిన కింది ఖాళీలను పూర్తి చేయండి.

$$\frac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta \ldots.)} = \frac{16}{25} \qquad \therefore \frac{AB}{PQ} = \frac{\square}{\square}$$

4. $\Delta LMN \sim \Delta PQR$, $9 \times A(\Delta PQR) = 16 \times A(\Delta LMN)$, $QR = 20$ అయిన MN ను కనుగొనండి.

5. రెండు సరూప త్రిభుజాల వైశాల్యాలు 225 చ.సెం.మీ., 81 చ.సెం.మీ. గలవు ఒక వేళ చిన్న త్రిభుజము యొక్క ఒక భుజము 12 సెం.మీ. ఉన్నట్లయితే పెద్ద త్రిభుజ సదృశ భుజమును కనుగొనండి.

6. ΔABC, ΔDEF లు రెండు సమబాహు త్రిభుజములు. $A(\Delta ABC) : A(\Delta DEF) = 1 : 2$
AB = 4 అయిన DE యొక్క పొడవును కనుగొనండి.

7. పటం 1.66 లో రే.ఖం. PQ || రే.ఖం. DE, $A(\Delta PQF) = 20$ చ.యూ. $PF = 2\,DP$ అయిన $A(\square DPQE)$ కనుగొనుటకు కింది కృత్యమును పూర్తి చేయండి.

$A(\Delta PQF) = 20$ చ.యూనిట్లు, $PF = 2\,DP$, $DP = x$ అనుకొనిన $\therefore PF = 2x$

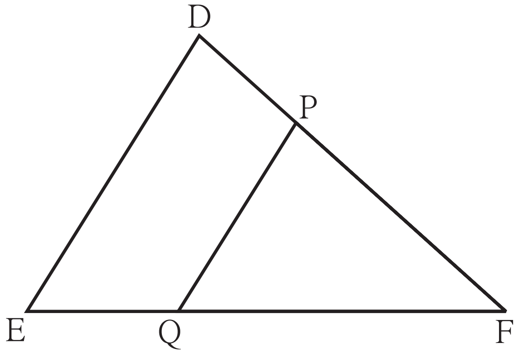
$DF = DP + \square = \square + \square = 3x$

ΔFDE, ΔFPQ లలో

$\angle FDE \cong \angle \square$ (సదృశ కోణము)

$\angle FED \cong \angle \square$ (సదృశ కోణము)

$\therefore \Delta FDE \sim \Delta FPQ$ .... (కో.కో. నియమము)



పటం 1.66

$$\therefore \frac{A(\Delta FDE)}{A(\Delta FPQ)} = \frac{\square}{\square} = \frac{(3x)^2}{(2x)^2} = \frac{9}{4}$$

$$A(\Delta FDE) = \frac{9}{4} A(\Delta FPQ) = \frac{9}{4} \times \square = \square$$

$$A(\square DPQE) = A(\Delta FDE) - A(\Delta FPQ)$$

$$= \square - \square$$

$$= \square$$

1. కింది ఉపప్రశ్నలకు బహుళైచ్ఛికములు (మల్టిపుల్ చాయిస్) ఇవ్వబడినవి వాటిలోని సరియైన ఐచ్ఛికమును గుర్తించండి.

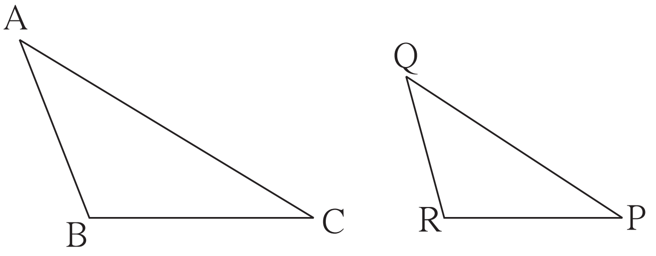
(1) Δ ABC, Δ PQR లలో సదృశ భుజాలు $\frac{AB}{QR} = \frac{BC}{PR} = \frac{CA}{PQ}$ అయిన కిందివాటిలో ఏది సత్యము?

(A) $\Delta PQR \sim \Delta ABC$

(B) $\Delta PQR \sim \Delta CAB$

(C) $\Delta CBA \sim \Delta PQR$

(D) $\Delta BCA \sim \Delta PQR$

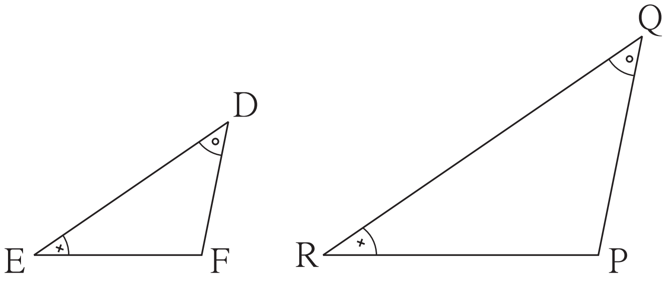


పటం 1.67

(2) Δ DEF, Δ PQR లలో, $\angle D \cong \angle Q$, $\angle R \cong \angle E$, అయిన కిందివాటిలో ఏది అసత్యము?

(A) $\frac{EF}{PR} = \frac{DF}{PQ}$ (B) $\frac{DE}{PQ} = \frac{EF}{RP}$

(C) $\frac{DE}{QR} = \frac{DF}{PQ}$ (D) $\frac{EF}{RP} = \frac{DE}{QR}$



పటం 1.68

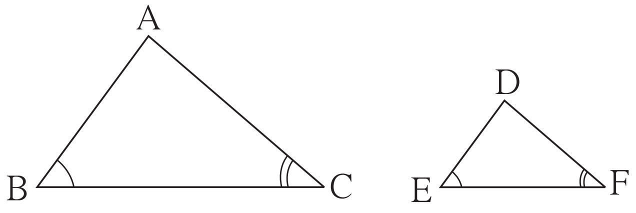
(3) Δ ABC, Δ DEF లలో $\angle B = \angle E$, $\angle F = \angle C$, AB = 3 DE, అయిన ఆ రెండు త్రిభుజాలకు సంబంధించిన సరియైన వాక్యము ఏది?

(A) అవి సర్వసమానం కావు మరియు సరూపములు కూడా కావు.

(B) అవి సరూపములు కాని సర్వసమానం కావు.

(C) అవి సర్వసమానం మరియు సరూపములు కూడా అవుతాయి.

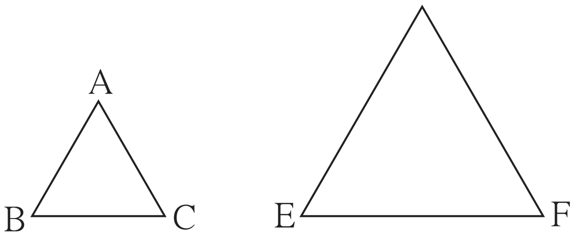
(D) పై వాక్యాలలో ఏదీ సత్యము కాదు.



పటం 1.69

(4) ΔABC, ΔDEF లు రెండు సమబాహు త్రిభుజములు, A (ΔABC) : A (Δ DEF) = 1 : 2, AB = 4 అయినట్లయితే DE యొక్క పొడవు ఎంత?

(A) $2\sqrt{2}$ (B) 4 (C) 8 (D) $4\sqrt{2}$

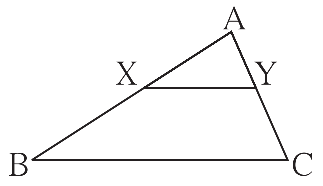


పటం 1.70

(5) పటం 1.71 లో రే.ఖం. XY || రే.ఖం. BC అయిన కింది వాటిలో ఏది సత్యము?

(A) $\frac{AB}{AC} = \frac{AX}{AY}$ (B) $\frac{AX}{XB} = \frac{AY}{AC}$

(C) $\frac{AX}{YC} = \frac{AY}{XB}$ (D) $\frac{AB}{YC} = \frac{AC}{XB}$



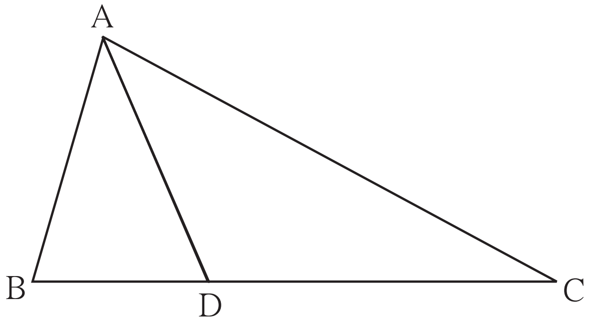
పటం 1.71

2. Δ ABC లో B – D – C, BD = 7, BC = 20 అయిన కింది నిష్పత్తులను కనుగొనండి.

(1) $\frac{A(\Delta ABD)}{A(\Delta ADC)}$

(2) $\frac{A(\Delta ABD)}{A(\Delta ABC)}$

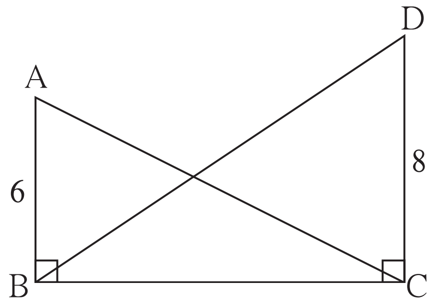
(3) $\frac{A(\Delta ADC)}{A(\Delta ABC)}$



పటం 1.72

3. సమాన ఎత్తులు గల రెండు త్రిభుజాల వైశాల్యాల నిష్పత్తి 2:3 చిన్న త్రిభుజము భూమి 6 సెం.మీ. అయిన పెద్ద త్రిభుజ సదృశ భూమి ఎంత ఉంటుంది?

4.



పటం 1.73

పటం 1.73 లో $\angle ABC = \angle DCB = 90°$

AB = 6, DC = 8

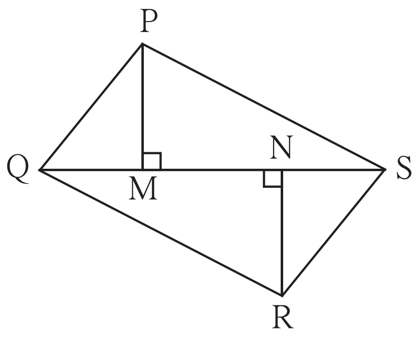
అయిన $\frac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta DCB)}$ = ఎంత?

5. పటం 1.74 లో PM = 10 సెం.మీ.

$A(\Delta PQS)$ = 100 చ.సెం.మీ.

$A(\Delta QRS)$ = 110 చ.సెం.మీ.

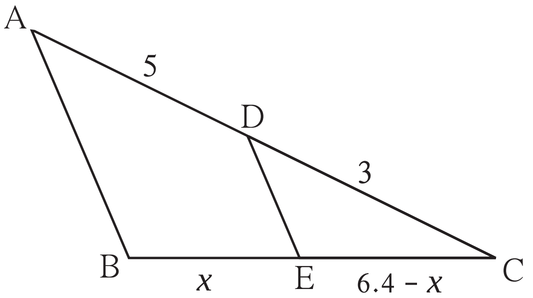
అయిన NR కనుగొనండి.



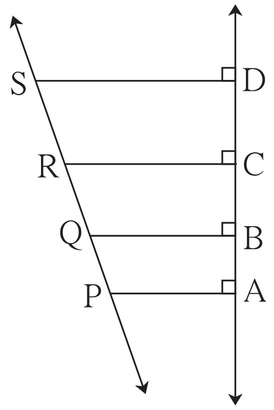
పటం 1.74

6. Δ MNT ~ Δ QRS బిందువు T నుండి గీసిన లంబం యొక్క పొడవు 5 అయి, S బిందువు నుండి గీసిన లంబము పొడవు 9 అయిన $\frac{A(\Delta MNT)}{A(\Delta QRS)}$ యొక్క నిష్పత్తిని కనుగొనండి.

7. పటం 1.75 లో A – D – C మరియు B – E – C . రే.ఖం. DE || భుజము AB. AD = 5, DC = 3, BC = 6.4 అయిన BE కనుగొనండి.



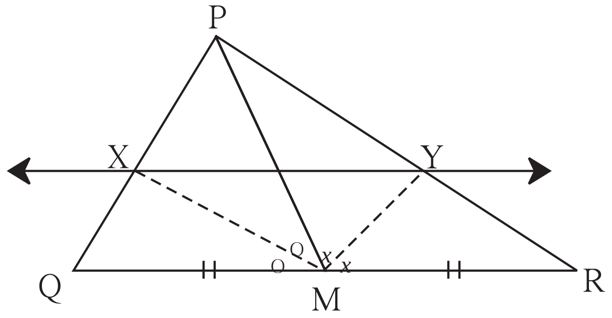
పటం 1.75



పటం 1.76

8. పటం 1.76 లో, రే.ఖం. PA, రే.ఖం. QB, రే.ఖం. RC మరియు రే.ఖం. SD లు రేఖ AD కి లంబాలు. AB = 60, BC = 70, CD = 80, PS = 280, అయిన PQ, QR, RS లను కనుగొనండి.

9. Δ PQR లో రే.ఖం. PM అనేది మధ్యగత రేఖ ∠PMQ, ∠PMR ల యొక్క సమద్విఖండనాలు భుజము PQ, భుజము PR లను వరసగా X, Y లలో ఖండిస్తాయి. అయిన XY || QR అని నిరూపించండి.



పటం 1.77

నిరూపణలోని ఖాళీలను పూరించి నిరూపణను పూర్తిచేయండి.

Δ PMQ లో కిరణం MX అనేది ∠PMQ యొక్క సమద్విఖండనం.

$\therefore \quad \frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square}$ .... (I) (కోణ సమద్విఖండన సిద్ధాంతం)

Δ PMR లో కిరణం MY అనేది ∠PMR యొక్క కోణసమద్విఖండనం.

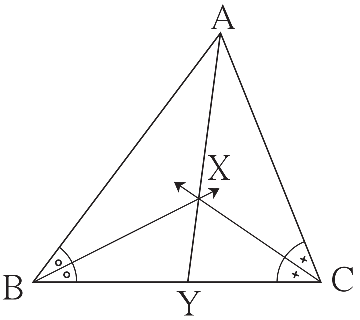
$\therefore \quad \frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square}$ .... (II) (కోణ సమద్విఖండన సిద్ధాంతం)

కాని $\frac{MP}{MQ} = \frac{MP}{MR}$ .... (M అనేది QR యొక్క మధ్యబిందువు అనగా MQ = MR)

$\therefore \quad \frac{PX}{XQ} = \frac{PY}{YR}$

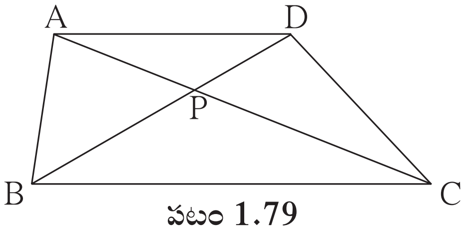
$\therefore$ XY || QR .... (ప్రాథమిక అనుపాత సిద్ధాంత విపర్యయము)

10★. పటం 1.78 లోని Δ ABC యొక్క $\angle B$, $\angle C$ కోణాల సమద్విఖండన రేఖలు ఒకదానినొకటి X వద్ద ఖండించుకుంటాయి. రేఖ AX భుజము BC ని Y వద్ద ఖండిస్తుంది. ఒక వేళ AB = 5, AC = 4, BC = 6 అయిన $\frac{AX}{XY}$ యొక్క విలువను కనుగొనండి.



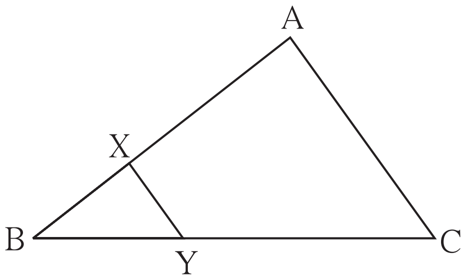
పటం 1.78

11. $\square$ ABCD లో రే.ఖం. AD $\parallel$ రే.ఖం. BC. కర్ణము AC, BD లు పరస్పరం P బిందువు వద్ద ఖండించుకుంటాయి. అయిన $\frac{AP}{PD} = \frac{PC}{BP}$ అని చూపండి.



పటం 1.79

12. పటం 1.80 లో XY $\parallel$ భుజము AC. ఒక వేళ 2AX = 3BX మరియు XY = 9 అయిన AC యొక్క విలువను కనుగొనుటకు కింది కృత్యమును పూర్తి చేయండి.



పటం 1.80

కృత్యము : 2AX = 3BX $\therefore \frac{AX}{BX} = \frac{\square}{\square}$

$\frac{AX+BX}{BX} = \frac{\square + \square}{\square}$ .... (సంయోగ నియమము)

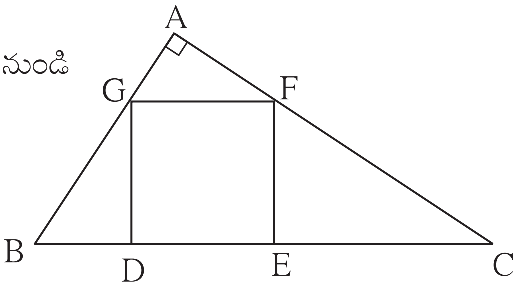
$\frac{AB}{BX} = \frac{\square}{\square}$ .... (I)

Δ BCA ~ Δ BYX .... (సరూపత యొక్క $\square$ నియమం)

$\therefore \frac{BA}{BX} = \frac{AC}{XY}$ .... (సరూప త్రిభుజాల సదృశ భుజములు)

$\therefore \frac{\square}{\square} = \frac{AC}{9}$ $\therefore$ AC = $\square$ ....(I) నుండి

13★. Δ ABC లో $\angle A = 90°$. $\square$ DEFG చతురస్రం యొక్క శీర్షములు D, E లు BC భుజము పై కలవు. F బిందువు భుజము AC పై G భుజము భుజం AB పై గలవు. అయిన $DE^2 = BD \times EC$ అని చూపండి. (Δ GBD, Δ CFE లు సరూపములు అని చూపండి. GD = FE = DE ను ఉపయోగించండి)



పటం 1.81

2 పైథాగరస్ సిద్ధాంతం

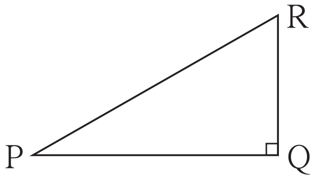
పదండి నేర్చుకుందాం.

- పైథాగరస్ త్రికములు
- గుణమధ్యమము యొక్క సిద్ధాంతం
- పైథాగరస్ సిద్ధాంతం యొక్క ఉపయోగం
- సరూపత మరియు లంబకోణ త్రిభుజము
- పైథాగరస్ సిద్ధాంతం
- అపోలోనియస్ సిద్ధాంతం

కొంచెం గుర్తుతెచ్చుకుందాం.

పైథాగరస్ సిద్ధాంతం :

లంబకోణ త్రిభుజములోని కర్ణము యొక్క వర్గం మిగిలిన రెండు భుజాల వర్గాల మొత్తమునకు సమానం.



పటం 2.1

Δ PQR లో $\angle$ PQR = 90°

$l(PR)^2 = l(PQ)^2 + l(QR)^2$

దీనిని మనం $PR^2 = PQ^2 + QR^2$ అని రాద్దాం.

Δ PQR యొక్క PQ, QR, PR భుజముల పొడవులు వరుసగా r, p మరియు q ఈ అక్షరాలతో సూచించే చిహ్నాలు వీటిని బట్టి పటం 2.1 సందర్భంలో పైథాగరస్ సిద్ధాంతమును $q^2 = p^2 + r^2$ అని రాయవచ్చును.

పైథాగరస్ త్రికములు :

సహజ సంఖ్యలలోని త్రికములలో ఒక సంఖ్య యొక్క వర్గం ఇతర రెండు సంఖ్యల వర్గాల మొత్తమునకు సమానంగా ఉన్నచో, వాటిని పైథాగరస్ త్రికములు అని అంటారు.

ఉదాహరణకు : (11, 60, 61) ఈ సంఖ్యల త్రికములలో

$11^2 = 121$, $60^2 = 3600$, $61^2 = 3721$ మరియు $121 + 3600 = 3721$

ఇక్కడ పెద్ద సంఖ్య యొక్క వర్గం మిగిలిన ఇతర రెండు సంఖ్యల వర్గాల మొత్తమునకు సమానంగా ఉంది.

$\therefore$ 11, 60, 61 లు పైథాగరస్ త్రికములు.

ఇదేవిధంగా (3, 4, 5), (5, 12, 13), (8, 15, 17), (24, 25, 7) వీటిలో పైథాగరస్ త్రికములు ఏవి అవుతాయో సరిచూడండి.

పైథాగరస్ త్రికములలోని సంఖ్యలను ఏ క్రమములోనైన రాయవచ్చు.

అధిక వివరాలకై

పైథాగరస్ త్రికములను కనుగొనుట కొరకు సూత్రం :

ఒక వేళ a, b, c లు సహజ సంఖ్యలు మరియు $a > b$, అయిన $[(a^2 + b^2),(a^2 - b^2),(2ab)]$ లు పైథాగరస్ త్రికములు అవుతాయి.

$(a^2 + b^2)^2 = a^4 + 2a^2b^2 + b^4$ .... (I)

$(a^2 - b^2)^2 = a^4 - 2a^2b^2 + b^4$ .... (II)

$(2ab)^2 = 4a^2b^2$ .... (III)

$\therefore$ (I), (II) మరియు (III) ల నుండి, $(a^2 + b^2)^2 = (a^2 - b^2)^2 + (2ab)^2$

$\therefore [(a^2 + b^2), (a^2 - b^2), (2ab)]$ లు పైథాగరస్ త్రికములు అవుతాయి.

ఈ త్రికమును వేర్వేరు పైథాగరస్ త్రిక్రములు కనుగొనుట కొరకు సూత్రమువలె ఉపయోగించవచ్చు.

ఉదా: $a = 5$ మరియు $b = 3$ అని తీసుకుందాం,

$a^2 + b^2 = 34$, $a^2 - b^2 = 16$ మరియు $2ab = 30$.

(34, 16, 30) లు పైథాగరస్ త్రికములు అవుతాయి అని మీరు సరిచూడండి.

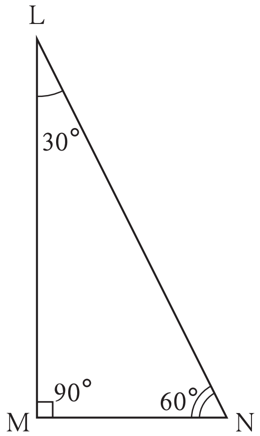
a మరియు b లకు వివిధ సహజ సంఖ్యలను తీసుకొని సూత్రమును ఆధారంగా 5 పైథాగరస్ త్రికములను తయారు చేయండి.

కింది తరగతిలో మీరు **$30° - 60° - 90°$** మరియు **$45° - 45° - 90°$** కొలతలుగల లంబకోణ త్రిభుజముల ధర్మములను తెలుసుకున్నారు.

(I) కోణాల కొలతలు $30°-60°-90°$ గల త్రిభుజ ధర్మము :

లంబకోణ త్రిభుజంలోని అల్పకోణములు $30°$ మరియు $60°$ అయిన, $30°$ ల కోణము యొక్క ఎదుటి భుజం కర్ణంలో సగం ఉంటుంది మరియు $60°$ ల కోణము యొక్క ఎదుటి భుజం కర్ణమునకు $\frac{\sqrt{3}}{2}$ రెట్లు ఉంటుంది.

పటం 2.2 ను చూడండి. Δ LMN లో, $\angle L = 30°$, $\angle N = 60°$, $\angle M = 90°$



పటం 2.2

$\therefore$ $30°$ కోణము యొక్క ఎదుటి భుజం = MN = $\frac{1}{2} \times$ LN

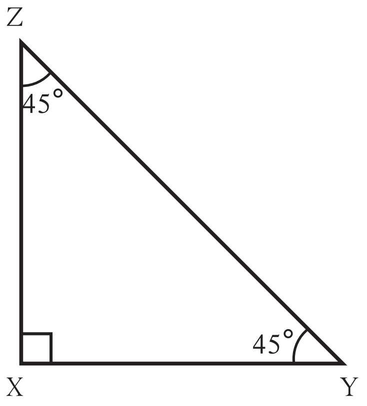
$60°$ కోణము యొక్క ఎదుటి భుజం = LM = $\frac{\sqrt{3}}{2} \times$ LN

ఒక వేళ LN = 6 సెం.మీ. అయిన MN మరియు LM లను కనుగొందాం.

MN = $\frac{1}{2} \times$ LN	LM = $\frac{\sqrt{3}}{2} \times$ LN
= $\frac{1}{2} \times 6$	= $\frac{\sqrt{3}}{2} \times 6$
= 3 సెం.మీ.	= $3\sqrt{3}$ సెం.మీ.

(II) కోణాల కొలతలు $45^\circ - 45^\circ - 90^\circ$ గల త్రిభుజ ధర్మము :

లంబకోణ త్రిభుజములోని అల్పకోణాలు 45° మరియు 45° కొలతలు అయినచో లంబకోణమును ఏర్పరుచు ప్రతీ భుజం కర్ణమునకు $\frac{1}{\sqrt{2}}$ రెట్లు ఉంటుంది.



పటం 2.3

పటం 2.3 ను చూడండి. Δ XYZ లో,

$$XY = \frac{1}{\sqrt{2}} \times ZY$$

$$XZ = \frac{1}{\sqrt{2}} \times ZY$$

ఒక వేళ $ZY = 3\sqrt{2}$ సెం.మీ. అయితే XY మరియు XZ లను కనుగొందాం.

$$XY = XZ = \frac{1}{\sqrt{2}} \times 3\sqrt{2}$$

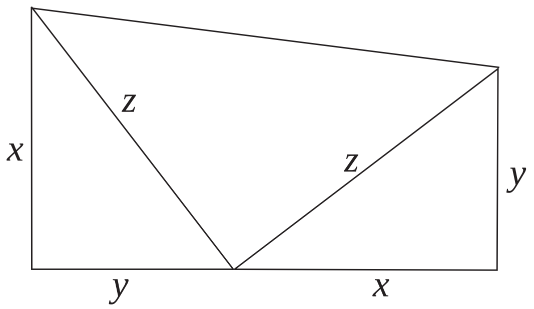
$$\therefore \; XY = XZ = 3 \text{ సెం.మీ.}$$

7వ తరగతిలో వైశాల్యముల సహాయముతో పైథాగరస్ సిద్ధాంతము నేర్చుకున్నాము. దానిలో మనం నాలుగు లంబకోణ త్రిభుజాలు మరియు ఒక చతురస్రంల వైశాల్యాలను ఉపయోగించాము. ఈ సిద్ధాంతము ఉపపత్తిని మీరు వేర్వేరు పద్ధతిలోకూడా చేయవచ్చును.

కృత్యము :

పటములో చూపించిన విధంగా రెండు సర్వసమాన లంబకోణ త్రిభుజాలను తీసుకోండి. వాటి కర్ణముల పొడవులను కల్గిన రెండు భుజాలు గల ఒక సమద్విబాహు లంబకోణ త్రిభుజమును తీసుకోండి. ఈ మూడు త్రిభుజాలను కలిపి సమలంబ చతుర్భుజమును తయారు చేయండి.

సమలంబ చతుర్భుజ వైశాల్యము = $\frac{1}{2}$ × (సమాంతర భుజాల పొడవుల మొత్తం) × ఎత్తు; ఈ సూత్రమును ఉపయోగించి దాని వైశాల్యమును మూడు త్రిభుజాల వైశాల్యముల మొత్తమును రాసి పైథాగరస్ సిద్ధాంతమును నిరూపించండి.



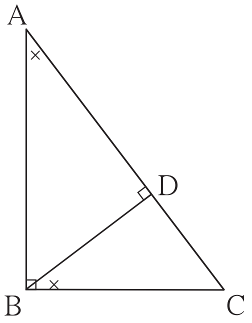
పటం 2.4

తెలుసుకుందాం.

ఇప్పుడు మనం పైథాగరస్ సిద్ధాంతం యొక్క నిరూపణ సరూప త్రిభుజాల యొక్క ఆధారంగా చేయబోతున్నాము. దీనిని నిరూపించుటకు అవసరమయ్యే లంబకోణ త్రిభుజాల సరూప సంబంధ ధర్మములను నేర్చుకుందాం.

సరూపత మరియు లంబకోణ త్రిభుజం (Similarity and right angled triangle)

సిద్ధాంతం : ఒక లంబకోణ త్రిభుజమునందు లంబకోణము నుండి కర్ణమునకు ఒక లంబమును గీయగా దీనికి ఇరువైపుల ఏర్పడు రెండు త్రిభుజములు పరస్పరం సరూపంగా ఉండి దత్త త్రిభుజముతో సరూపతను కలిగి ఉంటాయి.



పటం 2.5

దత్తాంశం : Δ ABC లో $\angle$ ABC = 90°,

రే.ఖం. BD $\perp$ రే.ఖం. AC, A–D–C

సారాంశం : Δ ADB ~ Δ ABC

Δ BDC ~ Δ ABC

Δ ADB ~ Δ BDC

ఉపపత్తి : Δ ADB మరియు Δ ABC లలో

$\angle$ DAB $\cong$ $\angle$ BAC ...(ఉమ్మడి కోణాలు)

$\angle$ ADB $\cong$ $\angle$ ABC ...(90° కోణము)

Δ ADB ~ Δ ABC ...(కో.కో. నియమం)..(I)

అదేవిధంగా, Δ BDC మరియు Δ ABC లలో

$\angle$ BCD $\cong$ $\angle$ ACB ...(ఉమ్మడి కోణాలు)

$\angle$ BDC $\cong$ $\angle$ ABC ...(90° కోణము)

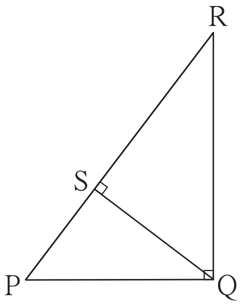
Δ BDC ~ Δ ABC ...(కో.కో. నియమం).(II)

$\therefore$ Δ ADB ~ Δ BDC సమీ (I) మరియు (II) ల నుండి ...(III)

$\therefore$ Δ ADB ~ Δ BDC ~ Δ ABC (I), (II) మరియు (III) ల నుండి.... సంక్రమణ ధర్మము.

గుణమధ్యమము యొక్క సిద్ధాంతం (Theorem of geometric mean)

లంబకోణ త్రిభుజములో కర్ణమునకు దాని ఎదుటి శీర్షనుండి గీచిన లంబరేఖ పాదవు కర్ణములో ఏర్పడ్డ రేఖాఖండముల యొక్క గుణ మధ్యమము అగును.



పటం 2.6

ఉపపత్తి : లంబకోణ త్రిభుజం PQR లో రే.ఖం. QS $\perp$ కర్ణం PR

Δ QSR ~ Δ PSQ .... (లంబకోణ త్రిభుజాల సరూపత)

$$\therefore \quad \frac{QS}{PS} = \frac{SR}{SQ}$$

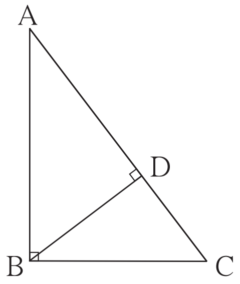
$$\therefore \quad \frac{QS}{PS} = \frac{SR}{QS}$$

$$QS^2 = PS \times SR$$

$\therefore$ శీర్షలంబం QS అనేది రే.ఖం. PS మరియు రే.ఖం. SR ల గుణమధ్యమం.

పైథాగరస్ సిద్ధాంతం (Theorem of Pythagoras)

లంబకోణ త్రిభుజమునందలి కర్ణము యొక్క వర్గము మిగిలిన రెండు భుజముల వర్గముల మొత్తమునకు సమానమగును.



పటం 2.7

దత్తాంశం : Δ ABC లో, $\angle ABC = 90°$

సారాంశం : $AC^2 = AB^2 + BC^2$

నిర్మాణం : బిందువు B నుండి భుజం AC పై రే.ఖం. BD ను లంబముగా గీయుము. A–D–C

ఉపపత్తి : లంబకోణ త్రిభుజం Δ ABC లో రే.ఖం. BD $\perp$ కర్ణం AC ..... (నిర్మాణం)

$\therefore \Delta ABC \sim \Delta ADB \sim \Delta BDC$ ..... (లంబకోణ త్రిభుజముల సరూపత)

$\Delta ABC \sim \Delta ADB$

$\therefore \frac{AB}{AD} = \frac{BC}{DB} = \frac{AC}{AB}$ – (సదృశ భుజాలు)

$\therefore \frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AB}$

$AB^2 = AD \times AC$ .... (I)

$\Delta ABC \sim \Delta BDC$

$\therefore \frac{AB}{BD} = \frac{BC}{DC} = \frac{AC}{BC}$ – (సదృశ భుజాలు)

$\therefore \frac{BC}{DC} = \frac{AC}{BC}$

$BC^2 = DC \times AC$ .... (II)

(I) మరియు (II) లను కూడగా

$AB^2 + BC^2 = AD \times AC + DC \times AC$

$= AC (AD + DC)$

$= AC \times AC$ .... (A–D–C)

$\therefore AB^2 + BC^2 = AC^2$

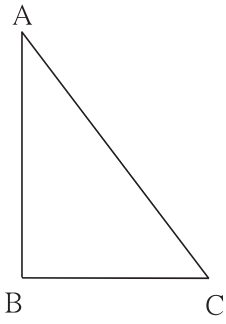
$\therefore AC^2 = AB^2 + BC^2$

పైథాగరస్ సిద్ధాంతం యొక్క విపర్యయము (Converse of Pythagoras' theorem)

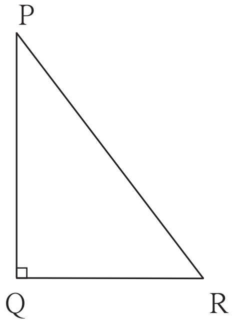
ఏదేని త్రిభుజమునందలి ఒక భుజము యొక్క వర్గము మిగిలిన రెండ భుజముల వర్గముల మొత్తమునకు సమానమైనచో ఆ త్రిభుజము లంబకోణ త్రిభుజము అవుతుంది.

దత్తాంశం : Δ ABC లో, $AC^2 = AB^2 + BC^2$

సారాంశం : $\angle ABC = 90°$



పటం 2.8



పటం 2.9

నిర్మాణం : AB = PQ, BC = QR , $\angle PQR = 90^\circ$ అగునట్లు ΔPQR గీయుము.

ఉపపత్తి : ΔPQR లో, $\angle Q = 90^\circ$

$PR^2 = PQ^2 + QR^2$ .... (పైథాగరస్ సిద్ధాంతం)

$= AB^2 + BC^2$ .... (నిర్మాణం)

$= AC^2$ .... (దత్తాంశం)

$\therefore PR^2 = AC^2$,

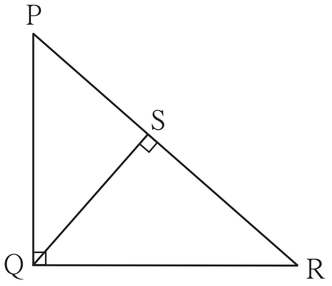
$\therefore PR = AC$

$\therefore \Delta ABC \cong \Delta PQR$ .... (భు-భు-భు నియమం)

$\therefore \angle ABC = \angle PQR = 90^\circ$

ఇవి గుర్తుంచుకుందాం.

(1) (a) సరూపత మరియు లంబకోణ త్రిభుజము.



పటం 2.10

ΔPQR లో $\angle Q = 90^\circ$, రే.ఖం. QS $\perp$ రే.ఖం. PR ఇచ్చట $\Delta PQR \sim \Delta PSQ \sim \Delta QSR$ ఈ విధంగా పటంలో ఏర్పడిన అన్ని లంబకోణ త్రిభుజాలు పరస్పర సరూపములు.

(b) గుణమధ్యమము యొక్క సిద్ధాంతం.

పై పటంలో $\Delta PSQ \sim \Delta QSR$

$\therefore QS^2 = PS \times SR$

$\therefore$ రే.ఖం. QS, అనేది రే.ఖం. PS మరియు రే.ఖం. SR ల గుణ మధ్యమము.

(2) పైథాగరస్ సిద్ధాంతం:

లంబకోణ త్రిభుజమునందలి కర్ణము యొక్క వర్గము దానిలో మిగిలిన రెండు భుజముల వర్గముల మొత్తమునకు సమానమగును.

(3) పైథాగరస్ సిద్ధాంతం యొక్క విపర్యయము:

ఏదేని త్రిభుజమునందలి ఒక భుజము యొక్క వర్గము దానిలో మిగిలిన రెండు భుజముల వర్గముల మొత్తమునకు సమానమైనచో ఆ త్రిభుజము లంబకోణ త్రిభుజము అవుతుంది.

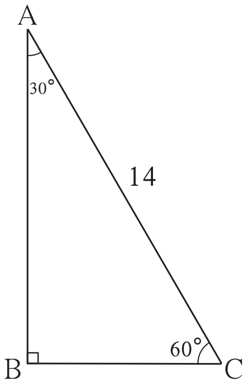
ఇవే కాకుండా మరో ధర్మము చాలా ఉపయోగబడును, దానిని కూడా గుర్తుంచుకొందాం.

(4) లంబకోణ త్రిభుజములో ఒక భుజం కర్ణములో సగం ఉన్నచో దానికి ఎదురుగా ఉన్న కోణం 30° అవుతుంది. ఈ ధర్మమును $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$ కోణము త్రిభుజ సిద్ధాంతం యొక్క విపర్యయము.

సాధించిన ఉదాహరణలు

ఉదా. (1) పటం 2.11 లో Δ ABC లో $\angle B = 90°$, $\angle A = 30°$, AC=14 అయిన AB మరియు BC లను కనుగొనండి.

సాధన :



పటం 2.11

Δ ABC లలో,

$\angle B = 90°$, $\angle A = 30°$, $\therefore \angle C = 60°$

30°- 60°- 90° సిద్ధాంతం ప్రకారం,

$BC = \frac{1}{2} \times AC$

$BC = \frac{1}{2} \times 14$

$BC = 7$

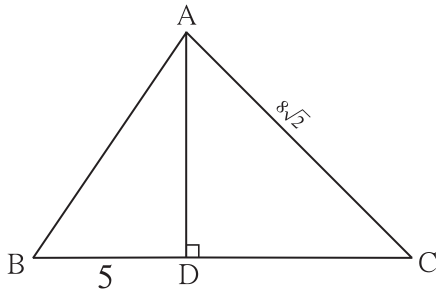
$AB = \frac{\sqrt{3}}{2} \times AC$

$AB = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 14$

$AB = 7\sqrt{3}$

ఉదా. (2) పటం 2.12 లోని Δ ABC లో రే.ఖం. AD $\perp$ రే.ఖం. BC, $\angle C = 45°$, BD = 5 మరియు $AC = 8\sqrt{2}$, అయినచో AD మరియు BC లను కనుగొనండి.

సాధన :



పటం 2.12

Δ ADC లో,

$\angle ADC = 90°$, $\angle C = 45°$, $\therefore \angle DAC = 45°$

$AD = DC = \frac{1}{\sqrt{2}} \times 8\sqrt{2}$ ..(45°–45°–90° సిద్ధాంతం ప్రకారం)

$\therefore DC = 8 \quad \therefore AD = 8$

$BC = BD + DC$

$= 5 + 8$

$= 13$

ఉదా. (3) పటం 2.13 లో $\angle PQR = 90°$, రే.ఖం. QN $\perp$ రే.ఖం. PR, PN = 9, NR = 16 అయిన QN కనుగొనండి.

సాధన : Δ PQR లో, రే.ఖం. QN $\perp$ రే.ఖం. PR

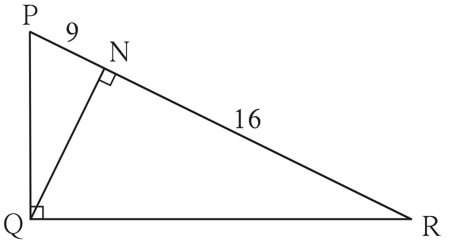
$\therefore QN^2 = PN \times NR$ ... (గుణమధ్యమం యొక్క ధర్మం)

$\therefore QN = \sqrt{PN \times NR}$

$= \sqrt{9 \times 16}$

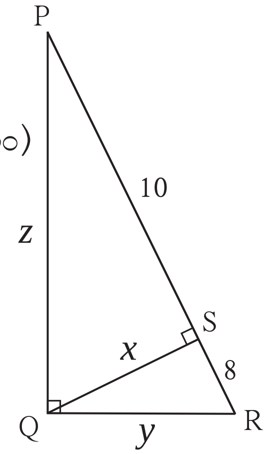
$= 3 \times 4$

$= 12$



పటం 2.13

ఉదా. (4) పటం 2.14 లోని Δ PQR లో $\angle PQR = 90^\circ$, రే.ఖం. QS $\perp$ రే.ఖం. PR అయిన x, y, z ల విలువను కనుగొనండి.



పటం 2.14

సాధన : Δ PQR లో, $\angle PQR = 90^\circ$, రే.ఖం. QS $\perp$ రే.ఖం. PR

$QS = \sqrt{PS \times SR}$ .... (గుణ మధ్యమం యొక్క సిద్ధాంతం)

$= \sqrt{10 \times 8}$

$= \sqrt{5 \times 2 \times 8}$

$= \sqrt{5 \times 16}$

$= 4\sqrt{5}$

$\therefore \ x = 4\sqrt{5}$

Δ QSR లో, $\angle QSR = 90^\circ$

$\therefore \ QR^2 = QS^2 + SR^2$

$= (4\sqrt{5})^2 + 8^2$

$= 16 \times 5 + 64$

$= 80 + 64$

$= 144$

$\therefore \ QR = 12$

Δ PSQ లో, $\angle QSP = 90^\circ$

$\therefore \ PQ^2 = QS^2 + PS^2$

$= (4\sqrt{5})^2 + 10^2$

$= 16 \times 5 + 100$

$= 80 + 100$

$= 180$

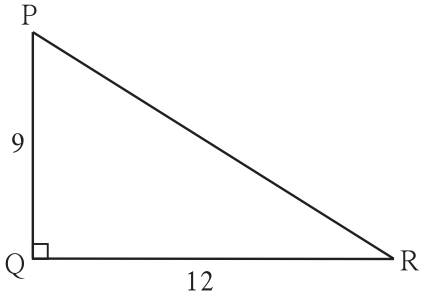
$= 36 \times 5$

$\therefore \ PQ = 6\sqrt{5}$

వీటి నుండి, $x = 4\sqrt{5}$, $y = 12$, $z = 6\sqrt{5}$

ఉదా. (5) లంబకోణ త్రిభుజములో లంబకోణంను ఏర్పరచు భుజాలు 9 సెం.మీ. మరియు 12 సెం.మీ. అయిన ఆ త్రిభుజము యొక్క కర్ణమును కనుగొనండి.

సాధన : Δ PQR లో, $\angle Q = 90^\circ$



పటం 2.15

$PR^2 = PQ^2 + QR^2$ (పైథాగరస్ సిద్ధాంతం ప్రకారం)

$= 9^2 + 12^2$

$= 81 + 144$

$\therefore \ PR^2 = 225$

$\therefore \ PR = 15$

త్రిభుజ కర్ణము = 15 సెం.మీ.

ఉదా. (6) Δ LMN లో $l = 5$, $m = 13$, $n = 12$ అయిన Δ LMN లంబకోణ త్రిభుజం అగునా కాదా నిర్ధారించుము. (l, m, n లు వరుసగా $\angle$ L, $\angle$ M మరియు $\angle$ N ల ఎదుటి భుజాలు)

సాధన : $l = 5$, $m = 13$, $n = 12$

$l^2 = 25$, $m^2 = 169$, $n^2 = 144$

$\therefore m^2 = l^2 + n^2$

$\therefore$ పైథాగరస్ సిద్ధాంతం యొక్క విపర్యయము ప్రకారం Δ LMN లంబకోణ త్రిభుజం అగును.

ఉదా. (7) పటం 2.16 లోని Δ ABC లో, రే.ఖం. AD $\perp$ రే.ఖం. BC, అయిన $AB^2 + CD^2 = BD^2 + AC^2$ అని నిరూపించుము.

సాధన : పైథాగరస్ సిద్ధాంతం ప్రకారం Δ ADC లో,

$AC^2 = AD^2 + CD^2$

$\therefore AD^2 = AC^2 - CD^2$ ... (I)

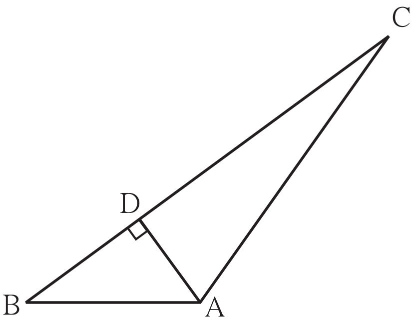
Δ ADB లో,

$AB^2 = AD^2 + BD^2$

$\therefore AD^2 = AB^2 - BD^2$ ... (II)

$\therefore AB^2 - BD^2 = AC^2 - CD^2$ .... [(I) మరియు (II) నుండి]

$\therefore AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2$



పటం 2.16

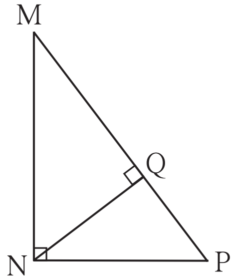
అభ్యాసమాలిక 2.1

1. కింది త్రికముల నుండి పైథాగరస్ త్రికములు ఏవో వాటిని గుర్తించి కారణముతో రాయండి.

(1) (3, 5, 4) (2) (4, 9, 12) (3) (5, 12, 13)

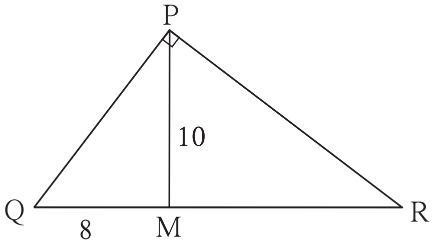
(4) (24, 70, 74) (5) (10, 24, 27) (6) (11, 60, 61)

2. పటం 2.17 లో $\angle MNP = 90°$, రే.ఖం. NQ $\perp$ రే.ఖం. MP, MQ = 9, QP = 4 అయిన NQ ను కనుగొనండి.



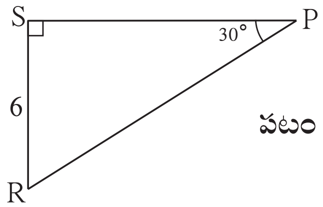
పటం 2.17

3. పటం 2.18 లో $\angle QPR = 90°$, రే.ఖం. PM $\perp$ రే.ఖం. QR మరియు Q-M-R, PM = 10, QM = 8 అనుండి QR ని కనుగొనండి.

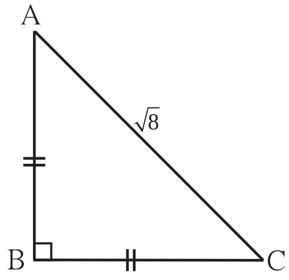


పటం 2.18

4. పటం 2.19 లోని Δ PSR లో ఇచ్చిన వివరాల ఆధారంగా RP మరియు PS లను కనుగొనండి.



పటం 2.19



పటం 2.20

5. పటం 2.20 లో ఇచ్చిన వివరాల ఆధారంగా AB మరియు BC కనుగొనుటకు కింది కృత్యమును పూర్తి చేయండి.

AB = BC .... [ ]

$\therefore$ $\angle$ BAC = [ ]

$\therefore$ AB = BC = [ ] $\times$ AC

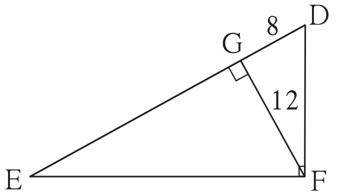
= [ ] $\times \sqrt{8}$

= [ ] $\times 2\sqrt{2}$

= [ ]

6. ఒక చతురస్రపు కర్ణము పొడవు 10 సెం.మీ. అయిన భుజము పొడవు మరియు చుట్టుకొలతను కనుగొనండి.

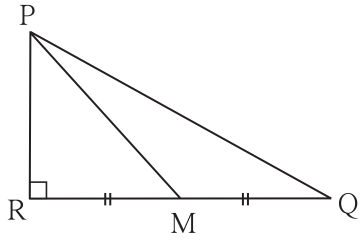
7. పటం 2.21 లో $\angle$ DFE = 90°, రే.ఖం. FG $\perp$ రే.ఖం. ED. ఒక వేళ GD = 8, FG = 12, అయిన (1) EG (2) FD (3) EF ల ను కనుగొనండి.



పటం 2.21

8. ఒక దీర్ఘచతురస్రం యొక్క పొడవు 35 సెం.మీ. మరియు వెడల్పు 12 సెం.మీ. అయినచో దాని కర్ణం పొడవును కనుగొనండి.

9★. పటం 2.22 లో భుజము QR యొక్క మధ్యబిందువు M. $\angle$ PRQ = 90° అయిన $PQ^2 = 4PM^2 - 3PR^2$ అని నిరూపించండి.



పటం 2.22

10★. రహదారికి ఇరువైపుల గల భవనాలు ఒకదానికొకటి సమాతరంగా ఉన్నవి. 5.8 మీ పొడవు గల నిచ్చెన కింది భాగము రహదారికి ఒక వైపున పెట్టిన దాని పైభాగము మొదటి భవనమును 4 మీ ఎత్తులో కిటికీ వద్ద ఉంటుంది. అదే స్థానము నుండి నిచ్చెనను రహదారికి ఇంకోవైపు మల్లించిన దాని పై భాగము రెండవ భవనమును 4.2 మీ ఎత్తులోగల కిటికీ వద్ద ఉంటుంది. అయిన రహదారి వెడల్పును కనుగొనండి.

తెలుసుకుందాం.

పైథాగరస్ సిద్ధాంతం యొక్క ఉపయోగాలు :

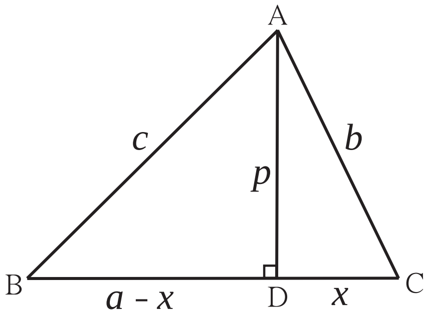
పైథాగరస్ సిద్ధాంతంలో లంబకోణ త్రిభుజంలోని కర్ణం మరియు లంబకోణంను ఏర్పరచు భుజాల పరస్పర సంబంధాన్నే అనగా లంబకోణము ఎదుటి భుజము మరియు ఇతర రెండు భుజాల మధ్య సంబంధం గురించి తెలుసుకున్నాం.

త్రిభుజంలోని అల్పకోణపు ఎదుటి భుజము ఇతర రెండు భుజాల మధ్యగల సంబధమును, అధికకోణము ఎదుటి భుజము యొక్క ఇతర రెండు భుజాలకు మధ్యగల సంబంధంను పైథాగరస్ సిద్ధాంతం ద్వారా నిర్ధారించవచ్చు. ఈ సంబంధమును కింది ఉదాహరణ ద్వారా తెలుసుకుందాం.

ఉదా.(1) ΔABC లో, $\angle C$ అల్పకోణం, రే.ఖం. $AD \perp$ రే.ఖం. BC అయిన $AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2BC \times DC$ అని నిరూపించండి.

ఇచ్చిన పటంలో, $AB = c$, $AC = b$, $AD = p$, $BC = a$, $DC = x$ అనుకుందాం.

$\therefore BD = a - x$



పటం 2.23

ΔADB లో, పైథాగరస్ సిద్ధాంతం ప్రకారం

$c^2 = (a-x)^2 + \square$

$c^2 = a^2 - 2ax + x^2 + \square$ .... (I)

ΔADC లో, పైథాగరస్ సిద్ధాంతం ప్రకారం

$b^2 = p^2 + \square$

$p^2 = b^2 - \square$ .... (II)

(II) లోని p^2 విలువను, (I) లో ప్రతిక్షేపించగా,

$c^2 = a^2 - 2ax + x^2 + b^2 - x^2$

$\therefore c^2 = a^2 + b^2 - 2ax$

$\therefore AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2BC \times DC$

ఉదా.(2) ΔABC లో, $\angle ACB$ అధికకోణం, రే.ఖం. $AD \perp$ రే.ఖం. BC, అయిన $AB^2 = BC^2 + AC^2 + 2BC \times CD$ అని నిరూపించండి.

ఒకవేళ $AD = p$, $AC = b$, $AB = c$,

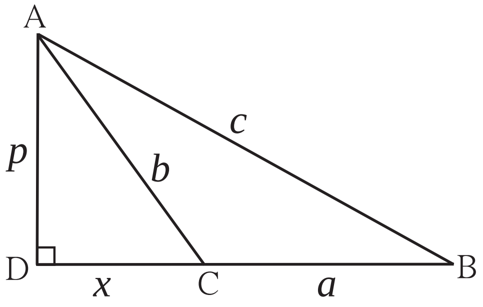
$BC = a$, $DC = x$ అనుకుందాం.

$DB = a + x$

ΔADB లో, పైథాగరస్ సిద్ధాంతం ప్రకారం,

$c^2 = (a + x)^2 + p^2$

$c^2 = a^2 + 2ax + x^2 + p^2$ .... (I)



పటం 2.24

ఇదేవిధంగా Δ ADC లో,

$$b^2 = x^2 + p^2$$

$$\therefore \quad p^2 = b^2 - x^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ (II)$$

$\therefore$ (I) లో (II) లోని p^2 విలువను ప్రతిక్షేపించగా,

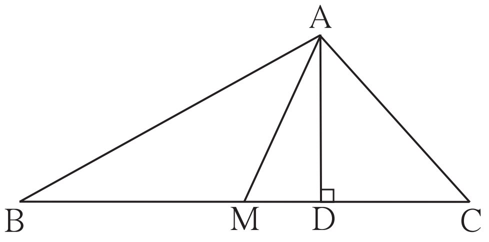
$$c^2 = a^2 + 2ax + x^2 + b^2 - x^2$$

$$= a^2 + 2ax + b^2$$

$\therefore$ $AB^2 = BC^2 + AC^2 + 2BC \times CD$

అపోలోనియస్ సిద్ధాంతం (Appollonius' Theorem)

Δ ABC లో, భుజం BC యొక్క మధ్య బిందువు M అయినచో $AB^2 + AC^2 = 2AM^2 + 2BM^2$ అవుతుంది.



పటం 2.25

దత్తాంశం : ΔABC లో భుజము BC యొక్క మధ్య బిందువు M.

సారాంశం : $AB^2 + AC^2 = 2AM^2 + 2BM^2$

నిర్మాణం : రే.ఖం. AD $\perp$ రే.ఖం. BC గీయుము.

ఉపపత్తి : ఒకవేళ రే.ఖం. AM, రే.ఖం. BC కి లంబంగా లేనట్లయితే $\angle$ AMB మరియు $\angle$ AMC లలో ఒకటి అధికకోణము మరియు రెండవది అల్పకోణము అవుతుంది.

పటంలో $\angle$ AMB అధిక కోణము $\angle$ AMC అల్పకోణము.

పై ఉదా (1) మరియు (2) ల నుండి,

$AB^2 = AM^2 + MB^2 + 2BM \times MD$ ..... (I)

మరియు $AC^2 = AM^2 + MC^2 - 2MC \times MD$

$\therefore$ $AC^2 = AM^2 + MB^2 - 2BM \times MD$ ($\because$ BM = MC) ....(II)

$\therefore$ (I) మరియు (II) లను కూడగా,

$AB^2 + AC^2 = 2AM^2 + 2BM^2$

ఒక వేళ రే.ఖం. AM $\perp$ భుజము BC అయిన ఈ సిద్ధాంతము యొక్క నిరూపణ మీరు రాయండి.

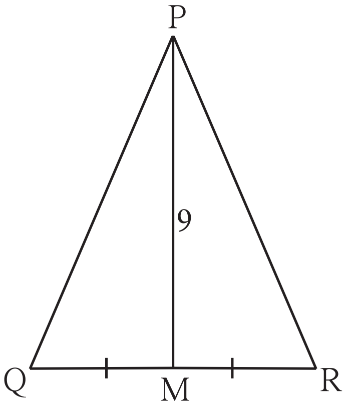
ఈ ఉదాహరణ ద్వారా త్రిభుజము యొక్క భుజాలు మరియు మధ్యగత రేఖలకు పరస్పర సంబంధం గలదు అని తెలుస్తుంది. దీనినే అపోలోనియస్ సిద్ధాంతం అంటారు.

సాధించిన ఉదాహరణలు

ఉదా.(1) Δ PQR లో, రే.ఖం. PM మధ్యగత రేఖ. PM=9 మరియు $PQ^2 + PR^2 = 290$, అయిన QR ని కనుగొనండి.

సాధన : Δ PQR లో, రే.ఖం. PM మధ్యగత రేఖ

M అనేది రే.ఖం. QR యొక్క మధ్య బిందువు



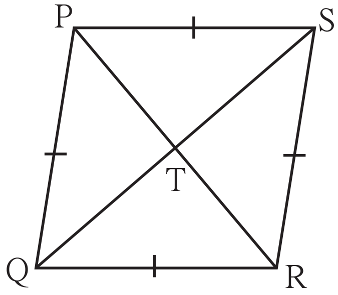
పటం 2.26

$$QM = MR = \frac{1}{2}QR$$

$PQ^2 + PR^2 = 2PM^2 + 2QM^2$ (అపోలోనియస్ సిద్ధాంతంనుండి)

$$290 = 2 \times 9^2 + 2QM^2$$
$$290 = 2 \times 81 + 2QM^2$$
$$290 = 162 + 2QM^2$$
$$2QM^2 = 290 - 162$$
$$2QM^2 = 128$$
$$QM^2 = 64$$
$$QM = 8$$
$$\therefore \quad QR = 2 \times QM$$
$$= 2 \times 8$$
$$= 16$$

ఉదా.(2) సమభుజ చతుర్భుజము (రాంబస్)లోని భుజాల వర్గాల మొత్తము దాని కర్ణాల వర్గాల మొత్తానికి సమానమని నిరూపించండి.



పటం 2.27

దత్తాంశం : □ PQRS సమభుజ చతుర్భుజం (రాంబస్) కర్ణాలు PR మరియు SQ లు పరస్పరము బిందువు T వద్ద ఖండించుకుంటాయి.

సారాంశం : $PS^2 + SR^2 + QR^2 + PQ^2 = PR^2 + QS^2$

ఉపపత్తి : రాంబస్‌లోని కర్ణములు పరస్పరం సమద్విఖండన చేసుకొనును.

∴ అపోలోనియస్ సిద్ధాంతం ప్రకారం,

$PQ^2 + PS^2 = 2PT^2 + 2QT^2$ .... (I)

$QR^2 + SR^2 = 2RT^2 + 2QT^2$ .... (II)

∴ (I) మరియు (II) లను కూడగా

$$PQ^2 + PS^2 + QR^2 + SR^2 = 2(PT^2 + RT^2) + 4QT^2$$

$$\therefore PS^2 + SR^2 + QR^2 + PQ^2 = 2(PT^2 + PT^2) + 4QT^2 \quad .... (RT = PT)$$
$$= 4PT^2 + 4QT^2$$
$$= (2PT)^2 + (2QT)^2$$
$$= PR^2 + QS^2$$

(ఈ ఉదాహరణను పైథాగరస్ సిద్ధాంతమును ఉపయోగించి కూడా నిరూపించవచ్చు.)

అభ్యాసమాలిక 2.2

1. Δ PQR లో, భుజం QR యొక్క మధ్య బిందువు S. ఒకవేళ PQ = 11, PR = 17, PS = 13 అయినచో QR పొడవును కనుగొనండి.

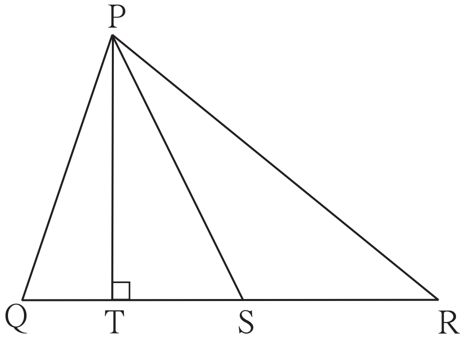
2. Δ ABC లో, AB = 10, AC = 7, BC = 9 అయిన బిందువు C నుండి భుజము AB పైకి గీయబడిన మధ్యగతరేఖ పొడవు ఎంత?

3. పటం 2.28 లోని Δ PQR లో మధ్యగత రేఖ PS మరియు PT $\perp$ QR అయినచో

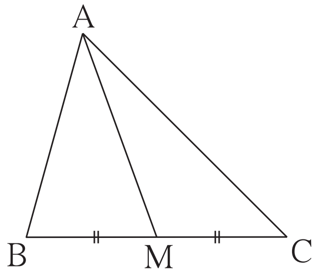
(1) $PR^2 = PS^2 + QR \times ST + \left(\frac{QR}{2}\right)^2$

(2) $PQ^2 = PS^2 - QR \times ST + \left(\frac{QR}{2}\right)^2$

అని నిరూపించండి.



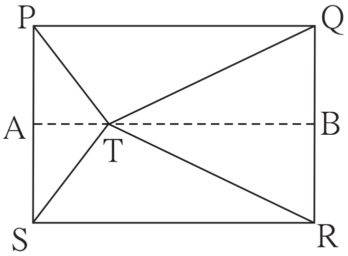
పటం 2.28



పటం 2.29

4. పటం 2.29 లో, Δ ABC లో భుజం BC యొక్క మధ్య బిందువు M. ఒకవేళ $AB^2 + AC^2 = 290$ సెం.మీ., AM = 8 సెం.మీ., అయిన BC ని కనుగొనండి.

5*. పటం 2.30 లో చూపినవిధంగా దీర్ఘచతురస్రం PQRS అంతరంలో బిందువు **T** కలదు. అయితే $TS^2 + TQ^2 = TP^2 + TR^2$ అని నిరూపించండి (పటంలో చూపినవిధంగా A-T-B అయ్యేట్లు రే.ఖం. AB || భుజం SR ను గీయండి.)



పటం 2.30

సంకీర్ణప్రశ్న సంగ్రహము 2

1. కింది బహుళైచ్ఛిక ప్రశ్నలకిచ్చిన సమాధానాల్లోంచి సరియైన ఐచ్ఛికమును ఎన్నుకోండి.

(1) కింది వాటిలో పైథాగరస్ త్రికము ఏది?

(A) (1, 5, 10) (B) (3, 4, 5) (C) (2, 2, 2) (D) (5, 5, 2)

(2) లంబకోణత్రిభుజములో లంబకోణమును ఏర్పరచు భుజాల వర్గాల మొత్తం 169 అయినచో దాని కర్ణం పొడవు ఎంత?

(A) 15 (B) 13 (C) 5 (D) 12

(3) కింది వాటిలో ఏ తేదిలోని సంఖ్యలు పైథాగోరస్ త్రికము?

(A) 15/08/17 (B) 16/08/16 (C) 3/5/17 (D) 4/9/15

(4) a, b, c భుజాల పొడవులు గల త్రిభుజంలో $a^2 + b^2 = c^2$ అయినచో అది ఏ రకమైన త్రిభుజం అగును?

(A) అధికకోణ త్రిభుజం (B) అల్పకోణ త్రిభుజం (C) లంబకోణ త్రిభుజం (D) సమబాహు త్రిభుజం

(5) ఒక చతురస్రపు కర్ణం $10\sqrt{2}$ సెం.మీ. అయినచో దాని చుట్టుకొలత .... అవుతుంది.

(A) 10 సెం.మీ. (B) $40\sqrt{2}$ సెం.మీ. (C) 20 సెం.మీ. (D) 40 సెం.మీ.

(6) ఒక లంబకోణ త్రిభుజంలో కర్ణముపై శీర్షలంబము వలన కర్ణము 4 సెం.మీ. మరియు 9 సెం.మీ. పొడవులు గల రెండు భాగాలు అయినట్లయితే ఆ శీర్షలంబము పొడవు ఎంత?

(A) 9 సెం.మీ. (B) 4 సెం.మీ. (C) 6 సెం.మీ. (D) $2\sqrt{6}$ సెం.మీ.

(7) లంబకోణ త్రిభుజములో లంబకోణమును ఏర్పరచు భుజాలు 24 సెం.మీ. మరియు 18 సెం.మీ. అయినచో దాని కర్ణం పొడవు .... అవుతుంది.

(A) 24 సెం.మీ. (B) 30 సెం.మీ. (C) 15 సెం.మీ. (D) 18 సెం.మీ.

(8) ΔABC లో, $AB = 6\sqrt{3}$ సెం.మీ., $AC = 12$ సెం.మీ. మరియు $BC = 6$ సెం.మీ. అయిన $\angle A$ యొక్క కొలత ఎంత?

(A) 30° (B) 60° (C) 90° (D) 45°

2. కింది ఉదాహరణలు సాధించండి.

(1) ఒక సమబాహు త్రిభుజము యొక్క భుజము $2a$ అయినచో దాని ఎత్తును కనుగొనండి.

(2) 7 సెం.మీ., 24 సెం.మీ., 25 సెం.మీ. భుజాలు గల త్రిభుజము లంబకోణ త్రిభుజం అగునా? కారణమును రాయండి.

(3) దీర్ఘచతురస్రము యొక్క భుజాలు 11 సెం.మీ. మరియు 60 సెం.మీ. అయినచో దాని కర్ణం పొడవును కనుగొనండి.

(4) ఏదేని లంబకోణ త్రిభుజంలో లంబకోణంను ఏర్పరచు భుజాలు 9 సెం.మీ. మరియు 12 సెం.మీ., అయిన ఆ త్రిభుజంలోని కర్ణం పొడవును కనుగొనండి.

(5) సమద్విబాహు లంబకోణ త్రిభుజము యొక్క భుజం x అయినచో దాని కర్ణం పొడవును కనుగొనండి.

(6) ΔPQR లో; $PQ = \sqrt{8}$, $QR = \sqrt{5}$, $PR = \sqrt{3}$; అయిన ΔPQR లంబకోణ త్రిభుజము అగునా? అయినచో దాని ఏ కోణము లంబకోణము అవుతుంది?

3. ΔRST లలో, $\angle S = 90^\circ$, $\angle T = 30^\circ$, $RT = 12$ సెం.మీ. అయినచో RS మరియు ST లను కనుగొనండి.

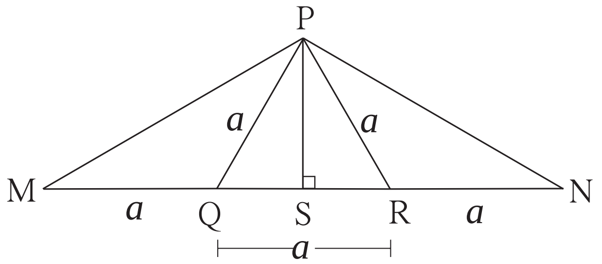
4. దీర్ఘచతురస్ర వైశాల్యం 192 చ.సెం.మీ. దాని పొడవు 16 సెం.మీ. అయినచో దీర్ఘచతురస్ర కర్ణము పొడవును కనుగొనండి.

5★. ఒక సమబాహు త్రిభుజము ఎత్తు $\sqrt{3}$ సెం.మీ. అయిన త్రిభుజము యొక్క భుజాలు మరియు చుట్టుకొలతను కనుగొనండి.

6. ΔABC లో రే.ఖం. AP మధ్యగత రేఖ. ఒకవేళ $BC = 18$, $AB^2 + AC^2 = 260$ అయినచో AP ని కనుగొనండి.

7*. Δ ABC సమబాహు త్రిభుజం. భూమి BC పై బిందువు P, $PC = \frac{1}{3}$ BC, అగునట్లు ఉంది. ఒకవేళ AB = 6 సెం.మీ. అయిన AP ని కనుగొనండి.

8. పటం 2.31 లో, M–Q–R–N. ఇచ్చిన వివరాల ఆధారంగా
PM = PN = $\sqrt{3} \times a$ అని నిరూపించండి.

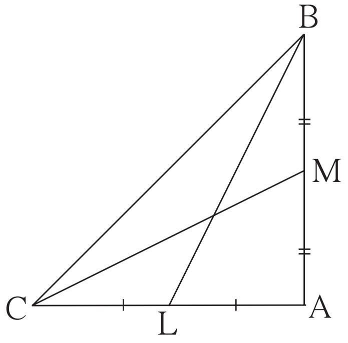


పటం 2.31

9. సమాంతర చతుర్భుజములోని కర్ణాల వర్గాల మొత్తము ఆ చతుర్భుజ భుజాల వర్గాల మొత్తమునకు సమానము అని నిరూపించండి.

10. ఒకే చోటు నుండి ప్రణాలి మరియు ప్రసాద్‌లు సమవేగముతో తూర్పు మరియు ఉత్తర దిశలకు బయదేరిరి రెండు గంటల తరువాత వారి మధ్య దూరము $15\sqrt{2}$ కి.మీ. అయిన వారు గంటకు ఎంత వేగముతో ప్రయాణించిరి.

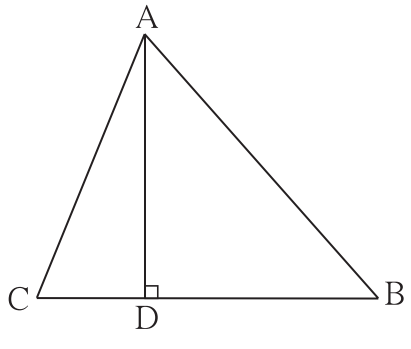
11*. Δ ABC లో, $\angle BAC = 90°$,
రే.ఖం. BL మరియు రే.ఖం. CM లు Δ ABC యొక్క మధ్యగత రేఖలు అయినచో
$4(BL^2 + CM^2) = 5\,BC^2$ అని నిరూపించండి.



పటం 2.32

12. ఒక సమాంతర చతుర్భుజము యొక్క రెండు ఆసన్నభుజాల వర్గాల మొత్తము 130 చ.సెం.మీ. అయి దాని ఒక కర్ణము పొడవు 14 సెం.మీ. అయినచో రెండవ కర్ణము పొడవు ఎంత?

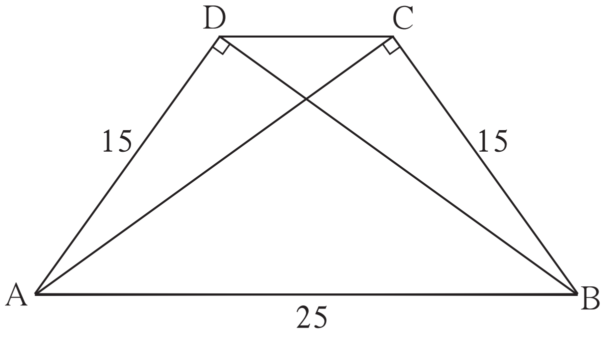
13. Δ ABC లో, రే.ఖం. AD $\perp$ రే.ఖం. BC అయిన
DB = 3CD, అయిన
$2AB^2 = 2AC^2 + BC^2$ అని నిరూపించండి.



పటం 2.33

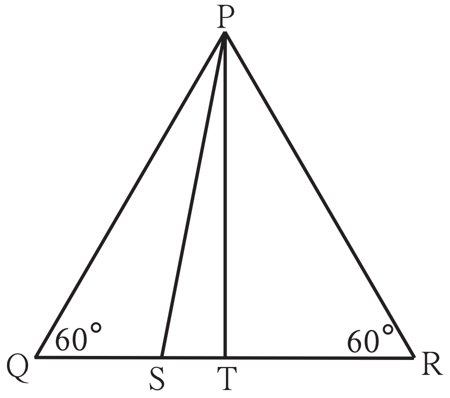
14*. సమద్విబాహు త్రిభుజములో సర్వసమాన భుజాల పొడవు 13 సెం.మీ. దాని భూమి 10 సెం.మీ., అయిన ఆ త్రిభుజ మధ్యగతరేఖ నుండి భూమికి ఎదురుగా ఉన్న శీర్షబిందువుకు మధ్య దూరంను కనుగొనండి.

15. సమలంబ చతుర్భుజము ABCD లో,
రే.ఖం. AB || రే.ఖం. DC
రే.ఖం. BD ⊥ రే.ఖం. AD,
రే.ఖం. AC ⊥ రే.ఖం. BC,
ఒకవేళ AD=15, BC=15 మరియు AB=25
అయినచో A(□ ABCD) ఎంత?



పటం 2.34

16★. పటంలో ΔPQR సమబాహుత్రిభుజం $QS = \frac{1}{3} QR$ అగునట్లు రే.ఖం. QR పై బిందువు S గలదు. అయిన $9\ PS^2 = 7\ PQ^2$ అని నిరూపించండి.



పటం 2.35

17★. రే.ఖం. PM, Δ PQR యొక్క మధ్యగత రేఖ. ఒకవేళ PQ = 40, PR = 42 మరియు PM = 29, అయినచో QR ని కనుగొనండి.

18. రే.ఖం. AM, Δ ABC యొక్క మధ్యగత రేఖ. ఒకవేళ AB = 22, AC = 34, BC = 24, అయినచో భుజము AM పొడవును కనుగొనండి.

ICT Tools or Links

అంతర్జాలము నుండి 'Story on the life of Pythagoras' యొక్క సమాచారమును సేకరించండి. Slide show తయారు చేయండి.

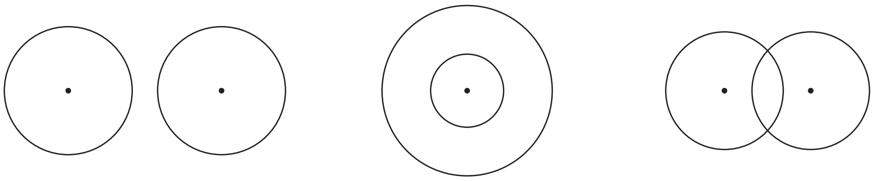
3 వృత్తము

పదండి నేర్చుకుందాం.

- ఒకటి, రెండు, మూడు బిందువుల గుండా పోయే వృత్తములు
- స్పర్శ వృత్తములు
- అంతర్లిఖిత కోణము మరియు అంతరఖండిత చాపము
- స్పర్శరేఖ ఛేదనరేఖల కోణ సిద్ధాంతం.
- వృత్త ఛేదన రేఖ మరియు స్పర్శరేఖ
- వృత్తచాపము
- చక్రీయ చతుర్భుజము.
- జ్యాల యొక్క ఖండన సిద్ధాంతం (ఛేదన రేఖల ఖండన సిద్ధాంతం)

కొంచెం గుర్తుతెచ్చుకుందాం.

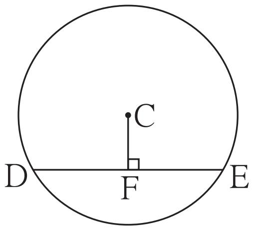
వృత్తమునకు సంబంధించిన కేంద్రం, వ్యాసార్థము, వ్యాసము, జ్యా, అంతర్భాగము, బాహ్యభాగములు వాటి పరిచయం మీకు ఏర్పడింది. సర్వసమాన వృత్తములు, ఏక కేంద్ర వృత్తములు మరియు ఖండన వృత్తములు వాటి సంజ్ఞలను గుర్తు తెచ్చుకోండి.



సర్వసమాన వృత్తాలు　　ఏకకేంద్ర వృత్తాలు　　ఖండన వృత్తాలు

తొమ్మిదవ తరగతిలో నేర్చుకున్న జ్యా యొక్క ధర్మాలు కింది కృత్యముల సహాయంతో గుర్తు తెచ్చుకోండి.

కృత్యము I : పక్క పటంలోని C కేంద్రంగా గల వృత్తము యొక్క జ్యా, రే.ఖం. DE, రే.ఖం. CF $\perp$ జ్యా DE. వృత్తం యొక్క వ్యాసము 20 సెం.మీ. DE = 16 సెం.మీ. అయినట్లయితే CF = ఎంత?



పటం 3.1

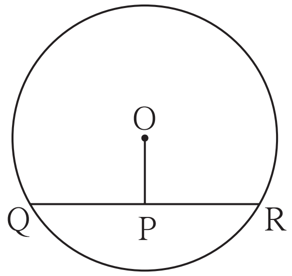
ఈ ప్రశ్నను సాధించుటకు ఉపయోగపడే సిద్ధాంతము మరియు ధర్మములను గుర్తుతెచ్చుకొని రాయండి.

(1) వృత్త కేంద్రంనుండి జ్యా మీదకు గీసిన లంబం ____________________

(2) ____________________

(3) ____________________

ఈ ధర్మములను ఉపయోగించి ప్రశ్నను సాధించండి.



పటం 3.2

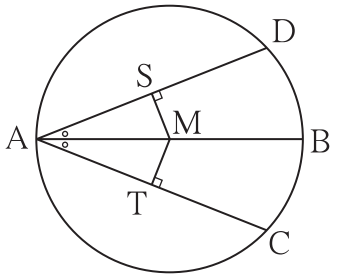
కృత్యము II: పక్క పటంలో కేంద్రం 'O' గా గల వృత్తం యొక్క జ్యా, రే.ఖం. QR. జ్యా QR యొక్క మధ్య బిందువు P. ఒక వేళ QR = 24, OP = 10 అయిన వృత్త వ్యాసార్ధంను కనుగొనండి.

ఈ ప్రశ్నను సాధించడానికి ఉపయోగపడే సిద్ధాంతములను రాయండి.

(1) ______________________

(2) ______________________

ఈ సిద్ధాంతాలను ఉపయోగించి పై ఉదాహరణను సాధించండి.



పటం 3.3

కృత్యము III : పటంలో వృత్తం కేంద్రం M మరియు
రే.ఖం. AB అనేది వ్యాసము
రే.ఖం. MS ⊥ జ్యా AD
రే.ఖం. MT ⊥ జ్యా AC
$\angle DAB \cong \angle CAB$ అయిన
జ్యా AD ≅ జ్యా AC అని చూపండి.

ఈ ప్రశ్నను సాధించుటకు కింది వాటిలో ఏ సిద్ధాంతమును ఉపయోగిస్తారు?

(1) వృత్తం యొక్క రెండు జ్యాలు వృత్త కేంద్రం నుండి సమాన దూరంలో ఉన్నట్లయితే వాటి పొడవులు సమానంగా ఉంటాయి.

(2) ఒకే వృత్తమందలి సర్వసమాన జ్యాలు వృత్త కేంద్రం నుండి సమాన దూరంలో ఉంటాయి.

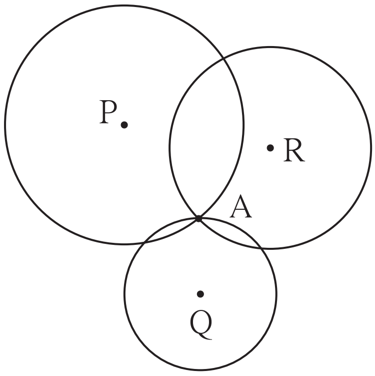
ఇవి కాకుండా కింది నియమాలలోని ఏ త్రిభుజ సర్వసమాన నియమం ఉపయోగపడుతుంది.

(1) భు.కో.భు., (2) కో.భు.కో., (3) భు.భు.భు., (4) కో.కో.భు., (5) క.భు.

సరిపడు నియమము మరియు సిద్ధాంతమును ఉపయోగించి ఉపపత్తిని రాయండి.

తెలుసుకుందాం.

ఒకటి, రెండు, మూడు బిందువుల గుండా పోయే వృత్తములు

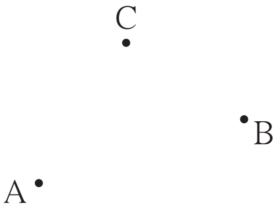


పటం 3.4

పక్కనున్న పటంలో ఒక తలంలోని బిందువు A చూపబడింది. కేంద్ర బిందువులు P,Q,R లు గల మూడు వృత్తములు A బిందువు గుండా పోతాయి. A బిందువు గుండా పోయే ఇంకా ఎన్ని వృత్తములు ఉండవచ్చని మీకు అనిపిస్తుంది?

మీ సమాధానం ఎన్నైనా 'లేదా' అసంఖ్యాకము అని అయినట్లయితే అది సరియైన సమాధానం.

ఒకే ఒక బిందువు గుండా పోయే వృత్తములు అసంఖ్యాకము.

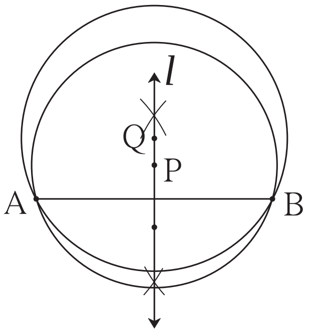


పటం 3.5

పక్క పటంలోని A మరియు B అనే రెండు విభిన్న బిందువుల గుండా పోయే వృత్తములు ఎన్ని?

A, B, C అనే మూడు బిందువుల గుండా పోయే వృత్తములు ఎన్ని? కింద ఇవ్వబడిన కృత్యముల ద్వారా ఏదైనా సమాధానం లభిస్తుందో చూడండి.

కృత్యము I : బిందువు A మరియు బిందువు B లను కలిపే రే.ఖం. AB ని గీయండి. ఈ రేఖ ఖండం యొక్క లంబ సమద్విఖండన రేఖ l గీయండి. రేఖ l పై బిందువు P కేంద్రంగా మరియు PA వ్యాసార్థంగా తీసుకొని వృత్తమును గీయండి. ఈ వృత్తము B బిందువునుండి పోతుందో చూడండి. దీనికి గల కారణంను చెప్పండి. (లంబ సమద్విఖండన రేఖ ధర్మమును గుర్తుతెచ్చుకోండి)



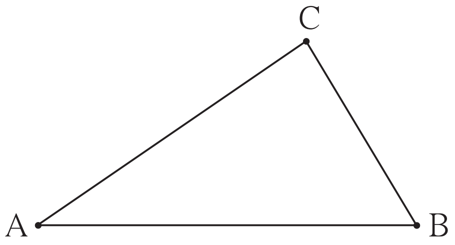
పటం 3.6

రేఖ l పై మరొక బిందువు Q ను కేంద్రంగా QA ను వ్యాసార్థంగా తీసుకుని గీసిన వృత్తం కూడా బిందువు B గుండా పోతుందా? ఆలోచించండి.

బిందువు A మరియు బిందువు B ల గుండా పోయే ఇంకెన్ని వృత్తములను గీయవచ్చు? వాటి కేంద్ర బిందువులు ఏ స్థానంలో ఉంటాయి?

కృత్యము II : భిన్నరేఖీయ బిందువులు A, B, C లను గీయండి. ఈ మూడుబిందువుల గుండా పోయే వృత్తమును గీయుటకు ఏమి చేయాలి? ఈ మూడు బిందువుల ద్వారా పోయే వృత్తామును గీయండి.

ఇవే మూడు బిందువుల గుండా పోయే ఇంకొక వృత్తాన్ని గీయవచ్చా? ఆలోచించండి.



పటం 3.7

కృత్యము III : D, E, F అనే సరేఖీయ బిందువులను గీయండి. ఈ మూడు బిందువుల ద్వారా పోయే వృత్తమును గీసే ప్రయత్నం చేయండి. ఇలాంటి వృత్తమును గీయరానట్లయితే ఎందుకు గీయరావడం లేదు ఆలోచించండి.

ఇవి గుర్తుంచుకుందాం.

(1) ఒకే ఒక బిందువు ద్వారా పోయే వృత్తములు అసంఖ్యాకము.

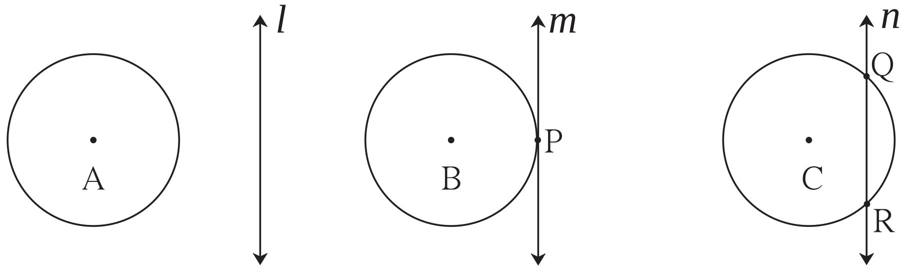
(2) రెండు విభిన్న బిందువుల గుండా పోయే వృత్తములు అసంఖ్యాకము.

(3) మూడు భిన్న రేఖీయ బిందువుల ద్వారా పోయే ఒకే ఒక వృత్తము ఉంటుంది.

(4) మూడు సరేఖీయ బిందువుల ద్వారా పోయే వృత్తము ఒకటి కూడా ఉండదు.

తెలుసుకుందాం.

వృత్తఖండన రేఖ మరియు స్పర్శరేఖ (Secant and tangent)



పటం 3.8

పటంలో, రేఖ l మరియు వృత్తములకు ఒక్క ఉమ్మడి బిందువు కూడా లేదు.

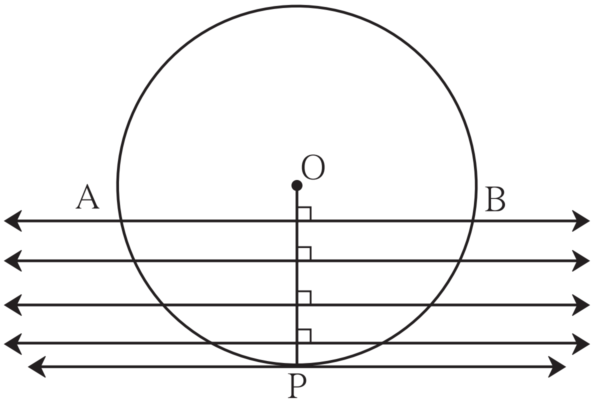
రేఖ m మరియు వృత్తముల ఉమ్మడి బిందువు P ఇచ్చట రేఖ m వృత్తం యొక్క స్పర్శరేఖ అని, బిందువు P ను స్పర్శ బిందువు అని అంటారు.

రేఖ n మరియు వృత్తములకు రెండు ఉమ్మడి బిందువులు కలవు. Q మరియు R అను రేఖ మరియు వృత్తముల ఛేదన బిందువులని, రేఖ n ను వృత్త ఖండన రేఖ అని అంటారు.

వృత్త స్పర్శరేఖ యొక్క ముఖ్యమైన ధర్మమును కృత్యము ద్వారా అర్థం చేసుకుందాం.

కృత్యము :

కేంద్రం O గల సరిపడేంత ఒక పెద్ద వృత్తమును గీయండి. ఆ వృత్తము యొక్క రే.ఖం. OP అనే వ్యాసార్థం గీయండి. ఈ వ్యాసార్థానికి లంబంగా ఉండే ఒక రేఖను గీయండి. ఈ రేఖ మరియు వృత్తముల ఛేదన బిందువులకు A, B అని పేరు పెట్టండి. రేఖ AB అనేది బిందువు O నుండి బిందువు P వైపు, దాని ముందు స్థితికి సమాంతరంగా ఉండేట్లు అనగా జరుపవలసిన రేఖ AB వ్యాసార్థంల మధ్య ఎల్లప్పుడు లంబకోణం ఉండేట్లు జరిపారనుకోండి.



పటం 3.9

ఇది జరుగుతున్నపుడు బిందువు A మరియు B వృత్తంపై పరస్పరం ఒకదానికొకటి దగ్గరగా రావడం మొదలుపెడతాయి. చివరికి అవి బిందువు P లో కలిసిపోతాయి.

ఈ సందర్భంలో రేఖ AB యొక్క నూతన స్థానము అనేది వృత్తము యొక్క స్పర్శరేఖ అవుతుంది. కాని వ్యాసార్థం OP మరియు రేఖ AB ల మధ్య కోణం మాత్రం లంబకోణం ఉంటుంది.

దీనిని బట్టి, వృత్తము యొక్క ఏదేని బిందువు గుండా పోయే స్పర్శరేఖ ఆ బిందువును కలిపే వ్యాసార్థంనకు లంబంగా ఉంటుందని మనకు తెలుస్తుంది. ఈ ధర్మమును 'స్పర్శరేఖ-వ్యాసార్థ సిద్ధాంతం' అంటారు.

స్పర్శరేఖ-వ్యాసార్ధ సిద్ధాంతము (Tangent theorem)

సిద్ధాంతము : వృత్తము యొక్క ఏదేని బిందువు గుండా పోయే స్పర్శరేఖ ఆ బిందువు, కేంద్రాన్ని కలిపే వ్యాసార్ధానికి లంబంగా ఉంటుంది.

ఈ సిద్ధాంతమును పరోక్ష పద్ధతి ద్వారా నిరూపించవచ్చు.

అధిక వివరాలకై :

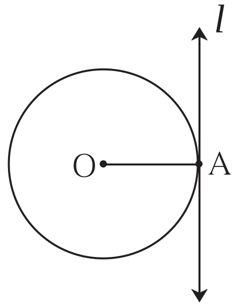
దత్తంశం : కేంద్రం O గా గల వృత్తమును రేఖ l బిందువు A వద్ద స్పృశిస్తుంది. రే.ఖం. OA వృత్త వ్యాసార్ధం.

సారాంశం : రేఖ $l \perp$ వ్యాసార్ధం OA.

ఉపపత్తి : రేఖ l అనేది రే.ఖం. OA కు లంబం కాదు అనుకుందాం.

బిందువు **O** నుండి రేఖ l పై **OB** లంబంను గీసామనుగోండి.

వాస్తవంగా బిందువు B అనేది బిందువు A కంటే భిన్నంగా ఉండాలి. (పటం 3.11 చూడండి.)



పటం 3.10

రేఖ l పై బిందువు C ని A-B-C మరియు BA = BC అయ్యేట్లు తీసుకోవచ్చు.

ఇపుడు, Δ OBC మరియు Δ OBA లలో,

రే.ఖం. BC $\cong$ రే.ఖం. BA .... (నిర్మాణము)

$\angle$OBC $\cong$ $\angle$OBA .... (ప్రతి కోణము లంబకోణము)

రే.ఖం. OB $\cong$ రే.ఖం. OB

$\therefore$ Δ OBC $\cong$ Δ OBA .... (భు.కో.భు. నియమం)

$\therefore$ OC = OA

కాని, రే.ఖం. OA అనేది వ్యాసార్ధము.

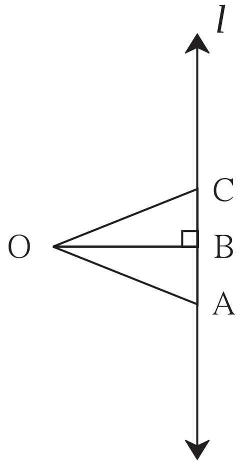
కావున రే.ఖం. OC అనేది కూడా వ్యాసార్ధము అవుతుంది.

$\therefore$ బిందువు C అనేది వృత్తముపై ఉండాలి.

అనగా రేఖ l అనేది వృత్తమును A మరియు C అనే రెండు బిందువులలో ఖండించును. ఇది దత్తాంశమునకు విరుద్ధం.

కారణం రేఖ l స్పర్శ రేఖ

అనగా రేఖ l వృత్తమును ఒకే బిందువు వద్ద ఖండించును .....(దత్తాంశం)



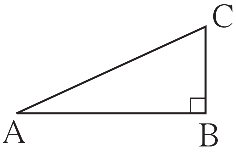
పటం 3.11

$\therefore$ రేఖ l అనేది వ్యాసార్ధం OA కు లంబం కాదు అనేది అసత్యము.

$\therefore$ రేఖ $l \perp$ వ్యాసార్ధం OA.

కొంచెం గుర్తుతెచ్చుకుందాం.

మనం నేర్చుకున్న ఏ సిద్ధాంతాలనుపయోగించి లంబకోణత్రిభుజంలో కర్ణం అనేది అన్నిటికంటే పెద్ద భుజం అవుతుందని నిరూపించవచ్చు.

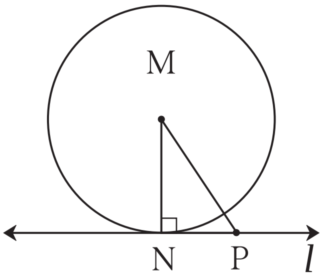


పటం 3.12

తెలుసుకుందాం.

స్పర్శ రేఖ-వ్యాసార్థ సిద్ధాంత విపర్యయము (Converse of Tangent theorem)

సిద్ధాంతము : **వృత్త వ్యాసార్థం యొక్క బాహ్య బిందువు (చివర) ద్వారా పోయే మరియు వ్యాసార్థానికి లంబంగా ఉండే రేఖ ఆ వృత్తం యొక్క స్పర్శ రేఖ అవుతుంది.**



పటం 3.13

దత్తాంశం : M కేంద్రంగాగల వృత్తము యొక్క వ్యాసార్థం రే.ఖం. MN. బిందువు N నుండి పోయే రేఖ l వ్యాసార్థం MN కు లంబం.

సారాంశం : రేఖ l వృత్త స్పర్శరేఖ.

ఉపపత్తి : రేఖ l పై P అనేది N కాకుండా వేరొక బిందువును తీసుకొని రే.ఖం. MP గీసాము.

ఇపుడు, Δ MNP లో $\angle$ N ఒక లంబకోణం

$\therefore$ రే.ఖం. MP అనేది కర్ణం అవుతుంది.

$\therefore$ రే.ఖం. MP > రే.ఖం. MN.

$\therefore$ బిందువు P వృత్తంపై ఉంటే అవకాశం లేదు.

అనగా రేఖ l పై N కాకుండా వేరే ఏ ఇతర బిందువు వృత్తంపై లేదు.

$\therefore$ రేఖ l వృత్తమును N అనే ఒకే ఒక బిందువు వద్ద ఖండిస్తుంది.

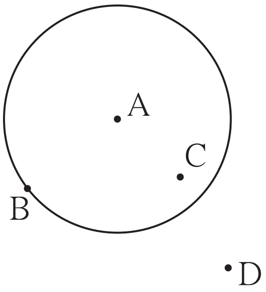
$\therefore$ రేఖ l వృత్తము యొక్క స్పర్శరేఖ అవుతుంది.

పదండి చర్చిద్దాం.

కేంద్రం A గాగల వృత్తంపై B ఒక బిందువు ఇవ్వబడింది. ఈ వృత్తం యొక్క బిందువు B నుండి పోయే స్పర్శరేఖను గీయవలెను.

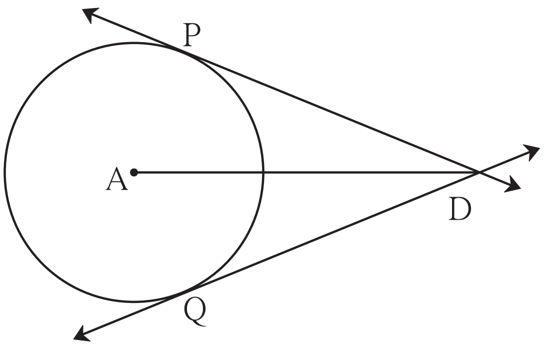
B అనే బిందువు ద్వారా పోయే రేఖలు అసంఖ్యాకంగా ఉంటాయి. వాటిలో ఏ రేఖ ఈ వృత్తము యొక్క స్పర్శరేఖ అవుతుంది? దానిని ఎలా గీయవచ్చు?

బిందువు B నుండి పోయే ఒకటికంటె ఎక్కువ స్పర్శరేఖలు ఉండవచ్చునా?



పటం 3.14

వృత్తం యొక్కఅంతర్భాగంలోని C బిందువు గుండా ఆ వృత్తమునకు స్పర్శరేఖను గీయవచ్చా?



పటం 3.15

వృత్తం యొక్క బాహ్యభాగంలోని D బిందువు గుండా పోయే రేఖ ఆ వృత్తానికి స్పర్శరేఖ అయ్యే అవకాశం ఉందా? ఉంటే అలాంటి ఎన్ని స్పర్శరేఖలు ఉంటాయి?

పటంలో చూపిన విధంగా వృత్తం యొక్క బాహ్య బిందువునుండి రెండు స్పర్శరేఖలు గీయవచ్చని చర్చ ద్వారా మీకు అర్థమయి ఉండవచ్చు.

పక్క పటంలో రేఖ DP మరియు రేఖ DQ లు స్పర్శరేఖలు. కేంద్రం A గా గల వృత్తమును P, Q బిందువుల వద్ద స్పృశిస్తాయి.

రే.ఖం. DP మరియు రే.ఖం. DQ లను స్పర్శరేఖా ఖండములు అంటారు.

స్పర్శరేఖ రేఖాఖండ సిద్ధాంతము (Tangent Segment Theorem)

సిద్ధాంతం : **వృత్తము యొక్క బాహ్యబిందువు నుండి గీయబడిన స్పర్శరేఖా రేఖాఖండములు సర్వసమానం.**

పక్క పటం ఆధారంగా దత్తాంశము మరియు సారాంశంలను నిర్ణయించుము.

వ్యాసార్థం AP మరియు AQ లను గీసి కింద ఇవ్వబడిన ఉపపత్తిలోని ఖాళీలను పూరించండి.

ఉపపత్తి : Δ PAD, Δ QAD లలో,

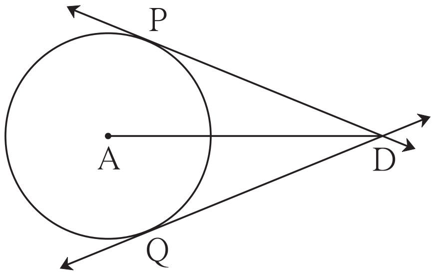
భుజము PA $\cong$ ________ (ఒకే వృత్తవ్యాసార్థాలు)

భుజము AD $\cong$ భుజము AD ________

$\angle APD \cong \angle AQD = 90^\circ$ ...... (స్పర్శరేఖ సిద్ధాంతం)

$\therefore$ Δ PAD $\cong$ Δ QAD ________

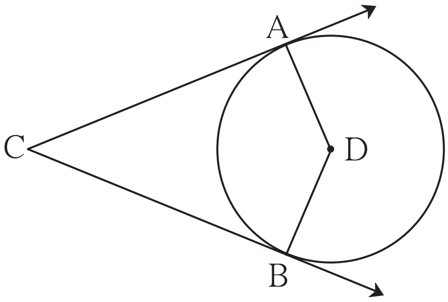
$\therefore$ భుజము DP $\cong$ భుజము DQ ________



పటం 3.16

సాధించిన ఉదాహరణలు

ఉదా. (1) ఇవ్వబడిన పటంలో D కేంద్రంగాగల వృత్తం $\angle ACB$ కోణ భుజములు A, B బిందువులలో స్పృశించును. $\angle ACB = 52^\circ$, అయిన $\angle ADB$ కొలతను కనుగొనండి.



పటం 3.17

సాధన : చతుర్భుజ నాలుగు కోణాల కొలతల మొత్తం 360° అవుతుంది.

$\therefore \angle ACB + \angle CAD + \angle CBD + \angle ADB = 360^\circ$

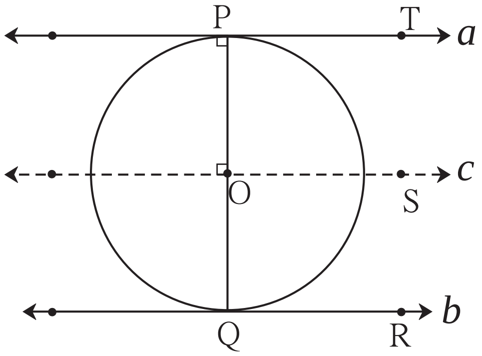
$\therefore 52^\circ + 90^\circ + 90^\circ + \angle ADB = 360^\circ$ .... స్పర్శరేఖ-వ్యాసార్థ సిద్ధాంతం

$\therefore \angle ADB + 232^\circ = 360^\circ$

$\therefore \angle ADB = 360^\circ - 232^\circ = 128^\circ$

ఉదా. (2) రేఖ a, రేఖ b లు కేంద్రం O గాగల వృత్తం యొక్క సమాంతర స్పర్శరేఖలు. వృత్తమును వరుసగా P, Q బిందువులలో స్పృశించును. అయిన రే.ఖం. PQ అనేది వృత్త వ్యాసము అని నిరూపించండి.

నిరూపణ : a,b,c రేఖలపై వరుసగా T,S,R బిందవులను పటంలో చూపిన విధంగా తీసుకోండి. బిందువు O గుండా రేఖ a కు సమాంతరంగా రేఖ c ని గీయండి. వ్యాసార్థం OP, వ్యాసార్థం OQ లను గీయండి.



పటం 3.18

ఇప్పుడు $\angle OPT = 90^\circ$... స్పర్శరేఖ-వ్యాసార్థ సిద్ధాంతం

$\therefore$ $\angle SOP = 90^\circ$.... (అంతరకోణముల ధర్మం) . (I)

ఇప్పుడు, రేఖ $a \parallel$ రేఖ c ..... (నిర్మాణం)

రేఖ $a \parallel$ రేఖ b ..... (దత్తాంశం)

రేఖ $b \parallel$ రేఖ c

ఇప్పుడు, $\angle OQR = 90^\circ$ ... స్పర్శ రేఖ-వ్యాసార్థ సిద్ధాంతం.

$\therefore$ $\angle SOQ = 90^\circ$...(అంతరకోణముల ధర్మం) .. (II)

$\therefore$ (I), (II) ల నుండి

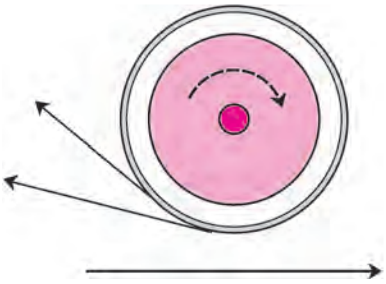
$\angle SOP + \angle SOQ = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$

$\therefore$ కిరణం OP, కిరణం OQ లు విరుద్ధ కిరణములు

$\therefore$ P, O, Q బిందువులు సరేఖీయాలు

$\therefore$ రే.ఖం. PQ వృత్త వ్యాసము అవుతుంది.

వర్షాకాలంలో కొంచెం తడసిన రోడ్డుపై మోటారుసైకిల్ పోయేపుడు దాని వెనుక చక్రంపై నుండి ఎగిరే నీటి ధారను మీరు చూసే ఉంటారు. ఆ నీటిధార వృత్తము యొక్క స్పర్శరేఖ వలె కనిపిస్తుంది. అని మీ దృష్టికి వచ్చే ఉండవచ్చు. ఆ నీటి ధార ఆ విధంగా ఎందుకు ఉంటుందో మీ విజ్ఞానశాస్త్ర ఉపాధ్యాయుడి వద్దనుండి సమాచారమును పొందండి.


చక్రంయొక్క చలనదిశ

తిరిగే భూచక్రమునుండి వెలువడె కాంతివంతమైన మెరుగులు, కత్తికి సాన పట్టేపుడు వెలువడె మిరుగులను పరీక్షించండి. ఇవన్నీ కూడా స్పర్శరేఖల వలె కనిపిస్తాయా?

ఇవి గుర్తుంచుకుందాం.

(1) స్పర్శరేఖ-వ్యాసార్థ సిద్ధాంతం : వృత్తం యొక్క ఏదేని బిందువుగుండా పోయే స్పర్శరేఖ ఆ బిందువును, కేంద్రంను కలిపే వ్యాసార్థానికి లంబంగా ఉంటుంది.

(2) స్పర్శరేఖ-వ్యాసార్థ సిద్ధాంత విపర్యయము : వృత్త వ్యాసార్థ బాహ్య బిందువు గుండా పోయే మరియు దానికి లంబంగా ఉండే రేఖ ఆ వృత్తానికి స్పర్శరేఖ అవుతుంది.

(3) వృత్త బాహ్య బిందువునుండి గీయబడిన స్పర్శరేఖ రేఖాఖండములు సర్వసమానం.

అభ్యాసమాలిక 3.1

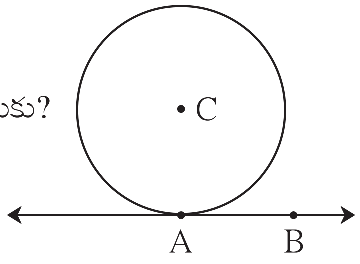
1. పక్క పటంలో C కేంద్రంగాగల వృత్త వ్యాసార్థం 6 సెం.మీ. రేఖ AB వృత్తమును A బిందువు వద్ద స్పృశిస్తుంది. ఈ సమాచారం నుండి కింది ప్రశ్నలకు జవాబులివ్వండి.

   (1) ∠CAB యొక్క కొలత ఎంత? ఎందుకు?

   (2) 'C' బిందువు రేఖ AB నుండి ఎంత దూరంలో ఉంది? ఎందుకు?

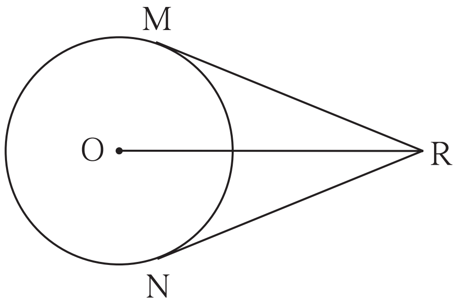
   (3) d(A,B)= 6 సెం.మీ., అయిన d(B,C) ను కనుగొనండి.

   (4) ∠ABC యొక్క కొలత ఎంత? ఎందుకు?



పటం 3.19

2. పక్క పటంలో O కేంద్రంగాగల వృత్త బాహ్యబిందువు R నుండి గీయబడిన స్పర్శరేఖా ఖండాలు RM, RN లు వృత్తమును M, N బిందువులలో స్పృశించును.
OR = 10 సెం.మీ. వృత్త వ్యాసార్థం 5 సెం.మీ. అయిన –



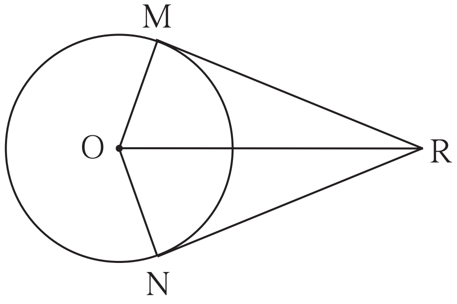
పటం 3.20

   (1) ప్రతి స్పర్శరేఖ రేఖా ఖండం పొడవు ఎంత?

   (2) ∠MRO యొక్క కొలత ఎంత?

   (3) ∠MRN యొక్క కొలత ఎంత?

3. రే.ఖం. RM, రే.ఖం. RN లు O కేంద్రంగాగల వృత్త స్పర్శరేఖ రేఖాఖండములు అయిన రే.ఖం. OR అనేది ∠MRN, ∠MON ఈ రెండు కోణముల సమద్విఖండనం అని చూపండి.



పటం 3.21

4. వ్యాసార్థం 4.5 సెం.మీ. గల వృత్తం యొక్క రెండు స్పర్శరేఖలు పరస్పరం సమాంతరము. అయిన ఆ స్పర్శ రేఖల మధ్యదూరం ఎంత. సకారణంగా రాయండి.

ICT Tools or Links

కంప్యూటర్‌లో జియోజిబ్రా సాఫ్ట్‌వేర్ సహాయముతో వృత్తము మరియు వృత్తము యొక్క బాహ్యబిందువు నుండి స్పర్శరేఖలను గీసి స్పర్శరేఖ రేఖాఖండములు సర్వసమానము అవుతాయని సరిచూడండి.

తెలుసుకుందాం.

స్పృశించుకునే వృత్తములు (Touching Circles)

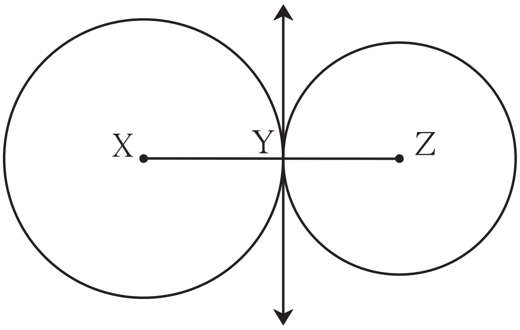
కృత్యము I :

పటం 3.22 లో చూపినవిధంగా X-Y-Z అనే సరేఖీయ బిందువులను గీయండి.

కేంద్రం X, వ్యాసార్థం XY ని తీసుకొని వృత్తాన్ని గీయండి.

కేంద్రం Z, వ్యాసార్థం YZ తీసుకొని రెండవ వృత్తమును గీయండి. ఈ రెండు వృత్తములు Y అనే ఒకే బిందువు వద్ద ఒక దానినొకటి ఖండించుకుంటాయని గమనించండి.

బిందువు Y గుండా రే.ఖం XZ కు లంబరేఖను గీయండి. ఈ రేఖ రెండు వృత్తముల ఉమ్మడి స్పర్శరేఖ అని గుర్తుంచుకోండి.



పటం 3.22

కృత్యము II :

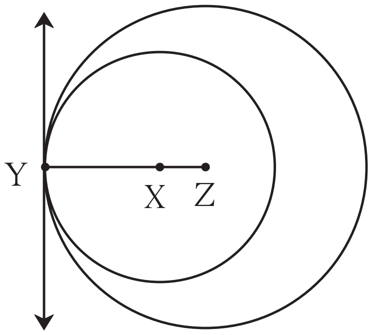
పటం 3.23 లో చూపిన విధంగా Y-X-Z అనే సరేఖీయ బిందువులను గీయండి.

కేంద్రం Z, వ్యాసార్థం ZY గా తీసుకుని వృత్తంను గీయండి.

కేంద్రం X, వ్యాసార్థం XY గా తీసుకుని వృత్తంను గీయండి.

రెండు వృత్తములు Y అనే ఒకే బిందువు వద్ద ఖండించుకుంటాయని గుర్తించండి.

బిందువుY గుండా రే.ఖం. YZ కు లంబరేఖను గీయండి. ఈ రేఖ రెండు వృత్తాల ఉమ్మడి స్పర్శరేఖ అని గుర్తుంచుకోండి.



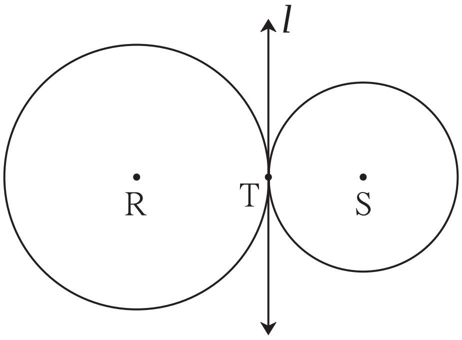
పటం 3.23

రెండు పటాలలోని వృత్తాలు ఒకే తలంలో ఒకదానినొకటి ఒకే ఒక బిందువు వద్ద ఖండించుకుంటాయని పై కృత్యాలు ద్వారా మీకు తెలుస్తుంది. ఇలాంటి వృత్తాలను పరస్పరం స్పృశించుకునే వృత్తములు లేదా **స్పర్శ వృత్తములు** అంటారు.

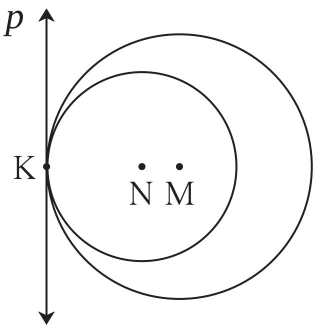
స్పర్శించుకునే వృత్తములను కింది విధంగా నిర్వచించవచ్చు.

ఒకే తలంలోని రెండు వృత్తములు అదే తలంలోని ఒక రేఖను ఒకే బిందువు వద్ద ఖండించినట్లయితే వాటిని స్పర్శించుకునే వృత్తములు అంటారు. ఆ రేఖ రెండు వృత్తముల ఉమ్మడి స్పర్శరేఖ అవుతుంది.

రెండు వృత్తములు మరియు రేఖ యొక్క ఉమ్మడి బిందువును **ఉమ్మడి స్పర్శ బిందువు** అంటారు.



పటం 3.24



పటం 3.25

పటం 3.24 లో, R, S కేంద్రాలుగా గల వృత్తములు రేఖ l ను T అనే ఒకేఒక బిందువు వద్ద ఖండిస్తాయి. కావున రెండు వృత్తములు స్పర్శించుకునే వృత్తములు అయి రేఖ l వాటి ఉమ్మడి స్పర్శరేఖ అవుతుంది. ఈ పటంలోని వృత్తములు **బాహ్యస్పర్శ వృత్తములు** అవుతాయి.

ఈ పటం 3.25 లోని వృత్తములు **అంతర స్పర్శ వృత్తములు** అయి, రేఖ p వాటి ఉమ్మడి స్పర్శ రేఖ అవుతుంది.

ఆలోచిద్దాం.

(1) పటం 3.24 లోని వృత్తముల వలె పరస్పరం స్పృశించుకునే వృత్తములను బాహ్యస్పర్శ వృత్తములు అని ఎందుకు అంటారు?

(2) పటం 3.25 లోని వృత్తముల వలె పరస్పరం స్పృశించుకునే వృత్తములను అంతర స్పర్శ వృత్తములు అని ఎందుకు అంటారు?

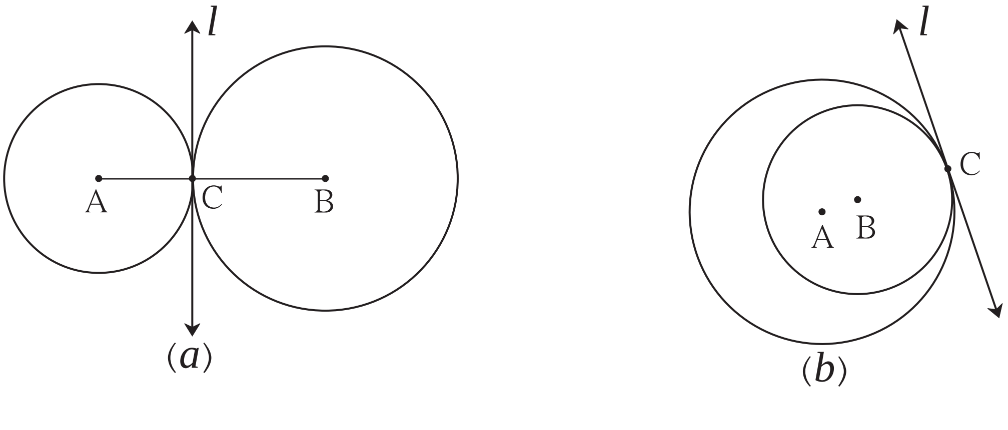
(3) పటం 3.26 లోని, A, B కేంద్రాలుగాగల వృత్తముల వ్యాసార్థాలు వరసగా 3 సెం.మీ., 4 సెం.మీ. అయినట్లయితే

(i) పటం 3.26 (a) లో d(A,B) ఎంత ఉంటుంది?

(ii) పటం 3.26 (b) లో d(A,B) ఎంత ఉంటుంది?

స్పృశించుకునే వృత్తముల సిద్ధాంతం (Theorem of touching circles)

సిద్ధాంతం : పరస్పరం స్పృశించుకునే వృత్తముల స్పర్శబిందువు వాటి వృత్త కేంద్రాలను కలిపే రేఖపై ఉంటుంది.



పటం 3.26

దత్తాంశం : A, B లు కేంద్రాలుగాగల వృత్తముల స్పర్శబిందువు C.

సారాంశం : బిందువు C, రేఖ AB పై గలదు.

ఉపపత్తి : రేఖ l అనేది బిందువు C గుండాపోయే స్పృశించుకునే వృత్తముల ఉమ్మడి స్పర్శరేఖ అనుకోండి.
రేఖ $l \perp$ రే.ఖం. AC, రేఖ $l \perp$ రే.ఖం. BC. $\therefore$ రే.ఖం. AC, రే.ఖం. BC లు రేఖ l కు లంబాలు.
బిందువు C నుండి రేఖ l కు ఒకేఒక లంబరేఖ గీయవచ్చును. $\therefore$ C, A, B లు సరేఖీయాలు అవుతాయి.

ఇవి గుర్తుంచుకుందాం.

(1) పరస్పరం స్పృశించుకునే వృత్తముల స్పర్శబిందువు ఆ వృత్త కేంద్రాలను కలిపే రేఖపై ఉంటుంది.

(2) బాహ్యస్పర్శ వృత్తముల కేంద్రాల మధ్యదూరం వాటి వ్యాసార్థాల మొత్తంనకు సమానం.

(3) అంతరస్పర్శ వృత్తముల కేంద్రాల మధ్య దూరం వాటి వ్యాసార్థాల భేదంనకు సమానం.

అభ్యాసమాలిక 3.2

1. పరస్పరం అంతరంగా స్పృశించుకునే రెండు వృత్తముల వ్యాసార్థాలు వరుసగా 3.5 సెం.మీ., 4.8 సెం.మీ. అయిన వాటి కేంద్రముల మధ్య దూరం ఎంత?

2. బాహ్యంగా స్పృశించుకునే రెండు వృత్తముల వ్యాసార్థాలు వరుసగా 5.5 సెం.మీ., 4.2 సెం.మీ. అయిన వాటి కేంద్రముల మధ్య దూరం ఎంత?

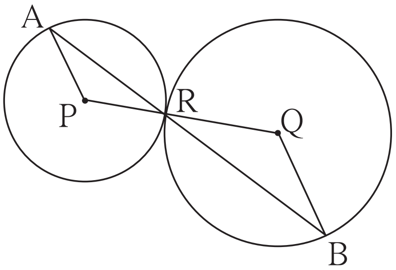
3. వ్యాసార్థాలు వరుసగా 4 సెం.మీ., 2.8 సెం.మీ. గా గల, (i) బాహ్య స్పర్శ వృత్తములు (ii) అంతర స్పర్శ వృత్తములను గీయండి.

4. పటం 3.27 లో, P, Q లు కేంద్రాలుగాగల వృత్తములు పరస్పరం R బిందువు వద్ద స్పృశించుకుంటాయి. R బిందువు గుండా పోయే రేఖ ఆ వృత్తములను వరుసగా A, B బిందువులలో ఖండిస్తుంది. అయిన

   (1) రే.ఖం. AP || రే.ఖం. BQ అని చూపండి.

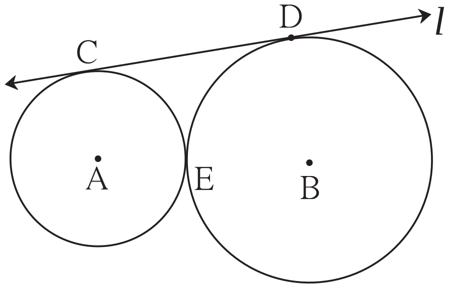
   (2) Δ APR ~ Δ RQB అని చూపండి.

   (3) $\angle$ PAR కొలత 35° అయిన $\angle$ RQB కొలతను నిర్ణయించండి.



పటం 3.27

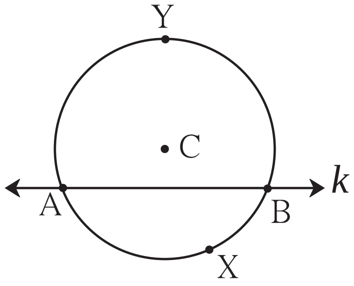
5. పటం 3.28 లో, A, B లు కేంద్రాలుగా గల వృత్తములు E బిందువు వద్ద స్పృశించుకుంటాయి. రేఖ l అనేది వాటి ఉమ్మడి స్పర్శరేఖ వాటిని వరుసగా C, D బిందువులలో స్పృశిస్తుంది. వృత్తముల వ్యాసార్థాలు వరుసగా 4 సెం.మీ., 6 సెం.మీ. అయినట్లయితే రే.ఖం. CD యొక్క పొడవు ఎంత ఉంటుంది?



పటం 3.28

కొంచెం గుర్తు తెచ్చుకుందాం.

వృత్తచాపము (Arc of a circle)



పటం 3.29

వృత్త ఖండన రేఖ వలన వృత్తం రెండు భాగాలుగా విభజించబడుతుంది. వీటిలో ఏదేని ఒక భాగము మరియు వృత్తఖండన రేఖ యొక్క వృత్తముపై గల బిందువులను కలువగా ఏర్పడే ఆకృతిని **వృత్త చాపము** అంటారు.

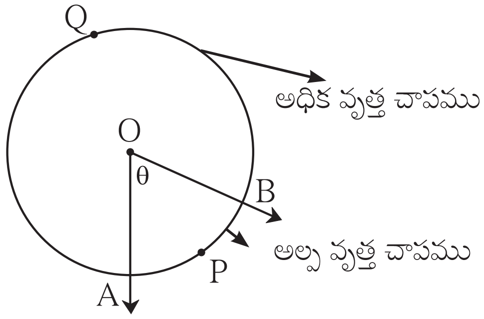
వృత్తము, వృత్త ఖండన రేఖల ఖండన బిందువులను చాపము యొక్క అంత్యబిందువులు లేదా చాపము యొక్క సీమ (చివరి) బిందువులు అంటారు.

పటం 3.29 లో, వృత్తఖండన రేఖ k ద్వారా C కేంద్రంగా గల వృత్తంలో AYB,AXB అనే రెండు చాపములు ఏర్పడినవి.

వృత్త ఖండన రేఖకు ఏవైపు వృత్త కేంద్రం ఉంటుందో ఆ చాపమును **అధిక చాపము** మరియు దాని వ్యతిరేక దిశవైపు ఉన్న చాపమును **అల్ప చాపము** అని అంటారు. పటం 3.29 లో చాపము AYB అనేది అధిక చాపము మరియు చాపము AXB అనేది అల్పచాపములు. ఏదైనా వృత్త చాపము యొక్క పేరును మూడు అక్షరములను ఉపయోగించి రాస్తాము. కాని ఎలాంటి అనుమానం లేకుంటే అల్ప చాపమును దాని అంత్య బిందువులను సూచించే అక్షరాలతో రాస్తారు. ఉదాహరణకు పటం 3.29 లో చాపము AXB ని చాపము AB అనికూడా రాస్తారు.

మనం చాపము పేరు రాయడానికి ఇదే పద్ధతిని ఉపయోగిస్తాం.

కేంద్రీయ కోణము (Central angle)



పటం 3.30

ఏ కోణం యొక్క శీర్షబిందువు వృత్తకేంద్రం వద్ద ఉంటుందో ఆ కోణంను **కేంద్రీయకోణం** అంటారు.

పటం 3.30 లో O కేంద్రంగాగల వృత్తంలో $\angle$ AOB అనేది కేంద్రీయ కోణం.

వృత్త ఖండన రేఖ వలెనే కేంద్రీయ కోణం ద్వారా కూడా వృత్తం రెండు చాపములుగా విభజింపబడుతుంది.

చాపము కొలత (Measure of an arc)

కొన్నిసార్లు రెండు చాపములను పోల్చవలసిన అవసరం ఏర్పడుతుంది. దానికొరకు చాపముల కొలతల నిర్వచనం ఈ విధంగా నిర్వచించబడింది.

(1) అల్పచాపము కొలత దాని సదృశ కేంద్రీయ కోణమునకు సమానంగా ఉంటుంది.

పటం 3.30 లో $\angle$ AOB కేంద్రీయ కోణము కొలత θ కావున అల్ప చాపము APB యొక్క కొలత θ అవుతుంది.

(2) అధిక చాపము కొలత = 360° – సదృశ అల్పచాపము కొలత

పటం 3.30 లో అధికచాపము AQB యొక్క కొలత = 360° – చాపము APB కొలత = $360^\circ - \theta$

(3) అర్ధవృత్త చాపము కొలత అనగా అర్ధవృత్తము కొలత 180° అవుతుంది.

(4) మొత్తం వృత్తం యొక్క కొలత 360° అవుతుంది.

తెలుసుకుందాం.

చాపముల సర్వసమానత్వం (Congruence of arcs)

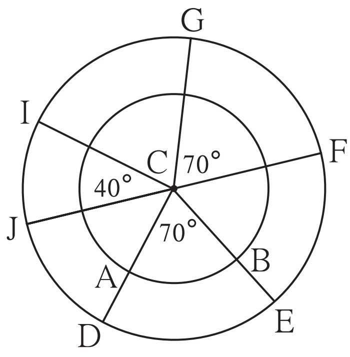
ఎప్పుడైతే రెండు తలాలలోని ఆకృతులు (పటాలు) ఒకదానికొకటి సరిపోల్చబడతాయో అప్పుడు ఆ ఆకృతులు ఒకదానికొకటి సర్వసమానం అని అంటారు. దీని ఆధారంగా సమాన కొలతలు గల కోణములు సర్వసమానంగా ఉంటాయని మనకు తెలుసు.

అదే విధంగా రెండు చాపముల కొలతలు సమానంగా ఉన్నట్లయితే ఆ రెండు చాపములు సర్వసమానం అవుతాయా?

ఈ ప్రశ్నకు సమాధానాన్ని కింది కృత్యము చేసి రాబట్టండి.

కృత్యము :

పటం 3.31 లో చూపిన విధంగా C కేంద్రంగా గల రెండు వృత్తములను గీయండి. $\angle$ DCE మరియు $\angle$ FCG అనే సమాన కొలతలు గల కోణములను గీయండి. ఈ కోణముల కొలతలకు విభిన్నంగా వేరే కొలత ఉండే $\angle$ ICJ ను గీయండి.



పటం 3.31

$\angle$DCE యొక్క భుజములు లోపలి వృత్తమును ఖండించుట వలన లభించే చాపమునకు AB అని పేరు పెట్టండి.

చాపము కొలత యొక్క నిర్వచనం ద్వారా చాపము AB మరియు చాపము DE ల కొలతలు సమానమని తెలిసిందా? ఈ చాపములు పరస్పరం సరిపోతాయా? ఖచ్చితంగా సరిపోలేవు.

ఇపుడు C–DE; C–FG మరియు C–IJ ఈ వృత్త పరిధులను కత్తిరించి వేరు చేయండి. వాటిని ఒకదానితో ఒకటి సరిపోల్చి DE, FG మరియు IJ వీటిలో ఏ చాపము పరస్పరం సరిపోతాయో చూడండి.

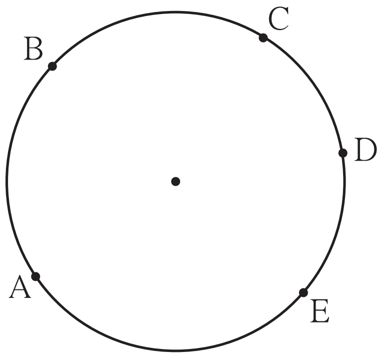
ఈ కృత్యము ద్వారా రెండు చాపములు సర్వసమానం అవుటకు వాటి కొలతలు సమానంగా ఉండటం సరిపోదని తెలిసిందా?

రెండు చాపములు సర్వసమానంగా అగుటకు ఇంకా ఎలాంటి నియమాలను పాటించవలెనని మీకు అనిపిస్తుంది?

రెండు చాపముల వ్యాసార్థాలు మరియు కొలతలు సమానంగా ఉన్నట్లయితే అపుడు ఆ రెండు చాపములు పరస్పరం సర్వసమానంగా ఉంటాయి. అని పై కృత్యం ద్వారా మనకు తెలుస్తుంది.

'చాపము DE చాపము GF సర్వసమానం' దీనిని చాపము DE $\cong$ చాపము GF అని చిహ్నరూపంలో చూపిస్తారు.

చాపముల కొలతల మొత్తం యొక్క ధర్మము (Property of sum of measures of arcs)



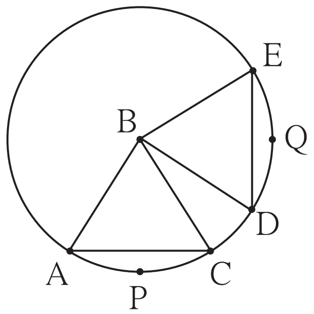
పటం 3.32

పటం 3.32 లో A, B, C, D, E అనేవి ఒకే వృత్త బిందువులు. ఈ బిందువుల ద్వారా అనేక చాపములు ఏర్పడినవి. వీటిలో చాపము ABC, చాపము CDE లలో C అనే ఒకే ఒక బిందువు ఉమ్మడిగా ఉంది. కావున చాపము ABC, చాపము CDE ల కొలతల మొత్తం చాపము ACE యొక్క కొలతకు సమానం.

m(చాపము ABC) + m(చాపము CDE) = m(చాపము ACE)

కాని చాపము ABC, చాపము BCE లలో ఒకటి కంటే ఎక్కువ బిందువులు [చాపము BC యొక్క అన్ని] ఉమ్మడిగా ఉన్నాయి. కావున చాపము ABC, చాపము BCE ల కొలతల మొత్తం చాపము ABE యొక్క కొలతకు సమానంగా ఉండదు

సిద్ధాంతం: ఒక వృత్తం యొక్క (లేదా సర్వసమాన వృత్తముల) సర్వసమాన చాపముల సదృశ జ్యాలు సర్వసమానంగా ఉంటాయి.



పటం 3.33

దత్తాంశం : B కేంద్రంగాగల వృత్తంలో చాపము APC ≅ చాపము DQE

సారాంశం : జ్యా AC ≅ జ్యా DE

ఉపపత్తి : (ఖాళీలను పూరిస్తూ ఉపపత్తిని పూర్తి చేయండి)

ΔABC, Δ DBE లలో,

భుజము AB ≅ భుజము DB ..... (................)

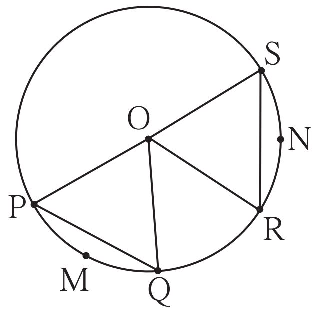
భుజము .... ≅ భుజము .....(......................)

∠ABC ≅ ∠DBE .... (సర్వసమాన చాపముల నిర్వచనం)

∴ Δ ABC ≅ Δ DBE ..... (......................)

∴ జ్యా AC ≅ జ్యా DE .....(......................)

సిద్ధాంతం : ఒకే వృత్తం యొక్క (లేదా సర్వసమాన వృత్తముల) సర్వసమాన జ్యాల యొక్క సదృశ చాపములు సర్వసమానంగా ఉంటాయి.



పటం 3.34

దత్తాంశం : రే.ఖం. PQ, రే.ఖం. RS లు O కేంద్రంగా గల వృత్తం యొక్క సర్వసమాన జ్యాలు.

సారాంశం : చాపము PMQ ≅ చాపము RNS

కింది అంశాలను పరిగణలోకి తీసుకొని ఉపపత్తిని రాయండి. రెండు చాపములు సర్వసమానం కావడానికి వాటి వ్యాసార్ధాలు మరియు కొలతలు సమానంగా ఉండాలి. చాపము PMQ చాపము RNS అనేవి ఒకే వృత్తం యొక్క

చాపములు అయినందు వలన వాటి వ్యాసార్థాలు సమానం. ఆ చాపముల కొలతలు అనగా వాటి సదృశ కేంద్రీయ కోణ కొలతలు అవుతాయి. ఈ కేంద్రీయ కోణములు లభించుట కొరకు వ్యాసార్థాలు OP, OQ, OR మరియు OS లను గీయవలెను. వాటిని గీసిన తర్వాత ఏర్పడే Δ OPQ మరియు Δ ORS లు సర్వసమానమే కదా?

పై రెండు సిద్ధాంతాలను మీరు సర్వసమాన వృత్తములలో నిరూపించండి.

ఆలోచించుదాం

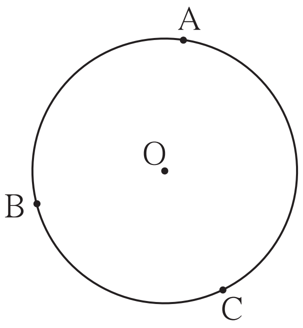
- పై రెండు సిద్ధాంతాలలోని మొదటి సిద్ధాంతములో చాపము APC చాపము DQE అనే అల్ప చాపములు సర్వసమానం అని అనుకున్నాం. వాటి సదృశ అధిక చాపములు సర్వసమానమని అనుకొని కూడా ఈ సిద్ధాంతమును నిరూపించ వచ్చునా?
- రెండవ సిద్ధాంతములో సర్వసమాన జ్యాల సదృశ అధిక చాపములు కూడా సర్వసమానం అవుతాయా? జ్యా PQ, జ్యా RS లు వ్యాసములు అయినపుడు ఈ సిద్ధాంతం సత్యం అవుతుందా?

సాధించిన ఉదాహరణలు

ఉదా. (1) O కేంద్రంగాగల వృత్తము యొక్క A, B, C లు మూడు బిందువులు.

(i) ఈ మూడు బిందువుల వలన ఏర్పడే అన్ని చాపముల పేర్లను రాయండి.

(ii) చాపము BC, చాపము AB ల కొలతలు వరసగా 110°, 125° అయిన మిగిలిన అన్ని చాపముల కొలతలను రాయండి.



పటం 3.35

సాధన : (i) చాపముల పేర్లు –

చాపము AB, చాపము BC, చాపము AC, చాపము ABC, చాపము ACB, చాపము BAC

(ii) చాపము ABC కొలత = చాపము AB కొలత + చాపము BC కొలత

$= 125^\circ + 110^\circ = 235^\circ$

చాపము AC కొలత = 360° – చాపము ABC కొలత

$= 360^\circ - 235^\circ = 125^\circ$

అదే విధంగా చాపము ACB కొలత = $360^\circ - 125^\circ = 235^\circ$

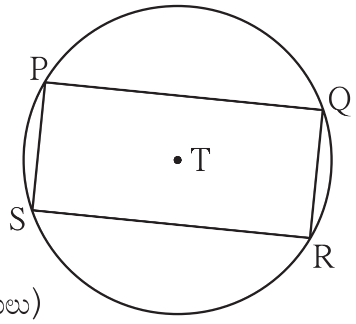
మరియు చాపము BAC కొలత = $360^\circ - 110^\circ = 250^\circ$

ఉదా. **(2)** పటం 3.36 లోని T కేంద్రంగాగల వృత్తము లో దీర్ఘచతురస్రము PQRS గీయబడి ఉంది.

అయితే –

(i) చాపము PQ $\cong$ చాపము SR

(ii) చాపము SPQ $\cong$ చాపము PQR అని చూపండి.



పటం 3.36

సాధన : $\square$ PQRS అనేది ఒక దీర్ఘచతురస్రము

$\therefore$ జ్యా PQ $\cong$ జ్యా SR ..... (దీర్ఘచతురస్ర ఎదుటి భుజాలు)

$\therefore$ చాపము PQ $\cong$ చాపము SR .....(సర్వసమాన జ్యాల సదృశ చాపములు)

జ్యా PS $\cong$ జ్యా QR ..... (దీర్ఘచతురస్ర ఎదుటి భుజాలు)

$\therefore$ చాపము SP $\cong$ చాపము QR ..... (సర్వసమాన జ్యాల సదృశ చాపములు)

$\therefore$ చాపము SP, చాపము QR ల కొలతలు సమానం

ఇపుడు, చాపము SP, చాపము PQ ల కొలతల మొత్తం

= చాపము PQ, చాపము QR కొలతల మొత్తం.

$\therefore$ చాపము SPQ కొలత = చాపము PQR కొలత

$\therefore$ చాపము SPQ $\cong$ చాపము PQR

ఇవి గుర్తుంచుకుందాం.

(1) ఏ కోణం యొక్క శీర్ష బిందువు వృత్తా కేంద్రం వద్ద ఉంటుందో ఆ కోణంను కేంద్రీయ కోణము అంటారు.

(2) చాపము కొలతల నిర్వచనం – (i) అల్పచాపము కొలత దాని సదృశ కేంద్రీయ కొలతకు సమానంగా ఉంటుంది. (ii) అధిక చాపము కొలత = 360° – సదృశ అల్పకోణ చాపము కొలత. (iii) అర్ధవృత్తచాపము కొలత 180° ఉంటుంది.

(3) రెండు వృత్త చాపముల వ్యాసార్థాలు మరియు కొలతలు సమానంగా ఉన్నట్లయితే అపుడు ఆ చాపములు సర్వసమానంగా ఉంటాయి.

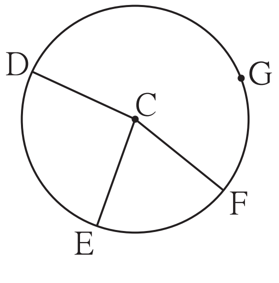
(4) ఒక వృత్త చాపము ABC, చాపము CDE లలో ఎప్పుడైతే C అనే బిందువు ఉమ్మడిగా ఉంటుందో అప్పుడు m(చాపము ABC) + m(చాపము CDE) = m(చాపము ACE)

(5) ఒకే వృత్తం (లేదా సర్వసమాన వృత్తముల) యొక్క సర్వసమాన చాపముల సదృశ జ్యాలు సర్వసమానంగా ఉంటాయి.

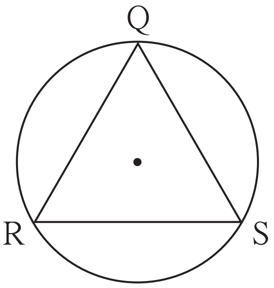
(6) ఒకే వృత్తం (లేదా సర్వసమాన వృత్తముల) యొక్క సర్వసమాన జ్యాల సదృశ చాపములు సర్వసమానంగా ఉంటాయి.

అభ్యాసమాలిక 3.3

1. పటం 3.37 లో, G, D, E మరియు F అనే బిందువులు C కేంద్రంగాగల వృత్తముపై గలవు $\angle$ ECF కొలత 70° చాపము DGF కొలత 200° అయిన చాపము DE చాపము DEF కొలతలను నిర్ణయించండి.



పటం 3.37



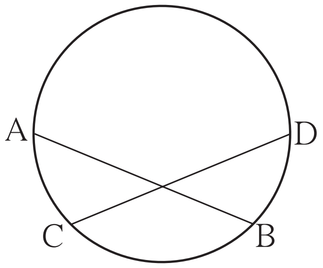
పటం 3.38

2★. పటం 3.38 లో Δ QRS సమబాహు త్రిభుజం అయిన –

(1) చాపము RS $\cong$ చాపము QS $\cong$ చాపము QR

(2) చాపము QRS కొలత 240° అని చూపండి.

3. పటం 3.39 లో,
జ్యా AB $\cong$ జ్యా CD,
అయిన –
చాపము AC $\cong$ చాపము BD అని చూపండి.



పటం 3.39

తెలుసుకుందాం.

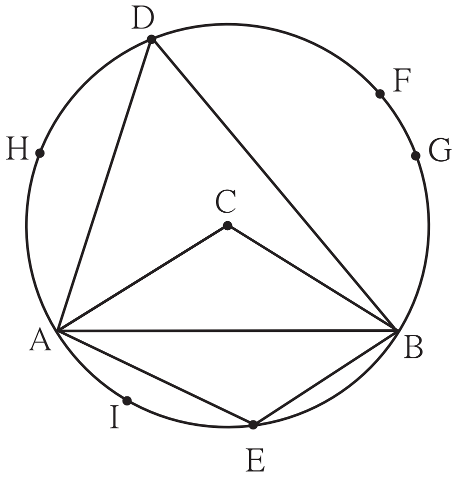
వృత్తము మరియు బిందువులు, వృత్తము మరియు రేఖ (స్పర్శరేఖ)ల పరస్పర సంబంధం కల్గిన కొన్ని ధర్మాలను మనం చూసాం. ఇపుడు వృత్తము మరియు కోణములకు సంబంధించిన కొన్ని ధర్మాలను చూద్దాం. వాటిలో కొన్ని ధర్మాలను ముందు కృత్యముల ద్వారా తెలుసుకుందాం.

కృత్యము I :

C కేంద్రంగాగల ఒక సరిపడినంత పెద్ద వృత్తమును గీయండి. పటం 3.40 లో చూపిన విధంగా దాని జ్యా AB ని గీయండి. కేంద్రీయ కోణం ACB ని గీయండి. జ్యా AB వలన ఏర్పడిన అధిక చాపముపై D బిందువును అల్ప చాపముపై E బిందువును తీసుకోండి.

(1) $\angle$ADB, $\angle$ACB లను కొలవండి. వాటి కొలతలను పోల్చండి.

(2) $\angle$ADB, $\angle$AEB లను కొలవండి. లభించిన కొలతల మొత్తంను కూడి చూడండి.



పటం 3.40

(3) చాపము ADB పై F, G, H లాంటి ఇంకా కొన్ని బిందువులను తీసుకోండి. ∠AFB, ∠AGB, ∠AHB, ... ల కొలతను కొలవండి. ఈ కొలతలతో ∠ADB కొలతను మరియు వాటి పరస్పర కొలతలతో పోల్చండి.

(4) చాపము AEB పై I అనే మరొక ఏదైనా బిందువు తీసుకోండి. ∠ AIB ని కొలిచి ఆ కొలతతో ∠AEB కొలతను పోల్చండి

ఈ కృత్యం ద్వారా మీకు కింది విషయములు తెలుస్తాయి –

(1) ∠ ACB కొలత ∠ ADB కొలతకు రెట్టింపు ఉంటుంది.

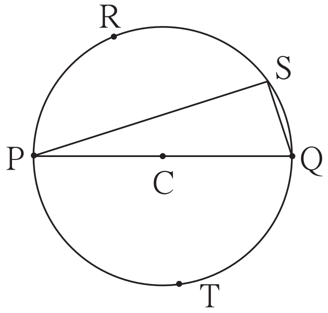
(2) ∠ ADB, ∠ AEB ల కొలతల మొత్తం 180° ఉంటుంది.

(3) ∠ AHB, ∠ ADB, ∠ AFB, ∠ AGB ల కొలతలు సమానంగా ఉంటాయి.

(4) ∠ AEB, ∠ AIB ల కొలతలు సమానంగా ఉంటాయి.

కృత్యము II :

పటం 3.41 లో చూపిన విధంగా C కేంద్రంగాగల సరిపడే ఒక పెద్ద వృత్తంను గీయండి. రే.ఖం. PQ అనే ఏదైనా ఒక వ్యాసాన్ని గీయండి. ఈ వ్యాసం వలన ఏర్పడిన రెండు అర్ధవృత్తాలపై R,S,T అనే కొన్ని బిందువులను తీసుకోండి. ∠ PRQ, ∠ PSQ, ∠ PTQ లను కొలవండి. ఇందులోని ప్రతి కోణం లంబకోణం అని తెలుస్తుంది.



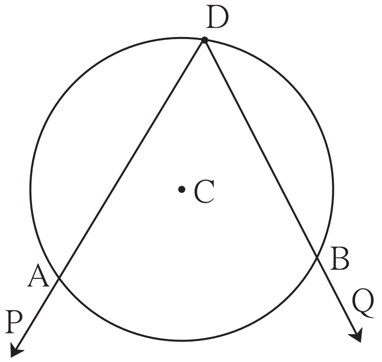
పటం 3.41

పై కృత్యముల ద్వారా మీకు కనిపించిన ధర్మములు అనగా వృత్తము కోణములకు సంబంధించిన సిద్ధాంతములు. ఈ సిద్ధాంతముల నిరూపణ మనం చూద్దాం. దానికొరకు ముందుగా కొన్ని గుర్తులను పరిచయం చేసుకోవలసి ఉంటుంది.

అంతర్లిఖిత కోణము (Inscribed angle)

పటం 3.42 లో C కేంద్రంగాగల ఒక వృత్తము ∠ PDQ యొక్క శీర్షబిందువు D వృత్తంపై ఉంది. కోణం యొక్క భుజములు DP మరియు DQ వృత్తమును వరుసగా A మరియు B లలో ఖండిస్తాయి ఇలాంటి కోణంను వృత్తంలోని లేదా చాపములోని అంతర్లిఖిత కోణము అంటారు.

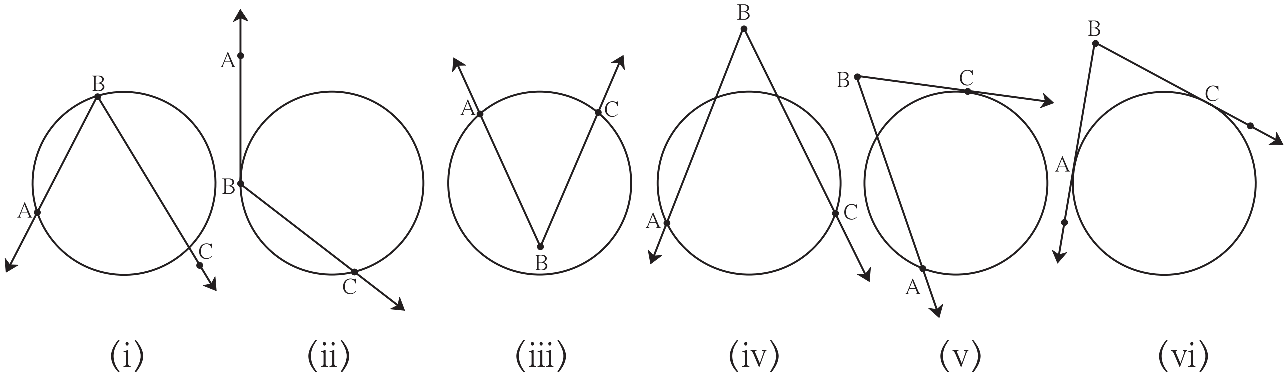
పటం 3.42 లో ∠ ADB అనేది చాపము ADB లో అంతర్లిఖిత కోణం.



పటం 3.42

అంతరఖండిత చాపము (Intercepted arc)

కింది పటం 3.43 లో (i) నుండి (vi) వరకు గల అన్ని పటములను పరిశీలించండి.



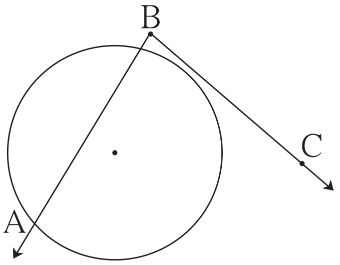
పటం 3.43

ప్రతీ పటంలోని $\angle ABC$ యొక్క అంతర్భాగంలో ఉన్న వృత్త చాపమును $\angle ABC$ ని అంతరఖండిత చాపము అని అంటారు. అంతరఖండిత చాపము యొక్క అంత్యబిందువులనేవి వృత్తము మరియు కోణముల ఖండన బిందువులు అవుతాయి. కోణం యొక్క ప్రతి భుజంపై చాపము యొక్క ఒక అంత్య బిందువు ఉండవలసిన అవసరం ఉంది.

పటం 3.43 లోని (i), (ii), (iii) పటాలలోని కోణాలు ఒకే ఒక చాపమును అంతర ఖండితము చేస్తాయి. కాని (iv), (v), (vi) పటాలలోని కోణాలు రెండు చాపములను అంతరఖండితము చేసాయి.

పటం (ii), (v) లోని కోణం యొక్క ఒక భుజం (vi) పటంలోని కోణం యొక్క రెండు భుజాలు వృత్తమును స్పృశిస్తున్నాయని గమనించండి.

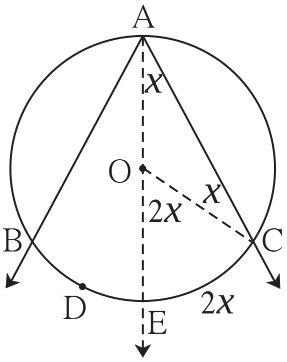
పటం 3.44 లోని చాపము అంతరఖండిత చాపము కాదు. ఎందుకనగా కోణం యొక్క భుజం BC పై చాపము యొక్క ఒక్క అంత్య బిందువు కూడా లేదు.



పటం 3.44

అంతర్లిఖిత కోణ సిద్ధాంతము (Inscribed angle theorem)

సిద్ధాంతము : వృత్తంలో అంతర్లిఖిత కోణ కొలత దాని అంతరఖండిత చాపము కొలతలో సగం ఉంటుంది.



పటం 3.45

దత్తాంశం : O కేంద్రంగాగల వృత్తంలో $\angle BAC$ అనేది BAC చాపములోని అంతర్లిఖిత కోణము. ఆ కోణము వలన ఏర్పడిన చాపము BDC అంతర ఖండిత చాపము.

సారాంశం : $\angle BAC = \frac{1}{2}\, m$(చాపము BDC)

నిర్మాణం : కిరణంAO ను గీసాము. అది వృత్తమును E బిందువు వద్ద ఖండిస్తుంది వ్యాసార్థం OC ని గీసాము.

ఉపపత్తి : Δ AOC లో.

భుజము OA $\cong$ భుజము OC ...... (ఒకే వృత్త వ్యాసార్థాలు)

$\therefore$ $\angle OAC = \angle OCA$ ..... (సమద్విబాహు త్రిభుజ సిద్ధాంతం)

$\angle OAC = \angle OCA = x$ అని అనుకొనిన. ...... (I)

ఇపుడు, $\angle EOC = \angle OAC + \angle OCA$ .... (త్రిభుజ బాహ్యకోణ సిద్ధాంతం)

$= x^\circ + x^\circ = 2x^\circ$

కాని $\angle EOC$ అనేది కేంద్రీయ కోణం.

$\therefore$ m(చాపము EC) $= 2x^\circ$ .... (చాపము కొలత నిర్వచనం) ..... (II)

$\therefore$ (I) మరియు (II) ల నుండి

$\angle OAC = \angle EAC = \frac{1}{2}$ m(చాపము EC) ..... (III)

ఇదే విధంగా, వ్యాసార్థం OB ని గీసి, $\angle EAB = \frac{1}{2}$ m(చాపము BE) ను నిరూపించవచ్చు..... (IV)

$\therefore$ $\angle EAC + \angle EAB = \frac{1}{2}$ m(చాపము EC) $+ \frac{1}{2}$ m(చాపము BE) .... (III), (IV) ల నుండి

$\therefore$ $\angle BAC = \frac{1}{2}$ [m(చాపము EC) + m(చాపము BE)]

$= \frac{1}{2}$ [m(చాపముBEC)] $= \frac{1}{2}$ [m(చాపము BDC)] ..... (V)

వృత్తంలో అంతర్లిఖిత కోణము మరియు వృత్త కేంద్రములకు సంబంధించి మూడు సందర్భములు కలవని గమనించండి. వృత్త కేంద్ర కోణం యొక్క భుజంపై ఉండవచ్చు, అంతర్భాగంలో లేదా బాహ్యాభాగంలో ఉండవచ్చు. వీటిలోని మొదటి, రెండు సందర్భాలు (III), (V) లలో నిరూపించబడ్డాయి. ఇపుడు మిగిలిన మూడవ సందర్భమును ఆలోచించుదాం.

పటం 3.46 లో,

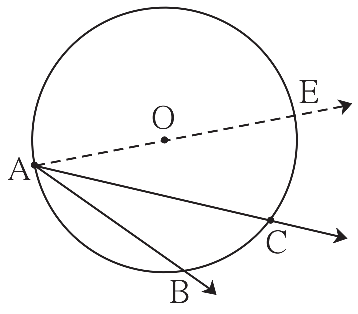
$\angle BAC = \angle BAE - \angle CAE$

$= \frac{1}{2}$ m(చాపము BCE) $- \frac{1}{2}$ m(చాపము CE)

...... (III) నుండి.

$= \frac{1}{2}$ [m(చాపము BCE) $-$ m(చాపము CE)]

$= \frac{1}{2}$ [m(చాపము BC)] ...... (VI)



పటం 3.46

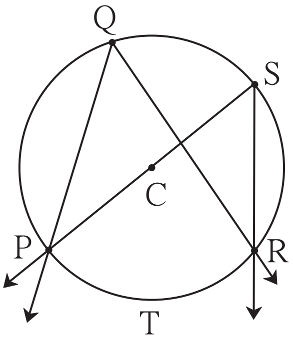
ఈ సిద్ధాంతము యొక్క వాక్యమును కింది విధంగా కూడా రాస్తారు.

వృత్త చాపము, మిగిలిన వృత్తముపై ఏదేని బిందువు వలన ఏర్పడిన కోణము (Subtended) కొలత ఆ చాపము వలన ఏర్పడే కేంద్రీయ కోణ కొలతలో సగం ఉంటుంది.

ఈ సిద్ధాంతము యొక్క స్వీకృతాలను ప్రతిపాదలను కూడా ఈ పరిభాషలోనే రాయవచ్చు.

అంతర్లిఖిత కోణ సిద్ధాంత ప్రతిపాదనలు (Corollaries of inscribed angle theorem)

1. ఒకే చాపములోని అంతర్లిఖిత కోణములన్నీ సర్వసమానంగా ఉంటాయి.



పటం 3.47

పటం 3.47 ఆధారంగా దత్తాంశము సారంశములను రాయండి.

కింది ప్రశ్నలను ఆధారంగా చేసుకొని ఉపపత్తిని రాయండి.

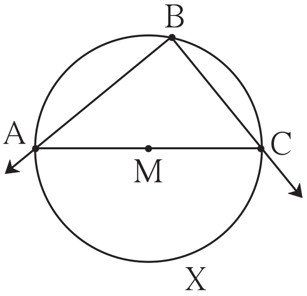
(1) $\angle PQR$ ఏ చాపమును అంతరఖండితము చేసింది?

(2) $\angle PSR$ ఏ చాపమును అంతరఖండితము చేసింది?

(3) అంతర్లిఖిత కోణ కొలత మరియు అది అంతరఖండితం చేసిన చాపము కొలతల మధ్య ఏ సంబంధం ఉంటుంది?

2. అర్ధవృత్తంలోని అంతర్లిఖిత కోణము లంబకోణం అవుతుంది.

పక్కనున్న పటం 3.48 ఆధారంగా ఈ సిద్ధాంతము యొక్క దత్తాంశం, సారాంశం మరియు ఉపపత్తులను రాయండి.



పటం 3.48

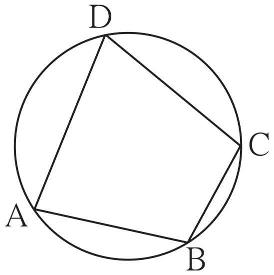
చక్రీయ చతుర్భుజం (Cyclic quadrilateral)

చతుర్భుజం యొక్క నాలుగు శీర్షబిందువులు వృత్తంపై ఉన్నట్లయితే ఆ చతుర్భుజంను చక్రీయ చతుర్భుజం అంటారు.

చక్రీయ చతుర్భుజ సిద్ధాంతం (Theorem of cyclic quadrilateral)

చక్రీయ చతుర్భుజ ఎదుటి కోణములు పరస్పరం సంపూరకోణములు అవుతాయి.

కింద ఇవ్వబడిన ఉపపత్తిలో ఖాళీలను పూరించి ఉపపత్తిని పూర్తి చేయండి.



పటం 3.49

దత్తాంశం : $\square$ ______ అనేది చక్రీయ చతుర్భుజం

సారాంశం : $\angle B + \angle D =$ ______

______ $+ \angle C = 180°$

ఉపపత్తి : $\angle ADC$ అంతర్లిఖిత కోణము, చాపము ABC ని అంతరఖండితము చేసినది.

$\therefore \angle ADC = \frac{1}{2}$ ______ .... (I)

ఆదేవిధంగా ______ అనే అంతర్లిఖిత కోణము చాపము ADC అని అంతర ఖండితము చేసింది.

$\therefore \boxed{\quad} = \frac{1}{2}$ m(చాపము ADC) ..... (II)

$\therefore \angle ADC + \boxed{\quad} = \frac{1}{2} \boxed{\quad} + \frac{1}{2}$ m(చాపము ADC)... [(I), (II) ల నుండి]

$= \frac{1}{2} [\boxed{\quad}$ + m(చాపము ADC)]

$= \frac{1}{2} \times 360^\circ$ ....[చాపము ABC, చాపము ADC లు కలిసి పూర్తి వృత్తామౌతుంది]

$= \boxed{\quad}$

అదే విధంగా $\angle A + \angle C = \boxed{\quad}$ దీనిని నిరూపించవచ్చును.

చక్రీయ చతుర్భుజ సిద్ధాంత ప్రతిపాదన (Corollary of cyclic quadrilateral theorem)

సిద్ధాంతము : చక్రీయ చతుర్భుజ బాహ్యకోణం దాని ఆసన్న కోణం యొక్క అభిముఖ కోణమునకు సర్వసమానంగా ఉంటుంది

ఈ సిద్ధాంత ఉపపత్తిని మీరే రాయండి.

ఆలోచించుదాం

పై సిద్ధాంతంలో $\angle B + \angle D = 180^\circ$ ని నిరూపించిన మిగిలిన ఎదుటి కోణముల మొత్తం కూడా 180° అవుతుంది, దీనిని వేరే విధంగా నిరూపించవచ్చా?

చక్రీయ చతుర్భుజ సిద్ధాంత విపర్యయము (Converse of cyclic quadrilateral theorem)

సిద్ధాంతము :చతుర్భుజంలోని ఎదుటి కోణములు సంపూరకములు అయిన ఆ చతుర్భుజం చక్రీయ చతుర్భుజం అవుతుంది.

ఈ సిద్ధాంతమును పరోక్ష పద్ధతి ద్వారా నిరూపించవచ్చు. మీరు ప్రయత్నించండి.

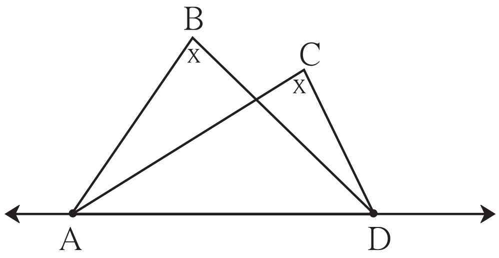
పై విపర్యయము నుండి చతుర్భుజం యొక్క ఎదుటికోణాలు సంపూరకములు అయినట్లయితే ఆ చతుర్భుజానికి పరివృత్తం ఉంటుందని మనకు తెలుస్తుంది.

ప్రతి త్రిభుజానికి పరివృత్తము ఉంటుందని మనకు తెలుసు, కాని ప్రతి చతుర్భుజానికి పరివృత్తము ఉండాలని లేదు అని మీరు తెలుసుకోండి.

ఏ షరతులు వర్తించినట్లయితే చతుర్భుజానికి పరివృత్తము ఉంటుంది. అనగా చతుర్భుజ శీర్ష బిందువులు ఒకే వృత్తముపై ఉంటాయని మనకు తెలుస్తుంది.

మరొక విభిన్న సందర్భంలో నాలుగు అరేఖీయ బిందువులు చక్రీయం అవుతాయి. దీనిని తరువాతి సిద్ధాంతములో చెప్పడం జరిగింది.

సిద్ధాంతము: రేఖ యొక్క రెండు భిన్న బిందువులు, ఆ రేఖకు ఒకేవైపు ఉంటే రెండు బిన్న బిందువులతో సర్వసమాన కోణములు ఏర్పరిచినట్లయితే ఆ నాలుగు బిందువులు ఒకే వృత్తంపై ఉంటాయి.



పటం 3.50

దత్తాంశం : B, C బిందువులు రేఖ ADకి ఒకే వైపుగల బిందువులు $\angle ABD \cong \angle ACD$

సారాంశం : A, B, C, D బిందువులు ఒకే వృత్తంపై ఉన్నాయి (అనగా $\square$ ABCD చక్రీయము)

ఇంతకు ముందు దానివలె దీనిని కూడా పరోక్ష పద్ధతిలో నిరూపించవచ్చు.

ఆలోచించుదాం

పై సిద్ధాంతం ఏ సిద్ధాంత విపర్యయ సిద్ధాంతం?

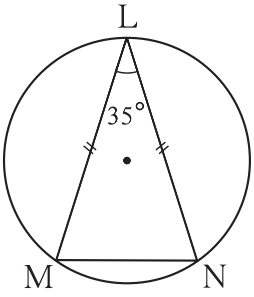
సాధించిన ఉదాహరణలు

ఉదా. (1) పటం 3.51 లో, జ్యా LM $\cong$ జ్యా LN

$\angle L = 35^\circ$ అయిన

(i) m(చాపము MN) = ఎంత?

(ii) m(చాపము LN) = ఎంత?



పటం 3.51

సాధన : (i) $\angle L = \frac{1}{2}\, m$(చాపము MN) ...... (అంతర్లిఖితకోణ సిద్ధాంతం)

$\therefore\ 35 = \frac{1}{2}\, m$(చాపము MN)

$\therefore\ 2 \times 35 = m$(చాపము MN) $= 70^\circ$

(ii) m(చాపము MLN) $= 360^\circ - m$(చాపము MN) ...... (చాపము కొలత నిర్వచనం)

$= 360^\circ - 70^\circ = 290^\circ$

ఇపుడు, జ్యా LM $\cong$ జ్యా LN

$\therefore$ చాపము LM $\cong$ చాపము LN

కాని m(చాపము LM) + m(చాపము LN) = m(చాపము MLN) $= 290^\circ$.. (చాపముల మొత్తం యొక్క ధర్మం)

m(చాపము LM) = m(చాపము LN) $= \frac{290^\circ}{2} = 145^\circ$

లేదా, (ii) జ్యా LM $\cong$ జ్యా LN

$\therefore\ \angle M = \angle N$ ...... (సమద్విబాహు త్రిభుజ సిద్ధాంతం)

$\therefore\ 2\angle M = 180^\circ - 35^\circ = 145^\circ$

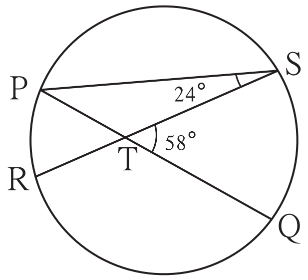
$\therefore\ \angle M = \frac{145^\circ}{2}$

$\therefore$ m(చాపము LN) = $2 \times \angle M$ ...... (అంతర్లిఖిత కోణ సిద్ధాంతము)

$= 2 \times \frac{145^\circ}{2}$

$= 145^\circ$

ఉదా. (2) పటం 3.52 లో, జ్యా PQ, జ్యా RS ఒకదానికొకటిT బిందువు వద్ద ఖండించుకుంటాయి.



పటం 3.52

(i) $\angle STQ = 58^\circ$, $\angle PSR = 24^\circ$, అయిన m(చాపము SQ) ను కనుగొనండి.

(ii) $\angle STQ = \frac{1}{2}[m$(చాపము PR) $+ m$(చాపము SQ)] దీనిని సరిచూడండి.

(iii) జ్యా PQ, జ్యా RS లలోని కోణముల కొలతలు ఎంతైనా ఉన్నట్లయితే

$m\angle STQ = \frac{1}{2}$ [m(చాపము PR) + m(చాపము SQ)] అని చూపండి.

(iv) ఈ ఉదాహరణలో నిరూపించబడే ధర్మము అక్షరాలలో రాయండి.

సాధన : (i) $\angle SPQ = \angle SPT = 58^\circ - 24^\circ = 34^\circ$ .... (త్రిభుజ బాహ్యకోణ సిద్ధాంతం)

m(చాపము QS) = $2 \angle SPQ = 2 \times 34^\circ = 68^\circ$

(ii) m(చాపము PR) = $2 \angle PSR = 2 \times 24^\circ = 48^\circ$

ఇపుడు, $\frac{1}{2}$ [m(చాపము PR) + m(చాపము SQ)] = $\frac{1}{2}[48 + 68]$

$= \frac{1}{2} \times 116 = 58^\circ$

$= \angle STQ$

(iii) ఈ ధర్మము యొక్క నిరూపనలో ఖాళీలను పూరించి, దానిని పూర్తి చేయండి.

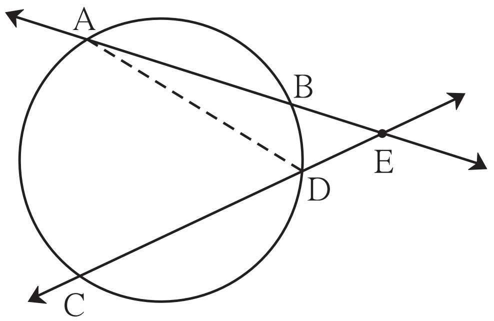
$\angle STQ = \angle SPQ +$ ☐ .... (త్రిభుజ బాహ్యకోణ సిద్ధాంతం)

$= \frac{1}{2}$ m(చాపము SQ) + ☐ .... (అంతర్లిఖిత కోణ సిద్ధాంతం)

$= \frac{1}{2}$ [☐ + ☐]

(iv) వృత్తం యొక్క జ్యాలు ఒకదానినొకటి వృత్త అంతర్భాగంలో ఖండించుకున్నట్లయితే వాటితో ఏర్పడే కోణముల కొలతలు ఆ కోణం వలన ఏర్పడే అంతరఖండిత చాపము మరియు దాని విరుద్ధ కోణం అంతర ఖండిత చాపముల కొలతల మొత్తంలో సగం ఉంటుంది.

ఉదా. (3) వృత్తము యొక్క పొడగించబడిన జ్యాల రేఖలు వృత్తము బయట ఖండించుకున్నట్లయితే ఆ రేఖల మధ్య కోణం కొలత ఆ కోణం అంతరఖండిత చాపముల కొలతల వ్యత్యాసనకు సగం ఉంటుందని నిరూపించండి.



పటం 3.53

దత్తాంశము: వృత్త జ్యా AB, జ్యా CD లు వృత్తం బయట E బిందువు వద్ద ఖండించుకుంటాయి.

సారాంశం : $\angle AEC = \frac{1}{2}[m(\text{చాపము } AC) - m(\text{చాపము } BD)]$

నిర్మాణం : రే.ఖం. AD ని గీసాము.

ఉపపత్తి : ఈ ధర్మము యొక్క నిరూపణ పై ఉదా. (2) లో ఇవ్వబడిన నిరూపణ వలె చేయవచ్చు. దానికొరకు Δ AED యొక్క కోణం ఆ త్రిభుజం యొక్క బాహ్యకోణములను పరిగణలోకి తీసుకొని ఉపపత్తిని రాయండి.

ఇవి గుర్తుంచుకుందాం.

(1) వృత్తంలోని అంతర్లిఖిత కోణకొలత అది అంతర ఖండితం చేసిన చాపము కొలతలో సగం ఉంటుంది.

(2) వృత్తం యొక్క ఒకే చాపములోని అంతర్లిఖిత కోణములు సర్వసమానములు.

(3) అర్ధవృత్తంలోని అంతర్లిఖిత కోణము లంబకోణము అవుతుంది.

(4) చతుర్భుజ నాలుగు శీర్షబిందువులు ఒకే వృత్తంపై ఉంటే ఆ చతుర్భుజమును చక్రీయ చతుర్భుజం అంటారు.

(5) చక్రీయ చతుర్భుజ ఎదుటి కోణములు సంపూరకాలు.

(6) చక్రీయ చతుర్భుజ బాహ్యకోణము దాని ఆసన్న-అభిముఖ కోణానికి సమానం.

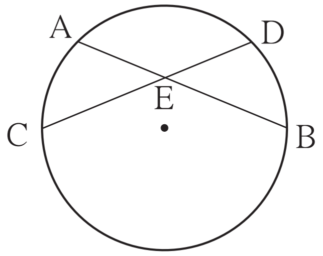
(7) చతుర్భుజ ఎదుటి కోణములు పరస్పరం సంపూరకములు అయిన అది చక్రీయము అవుతుంది.

(8) రేఖ యొక్క రెండు భిన్న బిందువులు, ఆ రేఖకు ఒకేవైపు గల రెండు భిన్న బిందువులు సమాన కోణములను ఏర్పరిచినట్లయితే ఆ నాలుగు బిందువులు ఒకే వృత్తంపై ఉంటాయి.

(9) పక్క పటం 3.54 లో,

(i) $\angle AEC = \frac{1}{2}[m(\text{చాపము } AC) + m(\text{చాపము } DB)]$

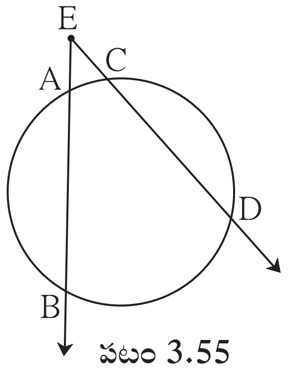
(ii) $\angle CEB = \frac{1}{2}[m(\text{చాపము } AD) + m(\text{చాపము } CB)]$



పటం 3.54

(10) పక్క పటం 3.55 లో,

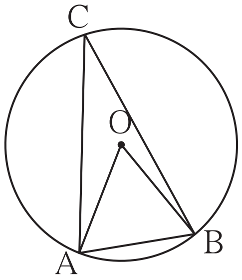
$\angle BED = \frac{1}{2}$ [m(చాపము BD) − m(చాపము AC)]



పటం 3.55

అభ్యాసమాలిక 3.4

1. పటం 3.56 లో, O కేంద్రంగా గల వృత్త జ్యా AB యొక్క పొడవు వృత్త వ్యాసార్థానికి సమానం. అయిన (1) $\angle AOB$ (2) $\angle ACB$ (3) చాపము AB (4) చాపము ACB ల కొలతలను కనుగొనండి.



పటం 3.56

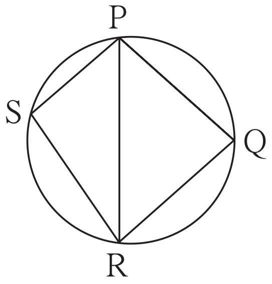
2. పటం 3.57 లో, □ PQRS ఒక చక్రీయం. భుజము PQ ≅ భుజము RQ. $\angle PSR = 110°$, అయిన

(1) $\angle PQR$ = ఎంత?

(2) m(చాపము PQR) = ఎంత?

(3) m(చాపము QR) = ఎంత?

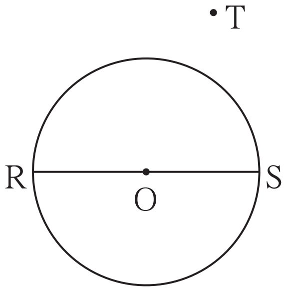
(4) $\angle PRQ$ = ఎంత?



పటం 3.57

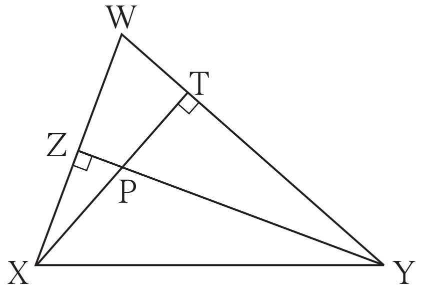
3. చక్రీయ □ MRPN లో, $\angle R = (5x - 13)°$, $\angle N = (4x + 4)°$, అయిన $\angle R$, $\angle N$ ల కొలతలను నిర్ణయించండి.

4. పటం 3.58 లో రే.ఖం. RS అనేది O కేంద్రంగాగల వృత్త వ్యాసం. T బిందువు వృత్త బాహ్య భాగంలోని బిందువు అయిన $\angle RTS$ అల్పకోణం అని చూపండి.



పటం 3.58

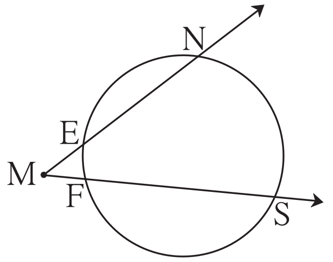
5. ఏదేని దీర్ఘచతురస్రం చక్రీయ చతుర్భుజం అవుతుందని నిరూపించండి.



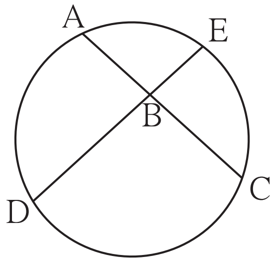
పటం 3.59

6. పటం 3.59 లో, రే.ఖం. YZ, రే.ఖం. XT లు Δ WXY యొక్క శీర్షలంబరేఖలు P వద్ద ఖండించుకొనిన.
(1) □ WZPT ఒక చక్రీయ చతుర్భుజం.
(2) X, Z, T, Y బిందువులు ఒకే వృత్తముపై ఉంటాయని చూపండి.

7. పటం 3.60 లో m(చాపము NS) = 125°, m(చాపము EF) = 37°, అయిన ∠NMS యొక్క కొలతను కనుగొనండి.



పటం 3.60



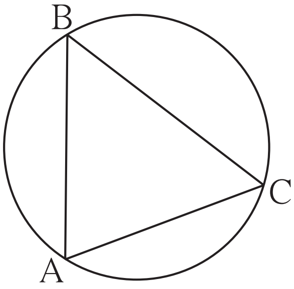
పటం 3.61

8. పటం 3.61 లో జ్యా AC, జ్యా DE లు B బిందువు వద్ద ఖండించుకుంటాయి. ∠ABE = 108° మరియు m(చాపము AE) = 95° అయిన m(చాపము DC) ను కనుగొనండి.

తెలుసుకుందాం.

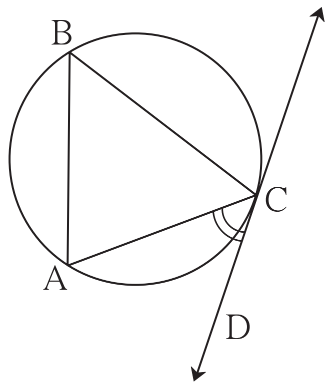
కృత్యము :

ఒక సరిపడేంత పెద్ద వృత్తమును గీయండి. పటం 3.62 లో వృత్తములో రే.ఖం. AC ఒక జ్యాను గీయండి. వృత్తంపై ఏదేని బిందువు B ని తీసుకోండి. ∠ABC అంతర్లిఖిత కోణంను గీయండి. ∠ABC కొలతను కొలిచి రాసి పెట్టండి.



పటం 3.62

ఇపుడు పటం 3.63 లో చూపినవిధంగా అదే వృత్తంనకు స్పర్శరేఖ CD ని గీయండి. ∠ACD యొక్క కొలతను కొలవండి.



పటం 3.63

$\angle ACD$ కొలత, $\angle ABC$ కొలతకు సమానమని మీకు తెలుస్తుంది.

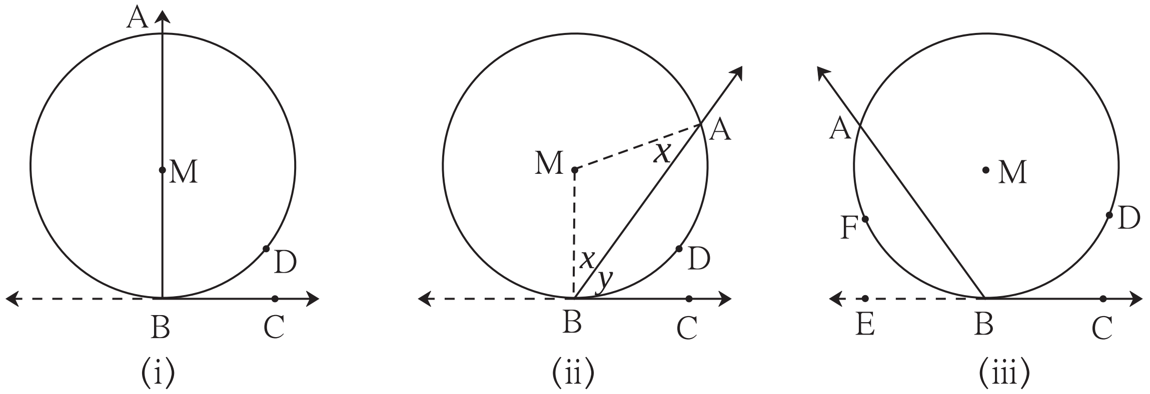
$\angle ABC = \frac{1}{2}\ m$(చాపము AC) అని మీకు తెలుసు.

దీని నుండి $\angle ACD$ కొలత కూడా చాపము AC కొలతలో సగం అని సమాధానం లభిస్తుంది.

వృత్తము యొక్క స్పర్శరేఖల ఒక ముఖ్యమైన ధర్మము కలదు. దానిని మనం ఇపుడు నిరూపిద్దాం.

స్పర్శరేఖ-ఖండన రేఖ కోణ సిద్ధాంతము (Theorem of angle between tangent and secant)

సిద్ధాంతము: శీర్షబిందువు వృత్తంపై గల కోణము యొక్క ఒక భుజం వృత్తము యొక్క స్పర్శరేఖ మరియు రెండవ భుజము వృత్తమును మరొక బిందువు వద్ద ఖండించిన ఆ కోణము కొలత దాని వలన ఏర్పడే అంతర ఖండిత చాపము కొలతలో సగం ఉంటుంది.



పటం 3.64

దత్తాంశము: $\angle$ ABC యొక్క శీర్షబిందువు, M కేంద్రంగా గల వృత్తంపై గలదు. దాని భుజం BC స్పృశిస్తుంది భుజం BA వృత్తమును A వద్ద ఖండిస్తుంది. చాపము ADB అనేది $\angle$ ABC యొక్క అంతరఖండిత్ చాపము

సారాంశం : $\angle ABC = \frac{1}{2}\ m$(చాపముADB)

ఉపపత్తి : ఈ సిద్ధాంత నిరూపణ, మూడు సందర్భాలను ఆలోచిస్తూ చేయ వలసివస్తుంది.

(1) పటం 3.64 (i) లో వలె వృత్త కేంద్రం M, $\angle$ABC యొక్క ఒక భుజంపై ఉన్నట్లయితే

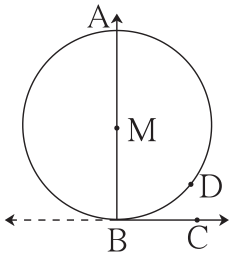
$\angle ABC = \angle MBC = 90^\circ$ ..... (స్పర్శరేఖ సిద్ధాంతము).....(I)

చాపము ADB అర్థవృత్తము అవుతుంది.

$\therefore\ m$(చాపము ADB) $= 180^\circ$ ..... (చాప కోణకొలత నిర్వచనం).....(II)

(I), (II) ల నుండి.

$\angle ABC = \frac{1}{2}\ m$(చాపముADB)



పటం 3.64(i)

(2) పటం 3.64 (ii) విధంగా, కేంద్రము M, $\angle$ ABC కు బాహ్యంగా ఉన్నట్లయితే

వ్యాసార్ధం MA, వ్యాసార్ధం MB లను గీయండి.

ఇపుడు, $\angle MBA = \angle MAB$ ..... (సమద్విబాహు త్రిభుజ సిద్ధాంతము)

అదే విధంగా, $\angle MBC = 90^\circ$ ..... (స్పర్శరేఖ సిద్ధాంతము) ..... (I)

$\angle$ MBA = $\angle$ MAB = x, $\angle$ ABC = y అనుకొనిన.

$\angle$ AMB = 180 − ($x + x$) = 180 − 2x

$\angle$ MBC = $\angle$ MBA + $\angle$ ABC = $x + y$

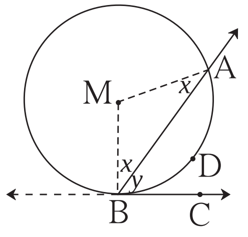
$\therefore x + y = 90^\circ$ $\therefore 2x + 2y = 180^\circ$

Δ AMB లో 2x + $\angle$ AMB = 180°

$\therefore 2x + 2y = 2x + \angle AMB$

$\therefore 2y = \angle AMB$

$\therefore y = \angle ABC = \frac{1}{2}\angle AMB = \frac{1}{2}$ m (చాపము ADB)



పటం 3.64(ii)

(3) మూడవ సందర్భమునకై కింద ఇవ్వబడిన ఉపపత్తి పటం 3.64 (iii) ఆధారంగా ఖాళీలను పూరించి మీరు పూర్తి చేయండి.

కిరణం ______ అనేది కిరణం BC కి విరుద్ధ కిరణమును గీసితిమి.

ఇపుడు, $\angle ABE = \frac{1}{2}$ m(______) ...... (2) లో నిరూపించితిమి.

180 − ______ = $\angle$ABE ..... (రేఖీయయుగ్మ కోణములు)

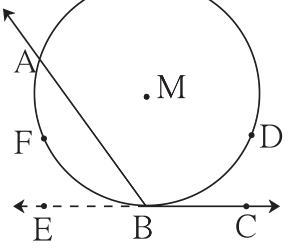
$\therefore$ 180 − ______ = $\frac{1}{2}$ m(చాపము AFB)

= $\frac{1}{2}$ [360 − m(______)]

$\therefore$ 180 − $\angle$ABC = 180 − $\frac{1}{2}$ m(చాపము ADB)

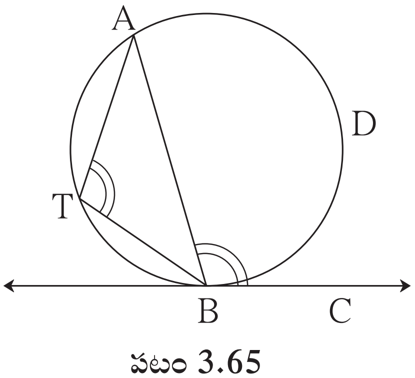
$\therefore$ −$\angle$ABC = − $\frac{1}{2}$ m(______)

$\therefore$ $\angle$ABC = $\frac{1}{2}$ m(చాపము ADB)



పటం 3.64(iii)

స్పర్శరేఖ-ఖండన రేఖ కోణము యొక్క పర్యాయ వాక్యము



పటం 3.65

పటంలో AB వృత్త ఖండన రేఖ, BC స్పర్శరేఖ, చాపము ADB అనేది $\angle$ ABC వలన ఏర్పడిన అంతర ఖండిత చాపము. జ్యా AB వృత్తమును రెండు చాపములలో విభజిస్తుంది. రెండు చాపములు పరస్పరం విరుద్ధ చాపములు అవుతాయి. ఇప్పుడు చాపము ADB యొక్క విరుద్ధ చాపముపై బిందువు T ని తీసుకొన్నాము. పై సిద్ధాంతము నుండి

$\angle$ ABC = $\frac{1}{2}$ m (చాపము ADB) = $\angle$ ATB.

$\therefore$ **వృత్తము యొక్క స్పర్శరేఖ మరియు స్పర్శ బిందువు గుండా గీయబడిన జ్యాల మధ్య కోణము ఆ కోణముచే అంతర ఖండితమయిన చాపము యొక్క ఎదుటి చాపములో అంతర్లిఖిత కోణమునకు సమానం.**

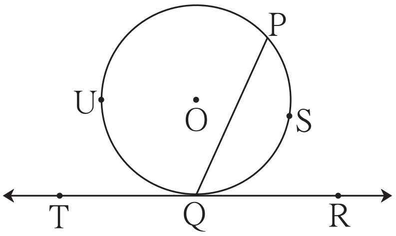
స్పర్శరేఖ - ఖండనరేఖ కోణ సిద్ధాంత విపర్యయము:

వృత్తము జ్యా యొక్క ఒక అంత్య బిందువు గుండా పోయే ఒక రేఖను గీసిన ఆ రేఖ, ఆ జ్యాతో ఏర్పరిచిన కోణము కొలత కోణము అంతర ఖండితము చేసిన చాపముకొలతలో సగం ఉన్న, ఆ రేఖ వృత్తమునకు స్పర్శరేఖ అవుతుంది.

పటం 3.66 లో,

ఒకవేళ $\angle PQR = \frac{1}{2}\ m$(చాపము PSQ) అయిన

[లేదా $\angle PQT = \frac{1}{2}\ m$(చాపము PUQ) అయిన]



పటం 3.66

రేఖ TR వృత్తము యొక్క స్పర్శరేఖ అవుతుంది. ఈ విపర్యయ సిద్ధాంతం వృత్తానికి స్పర్శరేఖను గీయుటకు ఉపయోగపడుతుంది. ఈ సిద్ధాంతమును పరోక్ష పద్ధతిలో నిరూపించవచ్చు.

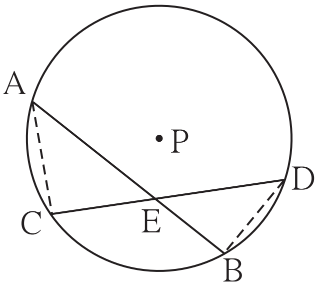
జ్యాల అంతరఖండన సిద్ధాంతము (Theorem of internal division of chords)

ఒక వృత్తము యొక్క రెండు జ్యాలు వృత్తము యొక్క అంతర్భాగంలో ఖండించుకొనిన మొదటి జ్యాలో ఏర్పడిన రెండు భాగముల పొడవుల లబ్ధం. రెండవ జ్యా యొక్క రెండు భాగాల పొడవుల లబ్ధానికి సమానం.

దత్తాంశము: P కేంద్రంగాగల వృత్తము యొక్క జ్యాలు AB, CD లు వృత్త అంతర్భాగంలో E బిందువు వద్ద ఖండించుకున్నాయి.

సారాంశం : AE × EB = CE × ED

నిర్మాణం : రే.ఖం. AC, రే.ఖం. DB లను గీసితిమి.



పటం 3.67

ఉపపత్తి : Δ CAE, Δ BDE లలో,

$\angle$ AEC ≅ $\angle$ DEB ..... (అభిముఖ కోణములు)

$\angle$ CAE ≅ $\angle$ BDE ..... (ఒకే వృత్తచాపములోని అంతర్లిఖిత కోణములు)

∴ Δ CAE ~ Δ BDE ..... (కో.కో. సరూప నియమం)

∴ $\frac{AE}{DE} = \frac{CE}{BE}$ ..... (సరూప త్రిభుజాల సదృశ భుజాలు)

∴ AE × EB = CE × ED

ఆలోచించుదాం.

పటం 3.67 లో, రే.ఖం. AC, రే.ఖం. DB లను గీసి మనం సిద్ధాంతమును నిరూపించాము. దానికి బదులు రే.ఖం. AD, రే.ఖం. CB లను గీసి ఈ సిద్ధాంతమును నిరూపించవచ్చునా?

అధిక వివరాలకై

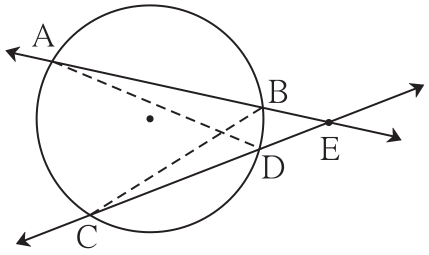
పటం 3.67 లో జ్యా AB యొక్క బిందువు E వలన AE, EB అనే రెండు భాగములు అయినవి. రే.ఖం. AE, రే.ఖం. EB లు ఆసన్న భుజాలుగా ఒక దీర్ఘచతురస్రమును గీసితిమి. అయిన AE × EB ఆ దీర్ఘచతురస్ర వైశాల్యము అవుతుంది. అదేవిధంగా CE × ED జ్యా CD యొక్క రెండు భాగాల వలన ఏర్పడే దీర్ఘచతురస్ర వైశాల్యం అవుతుంది. మనం AE × EB = CE × ED దీనిని నిరూపించాము.

కావున ఈ సిద్ధాంతము వేరే రకంగా కింది విధంగా చెప్పవచ్చును.

ఒకే వృత్తము యొక్క రెండు జ్యాలు వృత్త అంతర్భాగములో ఖండించుకొనిన ఒక జ్యా యొక్క రెండు భాగాల ద్వారా ఏర్పడే దీర్ఘచతురస్ర వైశాల్యం రెండవ జ్యా యొక్క రెండు భాగాల ద్వారా ఏర్పడే దీర్ఘచతురస్ర వైశాల్యానికి సమానం.

జ్యాల బాహ్యఖండన సిద్ధాంతము (Theorem of external division of chords)

ఒకే వృత్తము యొక్క జ్యాలు AB, CD లను పొడగించిన వృత్తఖండన రేఖలు పరస్పరం వృత్త బాహ్య భాగంలో E బిందువు వద్ద ఖండించు కొనిన AE × EB = CE × ED అవుతుంది.



పటం 3.68

పై సిద్ధాంతము ఆధారంగా దత్తాంశము సారాంశము మీరే నిర్ణయించండి.

నిర్మాణం : రే.ఖం. AD, రే.ఖం. BC లను గీసితిమి.

ఖాళీలను పూరించి నిరూపణ పూర్తి చేయండి.

ఉపపత్తి : Δ ADE, Δ CBE లలో,

∠ AED ≅ ☐ .... (ఉమ్మడి కోణములు)

∠ DAE ≅ ∠ BCE .... (☐)

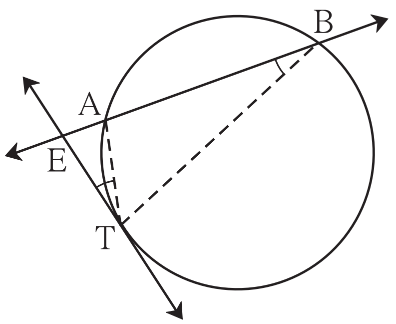
∴ Δ ADE ~ ☐ .... (☐)

$\therefore \dfrac{(AE)}{\square} = \dfrac{\square}{\square}$ .... (సరూప త్రిభుజాల సదృశభుజాలు)

∴ ☐ = CE × ED

స్పర్శరేఖ-ఖండనరేఖ, రేఖాఖండ సిద్ధాంతము (Tangent secant segments theorem)

వృత్త బాహ్య బిందువు E నుండి గీసిన ఖండన రేఖ వృత్తమును A, B బిందువులలో ఖండించిన, ఆ బిందువు నుండి పోయే స్పర్శరేఖ వృత్తమును T బిందువు వద్ద స్పృశించిన $EA \times EB = ET^2$ అవుతుంది.



పటం 3.69

సిద్ధాంతము యొక్క పై వాక్యములను బట్టి దత్తాంశము సారాంశములను నిర్ణయించుము.

నిర్మాణం : రే.ఖం. TA, రే.ఖం. TB లను గీసితిమి.

ఉపపత్తి : Δ EAT, Δ ETB లలో,

$\angle AET \cong \angle TEB$ .... (ఉమ్మడి కోణములు)

$\angle ETA \cong \angle EBT$.. (స్పర్శరేఖ ఖండన రేఖ సిద్ధాంతం)

$\therefore \Delta EAT \sim \Delta ETB$ ..... (కో.కో. సరూపత)

$\therefore \frac{ET}{EB} = \frac{EA}{ET}$ .... (సరూప త్రిభుజాల సదృశ భుజాలు)

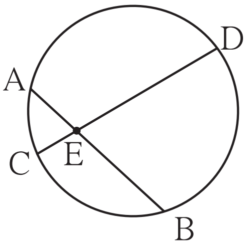
$\therefore EA \times EB = ET^2$

ఇవి గుర్తుంచుకుందాం.

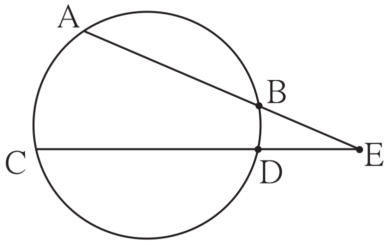
(1) పటం 3.70 ప్రకారం

$AE \times EB = CE \times ED$

ఈ ధర్మమును జ్యాల అంతరఖండన సిద్ధాంతము అంటారు.



పటం 3.70



పటం 3.71

(2) పటం 3.71 ప్రకారం

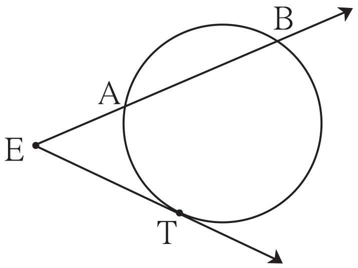
$AE \times EB = CE \times ED$

ఈ దర్మమును జ్యాల బాహ్య ఖండన సిద్ధాంతం అంటారు.

(3) పటం 3.72 ప్రకారం

$EA \times EB = ET^2$

ఈ దర్మమును స్పర్శరేఖ-ఖండనరేఖ సిద్ధాంతం అంటారు.



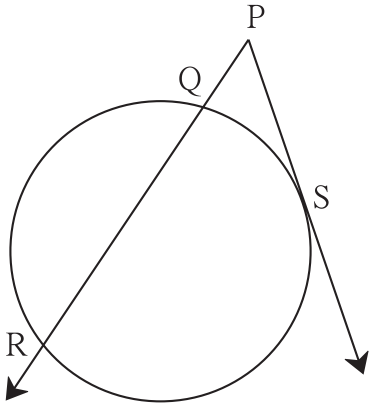
పటం 3.72

సాధించిన ఉదాహరణలు

ఉదా. (1) పటం 3.73 లో, రే.ఖం. PS స్పర్శరేఖాఖండము. రేఖ PR వృత్తఖండన రేఖ

PQ = 3.6,

QR = 6.4 అయిన PS ను కనుగొనండి.



పటం 3.73

సాధన : $PS^2 = PQ \times PR$ .... (స్పర్శరేఖ-ఖండనరేఖ రేఖాఖండ సిద్ధాంతము)

$= PQ \times (PQ + QR)$

$= 3.6 \times [3.6 + 6.4]$

$= 3.6 \times 10$

$= 36$

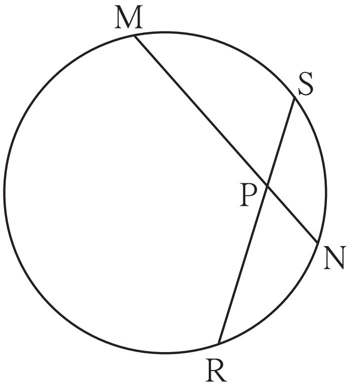
$\therefore PS = 6$

ఉదా. (2)

పటం 3.74 లో, జ్యా MN, జ్యా RS లు పరస్పరం P బిందువు వద్ద ఖండించుకుంటాయి.

PR = 6, PS = 4, MN = 11

అయిన PN కనుగొనండి.



పటం 3.74

సాధన : జ్యాల అంతర ఖండన సిద్ధాంతము నుండి,

$PN \times PM = PR \times PS$... (I)

PN = x అనుకొనిన $\therefore PM = 11 - x$

ఈ విలువను (I) లో ప్రతిక్షేపించగా

$x\,(11 - x) = 6 \times 4$

$\therefore\ 11x - x^2 - 24 = 0$

$\therefore\ x^2 - 11x + 24 = 0$

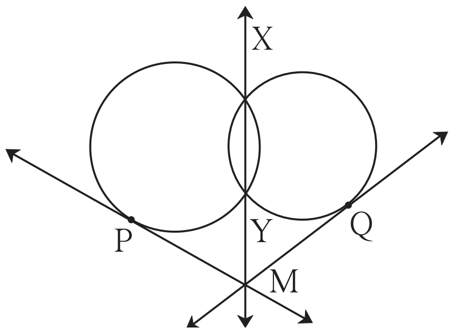
$\therefore\ (x - 3)\,(x - 8) = 0$

$\therefore\ x - 3 = 0$ లేదా $x - 8 = 0$

$\therefore\ x = 3$ లేదా $x = 8$

$\therefore$ PN = 3 లేదా PN = 8

ఉదా.(3) పటం 3.75 లో, రెండు వృత్తములు పరస్పరం X, Y బిందువులలో ఖండించుకొంటాయి. రేఖ XY పై గల M బిందువుద్వారా గీసిన స్పర్శరేఖలు ఆ వృత్తములను P, Q బిందువులలో స్పృశించుచున్నాయి. అయిన రే.ఖం. PM ≅ రే.ఖం. QM అని నిరూపించండి.



పటం 3.75

ఉపపత్తి : ఖాళీలను పూరించి సాధనను రాయండి.

రేఖ MX అనేది రెండు వృత్తముల ఉమ్మడి ....

$\therefore PM^2 = MY \times MX$ ..... (I)

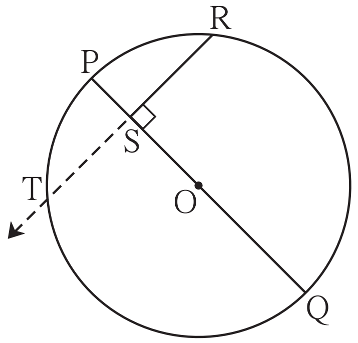
అదేవిధంగా ..... = ... × ..... , (స్పర్శరేఖ-ఖండనరేఖ రేఖాఖండ సిద్ధాంతం) ... (II)

∴ (I), (II) ల నుండి ...... = QM^2

∴ PM = QM

రే.ఖం. PM ≅ రే.ఖం. QM

ఉదా. (4)



పటం 3.76

పటం 3.76 లో, రే.ఖం. PQ అనేది O కేంద్రంగాగల వృత్త వ్యాసము. R బిందువు వృత్తముపై ఏదేని ఒక బిందువు. రే.ఖం. RS ⊥ రే.ఖం. PQ.

అయిన SR అనేది

PS, SQ ల గుణ మధ్యమము అని నిరూపించండి.

[అనగా $SR^2 = PS \times SQ$]

సాధన : కింద ఇచ్చిన సోపానాలతో నిరూపణ రాయండి.

(1) కిరణం RS ను గీయండి. అది వృత్తమును ఏ బిందువు వద్ద ఖండిస్తుందో ఆ బిందువును T గా పేరు పెట్టండి.

(2) RS = TS అని చూపండి.

(3)జ్యాల అంతర ఖండన సిద్ధాంతమును ఉపయోగించి సమానత్వంను రాయండి.

(4) RS = TS ను ఉపయోగించి సారాంశంను నిరూపించండి.

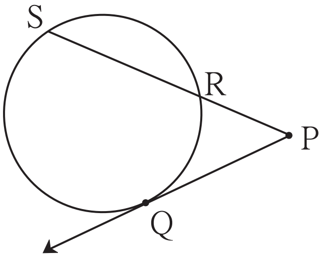
ఆలోచించుదాం.

(1) పై పటం 3.76 లో రే.ఖం. PR, రే.ఖం. RQ లను గీసిన Δ PRQ ఏ రకమైన త్రిభుజం అవుతుంది?

(2) పై ఉదా. (4) లో నిరూపించిన ధర్మము ఇంతకు ముందు వేరే పద్ధతిలో నిరూపించడం జరిగిందా?

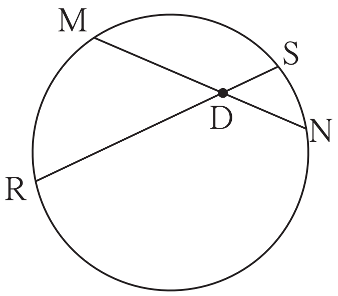
అభ్యాసమాలిక 3.5

1. పటం 3.77 లో, Q అనేది స్పర్శబిందువు
PQ = 12, PR = 8,
అయిన PS = ఎంత? RS = ఎంత?



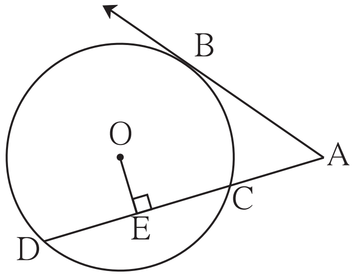
పటం 3.77

2. పటం 3.78 లో, జ్యాలు MN, RS లు పరస్పరం D బిందువు వద్ద ఖండించుకుంటాయి.
(1) RD = 15, DS = 4,
MD = 8 అయిన DN = ఎంత?
(2) RS = 18, MD = 9,
DN = 8 అయిన DS = ఎంత?



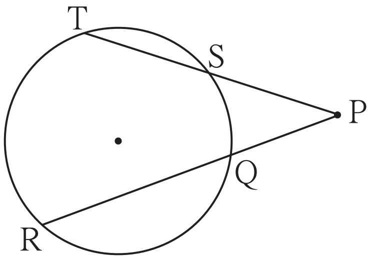
పటం 3.78

3. పటం 3.79 లో, O కేంద్రంగాగల వృత్త స్పర్శబిందువు B.
రే.ఖం. OE ⊥ రేఖ AD, AB = 12,
AC = 8, అయిన (1) AD (2) DC
(3) DE లను కనుగొనండి.



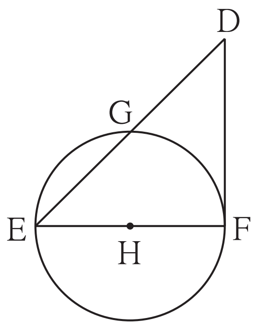
పటం 3.79

4. పటం 3.80 లో, PQ = 6,
QR = 10, PS = 8
అయిన TS = ఎంత ?



పటం 3.80

5. పటం 3.81 లో, రే.ఖం. EF ఒక వ్యాసము మరియు DF స్పర్శరేఖాఖండం. వృత్త వ్యాసార్థము r అయిన
$DE \times GE = 4r^2$ అని చూపండి.



పటం 3.81

1. కింది ప్రతి ప్రశ్నకు **(A), (B), (C), (D)** అనే నాలుగు ఐచ్ఛికములు ఇవ్వబడినవి. వాటినుండి సరియైన సమాధానమును ఎంచుకోండి.

(1) 5.5 సెం.మీ., 3.3 సెం.మీ. వ్యాసార్థాలు గాగల రెండు వృత్తములు పరస్పరం స్పృశించుకొంటాయి. వాటి కేంద్రముల మధ్యదూరం ఎన్ని సెం.మీ. ఉంటుంది?

(A) 4.4 (B) 8.8 (C) 2.2 (D) 8.8 లేదా 2.2

(2) పరస్పరం ఖండించుకునే రెండు వృత్తములలోని ప్రతి వృత్తము రెండవ వృత్త కేంద్రం గుండా పోతాయి. వాటి కేంద్రముల మధ్యదూరం 12 సెం.మీ. అయిన ప్రతి వృత్తము యొక్క వ్యాసార్థము ఎన్ని సెం.మీ. ఉంటుంది?

(A) 6 (B) 12 (C) 24 (D) చెప్పలేము.

(3) ఒక వృత్తము ఒక సమాంతర చతుర్భుజ అన్ని భుజాలను స్పృశిస్తుంది. అయిన ఆ సమాంతర చతుర్భుజము .... కావలెను. ఈ వాక్యములోని ఖాళీలో సరియైన పదమును రాయండి.

(A) దీర్ఘచతురస్రము (B) రాంబస్ (C) చతురస్రము (D) ట్రెపీజియం

(4) ఒక వృత్త కేంద్రము నుండి 12.5 సెం.మీ. దూరంలో గల ఒక బిందువు నుండి ఆ వృత్తమునకు గీసిన స్పర్శరేఖా రేఖాఖండ పొడవు 12 సెం.మీ. అయిన ఆ వృత్త వ్యాసము ఎన్ని సెం.మీ. అవుతుంది?

(A) 25 (B) 24 (C) 7 (D) 14

(5) ఒకదానికొకటి బాహ్యంగా స్పృశించే రెండు వృత్తములకు ఎక్కువలో ఎక్కువ ఎన్ని ఉమ్మడి స్పర్శరేఖలను గీయవచ్చు?

(A) ఒకటి (B) రెండు (C) మూడు (D) నాలుగు

(6) O కేంద్రంగాగల వృత్త చాపము ACB లో $\angle ACB$ అంతర్లిఖితము చేయబడినది. $m\angle ACB = 65^\circ$ అయిన m(చాపము ACB) = ఎంత?

(A) 65° (B) 130° (C) 295° (D) 230°

(7) ఒక వృత్త జ్యాలు AB, CD పరస్పరం వృత్త అంతర్భాగంలోని E బిందువు వద్ద ఖండిచుకుంటాయి. (AE) = 5.6, (EB) = 10, (CE) = 8 అయిన (ED) = ఎంత?

(A) 7 (B) 8 (C) 11.2 (D) 9

(8) చక్రీయ $\square$ ABCD లో, రెండు రెట్లు కోణము $\angle$ A కొలతకు, మూడురెట్లు కోణము $\angle C$ కొలతకు సమానము అయిన $\angle C$ కొలత ఎంత?

(A) 36 (B) 72 (C) 90 (D) 108

(9)★ A, B, C బిందువులు ఒకే వృత్తంపై గల బిందువులు m(చాపము AB) = m(చాపము BC) = 120°, రెండు చాపములకు B కాకుండా ఒకటికూడా ఉమ్మడి బిందువు లేదు. అయిన Δ ABC ఏ రకమైన త్రిభుజం?

(A) సమబాహు త్రిభుజం (B) విషమబాహు త్రిభుజం

(C) లంబకోణ త్రిభుజం (D) సమద్విబాహు త్రిభుజం

(10) రే.ఖం. XZ వ్యాసము గల వృత్త అంతర్భాగములో Y ఒక బిందువు. అయిన కింది వాక్యాలలో ఎన్ని వాక్యాలు సత్యములు?

(i) $\angle XYZ$ అల్పకోణము అయ్యే అవకాశం లేదు.

(ii) $\angle XYZ$ లంబకోణం అయ్యే అవకాశం లేదు.

(iii) $\angle XYZ$ అధికకోణము అవుతుంది.

(iv) $\angle XYZ$ కొలతతో ఖచ్చిత వాక్యము రాయలేము.

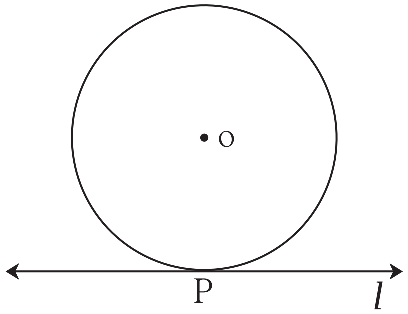
(A) ఒకటి మాత్రమే (B) రెండు మాత్రమే (C) మూడు మాత్రమే (D) పైవన్నీ

2. O కేంద్రంగాగల వృత్తమును రేఖ l బిందువు P వద్ద స్పృశిస్తుంది. వ్యాసార్ధం 9 సెం.మీ. అయిన క్రింది ప్రశ్నలకు సమాధానాలు రాయండి.

(1) $d(O, P)$ = ఎంత? ఎందుకు?

(2) $d(O, Q) = 8$ సెం.మీ. అయిన Q బిందు స్థానము ఎచ్చట ఉంటుంది?

(3) $d(O,R) = 15$ సెం.మీ. అయిన బిందువు R ఎన్ని స్థానములలో l రేఖ పై ఉంటుంది? అవి R బిందువు నుండి ఎంత దూరంలో ఉంటాయి?



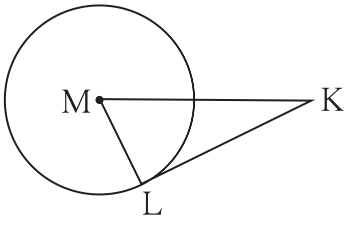
పటం 3.82

3. పక్క పటంలో బిందువు M వృత్త కేంద్రం, రే.ఖం KL స్పర్శరేఖా ఖండము.

$MK = 12, KL = 6\sqrt{3}$ అయిన

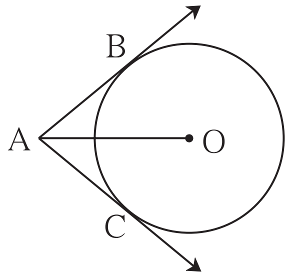
(1) వృత్త వ్యాసార్ధంను కనుగొనండి.

(2) $\angle K, \angle M$ ల కొలతలను నిర్ణయించండి.

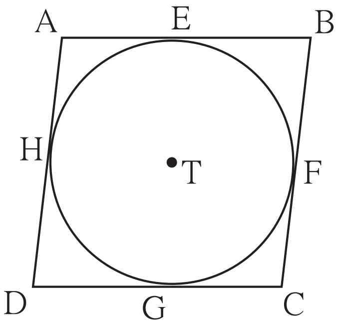


పటం 3.83

4. పటం 3.84 లో, వృత్తకేంద్రం O రే.ఖం. AB, రే.ఖం. AC లు స్పర్శరేఖాఖండములు వృత్త వ్యాసార్ధం r అయి $l(AB) = r$, అయిన $\square$ABOC ఒక చతురస్రం అవుతుందని చూపండి.



పటం 3.84



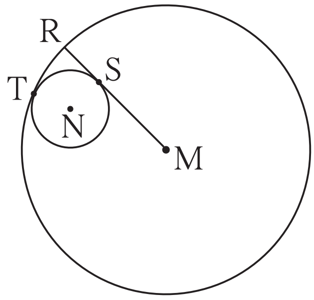
పటం 3.85

5. పటం 3.85 లో, సమాంతర చతుర్భుజము □ ABCD అనేది T కేంద్రంగాగల వృత్తం చుట్టు పరిలిఖితం చేయబడింది. (అనగా ఆ చతుర్భుజ భుజములు వృత్తమును స్పృశిస్తాయి) E, F, G, H లు స్పర్శబిందువులు. AE = 4.5, EB = 5.5, అయిన AD ను కనుగొనండి.

6. పటం 3.86 లో, N కేంద్రం గాగల వృత్తము, M కేంద్రం గాగల వృత్తమును T బిందువు వద్ద స్పృశిస్తుంది. పెద్ద వృత్త వ్యాసార్థం చిన్న వృత్తమును S బిందువు వద్ద స్పృశిస్తుంది. పెద్ద మరియు చిన్న వృత్తముల వ్యాసార్థాలు వరసగా 9 సెం.మీ., 2.5 సెం.మీ. అయిన కింది ప్రశ్నలకు సమాధానాలను రాసి వాటి నుండి MS : SR నిష్పత్తిని కనుగొనండి.

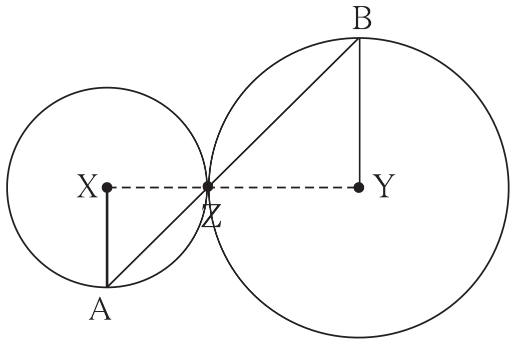
(1) MT = ఎంత? (2) MN = ఎంత?

(3) ∠NSM = ఎంత?



పటం 3.86

7. పక్క పటంలో కేంద్రం X, Y లు గాగల వృత్తములు పరస్పరం బిందువు Z వద్ద స్పృశించుకుంటాయి. Z బిందువు గుండా పోయే వృత్త ఖండన రేఖ ఈ వృత్తములను వరసగా A, B బిందువులలో ఖండిస్తుంది. అయిన వ్యాసార్థం XA || వ్యాసార్థం YB. అని చూపండి. కింద ఇచ్చిన ఉపపత్తిలో ఖాళీలను పూరించి దానిని పూర్తి చేయండి.



పటం 3.87

నిర్మాణం : రే.ఖం. XZ మరియు .... గీసితిమి.

ఉపపత్తి : స్పృశించుకునే వృత్తముల సిద్ధాంతము ప్రకారం X, Z, Y బిందువులు ....

∴ ∠ XZA ≅ .... శీర్షాభిముక కోణములు

∠ XZA = ∠ BZY = *a* అనుకొనిన ..... (I)

ఇపుడు రే.ఖం. XA ≅ రే.ఖం. XZ .... (..........)

∴ ∠ XAZ = ... = *a* .... (సమద్విబాహు త్రిభుజ సిద్ధాంతం) (II)

అదే విధంగా రే.ఖం. YB ≅ .... (..........)

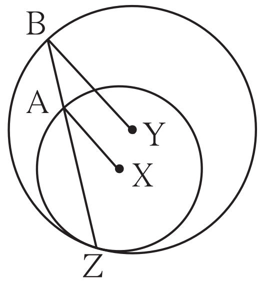
∴ ∠ BZY = ... = *a* .... (..........) (III)

∴ (I), (II) మరియు (III) ల నుండి,

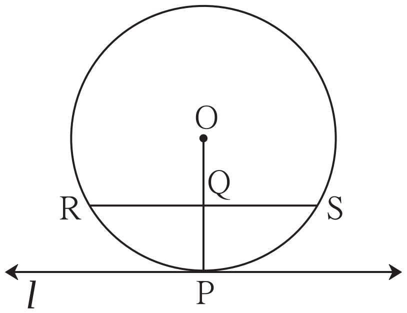
∠ XAZ = ...

∴ వ్యాసార్థము XA || వ్యాసార్థము YB .... (..........)

8. పటం 3.88 లో కేంద్రములు X, Y లు గాగల వృత్తములు అంతరంగా Z బిందువు వద్ద స్పృశించుకుంటున్నాయి. రే.ఖం. BZ అనే పెద్ద వృత్త జ్యా చిన్న వృత్తమును A బిందువు వద్ద ఖండిస్తుంది.
అయిన రే.ఖం. AX || రే.ఖం. BY అనిచూపండి.



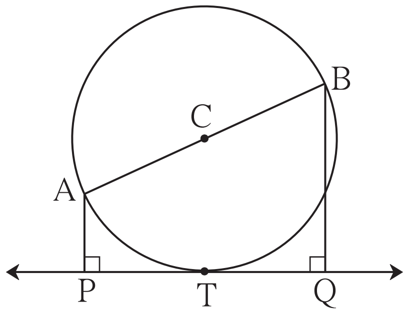
పటం 3.88



పటం 3.89

9. పక్క పటంలో రేఖ l 'O' కేంద్రంగాగల వృత్తమును P బిందువు వద్ద స్పృశిస్తుంది. Q బిందువు OP వ్యాసార్థ మధ్యబిందువు Q బిందువు గుండా పోయే జ్యా RS || రేఖ l.
RS 12 సెం.మీ. అయిన వృత్త వ్యాసార్థమును కనుగొనండి.

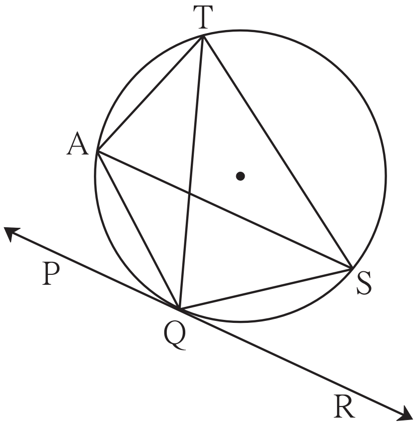
10★. పటం 3.90 లో, రేఖాఖండం AB, C కేంద్రగాగల వృత్తము యొక్క వ్యాసము. వృత్త స్పర్శ రేఖ PQ వృత్తమును T బిందువు వద్ద స్పృశిస్తుంది.
రే.ఖం. AP ⊥ రేఖ PQ, రే.ఖం. BQ ⊥ రేఖ PQ. అయిన రే.ఖం. CP ≅ రే.ఖం. CQ అని చూపండి.



పటం 3.90

11★. A,B,C, లు కేంద్రాలుగాగల మూడు వృత్తములను 3 సెం.మీ. వ్యాసార్థంలో ప్రతి వృత్తము మిగిలిన రెండు వృత్తమును స్పృశించే విధంగా గీయండి.

12★. వృత్తము యొక్క ఏవేని మూడు బిందువులు సరేఖీయములు కావు అని నిరూపించండి.



పటం 3.91

13. పటం 3.91 లో రేఖ PR వృత్తమును Q బిందువు వద్ద స్పృశిస్తుంది. ఈ పటం ఆధారంగా కింది ప్రశ్నలకు సమాధానాలను రాయండి.

(1) $\angle TAQ$, $\angle TSQ$ ల కొలతల మొత్తం ఎంత?

(2) $\angle AQP$ కి సర్వసమానం అయ్యే కోణాలేవి?

(3) $\angle QTS$ కి సర్వసమానం అయ్యే కోణాలేవి?

(4) $\angle TAS = 65^\circ$, అయిన $\angle TQS$, చాపము TS కొలతలను కనుగొనండి.

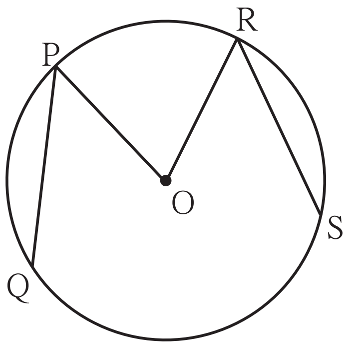
(5) $\angle AQP = 42^\circ$, $\angle SQR = 58^\circ$, అయిన $\angle ATS$ కొలతను కనుగొనండి.

14. పక్క పటంలో O కేంద్రంగాగల వృత్తములో రే.ఖం. PQ, రే.ఖం. RS లు సర్వసమాన జ్యాలు. $m\angle POR = 70^\circ$, m(చాపము RS) = 80°, అయిన –

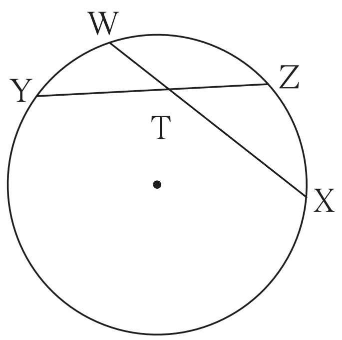
(1) m(చాపము PR) ఎంత?

(2) m(చాపము QS) ఎంత?

(3) m(చాపము QSR) ఎంత?



పటం 3.92



పటం 3.93

15. పటం 3.93 లో, m(చాపము WY) = 44°, m(చాపము ZX) = 68°, అయిన

(1) $\angle ZTX$ కొలతను నిర్ణయించండి.

(2) WT = 4.8, TX = 8.0, YT = 6.4 అయిన TZ = ఎంత?

(3) WX = 25, YT = 8, YZ = 26, అయిన WT = ఎంత?.

16. పటం 3.94 లో,

(1) m(చాపము CE) = 54°,

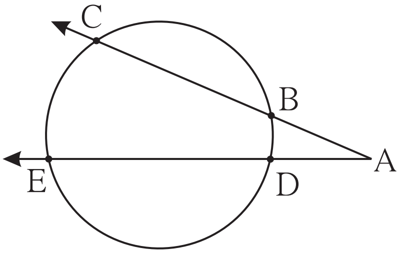
m(చాపము BD) = 23°, అయిన ∠CAE = ఎంత?

(2) AB = 4.2, BC = 5.4,

AE = 12.0 అయిన AD = ఎంత?

(3) AB = 3.6, AC = 9.0,

AD = 5.4 అయిన AE = ఎంత?



పటం 3.94

17. పక్క పటంలో జ్యా EF || జ్యా GH. అయిన జ్యా EG ≅ జ్యా FH అని నిరూపించండి.

కిందనివ్వబడిన నిరూపణలో ఖాళీలను పూరించి ఉపపత్తిని రాయండి.

ఉపపత్తి : రే.ఖం. GF గీసితిమి.

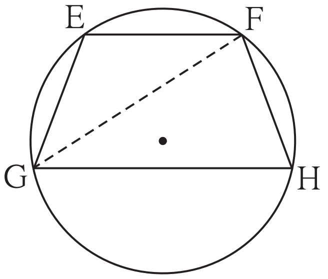
∠ EFG = ∠ FGH .... [   ] (I)

∠ EFG = [   ] (అంతర్లిఖిత కోణ సిద్ధాంతం) (II)

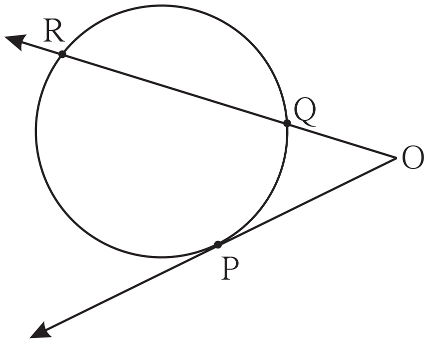
∠ FGH = [   ] (అంతర్లిఖిత కోణ సిద్ధాంతం) (III)

∴ m (చాపము EG) = [   ] [(I), (II), (III) లనుండి]

జ్యా EG ≅ జ్యా FH ....([   ])



పటం 3.95



పటం 3.96

18. పక్క పటంలో P బిందువు స్పర్శబిందువు.

(1) m(చాపము PR) = 140,

∠ POR = 36° అయిన

m(చాపము PQ) = ఎంత?

(2) OP = 7.2, OQ = 3.2,

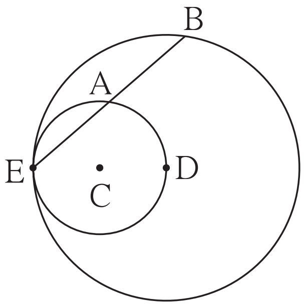
OR = ఎంత? QR = ఎంత?

(3) OP = 7.2, OR = 16.2, అయిన

QR = ఎంత?

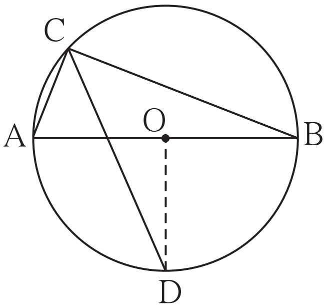
19. పక్క పటంలో C కేంద్రంగాగల వృత్తము D కేంద్రంగాగల వృత్తమును బిందువు E వద్ద అంతరంగా స్పృశిస్తుంది. D బిందువు అంతరంలోని వృత్తముపై గలదు. బాహ్యవృత్తం యొక్క జ్యా EB అంతర వృత్తమును బిందువు A వద్ద ఖండిస్తుంది.

అయిన రే.ఖం. EA ≅ రే.ఖం. AB అని నిరూపించండి.



పటం 3.97

20. పటం 3.98 లో O కేంద్రంగాగల వృత్తము యొక్క వ్యాసము రే.ఖం. AB . అంతర్లిఖిత కోణము ACB యొక్క సమద్విఖండన రేఖ వృత్తమును బిందువు D వద్ద ఖండిస్తుంది. అయిన రే.ఖం. AD ≅ రే.ఖం. BD అని చూపండి.
కింద ఇవ్వబడిన ఉపపత్తిలోని ఖాళీలను పూరించి దానిని పూర్తి చేయండి.



పటం 3.98

ఉపపత్తి : రే.ఖం. OD గీసితిమి

$\angle$ ACB = ☐ (అర్ధవృత్త అంతర్లిఖిత కోణము)

$\angle$ DCB = ☐ (రే.ఖం. CD, $\angle$ C యొక్క సమద్విఖండనం.)

m(చాపము DB) = ☐ (అంతర్లిఖిత కోణ సిద్ధాంతం)

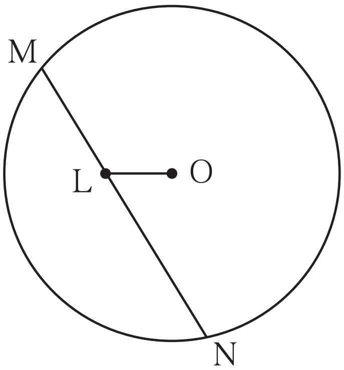
$\angle$ DOB = ☐ (చాపము కొలతల నియమము) (I)

రే.ఖం. OA ≅ రే.ఖం. OB .... ☐ (II)

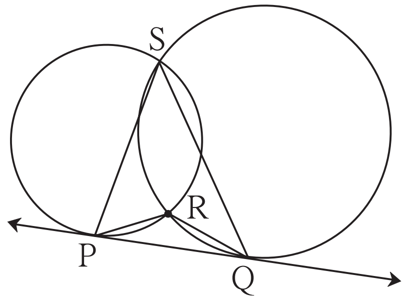
$\therefore$ రేఖ OD అనేది రే.ఖం. AB యొక్క ☐ రేఖ (I), (II) ల నుండి

$\therefore$ రే.ఖం. AD ≅ రే.ఖం. BD

21. పక్క పటంలో O కేంద్రంగాగల వృత్తము యొక్క జ్యా రే.ఖం. MN
MN = 25, ML = 9, d(O,L) = 5 అయ్యేట్లు జ్యా MN పై L బిందువు ఉన్నట్లయితే వృత్త వ్యాసార్థం ఎంత అవుతుంది?

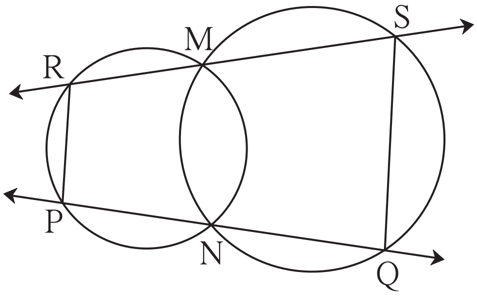


పటం 3.99



పటం 3.100

22★. పటం 3.100 లో రెండు వృత్తములు పరస్పరం S, R బిందువులలో ఖండించుకుంటాయి. వాటి యొక్క ఉమ్మడి స్పర్శరేఖ PQ వాటిని P, Q లలో స్పృశించినట్లయితే
$\angle$ PRQ + $\angle$ PSQ = 180° అని నిరూపించండి.

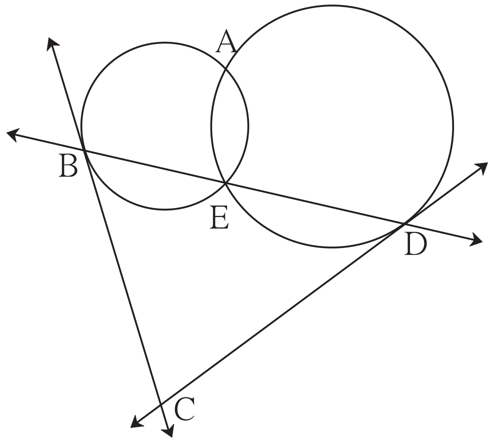


పటం 3.101

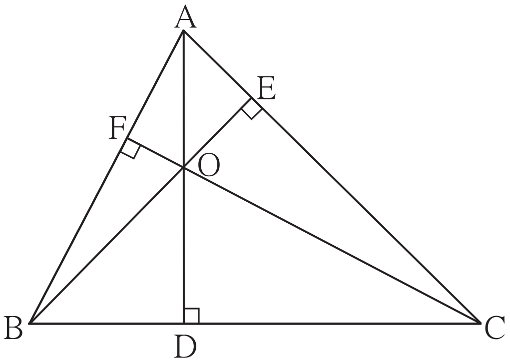
23★. పటం 3.101 లో, రెండు వృత్తములు ఒక దానికొకటి M, N లో ఖండించుకుంటాయి. M, N బిందువుల గుండా గీసిన వృత్త ఖండన రేఖలు బిందువులు R, S లలో, మరియు P, Q లలో ఖండిస్తాయి. అయిన రే.ఖం. PR|| రే.ఖం. QS అని నిరూపించండి.

24★. రెండు వృత్తములు పరస్పరము A మరియు E బిందువులలో ఖండించుకుంటాయి. బిందువు E గుండా గీయబడిన వాటి ఉమ్మడి ఖండన రేఖ వృత్తములను B మరియు D బిందువులో ఖండిస్తుంది B మరియు D బిందువుల గుండా గీయబడిన స్పర్శరేఖలు ఒకదానినొకటి C బిందువువద్ద ఖండించుకుంటాయి.

నిరూపించండి: □ ABCD ఒక చక్రీయ చతుర్భుజము.



పటం 3.102



పటం 3.103

25★. Δ ABC లో, రే.ఖం. AD ⊥ భుజము BC, రే.ఖం. BE ⊥ భుజము AC, రే.ఖం. CF ⊥ భుజము AB. బిందువు O లంబరేఖల మిళిత బిందువు. అయినచో బిందువు O, Δ DEF యొక్క అంతరంలోఉంటుంది. అని నిరూపించండి.

ICT Tools or Links

జియోజిబ్రా సహాయముతో వివిధ వృత్తములను గీయండి.
వాటిలో జ్యా మరియు స్పర్శరేఖలను గీసి వాటి ధర్మములను పరీక్షించండి.

R58006

4 రేఖాగణిత నిర్మాణములు

పదండి నేర్చుకుందాం

- సరూప త్రిభుజాలు నిర్మాణం

  ✻ రెండు సరూప త్రిభుజాలలో ఒక త్రిభుజము యొక్క భుజము రెండవ త్రిభుజము యొక్క సదృశ భుజాల నిష్పత్తి ఇచ్చినచో రెండవ త్రిభుజమును నిర్మించుట.

  (i) ఉమ్మడి శీర్షబిందువులు ఒకటి కూడా లేనపుడు.

  (ii) ఒక శీర్షబిందువు ఉమ్మడిగా ఉన్నపుడు.

- వృత్తము యొక్క స్పర్శరేఖను గీయుట.

  ✻ వృత్తమునకు వృత్తముపై గల బిందువు వద్ద స్పర్శరేఖను గీయుట.

  (i) వృత్త కేంద్రమును ఉపయోగించి.

  (ii) వృత్త కేంద్రమును ఉపయోగించకుండా.

  ✻ వృత్తమునకు బాహ్య బిందువునుండి స్పర్శరేఖలను గీయుట.

కొంచెం గుర్తు తెచ్చుకుందాం

కింది తరగతులలో మనము కింది నిర్మాణాల గురించి నేర్చుకున్నాము. వానిని పునర్విమర్శించుకుందాం.

- ఇచ్చిన రేఖకు దాని బాహ్యబిందువునుండి సమాంతర రేఖను గీయుట.
- ఇచ్చిన రేఖాఖండమునకు లంబ సమద్విఖండన రేఖను గీయుట.
- త్రిభుజము యొక్క భుజములు మరియు కోణములలో సరిపడు ఘటకములను ఇచ్చినచో త్రిభుజమును నిర్మించుట.
- ఇచ్చిన రేఖాఖండమును ఇచ్చిన సంఖ్యననుసరించి సమాన భాగములుగా చేయుట.
- ఇచ్చిన రేఖాఖండమును దత్త నిష్పత్తిలో విభజించుట.
- ఇచ్చిన కోణమునకు సర్వసమాన కోణమును గీయుట.

తొమ్మిదవ తరగతిలో మీరు పాఠశాల పరిసరాల మానచిత్రమును తయారు చేయు కృత్యము చేసారు. ఏదేని భవనము నిర్మించుటకు ముందు ఆ భవనము యొక్క నమూనా చిత్రమును తయారు చేసుకుంటాం. పాఠశాల పరిసరాలు మరియు దాని మానచిత్రము, భవనము మరియు వాటి నమూనచిత్రములు పరస్పరము సరూపములుగానే ఉంటాయి. భూగోళము, వాస్తుశాస్త్రము, యంత్రశాస్త్రము మొదలగు క్షేత్రాలలో సరూప పటములను గీయుట అవసరము ఉంటుంది. త్రిభుజము అనేది అన్నింటికంటే సాధారణ సంవృతపటం కావున ఇచ్చిన త్రిభుజము యొక్క సరూప త్రిభుజమును ఏవిధముగా గీయవచ్చునో, దానిని చూదాం.

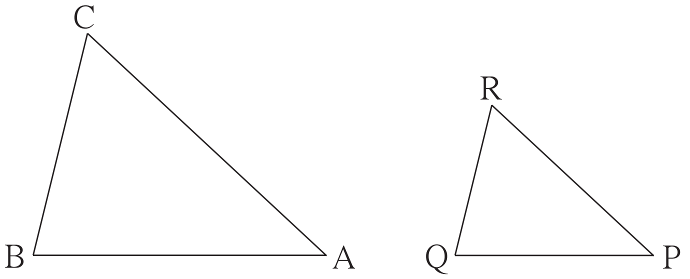
తెలుసుకుందాం.

సరూప త్రిభుజాల నిర్మాణం

ఒక త్రిభుజము యొక్క భుజాలు ఇవ్వబడుతాయి, దానికి సరూపంగా ఉండే మరియు నిష్పత్తుల షరతులను పాటించే త్రిభుజమును నిర్మించుట.

రెండు సరూప త్రిభుజముల సదృశ భుజాలు ఒకే అనుపాతములో ఉంటాయి మరియు వాటి సదృశ కోణాలు సర్వసమానముగా ఉంటాయి. దీనిని ఉపయోగించి ఇచ్చిన త్రిభుజానికి సరూపముగల త్రిభుజమును గీయవచ్చును.

ఉదా. (1) Δ ABC ~ Δ PQR, Δ ABC లో AB = 5.4 సెం.మీ., BC = 4.2 సెం.మీ., AC = 6.0 సెం.మీ.. AB: PQ = 3:2 అయిన Δ ABC మరియు Δ PQR లను గీయండి.



పటం 4.1
చిత్తు పటం

మొదట ఇచ్చిన కొలతలతో Δ ABC ని గీయుము.

Δ ABC మరియు Δ PQR లు సరూపాలు

$\therefore$ వాటి సదృశ భుజాలు ఒకే అనుపాతములో ఉంటాయి.

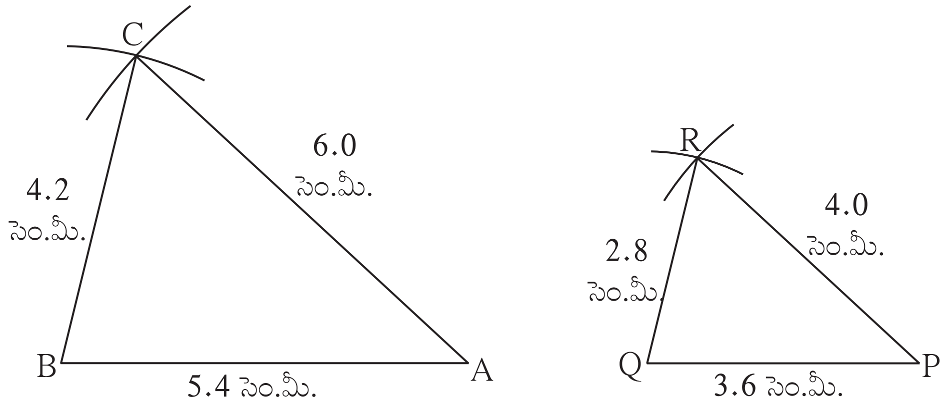
$$\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{AC}{PR} = \frac{3}{2} \quad .... \text{(I)}$$

AB, BC, AC ఈ భుజాల పొడవులు తెలుసుకావున పై సమీకరణములతో PQ, QR, PR ఈ భుజాల కొలతలను కనుగొనవచ్చును.

సమీకరణము [I] నుండి

$$\frac{5.4}{PQ} = \frac{4.2}{QR} = \frac{6.0}{PR} = \frac{3}{2}$$

$\therefore$ PQ = 3.6 సెం.మీ., QR = 2.8 సెం.మీ. మరియు PR = 4.0 సెం.మీ.



పటం 4.2

Δ PQR యొక్క అన్ని భుజాల కొలతలు తెలిసిన వెంటనే మనము ఆ త్రిభుజము నిర్మాణము చేద్దాం.

అధిక వివరాలకై

కొనిసార్లు, ఇచ్చిన త్రిభుజానికి సరూపముగా ఉండే ఏ త్రిభుజమును నిర్మించవలెనో, దాని భుజములు స్కేలుతో కొలిచి గీసే విధముగా ఉండవు. ఇలాంటి సమయంలో ఇచ్చిన రేఖాఖండము యొక్క 'దత్తా సంఖ్యకు సమాన భాగములుగా చేయుట' ఈ పద్ధతిని ఉపయోగించి త్రిభుజము యొక్క భుజాలను గీయవచ్చును.

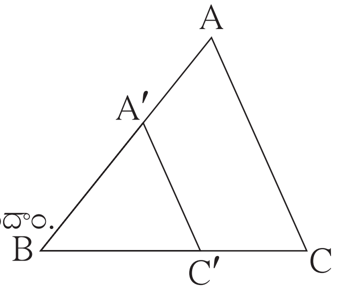
ఉదాహరణకు... భుజం AB యొక్క పొడవు $\frac{11.6}{3}$ సెం.మీ. అయినచో 11.6 సెం.మీ. కొలతగల రేఖాఖండమును 3 సమాన భాగాలుగా చేసి AB రేఖాఖండమును గీయవచ్చును.

ఉదా. (1) లోని నిర్మాణములో గీయవలసిన త్రిభుజములో ఉమ్మడి శీర్షబిందువు లేదు. ఒక ఉమ్మడి శీర్షబిందువు ఉన్నచో త్రిభుజ నిర్మాణము కింది ఉదాహరణలో చూపిన విధముగా చేయుట సులువు అవుతుంది.

ఉదా.(2) Δ ABC అను ఏదేని త్రిభుజమును గీయండి.

AB : A′B = 5:3 అయ్యేట్లు Δ ABC కి

Δ A′BC′ సరూపముగా గీయండి.



పటం 4.3

చిత్తు పటం

వివరణ : ఒకే రేఖపై B, A, A′ లను అదేవిధంగా B, C, C′ లను తీసుకుందాం.

$\Delta ABC \sim \Delta A'BC'$ $\therefore$ $\angle ABC = \angle A'BC'$

$$\frac{AB}{A'B} = \frac{BC}{BC'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{5}{3}$$

$\therefore$ Δ ABC యొక్క భుజము Δ A′BC′ లు సదృశ భుజాలకంటే పెద్దగా ఉంటాయి.

$\therefore$ రే.ఖం. BCను 5 సమాన భాగాలు చేసినచో వాటి నుండి మూడు భాగాలంత రే.ఖం. BC′ యొక్క పొడవు ఉంటుంది.

Δ ABC ని గీసి రే.ఖం. BC పై బిందువు B నుండి మూడు భాగాల దూరములో బిందువు C′ ఉండవలెను. బిందువు C′ నుండి రే.ఖం. AC కి సమాంతరంగా గీసిన రేఖ, రే.ఖం. BA ని ఏ బిందువు వద్ద ఖండించునో, ఆ బిందువు A′ అవుతుంది.

$\frac{BA'}{BA} = \frac{BC'}{BC} = \frac{3}{5}$ అనగా, $\frac{BA}{BA'} = \frac{BC}{BC'} = \frac{5}{3}$ .... విలోమ ప్రక్రియ ప్రకారం.

నిర్మాణ క్రమము:

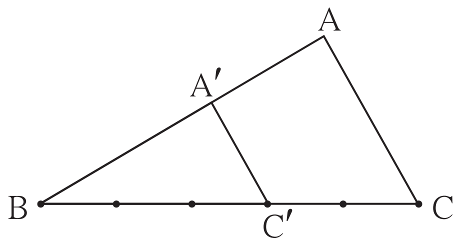
(1) Δ ABC అను ఏదేని త్రిభుజమును గీయండి.

(2) రే.ఖం. BC ని ఐదు సమాన భాగాలుగా చేయండి.

(3) B బిందువు నుండి మూడవ బిందువుకు C′ అను పేరు పెట్టండి. $\therefore BC' = \frac{3}{5} BC$

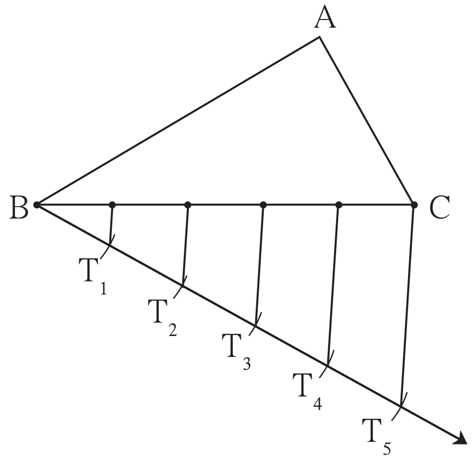
(4) ఇప్పుడు C′ నుండి రే.ఖం. CA కి సమాంతర రేఖను గీయండి. అది రే.ఖం. AB ని ఎక్కడ ఖండించునో ఆ బిందువును A′ అని పేరు పెట్టండి.

(5) Δ ABC కి సరూపముగా గల Δ A′BC′ అనేది కావలసిన త్రిభుజం అవుతుంది.



పటం 4.4

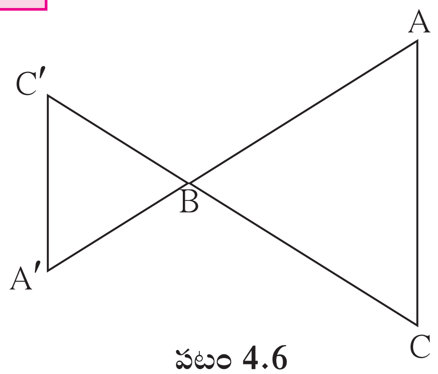
సూచన : BC ని ఐదు సమాన భాగాలుగా చేయుచున్నపుడు, రేఖ **BC** యొక్క ఏవైపున **A** గలదో దానికి ఎదుటి వైపున **B** నుండి ఒక కిరణమును గీసి భాగాలుగా చేయుట సులభమవుతుంది.
ఆ కిరణముపై $BT_1 = T_1T_2 = T_2T_3 = T_3T_4 = T_4T_5$ అను సమాన భాగాలను తీసుకోండి.
T_5C ని కలుపుము. మరియు T_1, T_2, T_3, T_4 ల నుండి T_5 C కి సమాంతర రేఖలను గీయండి.



పటం 4.5

ఆలోచిద్దాం.

సరూప త్రిభుజాలు గీయుటకు పక్క పటములో చూపిన విధముగా Δ A′BC′ ని గీయవచ్చును.
ఈ పటములో చూపిన విధముగానే Δ A′BC′ గీయవలసినచో నిర్మాణ క్రమములో ఏ విధముగా మార్చవలెను?



పటం 4.6

ఉదా.(3) AB : A′B = 5:7 అయ్యేట్లు Δ ABC కి సరూప త్రిభుజము Δ A′BC′ ను గీయండి.

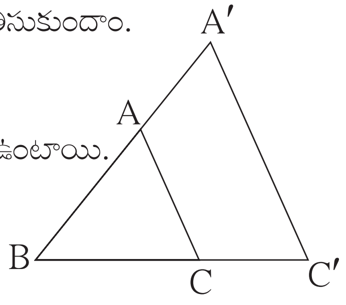
వివరణ : ఒకే రేఖపై B, A, A′ బిందువులు అదేవిధంగా B, C, C′ బిందువులను తీసుకుందాం.

Δ ABC ~ Δ A′BC′ మరియు AB : A′B = 5:7

$\therefore$ Δ ABC యొక్క భుజాలు Δ A′BC′ సదృశ భుజాలకంటే చిన్నవిగా ఉంటాయి.

అదేవిధంగా $\angle ABC \cong \angle A'BC'$

వీటిని దృష్టిలో ఉంచుకొని చిత్తు పటమును గీద్దాం.



పటం 4.7

చిత్తు పటం

ఇప్పుడు $\frac{BC}{BC'} = \frac{5}{7}$

$\therefore$ రే.ఖం. BC ని 5 సమాన భాగాలుగా చేసినచో దానిలోని ఒక భాగము యొక్క 7 రెట్లు BC′ యొక్క పొడవు ఉంటుంది.

$\therefore$ Δ ABC గీసి రే.ఖం. BC ని ఐదు సమాన భాగాలుగా చేద్దాం. బిందువు C′ అనేది కిరణం BC పై B నుండి ఏడుభాగాల దూరంలో ఉంటుంది.

ప్రాథమిక అనుపాత సిద్ధాంతము ప్రకారం, బిందువు C′ నుండి భుజము AC కి సమాంతర రేఖను గీసినచో అది కిరణము BA ను ఏ బిందువు వద్ద ఖండించునో, అది A′ బిందువు అవుతుంది. రే.ఖం. A′C′ గీసిన Δ A′BC′ అనే కావాల్సిన త్రిభుజము లభిస్తుంది.

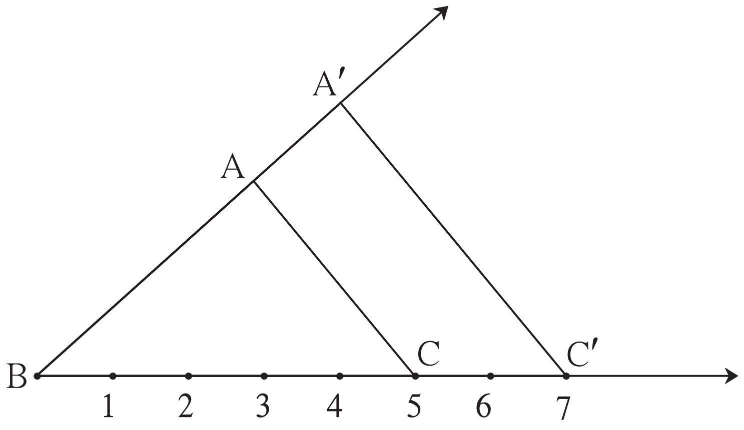
నిర్మాణ క్రమము:

(1) Δ ABC అను ఏదేని ఒక త్రిభుజమును గీద్దాం.

(2) రే.ఖం. BC ను 5 సమాన భాగాలుగా చేయండి. రే.ఖం. BC యొక్క ఒక భాగము యొక్క ఏడు రెట్లు అయ్యేట్లు కిరణము BC పై బిందువు C′ ని తీసుకుందాం.

(3) రే.ఖం. AC కి C′ నుండి సమాంతర రేఖను గీద్దాం. ఆ రేఖ కిరణము BA ని ఎక్కడ ఖండించునో ఆ బిందువును A′ అను పేరు పెట్టండి.

Δ A′BC′ అనేది Δ ABC కి సరూపముగా గల కావలసిన త్రిభుజము అవుతుంది.



పటం 4.8

అభ్యాసమాలిక 4.1

1. $\Delta ABC \sim \Delta LMN$, AB = 5.5 సెం.మీ., BC = 6 సెం.మీ., CA = 4.5 సెం.మీ. మరియు $\frac{BC}{MN} = \frac{5}{4}$ అయిన ΔABC ని మరియు ΔLMN లను గీయండి.

2. $\Delta PQR \sim \Delta LTR$, ΔPQR లో PQ = 4.2 సెం.మీ., QR = 5.4 సెం.మీ., PR = 4.8 సెం.మీ. మరియు $\frac{PQ}{LT} = \frac{3}{4}$ అయిన ΔPQR మరియు ΔLTR లను గీయండి.

3. $\Delta RST \sim \Delta XYZ$, ΔRST లో RS = 4.5 సెం.మీ., $\angle RST = 40°$, ST = 5.7 సెం.మీ. మరియు $\frac{RS}{XY} = \frac{3}{5}$ అయిన ΔRST మరియు ΔXYZ లను గీయండి.

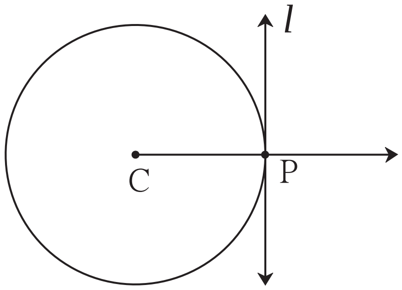
4. $\Delta AMT \sim \Delta AHE$, ΔAMT లో AM = 6.3 సెం.మీ., $\angle TAM = 50°$, AT = 5.6 సెం.మీ. మరియు $\frac{AM}{AH} = \frac{7}{5}$ అయిన ΔAHE గీయండి.

తెలుసుకుందాం.

ఇచ్చిన వృత్తమునకు దానిపైగల బిందువు నుండి స్పర్శరేఖను గీయుట.

(i) వృత్త కేంద్రమును ఉపయోగించి.

వివరణ :



పటం 4.9

C కేంద్రముగల వృత్తముపై బిందువు P నుండి పోవు రేఖ l అనే స్పర్శరేఖను గీయవలెను అని అనుకుందాం.

వ్యాసార్థము యొక్క బయటి చివరి బిందువు వద్ద గీసిన లంబరేఖయే ఆ వృత్తమునకు స్పర్శరేఖ అవుతుంది అనే ధర్మమును ఉపయోగించుదాం. ఒక వేళ వ్యాసార్థం CP ని గీసినచో రే.ఖం. CP $\perp$ రేఖ l అనగా వ్యాసార్థం CP కి బిందువు P నుండి పోవు లంబరేఖ గీసినచో, అదే మనకు కావల్సిన స్పర్శరేఖ అవుతుంది.

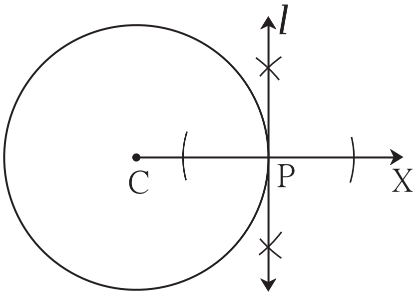
రేఖపై ఇచ్చిన బిందువునుండి పోవు, ఆ రేఖకు లంబముగా వుండు రేఖ యొక్క నిర్మాణమును ఇక్కడ చేయవలెను. కావున వీటికొరకు కిరణం CP ని గీసి రేఖ l ని నిర్మించుదాం.

నిర్మాణ క్రమము :

(1) C కేంద్రము గల ఒక వృత్తమును గీయండి, దానిపై P అను ఒక బిందువును తీసుకోండి.

(2) కిరణము CP ని గీయండి.

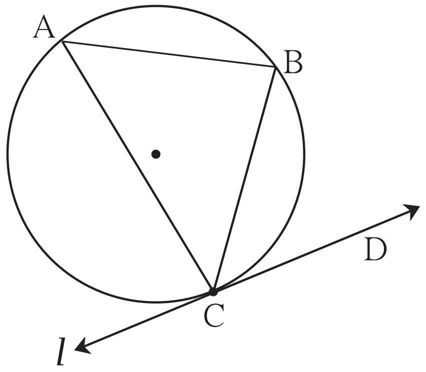
(3) బిందువు P నుండి కిరణము CX కు లంబ రేఖ l ను గీయండి. రేఖ l అనేది, P బిందువు నుండి పోయే వృత్తము యొక్క స్పర్శరేఖ అవుతుంది.



పటం 4.10

ii) వృత్తకేంద్రమును ఉపయోగించకుండా వృత్తముపై ఇచ్చిన బిందువు నుండి స్పర్శరేఖను గీయుట.

ఉదాహరణ : ఏదేని వ్యాసార్థం గల ఒక వృత్తమును గీయండి. దానిపై C అనేది ఏదేని ఒక బిందువును తీసుకోండి. వృత్త కేంద్రమును ఉపయోగించకుండా, బిందువు C నుండి పోయే స్పర్శరేఖను గీయండి.



పటం 4.11

వివరణ :

పటములో చూపించిన విధంగా రేఖ l అనేది బిందువు C నుండి పోయే స్పర్శరేఖ అనుకోండి. రే.ఖం. CB అనే జ్యా మరియు ∠ CAB అనేది అంతర్లిఖిత కోణమును గీసాము. స్పర్శరేఖ ఖండనరేఖ కోణ సిద్ధాంతము ప్రకారము ∠CAB ≅ ∠BCD.

స్పర్శరేఖ-ఖండన రేఖ కోణ సిద్ధాంతము యొక్క విపర్యయము ప్రకారము.

ఒక ∠CAB ≅ ∠BCD, అయిన రేఖ l అనేది వృత్తమునకు స్పర్శరేఖ అవుతుంది.

కావున రే.ఖం. CB కూడా వృత్తము యొక్క జ్యా మరియు ∠CAB అనే అంతర్లిఖిత కోణమును గీయండి. ∠BCD ≅ ∠BAC అయ్యేట్లు, ∠BCD అనే కోణమును గీయండి.

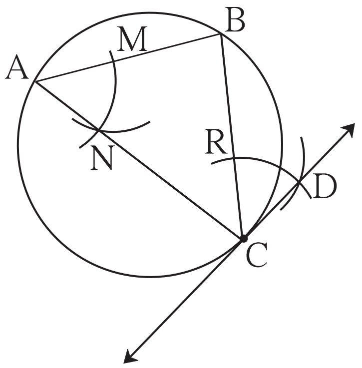
రేఖ CD అనేది ఇచ్చిన వృత్తముపై గల బిందువు C నుండి పోయే స్పర్శరేఖ అవుతుంది.

నిర్మాణ క్రమము:

(1) ఒక వృత్తమును గీయండి. వృత్తముపై C అనే ఏదేని ఒక బిందువును తీసుకోండి.

(2) జ్యా CB మరియు అంతర్లిఖిత ∠CAB లను గీయండి.

(3) వృత్తలేఖినిలో యోగ్యమైన వ్యాసార్థమును తీసుకుని బిందువు A కేంద్రముగా తీసుకొని ∠BAC యొక్క భుజములను బిందువు M మరియు N లలో ఖండించే చాపములను గీయండి.



పటం 4.12

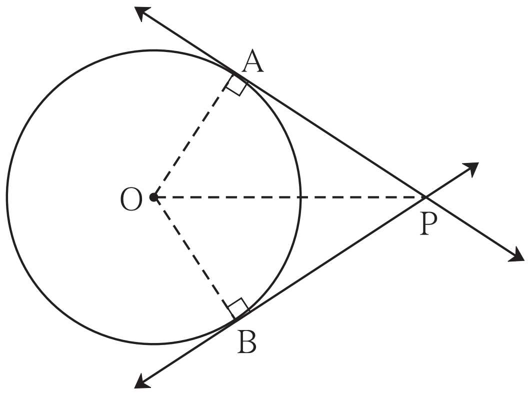
(4) అదే వ్యాసార్థము, C కేంద్రముగా తీసుకొని జ్యా CB ని ఖండించే చాపమును గీయండి. ఖండన బిందువుకు R అను పేరివ్వండి.

(5) వృత్తలేఖినిలో MN కి సమానమైన వ్యాసార్థము తీసుకొని, R ను కేంద్రముగా తీసుకొని ముందు గీసిన చాపమును ఖండించు విధంగా ఇంకో ఒక చాపమును గీయండి. వాటి ఖండనబిందువుకు D అని పేరు ఇవ్వండి. రేఖ CD ని గీయండి. రే.ఖం. CD అనేది వృత్తమునకు స్పర్శరేఖ అవుతుంది.

(పై పటములో ∠MAN ≅ ∠BCD దీనికి గల కారణమును గుర్తుంచుకోండి. రే.ఖం. MN మరియు రే.ఖం. RD లను కలపండి. భు.భు.భు నియమం ప్రకారం Δ MAN ≅ Δ RCD. ∴ ∠ MAN ≅ ∠ BCD)

ఇచ్చిన వృత్తమునకు బాహ్యబిందువు నుండి స్పర్శరేఖలను గీయుట.

వివరణ :



పటం 4.13

పటములో చూపించిన విధంగా O కేంద్రముగల వృత్తము యొక్క బాహ్యబిందువును P అని అనుకుందాం. బిందువు P నుండి గీయబడిన స్పర్శరేఖలు ఈ వృత్తమును బిందువు A మరియు బిందువు B ల వద్ద స్పృశిస్తాయి. బిందువు A మరియు బిందువు B లు వృత్తముపై స్థానాలను నిర్ణయించ బడినచో స్పర్శరేఖ PA మరియు స్పర్శరేఖ PB లను గీయవచ్చును. ఎందుకనగా వ్యాసార్థము OA మరియు OB లను గీసినచో వ్యాసార్థము OA ⊥ రేఖ PA మరియు వ్యాసార్థం OB ⊥ రేఖ PB.

Δ OAP మరియు Δ OBP లు లంబకోణ త్రిభుజాలు అయి, OP అనేది రెండింటి యొక్క కర్ణము అవుతుంది. రే.ఖం. OP వ్యాసముగా గల వృత్తమును గీసినచో O కేంద్రము గల వృత్తమును ఏ బిందువుల వద్ద ఖండించునచో అవి A మరియు B లు అవుతాయి. ఎందుకనగా అర్ధవృత్తములోని అంతర్లిఖిత కోణము ఎల్లప్పుడు లంబకోణము అవుతుంది.

నిర్మాణ క్రమము:

(1) O కేంద్రముగల ఏదేని వ్యాసార్థంగాగల వృత్తమును గీయండి.

(2) వృత్త బాహ్యభాగములో P అనే బిందువును తీసుకోండి.

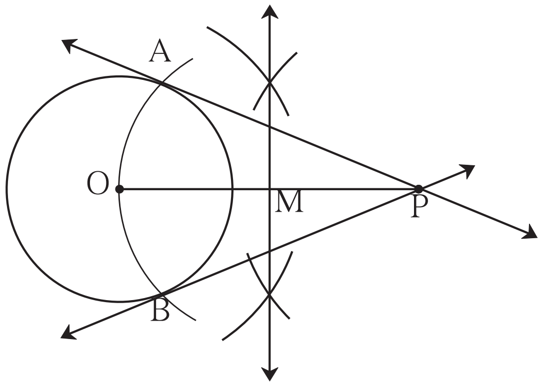
(3) రే.ఖం. OP ని గీయండి. రే.ఖం. OP యొక్క లంబసమద్విఖండనమును గీసి మధ్యబిందువు M ను గుర్తించండి.

(4) కేంద్రము M మరియు OM వ్యాసార్థముగా తీసుకొని వృత్త చాపమును గీయండి.

(5) ఈ వృత్తచాపము ఇచ్చిన వృత్తమును A మరియు B బిందువుల వద్ద ఖండించుతుంది.

(6) రేఖ PA, రేఖ PB లను గీయండి.

రేఖ PA, రేఖ PB లు కావాల్సిన స్పర్శరేఖలు.



పటం 4.14

అభ్యాసమాలిక 4.2

1. P కేంద్రము, 3.2 సెం.మీ. వ్యాసార్థముగాగల వృత్తముపై M బిందువు వద్ద స్పర్శరేఖను గీయండి.
2. 2.7 సెం.మీ. వ్యాసార్థముగల వృత్తమును గీయండి. ఈ వృత్తము పైగల బిందువునుండి స్పర్శరేఖను గీయండి.
3. 3.6 సెం.మీ. వ్యాసార్థముగల వృత్తమును గీయండి. ఈ వృత్తముపై గల ఏదేని బిందువువద్ద వృత్తకేంద్రమును ఉపయోగించకుండా స్పర్శరేఖను గీయండి.
4. 3.3 సెం.మీ. వ్యాసార్థముగల వృత్తమును గీయండి. దానిలో 6.6 సెం.మీ. పొడవుగల జ్యా PQను గీయండి. బిందువు P మరియు బిందువు Q ల నుండి స్పర్శరేఖలను గీయండి. స్పర్శరేఖలను పరిశీలించి మీ అభిప్రాయమును రాయండి.
5. 3.4 సెం.మీ. వ్యాసార్థముగల వృత్తమును గీయండి. దానిలో 5.7 సెం.మీ. పొడవుగల జ్యా MN ను గీయండి. బిందువు M మరియు బిందువు N ల నుండి పోవు వృత్తమునకు స్పర్శరేఖలను గీయండి.

6. P కేంద్రము మరియు 3.4 సెం.మీ. వ్యాసార్థముగల ఒక వృత్తమును గీయండి. వృత్త కేంద్రము నుండి 5.5 సెం.మీ. దూరములో Q బిందువును తీసుకోండి. Q బిందువు నుండి వృత్తమునకు స్పర్శరేఖలను గీయండి.

7. 4.1 సెం.మీ. వ్యాసార్థముగల ఒక వృత్తమును గీయండి. వృత్తకేంద్రము నుండి 7.3 సెం.మీ. దూరములోగల బిందువునుండి స్పర్శరేఖలను గీయండి.

సంకీర్ణప్రశ్న సంగ్రహము 4

1. సరియైన ఐచ్ఛికమును ఎంచుకోండి.

(1) వృత్తముపై ఇచ్చిన బిందువునుండి వృత్తమునకు గీయబడు స్పర్శరేఖల సంఖ్య ....

(A) 3 (B) 2 (C) 1 (D) 0

(2) వృత్త బాహ్య బిందువు నుండి వృత్తమునకు అత్యధికంగా .... స్పర్శరేఖలను గీయవచ్చును.

(A) 2 (B) 1 (C) ఒకేఒక (D) 0

(3) ఒకవేళ $\Delta ABC \sim \Delta PQR$, $\frac{AB}{PQ} = \frac{7}{5}$ అయిన ....

(A) Δ ABC పెద్దదిగా ఉంటుంది. (B) Δ PQR పెద్దదిగా ఉంటుంది.

(C) రెండు త్రిభుజాలు సమానంగా ఉంటాయి. (D) ఖచ్చితంగా చెప్పలేము.

2. O కేంద్రముగా గల 3.5 సెం.మీ. వ్యాసార్థముగల వృత్తమును గీయండి. వృత్త కేంద్రమునుండి 5.7 సెం.మీ. దూరములోగల బిందువు P ను తీసుకోండి. P బిందువునుండి వృత్తమునకు స్పర్శరేఖలను గీయండి.

3. ఏదేని ఒక వృత్తమును గీయండి. దానిపై A అను బిందువును గుర్తించి దానినుండి వృత్తమునకు స్పర్శరేఖను వృత్తకేంద్రమును ఉపయోగించకుండా గీయండి.

4. 6.4 సెం.మీ. వ్యాసము గల వృత్తమును గీయండి. వృత్తకేంద్రము నుండి వ్యాసము పొడవంత దూరములో బిందువు R ను గుర్తించండి. ఆ బిందువు నుండి వృత్తమునకు స్పర్శరేఖలను గీయండి.

5. P కేంద్రముగల వృత్తమును గీయండి. 100° కొలతగల అల్ప చాపము AB ని గీయండి. A మరియు B నుండి వృత్తమునకు స్పర్శరేఖలను గీయండి.

6. E కేంద్రముగాగల 3.4 సెం.మీ. వ్యాసార్థముగల వృత్తమును గీయండి. వృత్తము పై F బిందువును తీసుకోండి. E–F–A అయ్యేట్లు బిందువు A ను గుర్తించండి మరియు FA = 4.1 సెం.మీ.. బిందువు A నుండి వృత్తమునకు స్పర్శరేఖను గీయండి.

7. ఒకవేళ $\Delta ABC \sim \Delta LBN$, ΔABC లో AB = 5.1 సెం.మీ., $\angle B = 40^\circ$, BC = 4.8 సెం.మీ., $\frac{AC}{LN} = \frac{4}{7}$ అయినచో ΔABC మరియు ΔLBN లను గీయండి.

8. PY = 6.3 సెం.మీ., YQ = 7.2 సెం.మీ., PQ = 5.8 సెం.మీ. $\frac{YZ}{YQ} = \frac{6}{5}$ అయిన ΔXYZ అను ΔPYQ యొక్క సరూప త్రిభుజమును గీయండి.

❑❑❑

5 నిరూపక రేఖాగణితం

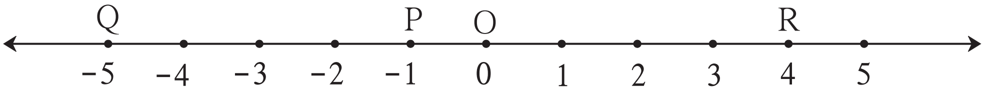
పరిచయం నేర్చుకుందాం

- మధ్య దూరమునకు సూత్రము
- విభజన సూత్రము
- రేఖ యొక్క వాలు

కొంచెం గుర్తుతెచ్చుకుందాం.

సంఖ్యారేఖపైనున్న ఏవేని రెండు బిందువుల మధ్య దూరమును కనుగొనుట మనకు తెలుసు.

P,Q మరియు R బిందువుల నిరూపకములు వరుసగా −1,−5 మరియు 4 గా కలవు అయిన రే.ఖం. PQ,రే.ఖం. QR ల పొడవులను కనుగొనుము.



పటం 5.1

బిందువు A మరియు B ల నిరూపకములు x_1 మరియు x_2 అయి $x_2 > x_1$ అయినచో

రేఖాఖండం AB యొక్క పొడవు = d(A,B) = $x_2 - x_1$

పటములో చూపిన విధముగా బిందువు P,Q మరియు R ల నిరూపకములు −1,−5 మరియు 4 గా కలవు.

∴ $d(P, Q) = (-1)-(-5) = -1 + 5 = 4$

మరియు $d(Q, R) = 4 - (-5) = 4 + 5 = 9$

ఈ భావనను ఉపయోగించి మనము XY తలములలో, ఒకే అక్షముపైగల రెండు బిందువుల మధ్య దూరంను కనుగొందాం.

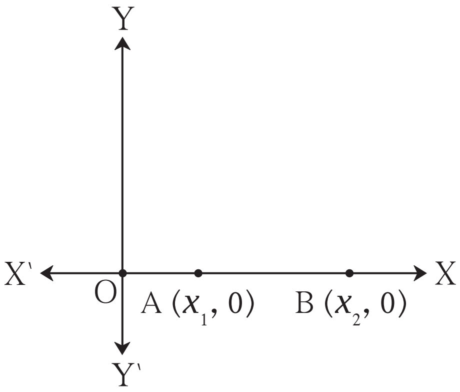
తెలుసుకుందాం.

(1) ఒకే అక్షముపై ఉన్న రెండు బిందువుల మధ్య దూరమును కనుగొనుట.

ఒకే అక్షముపై ఉన్న రెండు బిందువులు అనగా ఒకే సంఖ్యారేఖపై గల రెండు బిందువులు అవుతాయి. X అక్షముపై గల బిందువుల నిరూపకములు $(2, 0)$, $(\frac{-5}{2}, 0)$, $(8, 0)$ ఈ విధంగా ఉన్నట్లయితే Y అక్షములపైగల బిందు నిరూపకములు $(0, 1)$, $(0, \frac{17}{2})$, $(0, -3)$ గా ఉంటాయి అని గుర్తించండి.

X అక్షము యొక్క ఋణ నిరూపకములను సూచించే భాగము కిరణము OX' మరియు Y అక్షము యొక్క ఋణ నిరూపకములను సూచించే భాగము కిరణము OY' లు అవుతాయి.

i) X-అక్షము పైగల రెండు బిందువుల మధ్య దూరమును కనుగొనుట.

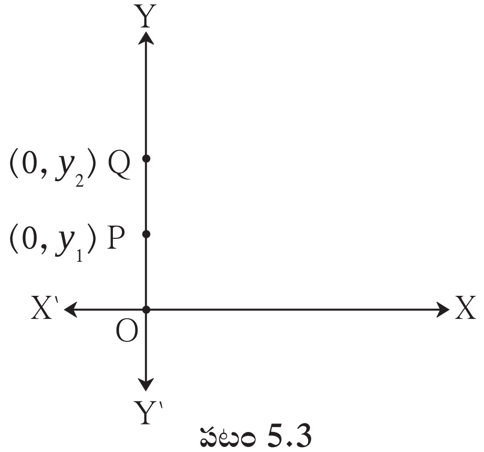


పటం 5.2

పై పటములో A(x_1, 0) మరియు B(x_2, 0) అను రెండు బిందువులు X- అక్షముపై, $x_2 > x_1$ అయ్యేట్లుగా కలవు.

∴ d(A, B) = $x_2 - x_1$

ii) Y-అక్షముపైగల రెండు బిందువుల మధ్య దూరమును కనుగొనుట.

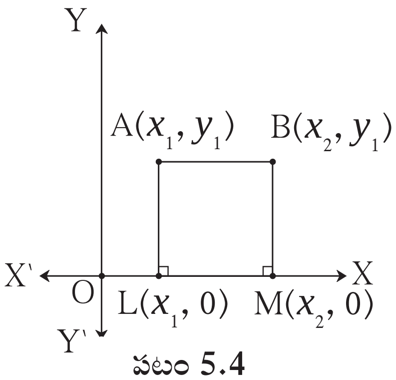


పటం 5.3

పై పటములో P(0, y_1) మరియు Q(0, y_2) అను రెండు బిందువులు Y- అక్షముపై, $y_2 > y_1$ అయ్యేట్లుగా కలవు.

∴ d(P,Q) = $y_2 - y_1$

2) రెండు బిందువులను కలుపు XY తలములోని రేఖాఖండము ఏదేని అక్షమునకు సమాంతరముగా ఉన్నచో ఆ రెండు బిందువుల మధ్య దూరమును కనుగొనుట.



పటం 5.4

i) పటములో రే.ఖం. AB అనేది X- అక్షమునకు సమాంతరముగా ఉంది. కావున బిందువు A మరియు బిందువు B ల y నిరూపకములు సమానంగా ఉన్నాయి.

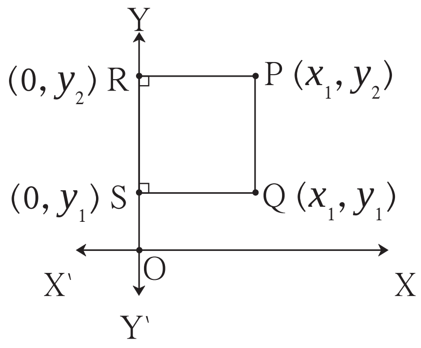
రే.ఖం. AL మరియు రే.ఖం. BM లను X-అక్షమునకు లంబముగా గీయండి.

∴ □ ABML ఒక దీర్ఘచతురస్రం అగును.

∴ AB = LM

కాని, LM = $x_2 - x_1$

∴ d(A,B) = $x_2 - x_1$



పటం 5.5

ii) పటములో రే.ఖం. PQ అనేది Y- అక్షమునకు సమాంతరముగా ఉంది. కావున బిందువు P మరియు బిందువు Q ల x నిరూపకములు సమానంగా ఉన్నాయి.

రే.ఖం. PR మరియు రే.ఖం. QS లను Y-అక్షమునకు లంబముగా గీయండి.

∴ □ PQSR ఒక దీర్ఘచతురస్రం అగును.

∴ PQ = RS

కాని, RS = $y_2 - y_1$

∴ d(P,Q) = $y_2 - y_1$

కృత్యము :

పటములో రే.ఖం. AB || Y−అక్షము మరియు రే.ఖం. CB || X−అక్షము అయి A, C బిందు నిరూపకములను ఇచ్చారు.

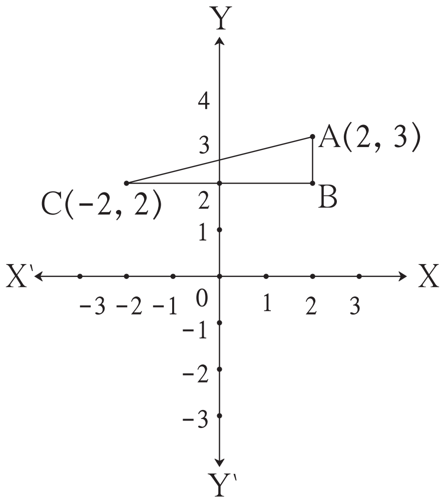
AC ని కనుగొనుటకు కింది ఖాళీలను పూరించండి.

Δ ABC అనేది లంబకోణ త్రిభుజం.

పైథాగరస్ సిద్ధాంతము ప్రకారం

$(AB)^2 + (BC)^2 =$ ☐

AB, BC లను కనుగొనుట కొరకు బిందువు B యొక్క నిరూపకములను కనుగొందాం.



పటం 5.6

CB || X− అక్షము ∴ B యొక్క y నిరూపకం = ☐

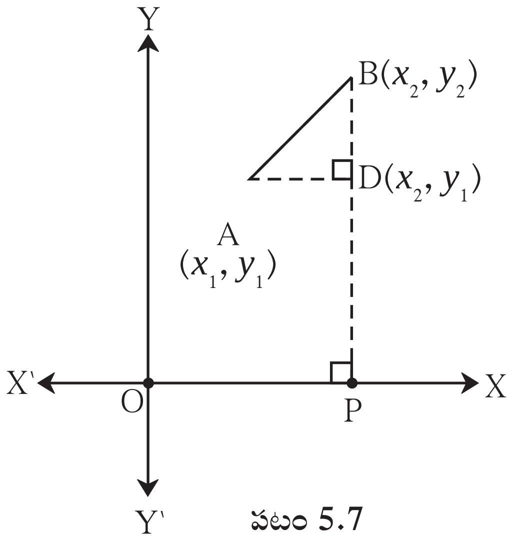
BA || Y− అక్షం ∴ B యొక్క x నిరూపకం = ☐

AB = [3] − ☐ = ☐   BC = ☐ − ☐ = [4]

∴ AC^2 = ☐ + ☐ = ☐   ∴ AC = [$\sqrt{17}$]

తెలుసుకుందాం.

మధ్య దూరమునకు సూత్రము (Distance formula)



పటం 5.7

పటము 5.7 లో, A(x_1, y_1) మరియు B(x_2, y_2) లు XY తలములో ఏవేని రెండు బిందువులు.

బిందువు B నుండి X−అక్షముపై లంబముగా BP గీయండి. అదే విధంగా బిందువు A నుండి రే.ఖం. BP పై AD ని లంబముగా గీయండి.

రే.ఖం. BP అనేది Y−అక్షమునకు సమాంతరముగా ఉంది.

∴ బిందువు D యొక్క x నిరూపకము x_2.

రే.ఖం.AD అనేది X−అక్షమునకు సమాంతరముగా ఉంది.

∴ బిందువు D యొక్క y నిరూపకము y_1

∴ AD = d(A, D) = $x_2 - x_1$,

BD = d(B, D) = $y_2 - y_1$

Δ ABD లంబకోణ త్రిభుజములో, $AB^2 = AD^2 + BD^2$

$$= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

$$\therefore AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

దీనినే మధ్య దూరమునకు సూత్రము అని అంటారు.

$$\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$ అని గుర్తుపెట్టుకోండి.

వెనుక కృత్యములో మనము AB, BC ల పొడవులను కనుగొని పైథాగరస్ సిద్ధాంతమును ఉపయోగించి. రే.ఖం. AC ని కనుగొన్నాము. ఇప్పుడు మధ్య దూరము సూత్రమును ఉపయోగించి అదే రేఖాఖండం పొడవును కనుగొందాం.

A(2, 3) మరియు C(−2, 2) లు ఇవ్వబడిని.

$A(x_1, y_1)$ మరియు $C(x_2, y_2)$ అనుకుందాం.

$x_1 = 2, y_1 = 3, x_2 = -2, y_2 = 2$

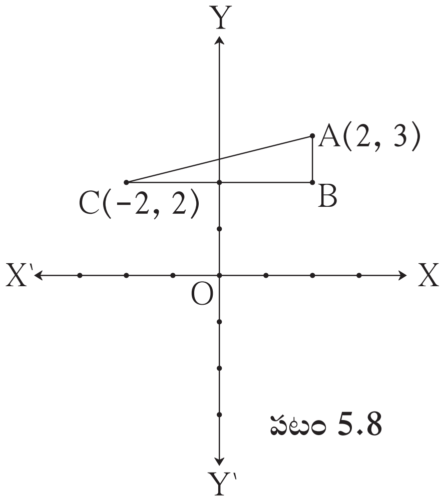
$$AC = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

$$= \sqrt{(-2-2)^2+(2-3)^2}$$

$$= \sqrt{(-4)^2+(-1)^2}$$

$$= \sqrt{16+1}$$

$$= \sqrt{17}$$



పటం 5.8

రే.ఖం. AB || Y−అక్షము మరియు రే.ఖం. BC || X−అక్షము.

∴ బిందువు B యొక్క నిరూపకాలు (2, 2)

$$\therefore AB = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} = \sqrt{(2-2)^2+(2-3)^2} = \sqrt{0+1} = 1$$

$$BC = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} = \sqrt{(-2-2)^2+(2-2)^2} = \sqrt{(-4)^2+0} = 4$$

పటం 5.1 లోని P, Q బిందువుల మధ్యదూరం (−1) − (−5) = 4; అని కనుగొన్నాము. ఆ బిందువులు నిరూపక తలంలో (−1, 0) మరియు (−5, 0) గా ఉంటాయి. మధ్యదూరం యొక్క పై సూత్రాన్ని ఉపయోగించి P మరియు Q ల మధ్య దూరమును కనుగొనిన అంతే లభించునని సరిచూడండి.

ఇవి గుర్తుంచుకుందాం.

- మూలబిందువు O యొక్క సరూపకాలు (0, 0) గా ఉంటాయి. కావున P బిందువు యొక్క నిరూపకములు (x, y) గా ఉన్నచో $d(O, P) = \sqrt{x^2+y^2}$ అని గుర్తుంచుకోండి.
- $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ అను రెండు బిందువులు XY తలములోనున్నచో

  $d(P, Q) = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

  అనగా, $PQ^2 = (x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2 = (x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2$

సాధించిన ఉదాహరణలు

ఉదా. (1) P(−1, 1), Q(5, −7) రెండు బిందువుల మధ్య దూరమును కనుగొనండి.

సాధన : $P(x_1, y_1)$ మరియు $Q(x_2, y_2)$ అనుకుందాం.

$x_1 = -1, \quad y_1 = 1, \quad x_2 = 5, \quad y_2 = -7$

మధ్య దూరము సూత్రము ప్రకారం $d(P, Q) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$= \sqrt{[5-(-1)]^2 + [(-7)-1]^2}$

$= \sqrt{(6)^2 + (-8)^2}$

$= \sqrt{36+64}$

$d(P, Q) = \sqrt{100} \quad = 10$

∴ బిందువు P మరియు Q ల మధ్య దూరము 10

ఉదా. (2) A(−3, 2), B(1, −2) మరియు C(9, −10) బిందువులు సరేఖీయాలు అని చూపండి.

సాధన : ఒకవేళ d(A, B); d(B, C) మరియు d(A, C) లలోని రెండింటి దూరముల మొత్తము మూడవ దూరమునకు సమానంగా ఉన్నచో ఆ బిందువులు A, B, C సరేఖీయాలు అవుతాయి.

∴ d(A, B), d(B, C) మరియు d(A, C) లను కనుగొందాం.

బిందువు A యొక్క నిరూపకాలు	బిందువు B యొక్క నిరూపకాలు	మధ్యదూరమునకు సూత్రం
(−3, 2)	(1, −2)	$d(A,B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$
(x_1, y_1)	(x_2, y_2)	

$\therefore d(A, B) = \sqrt{[1-(-3)]^2 + [(-2)-2]^2}$ .... (మధ్య దూరమునకు సూత్రము)

$= \sqrt{(1+3)^2 + (-4)^2}$

$= \sqrt{16+16}$

$= \sqrt{32} \quad = 4\sqrt{2}$ ....(I)

$d(B, C) = \sqrt{(9-1)^2 + (-10+2)^2}$

$= \sqrt{64+64} \quad = 8\sqrt{2}$ ....(II)

మరియు $d(A, C) = \sqrt{(9+3)^2 + (-10-2)^2}$

$= \sqrt{144+144} \quad = 12\sqrt{2}$ ....(III)

$4\sqrt{2} + 8\sqrt{2} = 12\sqrt{2}$ .... (I), (II) మరియు (III) ల నుండి

∴ d(A, B) + d(B, C) = d(A, C)

∴ A, B, C బిందువులు సరేఖీయాలు అవుతాయి.

ఉదా. (3) P(6, −6), Q(3, −7) మరియు R(3, 3) బిందువులు సరేఖీయాలు అవునా కాదా నిర్ణయించండి.

సాధన : $PQ = \sqrt{(6-3)^2+(-6+7)^2}$ .... (మధ్య దూరమునకు సూత్రము ఆధారంగా)

$= \sqrt{(3)^2+(1)^2} = \sqrt{10}$ .... (I)

$QR = \sqrt{(3-3)^2+(-7-3)^2}$

$= \sqrt{(0)^2+(-10)^2} = \sqrt{100}$ .... (II)

$PR = \sqrt{(3-6)^2+(3+6)^2}$

$= \sqrt{(3)^2+(9)^2} = \sqrt{90}$ .... (III)

(I), (II) మరియు (III) లనుండి $\sqrt{10}$, $\sqrt{100}$ మరియు $\sqrt{90}$ వీటిలో $\sqrt{100}$ అనేది అన్నింటికంటే పెద్ద సంఖ్య.

$(\sqrt{100})$ మరియు $(\sqrt{10}+\sqrt{90})$ ఈ సంఖ్యలు సమానంగా ఉన్నాయో లేదో చూద్దాం.

దీనికొరకు $(\sqrt{100})^2$ మరియు $(\sqrt{10}+\sqrt{90})^2$ లను పోల్చండి.

దీనినుండి $(\sqrt{10}+\sqrt{90}) > (\sqrt{100})$ అని మీరు గమనిస్తారు. $\therefore$ PQ + PR ≠ QR

$\therefore$ P(6, −6), Q(3, −7) మరియు R(3, 3) బిందువులు సరేఖీయాలు కావు.

ఉదా. (4) (1, 7), (4, 2), (−1, −1) మరియు (−4, 4) బిందువులు చతురస్ర శీర్షములు అని చూపుము.

సాధన : ఎప్పుడైతే చతురస్రము యొక్క అన్ని భుజములు పొడవులు మరియు కర్ణముల పొడవులు సమానముగా నున్నచో అప్పుడు అది చతురస్రము అవుతుంది. $\therefore$ అన్ని భుజాల పొడవులు మరియు కర్ణముల పొడవులను మధ్య దూరము సూత్రమును ఉపయోగించి కనుగొందాం.

A(1, 7), B(4, 2), C(−1, −1) మరియు D(−4,4) అని ఇవ్వబడ్డాయి అనుకుందాం.

$AB = \sqrt{(1-4)^2+(7-2)^2} = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}$

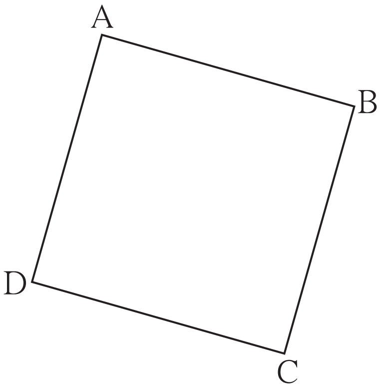
$BC = \sqrt{(4+1)^2+(2+1)^2} = \sqrt{25+9} = \sqrt{34}$

$CD = \sqrt{(-1+4)^2+(-1-4)^2} = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}$

$DA = \sqrt{(1+4)^2+(7-4)^2} = \sqrt{25+9} = \sqrt{34}$

$AC = \sqrt{(1+1)^2+(7+1)^2} = \sqrt{4+64} = \sqrt{68}$

$BD = \sqrt{(4+4)^2+(2-4)^2} = \sqrt{64+4} = \sqrt{68}$



పటం 5.9

$\therefore$ AB = BC = CD = DA మరియు AC = BD

దీనినుండి చతుర్భుజము యొక్క నాలుగు భుజాల పొడవులు సమానంగా ఉన్నాయి. అదేవిధంగా రెండు కర్ణాలు AC మరియు BD ల పొడవులు కూడా సమానంగా ఉన్నాయి అని తెలుస్తుంది.

$\therefore$ (1,7), (4,2), (−1,−1) మరియు (−4,4) ఈ శీర్షబిందువులనుండి ఏర్పడిన చతుర్భుజము చతురస్రము అవుతుంది.

ఉదా. (5) బిందువులుM (−5,−2) మరియు N(3,2) ల నుండి సమాన దూరంలో Y− అక్షముపైగల బిందువు యొక్క నిరూపకములను కనుగొనండి.

సాధన : బిందువు P(0, y) బిందువు M, N ల నుండి సమానదూరంలోY-అక్షముపై ఉన్నదనుకొందాం.

$$\therefore PM = PN \qquad \therefore PM^2 = PN^2$$

$$\therefore [0-(-5)]^2 + [y-(-2)]^2 = (0-3)^2 + (y-2)^2$$

$$\therefore 25 + (y+2)^2 = 9 + y^2 - 4y + 4$$

$$\therefore 25 + y^2 + 4y + 4 = 13 + y^2 - 4y$$

$$\therefore 8y = -16 \quad \therefore y = -2$$

$\therefore$ M (−5, −2) మరియు N (3, 2) ల నుండి సమాన దూరములో Y− అక్షముపైగల బిందు నిరూపకములు (0, −2)

ఉదా. (6) A(−3, −4), B(−5, 0), C(3, 0) లు Δ ABC యొక్క శీర్షబిందువులు. Δ ABC యొక్క పరికేంద్రము యొక్క నిరూపకములను కనుగొనండి.

సాధన : P(a, b) అనేది Δ ABC యొక్క పరికేంద్ర బిందువు అనుకుందాం. $\therefore$ బిందువు P అనేది A, B, C నుండి సమానదూరములో ఉంటుంది.

$\therefore PA^2 = PB^2 = PC^2$ .... (I) $\quad \therefore PA^2 = PB^2$

$$(a+3)^2 + (b+4)^2 = (a+5)^2 + (b-0)^2$$

$$\therefore a^2 + 6a + 9 + b^2 + 8b + 16 = a^2 + 10a + 25 + b^2$$

$$\therefore -4a + 8b = 0$$

$$\therefore a - 2b = 0 \text{ .... (II)}$$

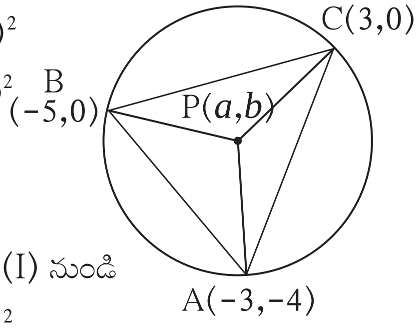
అదే విధంగా $PA^2 = PC^2$ .... (I) నుండి

$$\therefore (a+3)^2 + (b+4)^2 = (a-3)^2 + (b-0)^2$$

$$\therefore a^2 + 6a + 9 + b^2 + 8b + 16 = a^2 - 6a + 9 + b^2$$

$$\therefore 12a + 8b = -16$$

$$\therefore 3a + 2b = -4 \text{ .... (III)}$$



పటం 5.10

సమీకరణము (II) మరియు (III) లను సాధించగా $a = -1$, $b = -\frac{1}{2}$

$\therefore$ పరికేంద్రము యొక్క నిరూపకములు $(-1, -\frac{1}{2})$.

ఉదా. **(7)** (7, 1) మరియు (3, 5) బిందువుల నుండి సమాన దూరంలో గల బిందువు (x, y) అయిన $y = x-2$ అని చూపండి.

సాధన : A(7, 1) మరియు B(3, 5) బిందువుల నుండి P (x, y) సమాన దూరంలో ఉంది.

$$\therefore AP = BP$$

$$\therefore AP^2 = BP^2$$

$$\therefore (x-7)^2 + (y-1)^2 = (x-3)^2 + (y-5)^2$$

$$\therefore x^2 - 14x + 49 + y^2 - 2y + 1 = x^2 - 6x + 9 + y^2 - 10y + 25$$

$$\therefore -8x + 8y = -16$$

$$\therefore x - y = 2$$

$$\therefore y = x - 2$$

ఉదా. **(8)** బిందువు $A(2,-2)$ మరియు బిందువు $B(-1,y)$ ల మధ్య దూరము 5, అయిన y విలువనుకనుగొనండి.

సాధన : $\therefore AB^2 = [(-1) - 2]^2 + [y - (-2)]^2$ .... మధ్య దూరము సూత్రము ప్రకారం

$\therefore \quad 5^2 = (-3)^2 + (y+2)^2$

$\therefore \quad 25 = 9 + (y+2)^2$

$\therefore \quad 16 = (y+2)^2$

$\therefore \quad y + 2 = \pm\sqrt{16}$

$\therefore \quad y + 2 = \pm 4$

$\therefore y = 4 - 2$ లేదా $y = -4 - 2$

$\therefore y = 2$ లేదా $y = -6$

$\therefore y$ యొక్క విలువ 2 లేదా -6 .

అభ్యాసమాలిక 5.1

1. కింద ఇచ్చిన బిందువుల యొక్క ప్రతి జత మధ్య దూరమును కనుగొనండి.

(1) A(2, 3), B(4, 1) (2) P(−5, 7), Q(−1, 3) (3) R(0, −3), S$(0, \frac{5}{2})$

(4) L(5, −8), M(−7, −3) (5) T(−3, 6), R(9, −10) (6) W$(\frac{-7}{2}, 4)$, X(11, 4)

2. కింది బిందువులు సరేఖీయాలు అవునా కాదా నిర్ణయించండి.

(1) A(1, −3), B(2, −5), C(−4, 7) (2) L(−2, 3), M(1, −3), N(5, 4)

(3) R(0, 3), D(2, 1), S(3, −1) (4) P(−2, 3), Q(1, 2), R(4, 1)

3. బిందువులు A(−3, 4) మరియు B(1, −4) లనుండి సమానదూరంలో X− అక్షముపై గల బిందు నిరూపకములను కనుగొనండి.

4. P(−2, 2), Q(2, 2) మరియు R(2, 7) బిందువులు లంబకోణ త్రిభుజము యొక్క శీర్షబిందువులు. దీనిని సరిచూడండి.

5. P(2, −2), Q(7, 3), R(11, −1) మరియు S (6, −6) లు శీర్షబిందువులు గల చతుర్భుజము సమాంతర చతుర్భుజం అని చూపండి.

6. A(−4, −7), B(−1, 2), C(8, 5) మరియు D(5, −4) లు ABCD అను సమబాహుచతుర్భుజము (రాంబస్) యొక్క శీర్షబిందువులు అని చూపండి.

7. ఒకవేళ బిందువు L(x, 7) మరియు M(1, 15) ల మధ్య దూరము 10 అయినచో x విలువను కనుగొనండి.

8. A(1, 2), B(1, 6), C($1 + 2\sqrt{3}$, 4) సమబాహు త్రిభుజము యొక్క శీర్షబిందువులు అని చూపండి.

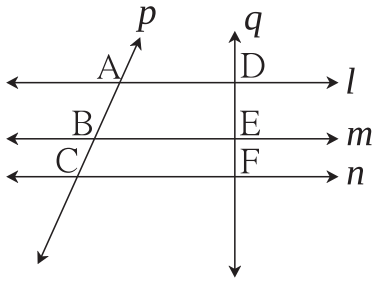
కొంచెం గుర్తుతెచ్చుకుందాం.

మూడు సమాంతర రేఖల అంతరఖండముల ధర్మం :

పటములో రేఖ l || రేఖ m || రేఖ n,

రేఖ p మరియు q లు తిర్యగ్రేఖలు

$$\therefore \frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$$



పటం 5.11

తెలుసుకుందాం.

రేఖాఖండ విభజన (Division of a line segment)

పటం 5.12

పటములో, AP = 6 మరియు PB = 10.

$$\therefore \frac{AP}{PB} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

దీనినే వేరే పదాలలో 'బిందువు P రే.ఖం. AB ని 3:5 నిష్పత్తిలో విభజన చేస్తుంది' అని అంటారు. ఎప్పుడైతే ఏదేని రేఖాఖండముపై బిందువు అదే రేఖాఖండమును ఇచ్చిన నిష్పత్తిలో విభజన చేస్తుందో అప్పుడు ఆ విభజన చేయు బిందువు యొక్క నిరూపకములను ఎలా కనుగొంటారో చూద్దాం.

తెలుసుకుందాం.

విభజన సూత్రము (Section formula)

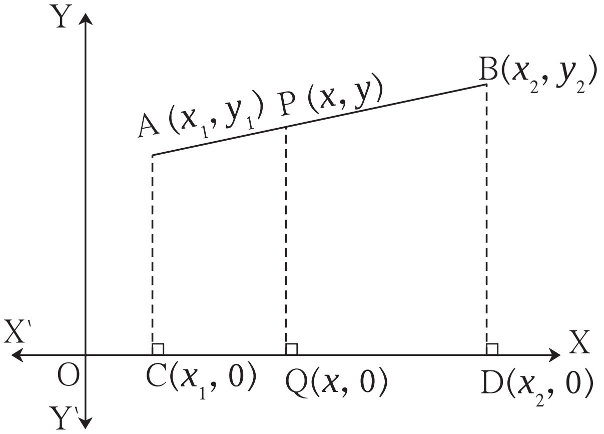
పటము 5.13 లో, XY తలములో రే.ఖం. AB పై గల బిందువు P, రే.ఖం. AB ను $m : n$ నిష్పత్తిలో విభజన చేస్తుంది

$A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ మరియు $P(x, y)$ అనుకుందాం.

రే.ఖం.AC,రే.ఖం.PQమరియురే.ఖం.BDలనుండి X−అక్షమునకు లంబరేఖా ఖండమును గీయండి.

$\therefore C(x_1, 0)$; $Q(x, 0)$ మరియు $D(x_2, 0)$.

$\therefore$ $CQ = x - x_1$ మరియు $QD = x_2 - x$ } .... (I)



పటం 5.13

ఇదేవిధంగా రే.ఖం. AC || రే.ఖం. PQ || రే.ఖం. BD.

$\therefore$ మూడు సమాంతర రేఖల అంతరఖండాల ధర్మము ప్రకారం, $\frac{AP}{PB} = \frac{CQ}{QD} = \frac{m}{n}$

ఇప్పుడు $CQ = x - x_1$ మరియు $QD = x_2 - x$ .... (I) నుండి

$$\therefore \frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{m}{n}$$

$$\therefore n(x - x_1) = m(x_2 - x)$$

$$\therefore nx - nx_1 = mx_2 - mx$$

$$\therefore mx + nx = mx_2 + nx_1$$

$$\therefore x(m + n) = mx_2 + nx_1$$

$$\therefore x = \frac{mx_2 + nx_1}{m + n}$$

ఇదే విధంగా బిందువు A, P మరియు B ల నుండి Y− అక్షమునకు లంబరేఖలను గీసి పై విధముగా కృత్యము చేసినచో మనకు $y = \frac{my_2 + ny_1}{m + n}$ లభిస్తుంది.

$\therefore$ బిందువు $A(x_1, y_1)$ మరియు $B(x_2, y_2)$ లను కలిపే రే.ఖం. AB ను $m : n$ నిష్పత్తిలో అంతరవిభజన చేసే బిందువు యొక్క నిరూపకములు $\left(\frac{mx_2 + nx_1}{m + n}, \frac{my_2 + ny_1}{m + n}\right)$.

రేఖాఖండము యొక్క మధ్యబిందువు సూత్రము (Mid-point formula)

$A(x_1, y_1)$ మరియు $B(x_2, y_2)$ రెండు బిందువులు అయి బిందువు $P(x, y)$ రే.ఖం. AB యొక్క మధ్యబిందువు అయినచో

$m = n$ అయినప్పుడు విభజన సూత్రము ప్రకారము,

x మరియు y యొక్క విలువలనురాద్దాం.

$A\,(x_1, y_1) \qquad P\,(x, y) \qquad B\,(x_2, y_2)$

పటం 5.14

$$x = \frac{mx_2 + nx_1}{m+n}$$

$$= \frac{mx_2 + mx_1}{m+m} \quad \because \; m = n$$

$$= \frac{m(x_1 + x_2)}{2m}$$

$$= \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$$y = \frac{my_2 + ny_1}{m+n}$$

$$= \frac{my_2 + my_1}{m+m} \quad \because \; m = n$$

$$= \frac{m(y_1 + y_2)}{2m}$$

$$= \frac{y_1 + y_2}{2}$$

$\therefore$ P అను మధ్య బిందువు యొక్క నిరూపకములు $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$ దీనినే **మధ్యబిందువు సూత్రము** అని అంటారు. కింది తరగతిలో మనము రెండు చరరాశులుగల సంఖ్య a మరియు b సంఖ్యారేఖపై చూపించి, వాటిని కలిపే రేఖాఖండము యొక్క మధ్యబిందువు $\frac{a+b}{2}$ ఉంటుంది అని చూపాము. ఆ వివరణే ఇప్పుడు వచ్చిన సూత్రము యొక్క మరొక విధానము అని గుర్తుంచుకోండి.

సాధించిన ఉదాహరణలు

ఉదా.(1) ఒకవేళ A(3,5) B(7,9) మరియు బిందువు Q రే.ఖం. AB ని 2:3 నిష్పత్తిలో అంతర విభజన చేసినచో Q బిందువు యొక్క నిరూపకములను కనుగొనండి.

సాధన : ఇచ్చిన ఉదాహరణలో $(x_1, y_1) = (3, 5)$

మరియు $(x_2, y_2) = (7, 9)$ అనుకుందాం.

అదేవిధంగా, $m : n = 2:3$

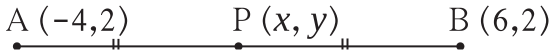
రేఖాఖండ అంతర విభజన సూత్రము ప్రకారం,

$$x = \frac{mx_2 + nx_1}{m+n} = \frac{2\times7+3\times3}{2+3} = \frac{23}{5} \qquad y = \frac{my_2 + ny_1}{m+n} = \frac{2\times9+3\times5}{2+3} = \frac{33}{5}$$

$\therefore$ బిందువు Q యొక్క నిరూపకములు $\left(\frac{23}{5}, \frac{33}{5}\right)$

ఉదా.(2) A(–4,2) B(6,2) ఈ రేఖాఖండము యొక్క మధ్య బిందువు P అయినచో P బిందువు నిరూపకములను కనుగొనండి.

సాధన :



పటం 5.15

$(-4, 2) = (x_1, y_1)$; $(6, 2) = (x_2, y_2)$ మరియు బిందువు P యొక్క నిరూపకములు (x, y) అనుకుందాం.

∴ మధ్య బిందువు సూత్రము ప్రకారం,

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-4+6}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{2+2}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

∴ మధ్యబిందువు P యొక్క నిరూపకములు (1,2) లభిస్తాయి.

కొంచెం గుర్తుతెచ్చుకుందాం.

త్రిభుజములోని మధ్యగత రేఖలు మిళితాలు అని మనకు తెలుసు.

మిళితబిందువు (centroid) మధ్యగత రేఖను 2:1 నిష్పత్తిలో విభజిస్తుంది.

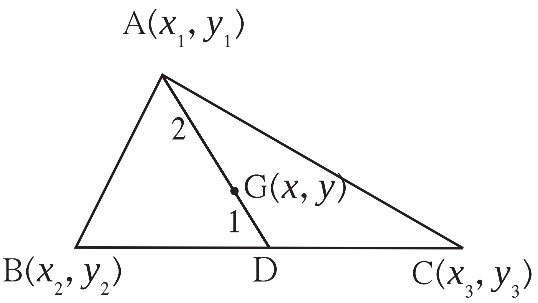
తెలుసుకుందాం.

గురుత్వ కేంద్ర సూత్రం (Centroid formula)

త్రిభుజము యొక్క మూడు శీర్షబిందువుల నిరూపకములు ఇచ్చిన విభజన సూత్రమును ఉపయోగించి గురుత్వకేంద్రము యొక్క నిరూపకములను ఏ విధంగా కనుగొనవచ్చునో మనము చూద్దాం.

$A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ అనేవి Δ ABC యొక్క శీర్షబిందువులు అనుకుందాం మరియు రే.ఖం. AD అనేది Δ ABC యొక్క మధ్యగత రేఖ. బిందువు $G(x, y)$ అనేది ఆ త్రిభుజము యొక్క మధ్యగత రేఖల మిళిత బిందువు అనుకోండి.

రే.ఖం. BC యొక్క మధ్యబిందువు D అగును.



పటం 5.16

∴ బిందువు D యొక్క నిరూపకములు $x = \frac{x_2 + x_3}{2}$, $y = \frac{y_2 + y_3}{2}$ .... రేఖాఖండము యొక్క మధ్యబిందువు సూత్రము ప్రకారం

Δ ABC గురుత్వకేంద్రం G(x, y) ∴ AG : GD = 2 : 1

∴ రేఖాఖండము యొక్క విభజన సూత్రము ప్రకారం

$$x = \frac{2\left(\frac{x_2 + x_3}{2}\right) + 1 \times x_1}{2 + 1} = \frac{x_2 + x_3 + x_1}{3} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$$

$$y = \frac{2\left(\frac{y_2 + y_3}{2}\right) + 1 \times y_1}{2 + 1} = \frac{y_2 + y_3 + y_1}{3} = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$$

అనగా, శీర్షబిందువులు(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) గల త్రిభుజము యొక్క గురుత్వకేంద్రము యొక్క నిరూపకములు $\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$.

దీనినే **గురుత్వకేంద్ర సూత్రము** అంటారు.

ఇవి గుర్తుంచుకుందాం.

- విభజన సూత్రం

  (x_1, y_1) మరియు (x_2, y_2) రెండు భిన్నబిందువులను కలిపే రేఖాఖండమును $m : n$ నిష్పత్తిలో విభజన చేయు బిందు నిరూపకములు $\left(\frac{mx_2 + nx_1}{m + n}, \frac{my_2 + ny_1}{m + n}\right)$.

- మధ్యబిందువు సూత్రం

  (x_1, y_1) మరియు (x_2, y_2) రెండు భిన్నబిందువులను కలిపే రేఖాఖండము యొక్క మధ్య బిందు నిరూపకములు $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$.

- గురుత్వకేంద్ర బిందువు సూత్రం

  (x_1, y_1), (x_2, y_2) మరియు (x_3, y_3) అనేవి త్రిభుజము యొక్క నిరూపకాలు అయినచో గురుత్వకేంద్ర బిందువు యొక్క నిరూపకాలు $\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$.

సాధించిన ఉదాహరణలు

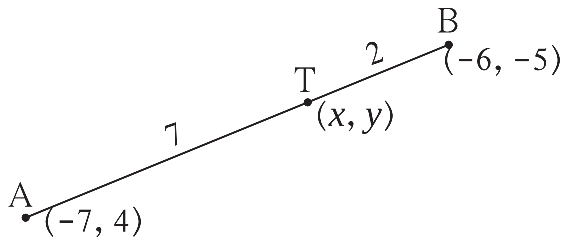
ఉదా. (1) A(-7,4) మరియు B(-6,-5) అయిన బిందువు T అనేది రే.ఖం. AB ని 7:2 నిష్పత్తిలో విభజన చేస్తుంది, అయిన బిందువు T నిరూపకములను కనుగొనండి.

సాధన : T యొక్క నిరూపకములను (x, y) అనుకుందాం.

∴ రేఖా ఖండము యొక్క విభజన సూత్రం ప్రకారం

$$x = \frac{mx_2 + nx_1}{m+n} = \frac{7\times(-6)+2\times(-7)}{7+2}$$

$$= \frac{-42-14}{9} = \frac{-56}{9}$$



పటం 5.17

$$y = \frac{my_2 + ny_1}{m+n} = \frac{7\times(-5)+2\times(4)}{7+2}$$

$$= \frac{-35+8}{9} = \frac{-27}{9} = -3$$

∴ T బిందువు యొక్క నిరూపకములు $\left(\frac{-56}{9}, -3\right)$.

ఉదా. (2) బిందువు P(-4, 6) అనేది A(-6, 10) మరియు B(r, s) బిందువులను కలిపే రేఖాఖండమును 2:1 నిష్పత్తిలో విభజించును, అయిన బిందువు B యొక్క నిరూపకములను కనుగొనండి.

సాధన : రేఖాఖండము విభజనసూత్రము ప్రకారం

$$-4 = \frac{2 \times r + 1 \times (-6)}{2+1}$$

∴ $-4 = \frac{2r-6}{3}$

∴ $-12 = 2r - 6$

∴ $2r = -6$

∴ $r = -3$

$$6 = \frac{2 \times s + 1 \times 10}{2+1}$$

∴ $6 = \frac{2s+10}{3}$

∴ $18 = 2s + 10$

∴ $2s = 8$

∴ $s = 4$

∴ బిందువు B యొక్క నిరూపకములు (-3, 4).

ఉదా. (3) A(15,5), B(9,20) మరియు A-P-B. అయిన బిందువు P(11,15) రే.ఖం. AB ని ఏ నిష్పత్తిలో విభజన చేస్తుందో కనుగొనండి.

సాధన : బిందువు P(11,15) రే.ఖం. AB ని $m : n$ నిష్పత్తిలో విభజన చేస్తుంది, అని అనుకుందాం.

∴ విభజన సూత్రము ప్రకారం,

$x = \dfrac{mx_2 + nx_1}{m+n}$

$\therefore\ 11 = \dfrac{9m+15n}{m+n}$

$\therefore\ 11m + 11n = 9m + 15n$

$\therefore\ 2m = 4n$

$\therefore\ \dfrac{m}{n} = \dfrac{4}{2} = \dfrac{2}{1}$

∴ విభజన నిష్పత్తి 2 : 1.

> ఇదేవిధంగా y – నిరూపకముల విలువను ప్రతిక్షేపించంగా లభించునిష్పత్తి ఎంతవస్తుందో కనుగొనండి. మీరేమి గమనించారో రాయండి.

ఉదా. (4) బిందువు A (2,−2) మరియు B(−7,4) వీటిని కలిపే రేఖా ఖండమును మూడు సమానభాగాలుగా చేయు బిందువు నిరూపకములను కనుగొనండి.

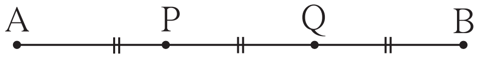
(రేఖాఖండముపై ఏ రెండు బిందువులు ఆ రేఖాఖండమును మూడు సమాన భాగాలు చేస్తాయో, ఆ బిందువులను ఆ రేఖాఖండము యొక్క త్రివిభాజన బిందువులంటారు.)

సాధన : బిందువు P మరియు Q లు A మరియు బిందువు B లను కలిపే రేఖాఖండము యొక్క త్రివిభజన బిందువులు. అనగా బిందువు P మరియు Q ల వలన రే.ఖం. AB మూడు సమాన భాగాలుగా అవుతుంది.

AP = PQ = QB .... (I)

$\dfrac{AP}{PB} = \dfrac{AP}{PQ+QB} = \dfrac{AP}{AP+AP} = \dfrac{AP}{2AP} = \dfrac{1}{2}$ .... (I) నుండి.

బిందువు P రే.ఖం. AB ని 1:2 నిష్పత్తిలో విభజన చేస్తుంది.



పటం 5.18

P యొక్క x నిరూపకం $= \dfrac{1\times(-7)+2\times2}{1+2} = \dfrac{-7+4}{3} = \dfrac{-3}{3} = -1$

P యొక్క y నిరూపకం $= \dfrac{1\times4+2\times(-2)}{1+2} = \dfrac{4-4}{3} = \dfrac{0}{3} = 0$

అదేవిధంగా Q బిందువు రే.ఖం. AB ని 2:1 నిష్పత్తిలో విభజన చేస్తుంది, అనగా $\dfrac{AQ}{QB} = \dfrac{2}{1}$

Q యొక్క x నిరూపకము $= \dfrac{2\times(-7)+1\times2}{2+1} = \dfrac{-14+2}{3} = \dfrac{-12}{3} = -4$

Q యొక్క y నిరూపకం $= \dfrac{2\times4+1\times-2}{2+1} = \dfrac{8-2}{3} = \dfrac{6}{3} = 2$

∴ రేఖాఖండము యొక్క త్రివిభజన బిందువుల నిరూపకములు (−1, 0), (−4, 2).

అధిక వివరాలకై :

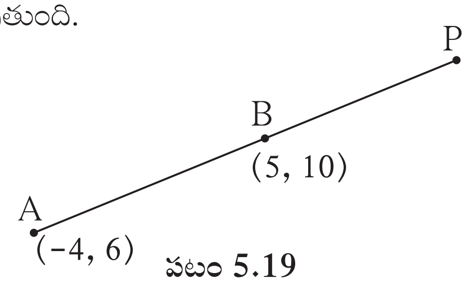
A మరియు B బిందువులను కలిపే రేఖాఖండము యొక్క బాహ్య విభజన ఏ విధంగా ఉండునో చూదాం.

$A(-4, 6), B(5, 10)$ అనే బిందువులు గల AB రేఖాఖండమును 3:1 నిష్పత్తిలో బాహ్యవిభజన చేయు బిందువు P యొక్క నిరూపకములను ఏ విధంగా కనుగొనవచ్చునో అది చూద్దాం.

$\frac{AP}{PB} = \frac{3}{1}$ అనగా AP, PB కంటే పెద్దది అయిన A–B–P అవుతుంది.

$\frac{AP}{PB} = \frac{3}{1}$ అనగా $AP = 3k$, $BP = k$, అయినచో $AB = 2k$

$$\therefore \frac{AB}{BP} = \frac{3}{2}$$



పటం 5.19

ఇప్పుడు బిందువు B రేఖాఖండము AP ని 2 : 1 నిష్పత్తి లో విభజన చేస్తుంది.

A మరియు B ల నిరూపకములు ఇచ్చినచో P యొక్క నిరూపకములను కనుగొనుట గురించి నేర్చుకున్నాం.

అభ్యాసమాలిక 5.2

1. ఒకవేళ బిందువు $A(-1,7)$ మరియు $B(4,-3)$ లను కలుపు రే.ఖం.ను బిందువు P, 2 : 3 నిష్పత్తిలో విభజన చేసినచో P నిరూపకములను కనుగొనండి.
2. కింది ప్రతీ ఉదాహరణలో రే.ఖం. PQ ని $a : b$ నిష్పత్తిలో విభజన చేయు బిందువు A నిరూపకములను కనుగొనండి.
   (1) $P(-3, 7), Q(1, -4), a : b = 2 : 1$
   (2) $P(-2, -5), Q(4, 3), a : b = 3 : 4$
   (3) $P(2, 6), Q(-4, 1), a : b = 1 : 2$
3. P–T–Q అయి బిందువు $P(-3, 10)$ మరియు బిందువు $Q(6, -8)$ లను కలిపే రేఖాఖండమును బిందువు $T(-1, 6)$ ఏ నిష్పత్తిలో విభజిస్తుంది?
4. రే.ఖం. AB వృత్తము యొక్క వ్యాసం మరియు P కేంద్రము $A(2, -3)$మరియు P $(-2, 0)$ ఉండగా B బిందువు యొక్క నిరూపకములను కనుగొనండి.
5. బిందువు $A(8, 9)$ మరియు $B(1, 2)$ లను కలిపే రే.ఖం. AB ను $P(k, 7)$ బిందువు ఏ నిష్పత్తిలో విభజన చేస్తుందో దానిని కనుగొనండి మరియు k యొక్క విలువ కనుగొనండి.
6. $(22, 20)$ మరియు $(0, 16)$ లను కలిపే రేఖాఖండం యొక్క మధ్యబిందు నిరూపకములను కనుగొనండి.
7. కింది త్రిభుజముల యొక్క శీర్షబిందువులు ఇవ్వబడినవి. ప్రతీ త్రిభుజము యొక్క గురుత్వకేంద్ర నిరూపకములను కనుగొనండి.
   (1)$(-7, 6), (2, -2), (8, 5)$
   (2) $(3, -5), (4, 3), (11, -4)$
   (3) $(4, 7), (8, 4), (7, 11)$

8. ΔABC యొక్క మధ్యగత రేఖల మిళిత బిందువు G. A, B మరియు G ల యొక్క నిరూపకాలు వరుసగా (−14, −19), (3, 5) మరియు (−4, −7) అయినచో C బిందువు యొక్క నిరూపకములను కనుగొనండి.

9. గురుత్వ కేంద్రం G (1, 5) గా గల త్రిభుజము యొక్క శీర్షబిందువులు A (h, −6), B (2, 3) మరియు C (−6, k) అయిన h మరియు k విలువలను కనుగొనండి.

10. బిందువులు A (2, 7) మరియు B(−4, −8) లను కలిపే రే.ఖం. AB త్రివిభజన చేయు బిందువుల నిరూపకములను కనుగొనండి.

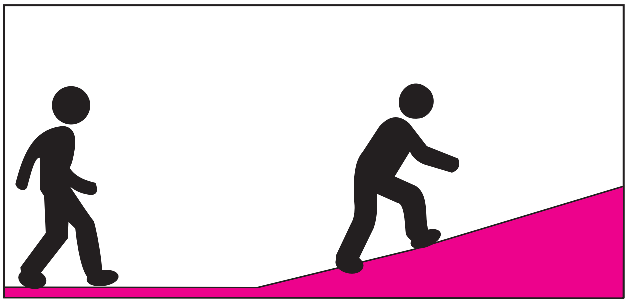
11. A (−14, −10), B(6, −2) గల రే.ఖం. AB ను నాలుగు సమాన రేఖాఖండాలుగా చేయు బిందువుల నిరూపకములను కనుగొనండి.

12. A (20, 10), B(0, 20) గల రే.ఖం. AB ని ఐదు సమాన రేఖాఖండాలుగా విభజన చేయు బిందువుల నిరూపకములను కనుగొనండి.

తెలుసుకుందాం.

రేఖ యొక్క వాలు (Slope of a line)

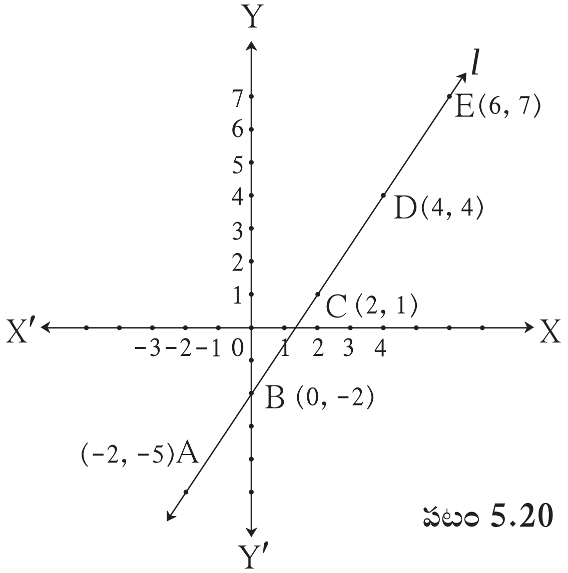
మనం సమతల నేలపై నడుస్తున్నపుడు ఎక్కువ శ్రమపడవలసిన అవసరం ఉండదు. ఏటవాలు తలంగల నేలపై నడుతస్తున్నపుడు కొంచెం శ్రమ పడవలసిస్తుంది. మనిషికి కొంచెం దమ్ము కూడా వస్తుంది. ఏటవాలు ఎత్తుగా ఉన్న దారిపై వెళ్ళేటప్పుడు గురుత్వకర్షణ శక్తికి వ్యతిరేకదిశలో పని చేయవలసి ఉంటుంది అని మనము విజ్ఞానములో చూసాం.



నిరూపక రేఖాగణితములో రేఖ యొక్క వాలు అనేది ఒక ముఖ్యమైన భావన. కింద ఇచ్చిన కృత్యము నుండి ఈ భావనను నేర్చుకొందాం.

కృత్యము I :

పక్క పటములో A(−2, −5), B(0,−2), C(2,1), D(4,4), E(6,7) అనేవి రేఖ l పై గల బిందువులు. ఈ నిరూపకములను ఉపయోగించి తయారుచేసిన కింది పట్టికను పరిశీలించండి.



పటం 5.20

క్ర. సం.	మొదటి బిందువు	రెండవ బిందువు	మొదటి బిందు నిరూపకములు (x_1, y_1)	రెండవ బిందు నిరూపకములు (x_2, y_2)	$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$
1	C	E	(2, 1)	(6, 7)	$\frac{7-1}{6-2} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$
2	A	D	(-2, -5)	(4, 4)	$\frac{4-(-5)}{4-(-2)} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$
3	D	A	(4, 4)	(-2, -5)	$\frac{-5-4}{-2-4} = \frac{-9}{-6} = \frac{3}{2}$
4	B	C	--	--	--
5	C	A	--	--	--
6	A	C	--	--	--

పట్టికలో మిగిలిన ఖాళీ ప్రదేశములను నింపి పట్టికను పూర్తి చేయండి. ఈ విధంగా రేఖ l పై గల బిందువుల యొక్క ఇంకా కొన్ని జతలను తీసుకోండి. మరియు ప్రతీ జతయొక్క $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ నిష్పత్తిని కనుగొనండి.

ఈ కృత్యము నుండి l రేఖ యొక్క (x_1, y_1) మరియు (x_2, y_2) లు ఏవేని రెండు బిందువుల నిష్పత్తి $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ స్థిరముగా ఉంటుందని గమనించాం.

రేఖ l యొక్క (x_1, y_1) మరియు (x_2, y_2) లు ఏవేని రెండు బిందువుయినచో $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ ఈ నిష్పత్తిని రేఖ l యొక్క వాలు అంటారు.

రేఖ యొక్క వాలును సాధారణంగా m చే సూచించుతారు.

$$\therefore \; m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

కృత్యము II: పటములో రేఖ l, t మరియు n మరియు వాటిపై కొన్ని బిందువులు ఇవ్వబడ్డాయి. వాటి ఆధారంగా రేఖల వాలులను కనుగొనండి.

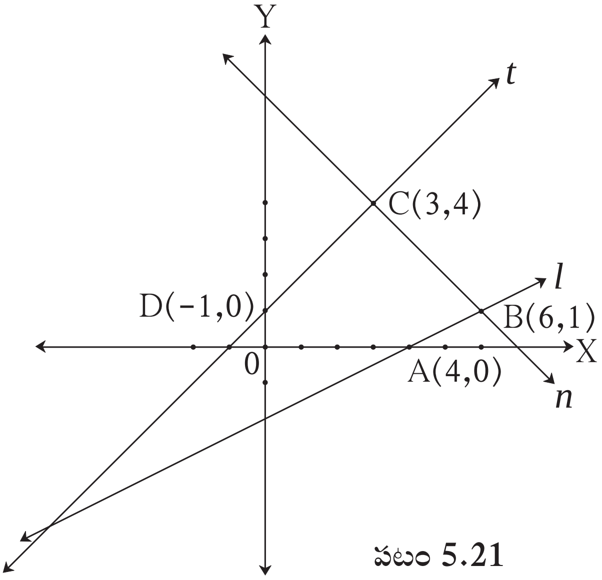
(1) రేఖ l మరియు రేఖ t ల వాలు ధన్మాతకం.

(2) రేఖ n వాలు ఋణాత్మకం.

(3) రేఖ t వాలు, రేఖ l వాలు కంటే ఎక్కువగా ఉంది.

(4) X− అక్షమునకు ధనదిశలో అల్ప కోణమును ఏర్పరిచే l మరియు t రేఖల వాలులు ధనాత్మకం.

(5) X− అక్షము ధనదిశలో అధిక కోణమును ఏర్పరిచే n రేఖల వాలులు ఋణాత్మకం. అని మనకు తెలుస్తుంది.



పటం 5.21

X−అక్షము, Y−అక్షం మరియు అక్షములకు సమాంతర రేఖల వాలు

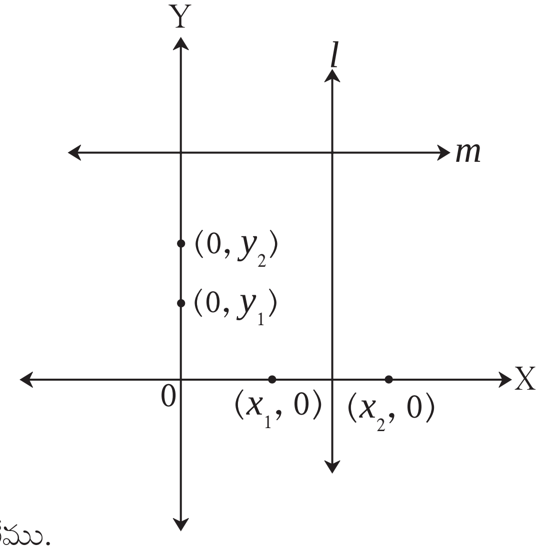
పటము 5.21 లో, $(x_1, 0)$ మరియు $(x_2, 0)$ లు X− అక్షముపై రెండు బిందువులు.

X− అక్షము వాలు $= \dfrac{0-0}{x_2 - x_1} = 0$

అదే విధంగా $(0, y_1)$ మరియు $(0, y_2)$ లు Y− అక్షముపై రెండు బిందువులు.

Y− అక్షము వాలు $= \dfrac{y_2 - y_1}{0-0} = \dfrac{y_2 - y_1}{0}$,

కాని 0 చే భాగించలేము కావు Y− అక్షము వాలును నిర్ణయించలేము.



పటం 5.22

ఇదేవిధంగా రేఖ m లాగానే X− అక్షమునకు సమాంతరంగా ఉన్న ఏదేని రేఖ వాలును కనుగొని చూడండి. దాని విలువ శూన్యము (సున్న) వచ్చును. ఇదేవిధంగా, రేఖ l లాగానే Y− అక్షమునకు సమాంతరముగా ఉన్న ఏదేని రేఖ వాలును నిర్ణయించలేము, అని చూడవచ్చును.

రేఖ యొక్క వాలు - త్రికోణమితీయ నిష్పత్తులను ఉపయోగించి.

పటము 5.23 లో, $P(x_1, y_1)$ మరియు $Q(x_2, y_2)$ లు రేఖ l పై గల రెండు బిందువులు.

రేఖ l X అక్షమును T బిందువు వద్ద ఖండిస్తుంది.

రే.ఖం. QS$\perp$X− అక్షం, రే.ఖం. PR$\perp$ రే.ఖం. QS $\therefore$ రే.ఖం. PR $\parallel$ రే.ఖం. TS .... సదృశ కోణాల నియమము

$\therefore$ QR $= y_2 - y_1$ మరియు PR $= x_2 - x_1$

$\therefore \quad \frac{QR}{PR} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ .... (I)

రేఖ TQ, X– అక్షములో θ కోణము చేయును

$\therefore \quad \frac{QR}{PR} = \tan\theta$ .... (II)

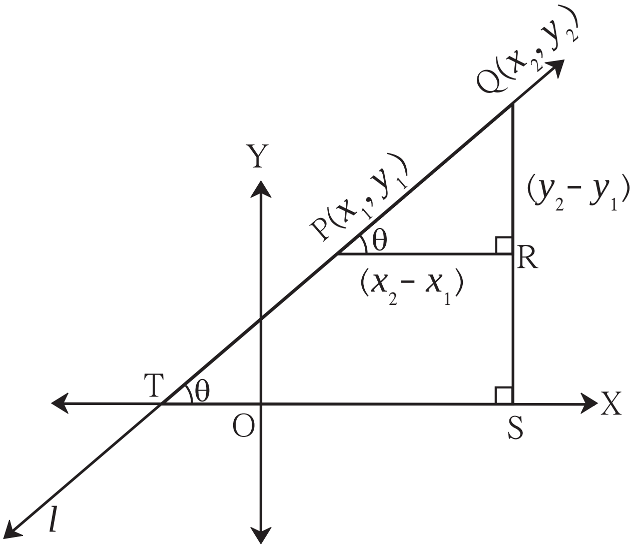
$\therefore$ (I) మరియు (II) లనుండి, $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \tan\theta$

$\therefore \quad m = \tan\theta$

ఇప్పుడు రే.ఖం. PR || రే.ఖం. TS, రేఖ l తిర్యగ్రేఖ

$\therefore \quad \angle QPR = \angle QTS$ .... సదృశ కోణములు

దీనినుండి, రేఖ X–అక్షమును ధన దిశవైపు చేసిన కోణము యొక్క ట్యాన్ నిష్పత్తి అనగా ఆ రేఖ యొక్క ఏటవాలు తనము అవుతుంది అని అర్థం.



పటం 5.23

ఎప్పుడైతే రెండు రేఖల వాలులు సమానంగా ఉంటాయో ఆ రేఖలు X– అక్షమును ధనదిశలో సమాన కోణములను ఏర్పరుస్తాయి.

$\therefore$ ఆ రెండు రేఖలు సమాంతరముగా ఉంటాయి.

సమాంతర రేఖల వాలు (Slope of parallel lines)

కృత్యము :

పటం 5.24 లో రేఖ l మరియు రేఖ t లు X– అక్షముతో ధనదిశలో ఏర్పచిన కోణము θ.

$\therefore$ రేఖ l || రేఖ t .... సదృశ కోణాల నియమం.

రేఖ l పై బిందువు A(–3, 0) మరియు బిందువు B(0, 3) లను గమనించండి. రేఖ AB యొక్క వాలును కనుగొనండి.

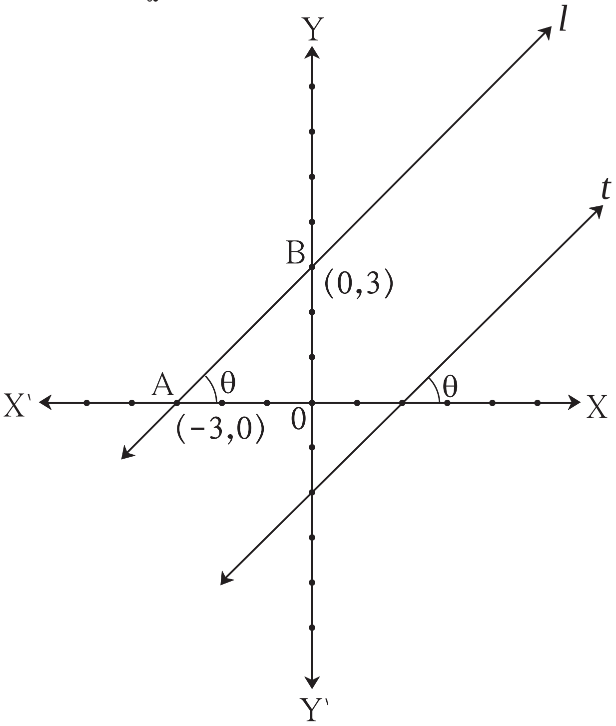
రేఖ AB యొక్క వాలు = $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$= \frac{\square - \square}{\square - \square} = \frac{\square}{\square}$

$= \square$

ఇదేవిధంగా రేఖ t పై గల యోగ్యమైన బిందువులను తీసుకొని దాని వాలును కనుగొనండి.

దీనినుండి సమాంతర రేఖల వాలులు సమానంగా ఉంటాయని మీరు గమనించగలరు.



పటం 5.24

ఇక్కడ $\theta = 45^\circ$.

వాలు, $m = \tan\theta$ దీనిని ఉపయోగించి కూడా రెండు సమాంతర రేఖల వాలులు సమానంగా ఉంటాయని సరిచూడండి.

ఇదేవిధంగా $\theta = 30^\circ$, $\theta = 60^\circ$ తీసుకొని సమాంతర రేఖల వాలులు సమానంగా ఉంటాయని సరిచూడండి.

ఇవి గుర్తుంచుకుందాం.

X− అక్షము యొక్క లేదా X− అక్షమునకు సమాంతరరేఖల వాలులు శూన్యముగా (సున్న) ఉంటాయి.

Y− అక్షము యొక్క లేదా Y− అక్షమునకు సమాంతర రేఖల వాలులను నిర్వచించలేము.

సాధించిన ఉదాహరణలు

ఉదా. (1) A (−3, 5), మరియు B (4, −1) బిందువుల గుండా పోవు రేఖ యొక్క వాలును కనుగొనండి.

సాధన : $x_1 = -3$, $x_2 = 4$, $y_1 = 5$, $y_2 = -1$

$$\therefore \text{ రేఖ AB యొక్క వాలు } = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-1-5}{4-(-3)} = \frac{-6}{7}$$

ఉదా. (2) P(−2, 3), Q(1, 2), R(4, 1) బిందువులు సరేఖీయములు అని చూపండి.

సాధన : P(−2, 3), Q(1, 2) మరియు R(4, 1) ఇవి దత్త బిందువులు.

$$\text{రేఖ PQ యొక్క వాలు } = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2-3}{1-(-2)} = -\frac{1}{3}$$

$$\text{రేఖ QR యొక్క వాలు } = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1-2}{4-1} = -\frac{1}{3}$$

రేఖ PQ మరియు రేఖ QR వాలులు సమానముగా ఉన్నాయి.

కాని బిందువు Q రెండు రేఖలపై గలదు.

$\therefore$ బిందువులు P, Q, R సరేఖీయాలు అవుతాయి.

ఉదా. (3) ఒకవేళ P(k, 0) మరియు Q(−3, −2),ఈ రెండు బిందువులను కలిపే రేఖవాలు $\frac{2}{7}$ అయినచో k విలువను కనుగొనండి.

సాధన : P(k, 0) మరియు Q(−3, −2)

$$\text{రేఖ PQ యొక్క వాలు } = \frac{-2-0}{-3-k} = \frac{-2}{-3-k}$$

రేఖ PQ యొక్క వాలు $\frac{2}{7}$ అని ఇవ్వబడింది.

$$\therefore \frac{-2}{-3-k} = \frac{2}{7} \qquad \therefore k = 4$$

ఉదా. **(4)** A (6, 1), B (8, 2), C (9, 4) మరియు D (7, 3) లు □ ABCD యొక్క శీర్షబిందువులైనచో □ ABCD సమాంతర చతుర్భుజము అని చూపండి.

సాధన : రేఖ యొక్క వాలు = $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

రేఖ AB యొక్క వాలు = $\frac{2-1}{8-6} = \frac{1}{2}$ .... (I)

రేఖ BC యొక్క వాలు = $\frac{4-2}{9-8} = 2$ .... (II)

రేఖ CD యొక్క వాలు = $\frac{3-4}{7-9} = \frac{1}{2}$ .... (III)

రేఖ DA యొక్క వాలు = $\frac{3-1}{7-6} = 2$ .... (IV)

రేఖ AB యొక్క వాలు = రేఖ CD యొక్క వాలు .... (I) మరియు (III) ల నుండి.

∴ రేఖ AB || రేఖ CD

రేఖ BC యొక్క వాలు = రేఖ DA యొక్క వాలు .... (II) మరియు (IV) ల నుండి.

∴ రేఖ BC || రేఖ DA

అనగా చతుర్భుజమందలి ఎదుటి భుజములు రెండు జతలు పరస్పరము సమాంతరముగా ఉన్నాయి.

∴ □ ABCD సమాంతర చతుర్భుజం అవుతుంది.

అభ్యాసమాలిక 5.3

1. రేఖ, X−అక్షము యొక్క ధనదిశలో ఏర్పరిచిన కోణములు ఇవ్వబడినవి, దానినుండి రేఖల వాలులను కనుగొనండి.
(1) 45° (2) 60° (3) 90°

2. కింది ఇవ్వబడిన బిందువులనుండి పోవు రేఖల వాలును కనుగొనండి.
(1) A (2, 3) మరియు B (4, 7) (2) P (−3, 1) మరియు Q (5, −2)
(3) C (5, −2) మరియు D (7, 3) (4) L (−2, −3) మరియు M (−6, −8)
(5) E(−4, −2) మరియు F (6, 3) (6) T (0, −3) మరియు S (0, 4)

3. కింది బిందువులు సరేఖీయాలు అవునా/కాదా వీటిని సరిచూచుటకు వాలును కనుగొనండి.
(1) A(−1, −1), B(0, 1), C(1, 3) (2) D(−2, −3), E(1, 0), F(2, 1)
(3) L(2, 5), M(3, 3), N(5, 1) (4) P(2, −5), Q(1, −3), R(−2, 3)
(5) R(1, −4), S(−2, 2), T(−3, 4) (6) A(−4, 4), K(−2, $\frac{5}{2}$), N(4, −2)

4. A (1, −1),B (0, 4),C (−5, 3) బిందువులు శీర్షాలుగల త్రిభుజము యొక్క ప్రతీ భుజము యొక్క వాలులను కనుగొనండి.

5. A (−4, −7),B (−1, 2), C (8, 5) మరియు D (5, −4) లు ABCD సమాంతర చతుర్భుజము యొక్క శీర్షబిందువులు అని చూపండి.

6. R(1, −1) మరియు S (−2, k) అయి రేఖ RS యొక్క వాలు −2 అయిన k విలువను కనుగొనండి.

7. $B(k, -5)$ మరియు $C(1, 2)$ ఈ రేఖ యొక్క వాలు 7 అయిన k విలువను కనుగొనండి.

8. $P(2, 4)$, $Q(3, 6)$, $R(3, 1)$ మరియు $S(5, k)$, అయి రేఖ PQ, రేఖ RS సమాంతరంగా ఉన్నట్లయితే k విలువను కనుగొనండి.

సంకీర్ణప్రశ్న సంగ్రహము 5

1. సరియైన ఐచ్ఛికమును ఎంచుకొని ఖాళీలను పూరించండి.

(1) రే.ఖం. AB, అనేది Y-అక్షమునకు సమాంతరముగా ఉండి Aబిందువు యొక్క నిరూపకములు (1,3) అయిన, B బిందువు యొక్క నిరూపకములు .... అవుతుంది.

(A)(3,1) (B)(5,3) (C)(3,0) (D)(1,-3)

(2) కిందివాటిలో .... అనే బిందువు X- అక్షముపై మూలబిందువును కుడివైపు ఉంది.

(A)(-2,0) (B)(0,2) (C)(2,3) (D)(2,0)

(3) (-3,4) అను బిందువు యొక్క దూరము మూలబిందువు నుండి ...... అవుతుంది.

(A)7 (B) 1 (C) 5 (D)-5

(4) ఏదేని ఒక రేఖ X- అక్షము యొక ధన దిశలో $30°$ కోణమును ఏర్పరచినట్లయితే ఆ రేఖ యొక్క వాలు .... అవుతుంది.

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (C) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (D) $\sqrt{3}$

2. కింది బిందువులు సరేఖీయాలు అవునా/కాదా సరిచూడండి.

(1) A (0,2) , B (1,-0.5), C (2,-3)

(2) P (1, 2) , Q (2, $\frac{8}{5}$) , R (3, $\frac{6}{5}$)

(3) L (1,2) , M (5,3) , N (8,6)

3. P (0,6) మరియు Q (12,20) లను కలిపే రేఖాఖండము యొక్క మధ్యబిందువు నిరూపకములను కనుగొనండి.

4. A (3,8) మరియు B (-9,3) ఈ బిందువులను కలిపే రేఖా ఖండమును Y- అక్షము ఏ నిష్పత్తిలో విభజిస్తుంది?

5. P(2,-5) మరియు Q(-2,9) బిందువుల నుండి సమాన దూరములో గల X-అక్షముపైగల బిందువును కనుగొనండి.

6. కింది బిందువుల మధ్య దూరమును కనుగొనండి.

(1) A (a, 0), B (0, a) (2) P (-6, -3), Q (-1, 9) (3) R ($-3a$, a), S (a, $-2a$)

7. ఒక త్రిభుజము యొక్క శీర్షబిందువులు A (-3,1), B (0,-2) మరియు C (1,3) అయినచో ఆ త్రిభుజము యొక్క పరికేంద్ర నిరూపకములను కనుగొనండి.

8. కింది బిందువులను కలిపే రేఖాఖండములు త్రిభుజమును ఏర్పరచగలవా? త్రిభుజము ఏర్పడినచో వాటి భుజముల ఆధారముగా అవి ఏ రకమైనవో చెప్పండి.

(1) L (6,4) , M (-5,-3) , N (-6,8) (2) P (-2,-6) , Q (-4,-2), R (-5,0)

(3) A ($\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$), B ($-\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}$), C ($-\sqrt{6}$, $\sqrt{6}$)

9. ఒకవేళ P $(-12,-3)$ మరియు Q $(4, k)$ ఈ బిందువుల గుండా పోయే రేఖ యొక్క వాలు $\frac{1}{2}$ అయినచో k విలువను కనుగొనండి.

10. A(4, 8), B(5, 5) ఈ బిందువులను కలిపే రేఖ, C(2,4), D(1,7) ఈ బిందువులను కలిపే రేఖకు సమాంతరముగా ఉంటుంది అని చూపండి.

11. P(1,−2), Q(5,2), R(3,−1) మరియు S(−1,−5) లు సమాంతర చతుర్భుజము యొక్క శీర్షబిందువులు అని చూపండి.

12. ఒకవేళ P(2,1), Q(−1,3), R(−5,−3) మరియు S(−2,−5) అయినచో □PQRS దీర్ఘచతురస్రము అని చూపండి.

13. A (−1, 1), B (5, −3) మరియు C (3, 5) శీర్షబిందువులు గల త్రిభుజము యొక్క మధ్యగతరేఖల పాదవులను కనుగొనండి.

14★. ఒకవేళ D (−7, 6), E (8, 5) మరియు F (2, −2) అనేవి త్రిభుజము యొక్క భుజముల మధ్యబిందువులు అయినచో వాటి గురుత్వ కేంద్రము యొక్క నిరూపకములను కనుగొనండి.

15. A(4, −1), B(6, 0), C(7, −2) మరియు D(5, −3) చతరురస్రము యొక్క శీర్షబిందువులు అని చూపండి.

16. A(7, 1), B(3, 5) మరియు C(2, 0) శీర్షబిందువులుగల త్రిభుజము యొక్క పరివృత్త కేంద్రము యొక్క నిరూపకములు మరియు పరివృత్తము యొక్క వ్యాసార్థమును కనుగొనండి.

17. A(4,−3) మరియు B(8,5), అయిన రే.ఖం. AB ని 3:1 నిష్పత్తిలో విభజించే బిందువు యొక్క నిరూపకములను కనుగొనండి.

18★. A(−4, −2), B(−3, −7) C(3, −2) మరియు D(2, 3) ఈ బిందువులను వరుసగా కలిపిన ఏర్పడు ABCD చతుర్భుజము ఏ రకానికి చెందిందో రాయండి.

19★. రే.ఖం. AB పై P, Q, R మరియు S బిందువుల వలన ఆ రేఖాఖండం ఐదు సర్వసమాన భాగాలుగా అవుతుంది. ఒకవేళ A−P−Q − R−S−B మరియు Q(12, 14), S(4, 18) అయిన A, P, R మరియు B ల యొక్క నిరూపకములను కనుగొనండి.

20. P (6,−6), Q (3,−7) మరియు R (3,3) ల నుండి పోయే వృత్తము యొక్క వృత్త కేంద్ర నిరూపకములను కనుగొనండి.

21★. సమాంతర చతుర్భుజము యొక్క మూడు శీర్షబిందువుల నిరూపకములు A (5,6), B (1,−2) మరియు C (3,−2) అయిన నాల్గవ బిందువు యొక్క వీలయ్యే నిరూపకముల అన్ని జతలను కనుగొనండి.

22. A (1,7), B (6,3) C (0,−3) మరియు D (−3,3) అనేవి శీర్షబిందువులు గల ఒక చతుర్భుజము. ఆ చతుర్భుజము యొక్క ప్రతి కర్ణం యొక్క వాలును కనుగొనండి.

R5RHTG

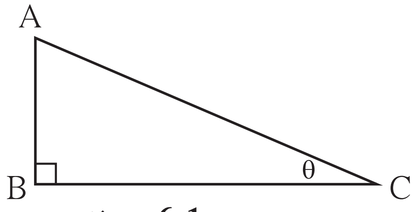
6 త్రికోణమితి

పదండి నేర్చుకుందాం

- త్రికోణమితీయ నిష్పత్తులు
- త్రికోణమితీయ సర్వసమీకరణాలు
- ఊర్ధ్వకోణము మరియు నిమ్నకోణము
- ఎత్తులు మరియు దూరములపై ఉదాహరణలు

కొంచెం గుర్తుతెచ్చుకుందాం.

1. కింది పటము ఆధారముగా ఖాళీలను పూరించండి.



పటం 6.1

$\sin\theta = \frac{\square}{\square}$, $\cos\theta = \frac{\square}{\square}$,

$\tan\theta = \frac{\square}{\square}$

2. కింది నిష్పత్తులలోని సంబంధమును పూర్తిచేయండి.

(i) $\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \square$ (ii) $\sin\theta = \cos(90 - \square)$

(iii) $\cos\theta = \sin(90 - \square)$ (iv) $\tan\theta \tan(90 - \theta) = \square$

3. కింది సమీకరణమును పూర్తి చేయండి.

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = \square$

4. క్రింది త్రికోణమితీయ నిష్పత్తుల విలువలను రాయండి.

(i) $\sin 30^\circ = \frac{1}{\square}$ (ii) $\cos 30^\circ = \frac{\square}{\square}$ (iii) $\tan 30^\circ = \frac{\square}{\square}$

(iv) $\sin 60^\circ = \frac{\square}{\square}$ (v) $\cos 45^\circ = \frac{\square}{\square}$ (vi) $\tan 45^\circ = \square$

తొమ్మిదవ తరగతిలో మనం అల్పకోణముయొక్క కొన్ని త్రికోణమీతీయ నిష్పత్తులను అభ్యసించాము. ఈ సంవత్సరము అల్పకోణము యొక్క మరికొన్ని త్రికోణమితీయ నిష్పత్తుల గురించి మనం నేర్చుకోబోతున్నాము.

తెలుసుకుందాం.

కోసెక్, సెక్ మరియు కాట్ నిష్పత్తులు (cosec, sec and cot ratios)

కోణము యొక్క సైన్ నిష్పత్తియొక్క విలోమ నిష్పత్తిని కోసికెంట్ (cosecant) నిష్పత్తి అంటారు

దీనిని క్లుప్తంగా cosec అని రాస్తారు $\therefore \ \operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta}$

అదేవిధముగా కోసైన్ మరియు ట్యాన్‌జెంట్ నిష్పత్తుల విలోమనిష్పత్తులను వరుసగా సికెంట్ (secant) మరియు కోటాన్‌జెంట్ (cotangent) నిష్పత్తులు అంటారు; మరియు వీటిని క్లుప్తముగా వరుసగా sec మరియు cot అని రాస్తారు.

$\therefore \ \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$ మరియు $\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$

పటం 6.2 లో,

$$\sin\theta = \frac{AB}{AC}$$

$$\therefore \ \operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta} = \frac{1}{\frac{AB}{AC}} = \frac{AC}{AB}$$

అనగా, $\operatorname{cosec}\theta = \frac{\text{కర్ణము}}{\text{ఎదుటి భుజము}}$

$$\tan\theta = \frac{AB}{BC}$$

$$\therefore \ \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} = \frac{1}{\frac{AB}{BC}}$$

$\cot\theta = \frac{BC}{AB} = \frac{\text{ఆసన్న భుజము}}{\text{ఎదుటి భుజము}}$

$$\cos\theta = \frac{BC}{AC}$$

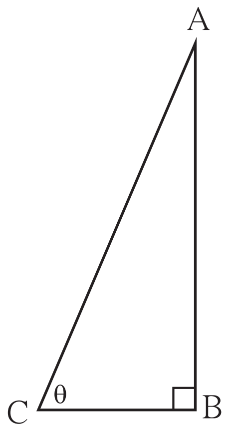
$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = \frac{1}{\frac{BC}{AC}} = \frac{AC}{BC}$$

అనగా $\sec\theta = \frac{\text{కర్ణము}}{\text{ఆసన్న భుజము}}$

$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ అని మీకు తెలుసు.

$$\therefore \ \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} = \frac{1}{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$\therefore \ \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$



పటం 6.2

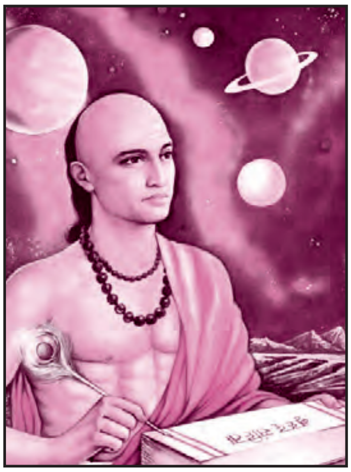
ఇవి గుర్తుంచుకుందాం.

త్రికోణమితీయ నిష్పత్తుల మధ్య అంతరసంబంధం

cosec, sec మరియు cot నిష్పత్తుల నిర్వచనాలనుండి,

- $\frac{1}{\sin\theta} = \text{cosec}\,\theta \qquad \therefore \sin\theta \times \text{cosec}\,\theta = 1$
- $\frac{1}{\cos\theta} = \sec\theta \qquad \therefore \cos\theta \times \sec\theta = 1$
- $\frac{1}{\tan\theta} = \cot\theta \qquad \therefore \tan\theta \times \cot\theta = 1$

అధిక వివరాలకై



సుప్రసిద్ధ భారతీయ గణితశాస్త్రవేత్త ఆర్యబట్టు కుసుమ్‌పూర్‌లో క్రీ.శ. 476లో జన్మించారు. ప్రస్తుతం బీహార్‌లోని పాట్నా దగ్గరలో ఈ ప్రదేశం ఉండేది. అతను అంకగణితము, బీజగణితము మరియు రేఖాగణితము గణితశాఖలలో అనేక పరిశోధనలు చేశాడు, 'ఆర్యభట్టీయం' అను గ్రంథంలో అతను అనేక గణిత సిద్ధాంతాలను సూత్రరూపంలో రాసి పెట్టాడు, ఉదాహరణకు,

(1) అంకగణితము శ్రేడిలోని n వ పదమును కనుగొనుటకు మరియు మొదటి n పదాల మొత్తము యొక్క సూత్రం.

(2) $\sqrt{2}$ యొక్క విలువ కనుగొనే సూత్రం.

(3) π సంఖ్య యొక్క 3.1416 అనే నాలుగు దశాంశస్థానాల వరకు సమానముగా ఉండే విలువ, మొదలగునవి.

ఖగోళశాస్త్ర అభ్యాసములో అతను త్రికోణమితీయమును ఉపయోగించెను మరియు వాటి **నిష్పత్తులు** (sine ratio) అను భావనను మొట్ట మొదటగా ఉపయోగించాడు.

ప్రపంచములోనే అతని కాలములో గణితము యొక్క ఆలోచన జ్ఞానము గణితములో మహత్తరమైన కృషి జరిగింది. అందువలన అతని గ్రంథం సంపూర్ణ భారతదేశంలో, అదే విధముగా అరబ్ దేశాలద్వారా యూరోప్‌లో కూడా ప్రచారం జరిగింది.

భూమి స్థిరంగా ఉండి, సూర్యుడు, చంద్రుడు, మరియు నక్షత్రాలు ప్రత్యేక వరుసలలో భూమి చుట్టు తిరుగుతాయని ఆ కాలంలోని పరిశోదకులందరి అభిప్రాయం, కాని పడవలలో ప్రయాణించే వారికి ఒడ్డునగల చెట్లు మరియు వస్తువులు వ్యతిరేక దిశలో పోతున్నట్లు అనిపిస్తుంది. అదే విధంగా సూర్యుడు, నక్షత్రాలు మొదలైన వాటి విషయాలలో కూడా భూమిపైగల మనుషులకు అలానే అనిపస్తుంది. అనగా భూమి భ్రమణం చేస్తుంది అని ఆర్యభట్టీయంలో రాశాడు.

19 ఏప్రిల్ 1975 రోజున భారతదేశంలో మొదటి ఉపగ్రహమును అంతరిక్షంలో ప్రవేశపెట్టారు. ఆ ఉపగ్రహమునకు 'ఆర్యభట్టు' అనే నామకరణము చేసి ఈ ఉత్తమ గణితుడిని అత్యుత్తముగా ఈ దేశము ఎంతో గౌరవమునిచ్చింది.

* $0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ మరియు 90° కొలతలుగల కోణముల యొక్క త్రికోణమితీయ నిష్పత్తుల పట్టిక.

త్రికోణమితీయ నిష్పత్తులు	కోణముల కొలతలు (θ)				
	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\theta$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	నిర్వచించలేము
$\text{cosec}\,\theta = \frac{1}{\sin\theta}$	నిర్వచించలేము	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1
$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	నిర్వచించలేము
$\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$	నిర్వచించలేము	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

తెలుసుకుందాం.

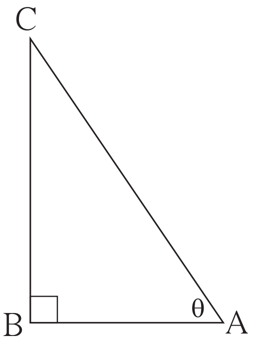
త్రికోణమితీయ సర్వసమీకరణాలు (Trigonometrical identities)

పక్క పటం 6.3 లో Δ ABC లంబకోణ త్రిభుజంలో, $\angle B = 90^\circ$

(i) $\sin\theta = \frac{BC}{AC}$ (ii) $\cos\theta = \frac{AB}{AC}$

(iii) $\tan\theta = \frac{BC}{AB}$ (iv) $\text{cosec}\,\theta = \frac{AC}{BC}$

(v) $\sec\theta = \frac{AC}{AB}$ (vi) $\cot\theta = \frac{AB}{BC}$



పటం 6.3

ఇదేవిధంగా, పైథాగరస్ సిద్ధాంతము ప్రకారం

$BC^2 + AB^2 = AC^2 \; . \; . \; . \; . \; . (I)$

సమీకరణం (I) యొక్క ఇరువైపులా AC^2 చే భాగించగా

$$\frac{BC^2 + AB^2}{AC^2} = \frac{AC^2}{AC^2}$$

$\therefore \frac{BC^2}{AC^2} + \frac{AB^2}{AC^2} = 1$

$\therefore \left(\frac{BC}{AC}\right)^2 + \left(\frac{AB}{AC}\right)^2 = 1$

$\therefore (\sin\theta)^2 + (\cos\theta)^2 = 1$ .... [$(\sin\theta)^2$ ను $\sin^2\theta$ అని మరియు $(\cos\theta)^2$ను $\cos^2\theta$ అని రాస్తారు.]

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ .... (II)

ఇప్పుడు సమీకరణము (II) యొక్క ఇరువైపులా $\sin^2\theta$ చే భాగించగా

$$\frac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta} + \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta} = \frac{1}{\sin^2\theta}$$

$1 + \cot^2\theta = \text{cosec}^2\theta$ .... (III)

అదే విధముగా, సమీకరణము (II) యొక్క ఇరువైపులా $\cos^2\theta$ చే భాగించగా

$$\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} + \frac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta}$$

$\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$

$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$ .... (IV)

సమీకరణము (II), (III) మరియు (IV) లను ప్రాథమిక సర్వసమీకరణములు అని అంటాం.

సాధించిన ఉదాహరణలు

ఉదా. (1) ఒకవేళ $\sin\theta = \frac{20}{29}$ అయిన $\cos\theta$ విలువను కనుగొనండి.

సాధన : పద్ధతి I

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

అని మనకు తెలుసు.

$\left(\frac{20}{29}\right)^2 + \cos^2\theta = 1$

$\frac{400}{841} + \cos^2\theta = 1$

$\cos^2\theta = 1 - \frac{400}{841}$

$= \frac{441}{841}$

ఇరువైపులా వర్గమూలం చేయగా

$\therefore \cos\theta = \frac{21}{29}$

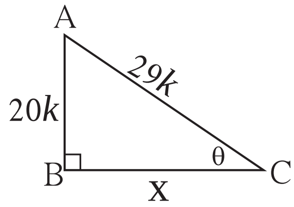
పద్ధతి II

$\sin\theta = \frac{20}{29}$

పటము నుండి $\sin\theta = \frac{AB}{AC}$

$\therefore AB = 20k$ మరియు $AC = 29k$

$BC = x$ అనుకుందాం



పటం 6.4

పైథాగరస్ సిద్ధాంతం ప్రకారం

$AB^2 + BC^2 = AC^2$

$(20k)^2 + x^2 = (29k)^2$

$400k^2 + x^2 = 841k^2$

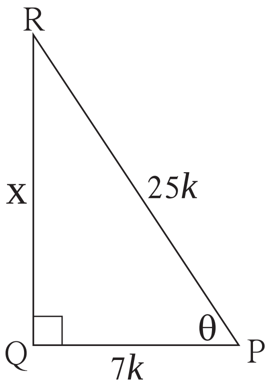
$x^2 = 841k^2 - 400k^2$

$= 441k^2$

$\therefore x = 21k$

$\therefore \cos\theta = \frac{BC}{AC} = \frac{21k}{29k} = \frac{21}{29}$

ఉదా. (2) ఒకవేళ $\sec\theta = \frac{25}{7}$ అయినచో $\tan\theta$ విలువను కనుగొనండి.



పటం 6.5

సాధన : **పద్ధతి I**

$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$

అని మనకు తెలుసు

$\therefore \quad 1 + \tan^2\theta = \left(\frac{25}{7}\right)^2$

$\therefore \quad \tan^2\theta = \frac{625}{49} - 1$

$= \frac{625 - 49}{49}$

$= \frac{576}{49}$

$\therefore \quad \tan\theta = \frac{24}{7}$

పద్ధతి II

పటం నుండి,

$\sec\theta = \frac{PR}{PQ}$

$\therefore \quad PQ = 7k, \ PR = 25k$

పైథాగరస్ సిద్ధాంతం ప్రకారం

$PQ^2 + QR^2 = PR^2$

$\therefore \quad (7k)^2 + QR^2 = (25k)^2$

$\therefore \quad QR^2 = 625k^2 - 49k^2 = 576k^2$

$\therefore \quad QR = 24k$

ఇప్పుడు, $\tan\theta = \frac{QR}{PQ} = \frac{24k}{7k} = \frac{24}{7}$

ఉదా. (3) ఒకవేళ $5\sin\theta - 12\cos\theta = 0$ అయిన $\sec\theta$ మరియు $\operatorname{cosec}\theta$ ల విలువలను కనుగొనండి.

సాధన : $5\sin\theta - 12\cos\theta = 0$

$\therefore \quad 5\sin\theta = 12\cos\theta$

$\therefore \quad \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{12}{5}$

$\therefore \quad \tan\theta = \frac{12}{5}$

అని మనకు తెలుసు

$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$

$\therefore 1 + \left(\frac{12}{5}\right)^2 = \sec^2\theta$

$\therefore \quad 1 + \frac{144}{25} = \sec^2\theta$

$\therefore \quad \frac{25 + 144}{25} = \sec^2\theta$

$\therefore \quad \sec^2\theta = \frac{169}{25}$

$\therefore \quad \sec\theta = \frac{13}{5}$

$\therefore \cos\theta = \frac{5}{13}$

ఇప్పుడు, $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$\therefore \quad \sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$

$\therefore \sin^2\theta = 1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2$

$= 1 - \frac{25}{169}$

$= \frac{144}{169}$

$\therefore \quad \sin\theta = \frac{12}{13}$

$\therefore \quad \operatorname{cosec}\theta = \frac{13}{12}$

ఉదా. (4) $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ అయిన $\frac{1-\sec\theta}{1+\csc\theta}$ విలువను కనుగొనండి.

సాధన : పద్ధతి I

$\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad\therefore \sec\theta = \frac{2}{\sqrt{3}}$

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$\therefore \sin^2\theta + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1$

$\therefore \sin^2\theta = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$

$\therefore \sin\theta = \frac{1}{2} \quad \therefore \operatorname{cosec}\theta = 2$

$$\therefore \frac{1-\sec\theta}{1+\operatorname{cosec}\theta} = \frac{1-\frac{2}{\sqrt{3}}}{1+2}$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{3}-2}{\sqrt{3}}}{3}$$

$$= \frac{\sqrt{3}-2}{3\sqrt{3}}$$

పద్ధతి II

$\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ అని మనకు తెలుసు.

$\therefore \quad \theta = 30^\circ$

$\therefore \sec\theta = \sec 30^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}}$

$\operatorname{cosec}\theta = \operatorname{cosec} 30^\circ = 2$

$$\therefore \frac{1-\sec\theta}{1+\operatorname{cosec}\theta} = \frac{1-\frac{2}{\sqrt{3}}}{1+2}$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{3}-2}{\sqrt{3}}}{3}$$

$$= \frac{\sqrt{3}-2}{3\sqrt{3}}$$

ఉదా. (5) $\sec x + \tan x = \sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}$ అని చూపండి.

సాధన : $\sec x + \tan x = \frac{1}{\cos x} + \frac{\sin x}{\cos x}$

$$= \frac{1+\sin x}{\cos x}$$

$$= \sqrt{\frac{(1+\sin x)^2}{\cos^2 x}}$$

$$= \sqrt{\frac{(1+\sin x)(1+\sin x)}{1-\sin^2 x}}$$

$$= \sqrt{\frac{(1+\sin x)(1+\sin x)}{(1-\sin x)(1+\sin x)}}$$

$$= \sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}$$

ఉదా. **(6)** కింది సమీకరణములనుండి θ ను తొలగించండి.

$x = a \cot\theta - b \operatorname{cosec}\theta$

$y = a \cot\theta + b \operatorname{cosec}\theta$

సాధన :

$$x = a \cot\theta - b \operatorname{cosec}\theta \quad \text{.......... (I)}$$

$$y = a \cot\theta + b \operatorname{cosec}\theta \quad \text{.......... (II)}$$

సమీకరణములు (I) మరియు (II) లను కూడగా,

$$x + y = 2a \cot\theta$$

$$\therefore \cot\theta = \frac{x+y}{2a} \quad \text{.......... (III)}$$

సమీకరణము (II) నుండి (I) ని తీసివేయగా,

$$y - x = 2b \operatorname{cosec}\theta$$

$$\therefore \operatorname{cosec}\theta = \frac{y-x}{2b} \quad \text{.......... (IV)}$$

ఇప్పుడు, $\operatorname{cosec}^2\theta - \cot^2\theta = 1$

$$\therefore \left(\frac{y-x}{2b}\right)^2 - \left(\frac{y+x}{2a}\right)^2 = 1$$

$$\therefore \frac{(y-x)^2}{4b^2} - \frac{(y+x)^2}{4a^2} = 1$$

లేదా $\left(\frac{y-x}{b}\right)^2 - \left(\frac{y+x}{a}\right)^2 = 4$

అభ్యాసమాలిక 6.1

1. ఒకవేళ $\sin\theta = \frac{7}{25}$ అయిన $\cos\theta$ మరియు $\tan\theta$ విలువలను కనుగొనండి.

2. ఒకవేళ $\tan\theta = \frac{3}{4}$ అయిన $\sec\theta$ మరియు $\cos\theta$ విలువలను కనుగొనండి.

3. ఒకవేళ $\cot\theta = \frac{40}{9}$ అయిన $\operatorname{cosec}\theta$ మరియు $\sin\theta$ ల విలువలను కనుగొనండి.

4. ఒకవేళ $5\sec\theta - 12\operatorname{cosec}\theta = 0$ అయిన $\sec\theta$, $\cos\theta$ మరియు $\sin\theta$ ల విలువలను కనుగొనండి.

5. ఒకవేళ $\tan\theta = 1$ అయిన $\frac{\sin\theta + \cos\theta}{\sec\theta + \operatorname{cosec}\theta}$ విలువను కనుగొనండి.

6. నిరూపించండి.

   (1) $\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta} + \cos\theta = \sec\theta$

   (2) $\cos^2\theta(1 + \tan^2\theta) = 1$

(3) $\sqrt{\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}} = \sec\theta - \tan\theta$

(4) $(\sec\theta - \cos\theta)(\cot\theta + \tan\theta) = \tan\theta \sec\theta$

(5) $\cot\theta + \tan\theta = \operatorname{cosec}\theta \sec\theta$

(6) $\frac{1}{\sec\theta - \tan\theta} = \sec\theta + \tan\theta$

(7) $\sec^4\theta - \cos^4\theta = 1 - 2\cos^2\theta$

(8) $\sec\theta + \tan\theta = \frac{\cos\theta}{1-\sin\theta}$

(9) ఒకవేళ $\tan\theta + \frac{1}{\tan\theta} = 2$ అయిన $\tan^2\theta + \frac{1}{\tan^2\theta} = 2$ అని చూపండి.

(10) $\frac{\tan A}{(1+\tan^2 A)^2} + \frac{\cot A}{(1+\cot^2 A)^2} = \sin A \cos A$

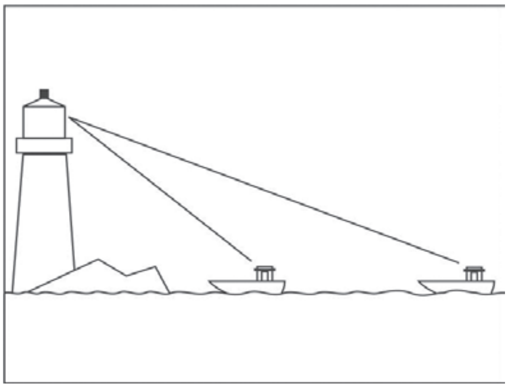
(11) $\sec^4 A\,(1 - \sin^4 A) - 2\tan^2 A = 1$

(12) $\frac{\tan\theta}{\sec\theta - 1} = \frac{\tan\theta + \sec\theta + 1}{\tan\theta + \sec\theta - 1}$

తెలుసుకుందాం.

త్రికోణమితి అనువర్తనాలు (Application of trigonometry)

అనేకసార్లు మనకు స్తంభాల, భవనముల లేదా చెట్ల ఎత్తులు, అదేవిధముగా ఓడ, దీప స్థంభముల మధ్య దూరము లేదా నది యొక్క లోతు మొదలగునవి తెలుసుకోవలసి ఉంటుంది. ఈ దూరములను మనము ప్రత్యక్షముగా కొలవలేము కాని త్రికోణమితీయ నిష్పత్తులను ఉపయోగించి ఎత్తులు లేదా దూరమును నిర్ధారించవచ్చు.



పటం 6.6

ఎత్తులు లేదా దూరములను కనుగొనుట కొరకు, ఇచ్చిన వివరముల ఆధారముగా చిత్తు పటమును మొదట గీద్దాం. చెట్లు, కొండలు, స్థూపము లాంటి వస్తువులు భూమిపై లంబముగా ఉంటాయి అని చూపించుటకొరకు మనము పటములో లంబరేఖాఖండమును ఉపయోగించుదాం. మనము పరిశీలికుని ఎత్తును లెక్కించము, సామాన్యంగా పరిశీలకుని కండ్లను లెక్కించే సమయంలో క్షితిజ సమాంతరముగా ఉంటుంది అని అనుకుంటాం.

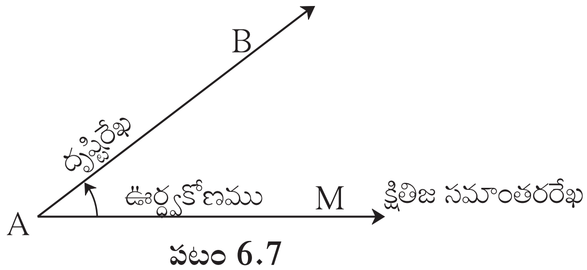
మొదట మనము కొన్ని సంబంధిత పదాలను గురించి నేర్చుకుందాం.

(i) దృష్టిరేఖ (Line of vision) :

బిందువు 'A' వద్దగల పరిశీలకుడు బిందువు 'B' వైపుకు చూచునపుడు ఏర్పడే రేఖ AB ను దృష్టిరేఖ అంటారు.

(ii) ఊర్ధ్వకోణము (Angle of elevation) :

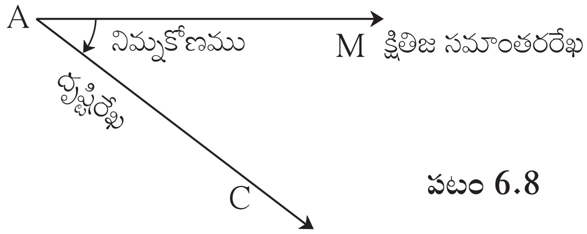
పరిశీలకుని సామాన్య దృష్టిరేఖ AM క్షితిజ సమాంతర రేఖ. పరిశీలించవలసిన బిందువు B, A తో పోల్చగా అది అధిక ఎత్తులో ఉన్నచో AB దృష్టిరేఖ, రేఖ AM చే చేయుకోణమే ఊర్ధ్వకోణము. పటములో $\angle$ MAB ఊర్ధ్వకోణము.



పటం 6.7

(iii) నిమ్నకోణము (Angle of depression) :

పరిశీలన బిందువు 'C' అనేది క్షితిజ సమాంతర రేఖ AM కు కింది వైపు ఉన్నట్లయితే దృష్టిరేఖ AC రేఖ AM తో నిమ్నకోణమును ఏర్పరుస్తుంది. పటంలోని $\angle$MAC నిమ్నకోణము అవుతుంది.



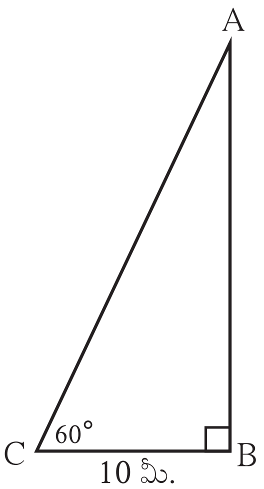
పటం 6.8

ఎప్పుడైతే మనము క్షితీజ సమాంతరరేఖ యొక్క పైవైపుకి చూ చినప్పుడు ఏర్పడు కోణము ఊర్ధ్వకోణము అవుతుంది.
ఎప్పుడైతే మనము క్షితీజ సమాంతర రేఖ యొక్క కింది వైపుకి చూచినప్పుడు ఏర్పడుకోణము నిమ్నకోణము అవుతంది.

సాధించిన ఉదాహరణలు

ఉదా. (1) ఒక పరిశీలకుడు చెట్టునుండి10 మీ దూరములో ఉండి చెట్టు శిఖరమును చూచినపుడు 60° ఊర్ధ్వకోణము ఏర్పడుతుంది. అయితే చెట్టు ఎత్తు ఎంత? ($\sqrt{3}$ = 1.73)

సాధన : పటం 6.9 లో C బిందువు వద్ద పరిశీలకుడు గలడు AB అనేది చెట్టు ఎత్తు.



పటం 6.9

AB = h = చెట్టు ఎత్తు,

చెట్టు నుండి పరిశీలకుని దూరము BC = 10 మీ.

ఊర్ధ్వకోణము (θ)$\angle$ BCA= 60°

పటంనుండి, $\tan\theta = \dfrac{AB}{BC}$ .... (I)

$\tan 60^\circ = \sqrt{3}$ .... (II)

$\therefore \quad \dfrac{AB}{BC} = \sqrt{3}$ .... (I) మరియు (II) లనుండి

$\therefore \quad AB = BC\sqrt{3} = 10\sqrt{3}$

$\therefore \quad AB = 10 \times 1.73 = 17.3$ మీ.

$\therefore$ చెట్టు యొక్క ఎత్తు 17.3 మీ.

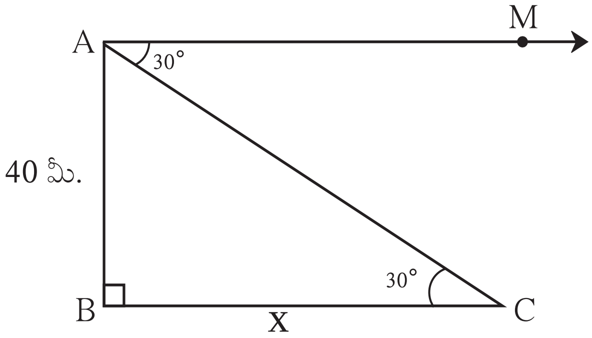
ఉదా. (2) 40 మీ ఎత్తుగల భవనముపై నుండి, ఆ భవనము నుండి కొన్ని మీటర్ల దూరములో నిలబెట్టిన స్కూటరును చూచుటకు. 30° కోణముగల నిమ్నకోణము ఏర్పడుతుంది, అయితే ఆ స్కూటరు భవనమునుండి ఎంత దూరములో ఉంది? ($\sqrt{3} = 1.73$)

సాధన : పటం 6.10 లో రే.ఖం. AB భవనము. భవనము నుండి 'x' మీ దూరములో 'C' వద్ద స్కూటరు గలదు. పటములో A వద్ద పరిశీలకుడు గలడు.

AM క్షితిజ సమాంతర రేఖ.

$\angle$ MAC నిమ్నకోణము

$\angle$ MAC మరియు $\angle$ ACB లు ఏకాంతర కోణములు సమానం అని తెలుసుకొనము.



పటం 6.10

పటము ఆధారముగా, $\tan 30^\circ = \frac{AB}{BC}$

$$\therefore \quad \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{40}{x}$$

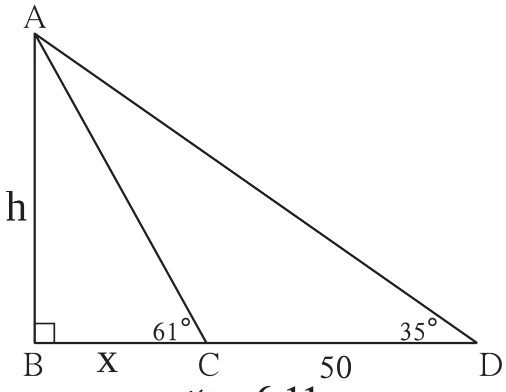
$$\therefore \quad x = 40\sqrt{3}$$

$$= 40 \times 1.73$$

$$= 69.\ 20 \text{ మీ..}$$

$\therefore$ ఆ స్కూటరు భవనము నుండి 69.20 మీ దూరములో ఉంది.

ఉదా. (3) ప్రవహించే నది యొక్క వెడల్పు కనుగొనుటకు ఒక వ్యక్తి ప్రవహించేనది యొక్క ఒక తీరముకు వ్యతిరేక తీరంలోగల దీపస్తంభ శిఖరమును చూచునప్పుడు 61° కోణముగల ఊర్ధ్వకోణము ఏర్పడింది. 50 మీ వెనకకు వెళ్ళి మళ్లీ దీపస్థంభశిఖరమును చూచునప్పుడు 35° కోణముగల ఊర్ధ్వకోణము ఏర్పడింది. అయిన ప్రవహించే నది యొక్క వెడల్పు మరియు దీపస్తంభం ఎత్తులను కనుగొనండి. ($\tan 61^\circ \approx 1.8$, $\tan 35^\circ \approx 0.7$)



పటం 6.11

సాధన : రే.ఖం. AB నది యొక్క అవతల ఒడ్డుకు గల దీపస్తంభమును సూచించుతుంది. 'A' దీపస్తంభ శిఖరము, రే.ఖం. BC ప్రవహించే నదియొక్క వెడల్పును సూచిస్తుంది.

దీపస్తంభము ఎత్తు h మరియు ప్రవహించే నదియొక్క వెడల్పు x మీ అనుకుందాం.

పటము ఆధారముగా $\tan 61^\circ = \frac{h}{x}$

$$\therefore\ 1.8 = \frac{h}{x}$$

$h = 1.8 \times x$

$10h = 18x$ .... (I)..... 10 చే గుణించగా

లంబకోణ Δ ABD లో,

అదే విధంగా , $\tan 35 = \dfrac{h}{x + 50}$

$$0.7 = \frac{h}{x + 50}$$

$\therefore\ h = 0.7\,(x + 50)$

$\therefore\ 10h = 7\,(x + 50)$ .... (II)

[(I), (II) నుండి]

$18x = 7(x + 50)$

$\therefore\ 18x = 7x + 350$

$\therefore\ 11x = 350$

$\therefore\ x = \dfrac{350}{11} = 31.82$

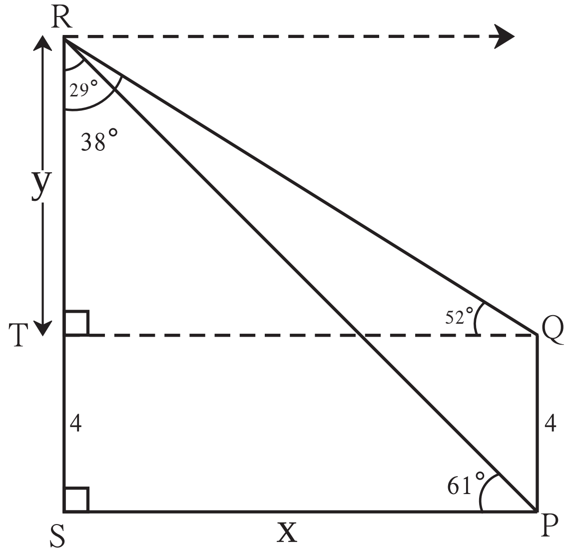
ఇప్పుడు, $h = 1.8x = 1.8 \times 31.82$

$= 57.28$ మీ.

$\therefore$ ప్రవహించే నది యొక్క వెడల్పు=31.82మీ.

దీపస్తంభము ఎత్తు = 57.28 మీ.

ఉదా. (4) రోషిని ఇంటి గుమ్మంవద్ద నిలబడింది. ఇంటి దగ్గర నుండి కొంచెం దూరములో చెట్టు శిఖరముపై కూర్చున్న ఒక గ్రద్ద తనకు కనబడింది. అప్పుడు తన దృష్టి యొక్క ఊర్ధ్వకోణము 61° ఉంది. అది ఇంకా స్పష్టంగా కనిపించాలని తను ఇంటికి 4 మీటర్ల ఎత్తులోగల గచ్చు పైకి వెళ్ళింది. అక్కడి నుండి చూచునప్పుడు తన దృష్టి యొక్క ఊర్ధ్వకోణము 52° ఉంది. అయిన ఆ గ్రద్ద భూమి నుండి ఎంత ఎత్తులో ఉంది?



పటం 6.12

($\tan 61^\circ = 1.80$, $\tan 52^\circ = 1.28$, $\tan 29^\circ = 0.55$, $\tan 38^\circ = 0.78$)

సాధన : పటం 6.12 లో PQ ని ఇల్లు మరియు SR ను చెట్టు, గ్రద్దస్థానము R వద్ద ఉంది అని అనుకుందాం.

రే.ఖం. QT $\perp$ రే.ఖం. RS గీయండి.

$\therefore \square$ TSPQ ఒక దీర్ఘచతురస్రం

SP = x అని అనుకుందాం TR = y అని అనుకుందాం.

ఇప్పుడు, Δ RSP లో, $\angle$ PRS = $90^\circ - 61^\circ = 29^\circ$

అదేవిధంగా, Δ RTQ లో, $\angle$ QRT = $90^\circ - 52^\circ = 38^\circ$

$\therefore \tan \angle PRS = \tan 29^\circ = \dfrac{SP}{RS}$

$\therefore 0.55 = \dfrac{x}{y+4}$

$\therefore x = 0.55(y + 4)$ .... (I)

అదే విధంగా, $\tan \angle QRT = \dfrac{TQ}{RT}$

$\therefore \tan 38^\circ = \dfrac{x}{y}$ .... $[\because SP = TQ = x]$

$\therefore 0.78 = \dfrac{x}{y}$

$\therefore x = 0.78y$ .... (II)

$\therefore 0.78y = 0.55(y + 4)$ .... (I), (II) నుండి

$\therefore 78y = 55(y + 4)$

$\therefore 78y = 55y + 220$

$\therefore 23y = 220$

$\therefore y = 9.565 = 10$ (సుమారు పూర్ణసంఖ్య వరకు)

$\therefore RS = y + 4 = 10 + 4 = 14$

$\therefore$ గ్రద్ద భూమినుండి 14 మీటర్ల ఎత్తులో ఉంది.

ఉదా. (5) తుఫాను వలన ఒక చెట్టు విరిగెను మరియు చెట్టు శిఖరము భూమిపై వాలెను మరియు విరిగిన భాగము భూమిచే 30° ల కోణం చేసింది. చెట్టు శిఖరము మరియు మొదలు మధ్యదూరము 10 మీ అయినచో చెట్టు ఎత్తును కనుగొనండి.

సాధన : పటం 6.13 లో AB అనే చెట్టు యొక్క శిఖరము 'A', తుఫాను వలన చెట్టు 'C' వద్ద విరగడం వలన శిఖరం D వద్ద వాలెను.

$\angle CDB = 30^\circ$, BD = 10 మీ, BC = x మీ

CA= CD = y మీ.

లంబకోణ Δ CDB లో,

$$\tan 30^\circ = \frac{BC}{BD}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{x}{10}$$

$$x = \frac{10}{\sqrt{3}}$$

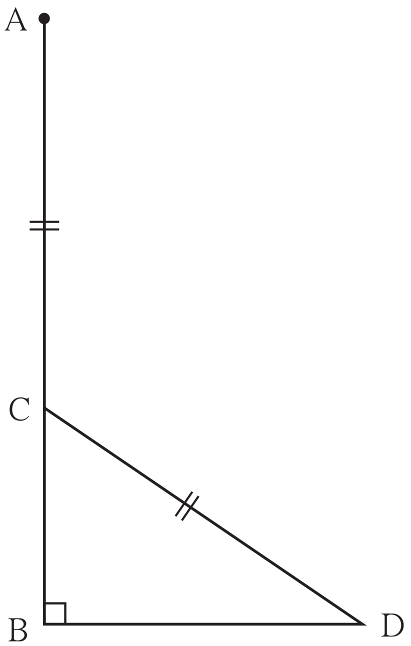
$$y = \frac{20}{\sqrt{3}}$$

$$x + y = \frac{10}{\sqrt{3}} + \frac{20}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{30}{\sqrt{3}}$$

$$x + y = 10\sqrt{3}$$

చెట్టుయొక్క ఎత్తు $10\sqrt{3}$ మీ.



పటం 6.13

అభ్యాసమాలిక 6.2

1. ఒక వ్యక్తి ఒక చర్చివద్దనుండి 80 మీ దూరములో నిలబడి ఉన్నాడు. ఆ వ్యక్తి చర్చిపైకి చూచునప్పుడు 45° ఊర్ధ్వకోణము గలదు. అయిన చర్చి ఎత్తు ఎంత?

2. దీప స్థంభము పై నుండి ఒక పడవను చూచునపుడు 60° కొలతగల నిమ్నకోణము గలదు. ఒకవేళ దీపస్థంభము ఎత్తు 90మీ. ఉన్నచో ఆ పడవ దీపస్థంభము నుండి ఎంత దూరములో ఉంది? ($\sqrt{3} = 1.73$)

3. 12 మీ వెడల్పుగల రహదారికి ఇరువైపులా రెండు భవనములు కలవు. వాటినుండి 10 మీ ఎత్తులోగల మొదటి భవనముపై నుండి రెండవ భవన శిఖరమును చూచునప్పుడు 60° కొలతగల ఊర్ధ్వకోణము ఏర్పడుతుంది, అయిన రెండవ భవనము ఎత్తు ఎంత?

4. 18 మీ మరియు 7 మీ ఎత్తుగల రెండు స్తంభాలు భూమి మీద నిటారుగా ఉన్నవి. వాటి రెండు పై చివరలను కలిపే తీగపొడవు 22 మీ. క్షితిజ సమాంతర తీగ ద్వారా ఏర్పడే కోణము కొలతను కనుగొనండి.

5. తుఫాను వలన ఒక చెట్టు విరిగింది మరియు చెట్టు పైకొన (శిఖరము) భూమిపై వాలెను మరియు విరిగిన భాగము భూమితో 60° కోణం చేసింది. చెట్టుపైకొన మరియు మొదలుల మధ్య దూరము 20 మీ అయినట్లయితే చెట్టు ఎత్తు ఎంత?

6. ఒక గాలి పటమును భూమి నుండి ఎగురవేసినపుడు 60 మీ. ఎత్తు వరకు ఎగిరినది. గాలిపటము దారము చివరను భూమి మీద కట్టబడినది. భూమి మరియు దారము మధ్య 60° కోణము ఏర్పడుతుంది. దారము వక్రంగా లేదని భావించి దారము పొడవును కనుగొనండి. ($\sqrt{3} = 1.73$)

సంకీర్ణప్రశ్న సంగ్రహము 6

1. ఇవ్వబడిన బహుళైచ్ఛిక సమాధానాలలో సరియైన ఐచ్ఛికమును గుర్తించండి.

(1) $\sin\theta \ \ \mathrm{cosec}\theta$ = ఎంత?

(A) 1 (B) 0 (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\sqrt{2}$

(2) కింది వాటిలో నుండి $\mathrm{cosec}45°$ విలువ ఎంత?

(A) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (B) $\sqrt{2}$ (C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (D) $\frac{2}{\sqrt{3}}$

(3) $1 + \tan^2\theta$ = ఎంత?

(A) $\cot^2\theta$ (B) $\mathrm{cosec}^2\theta$ (C) $\sec^2\theta$ (D) $\tan^2\theta$

(4) ఎప్పుడైతే మనము క్షితిజ సమాంతర రేఖయొక్క పైవైపుకి చూస్తాయో, అప్పుడు అది .... అవుతుంది.

(A)ఊర్ధ్వకోణము (B)నిమ్నకోణం (C) శూన్యము (D)రేఖీయ కోణం

2. ఒక వేళ $\sin\theta = \frac{11}{61}$ అయిన సర్వసమీకరణాలను ఉపయోగించి $\cos\theta$ విలువను కనుగొనండి.

3. ఒక వేళ $\tan\theta = 2$, అయిన మిగిలిన త్రికోణమితీయ నిష్పత్తుల విలువలను కనుగొనండి.

4. ఒకవేళ $\sec\theta = \frac{13}{12}$, అయిన మిగిలిన త్రికోణమితీయ నిష్పత్తుల విలువలను కనుగొనండి.

5. నిరూపించండి.

(1) $\sec\theta\,(1 - \sin\theta)\,(\sec\theta + \tan\theta) = 1$

(2) $(\sec\theta + \tan\theta)\,(1 - \sin\theta) = \cos\theta$

(3) $\sec^2\theta + \mathrm{cosec}^2\theta = \sec^2\theta \times \mathrm{cosec}^2\theta$

(4) $\cot^2\theta - \tan^2\theta = \mathrm{cosec}^2\theta - \sec^2\theta$

(5) $\tan^4\theta + \tan^2\theta = \sec^4\theta - \sec^2\theta$

(6) $\frac{1}{1-\sin\theta} + \frac{1}{1+\sin\theta} = 2\sec^2\theta$

(7) $\sec^6 x - \tan^6 x = 1 + 3\sec^2 x \times \tan^2 x$

(8) $\frac{\tan\theta}{\sec\theta+1} = \frac{\sec\theta-1}{\tan\theta}$

(9) $\frac{\tan^3\theta-1}{\tan\theta-1} = \sec^2\theta + \tan\theta$

(10) $\dfrac{\sin\theta - \cos\theta + 1}{\sin\theta + \cos\theta - 1} = \dfrac{1}{\sec\theta - \tan\theta}$

6. ఒక బాలుడు ఒక భవనము నుండి 48 మీటర్ల దూరములో నిలుబడి ఉన్నాడు. ఆ భవనము పై కొనను చూస్తున్నప్పుడు ఆ బాలుడు 30° కొలతగల ఊర్ధ్వకోణము చేయవలసి వచ్చింది అయిన ఆ భవనము ఎత్తు ఎంత?

7. స్థంభముపై నుండి పరిశీలకుడు ఒక ఓడను చూచునప్పుడు 30° కొలత గల నిమ్నకోణము ఏర్పడింది. ఒకవేళ దీప స్థంభము ఎత్తు 100 మీ అయిన ఓడ దీప స్థంభం నుండి ఎంత దూరములో ఉంది?

8. 15 మీ వెడల్పుగల రహదారికి ఇరువైపులా రెండు భవనములు ఉన్నాయి. వాటినుండి 12 మీ ఎత్తుగల మొదటి భవనము పై నుండి రెండవ భవనము పై భాగమును 30° ఊర్ధ్వకోణముతో చూచెను. అయిన రెండవ భవనము ఎత్తు ఎంత?

9. అగ్నిమాపక యంత్ర వాహనముపై అమర్చబడిన నిచ్చెన తక్కువలో తక్కువ 70° కొలతగల కోణములో లేపవచ్చును, ఆ సమయంలో ఎక్కువలో ఎక్కువ అది 20 మీ పొడవు ఉంటుంది. వాహనముపైగల నిచ్చెన మొదలు భూమినుండి 2మీ ఎత్తులో ఉంది. అయిన నిచ్చెన యొక్క రెండవ చివర భూమి నుండి ఎక్కువలో ఎక్కువ ఎంత దూరము వరకు వెళ్ళుతుంది? $(\sin 70^\circ \approx 0.94)$

10. ఆకాశంలో ఎగురుతున్న విమానమును కిందకి దించుట మొదలుపెట్టినప్పుడు 20° నిమ్నకోణము ఏర్పడుతుంది, అప్పుడు విమానవేగము గంటకు 200 కి.మీ. ఆ విమానంను 54 సెంకడ్లలో విమానచోదకుడు కిందికి దించాడు. భూమి మీదికి దింపే సమయములో ఆ విమానం భూమి నుండి ఎంత ఎత్తులో ఉంది? $(\sin 20^\circ \approx 0.342)$

R61DV4

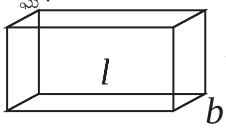
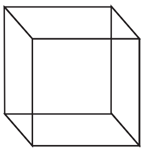
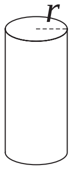
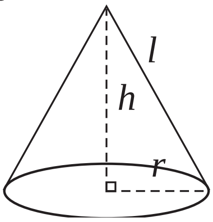
7 క్షేత్రమితి

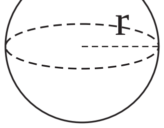
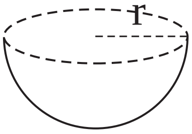
పదండి నేర్చుకుందాం

- వివిధ ఘనాకృతుల ఉపరితల వైశాల్యములు మరియు ఘణపరిమాణములపై ఆధారిత మిశ్రమ ఉదాహరణలు.
- వృత్తచాపము – వృత్త చాపపొడవు.
- సెక్టరు వైశాల్యము.
- వృత్త ఖండ వైశాల్యము.

కొంచెం గుర్తుతెచ్చుకుందాం.

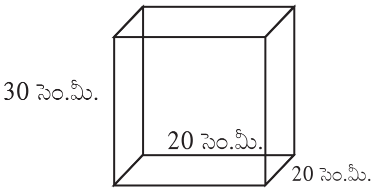
మనం కింది తరగతిలో కొన్ని త్రిమితీయ పటాల ఉపరితల వైశాల్యం, ఘణపరిమాణములను నేర్చుకున్నాము. వాటి కొరకు అవసరమయ్యే సూత్రాలను గుర్తుకు తెచ్చుకుందాం.

క్ర.సం.	త్రిమితీయ ఆకృతి	సూత్రములు
1.	దీర్ఘఘనము 	దీర్ఘఘన ప్రక్కతల వైశాల్యం = $2h\,(l + b)$ దీర్ఘఘన సంపూర్ణతల వైశాల్యం=$2(lb + bh + hl)$ దీర్ఘఘన ఘనపరిమాణం = lbh
2.	ఘనం 	ఘన ప్రక్కతల వైశాల్యం = $4l^2$ ఘన సంపూర్ణతల వైశాల్యం = $6l^2$ ఘన ఘనపరిమాణం = l^3
3.	క్రమస్థూపం 	క్రమస్థూప వక్రతల వైశాల్యం = $2\pi rh$ క్రమస్థూప సంపూర్ణతల వైశాల్యం = $2\pi r\,(r + h)$ క్రమస్థూప ఘనపరిమాణం = $\pi r^2 h$
4.	శంకువు 	శంకువు ఏటవాలు ఎత్తు (l) = $\sqrt{h^2 + r^2}$ శంకువు వక్రతల వైశాల్యం = πrl శంకువు సంపూర్ణతల వైశాల్యం = $\pi r\,(r + l)$ శంకువు ఘనపరిమాణం = $\frac{1}{3} \times \pi r^2 h$

క్ర.సం.	త్రిమితీయ ఆకృతి	సూత్రములు
5.	గోళము 	గోళ ఉపరితల వైశాల్యము = $4\pi r^2$ గోళ ఘనపరిమాణము = $\frac{4}{3}\pi r^3$
6.	అర్ధగోళము 	అర్ధగోళ వక్రతల వైశాల్యము = $2\pi r^2$ స్థూల అర్ధగోళ సంపూర్ణతల వైశాల్యము = $3\pi r^2$ అర్ధగోళ ఘనపరిమాణము = $\frac{2}{3}\pi r^3$

క్రింది ఉదాహరణములు సాధించుము

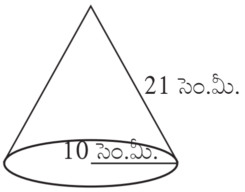
ఉదా.(1)



పటం 7.1

పక్క పటంలో 30 సెం.మీ. ఎత్తు, 20 సెం.మీ. ల పొడవు 20 సెం.మీ. ల వెడల్పులు గల ఒక నూనె పీపా (డబ్బా) గలదు. దానిలో ఎన్ని లీటర్ల నూనె పడుతుంది. (1 లీ = 1000 సెం.మీ.^{3})

ఉదా.(2)



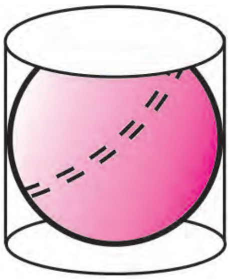
పటం 7.2

పక్క పటంలో హాస్యగాడి (విదూశకుని) (Joker) టోపి మరియు దాని కొలతలు చూపబడినవి. ఈ టోపీని తయారు చేయడానికి ఎంత బట్ట అవసరమౌతుంది?

ఆలోచిద్దాం.

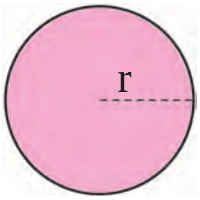
పక్క పటంలో చూపినవిధంగా ఒక స్థూపంలో బంతి గలదు. బంతి స్థూప భూతలమును వక్రతలంను స్పృశిస్తుంది. స్థూప భూతల వ్యాసార్ధం r అయిన

1. బంతి (గోళ) వ్యాసార్ధము ఎంత ఉంటుంది? మరియు స్థూపము యొక్క వ్యాసార్ధాల నిష్పత్తి ఎంత?
2. స్థూప వక్రతల వైశాల్యము మరియు బంతి (గోళ) వక్రతల వైశాల్యముల నిష్పత్తి ఎంత?
3. స్థూప ఘనపరిమాణము మరియు బంతి (గోళ) ఘనపరిమాణముల నిష్పత్తి ఎంత?

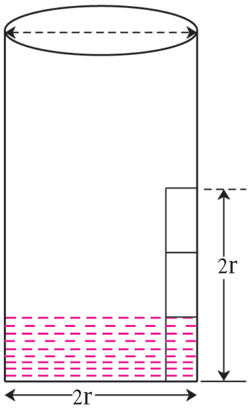


పటం 7.3

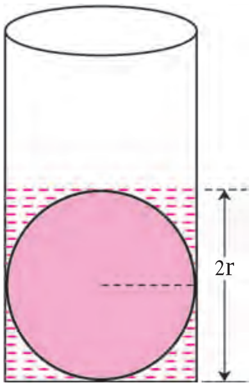
కృత్యము :



పటం 7.4



పటం 7.5



పటం 7.6

పై పటాలలో చూపిన విధంగా ఒక బంతి మరియు బంతి వ్యాసార్ధానికి (r) సమాన వ్యాసార్ధంగల ఒక బీకరును తీసుకోండి. బీకరుయొక్క వ్యాసమంత పొడవు (2r) గల ఒక కాగితపు పట్టీని తీసుకోండి. దాని పొడవును మూడు సమాన భాగాలుగా విభజించే రెండు గీతలను పట్టిపై గీయండి. ఆ పట్టీని బీకరు భూతలం నుండి నిలువుగా దానిపై అతికించండి. బీకరులో కాగితపు పట్టీ కింది నుండి మొదటి భాగం వరకు నీటిని నింపండి. తరువాత బంతిని బీకరులో భూతలం చివరను తాకే విధంగా నిదానంగా దించండి. బీకరులోని నీటి యొక్క మట్టము ఎక్కడి వరకు పెరిగిందో చూడండి.

నీటి మట్టము కాగితపు పట్టీ యొక్క మొత్తం ఎత్తు వరకు వచ్చినట్లు కనిపిస్తుంది.

ఈ పరిశీలన నుండి బంతి యొక్క ఘనపరిమాణ సూత్రము ఏ విధంగా లభిస్తుందో అర్థం చేసుకోండి.

బీకరు క్రమ స్థూపాకారంలో ఉంది. కావున బీకరు యొక్క 2r ఎత్తువరకు గల భాగము యొక్క ఘనపరిమాణము, క్రమస్థూప ఘనపరిమాణము సూత్రము నుండి లభిస్తుంది. ఈ ఘనపరిమాణంను V అనుకొందాం.

$\therefore\ V = \pi \times r^2 \times 2r = 2\pi r^3$

కాని V = బంతి ఘనపరిమాణము + ముందుగా నింపిన నీటి ఘనపరిమాణం

= బంతి ఘనపరిమాణము + $\frac{1}{3} \times 2\pi r^3$

$\therefore$ బంతి ఘనపరిమాణము $= V - \frac{1}{3} \times 2\pi r^3$

$= 2\pi r^3 - \frac{2}{3}\pi r^3$

$= \frac{6\pi r^3 - 2\pi r^3}{3} \qquad = \frac{4\pi r^3}{3}$

$\therefore$ గోళ ఘనపరిమాణ సూత్రము $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ గా లభిస్తుంది.

(ఈ సూత్రమును ఉపయోగించి పటం 7.3 సందర్భంలో 3వ ప్రశ్నయొక్క సమాధానమును మీరు కనుగొనవచ్చు.)

సాధించిన ఉదాహరణలు

ఉదా. (1) ఒక స్థూపాకార నీటి తొట్టి (టాకి) వ్యాసార్థం 2.8 మీ. మరియు ఎత్తు 3.5 మీ. అయిన ఆ తొట్టిలో ఎన్ని లీటర్ల నీరు పడుతుంది? ఒక వ్యక్తికి రోజుకు సరాసరి 70 లీటర్ల నీరు అవసరం అయిన నిండా నింపిన తొట్టిలోని నీరు రోజుకు ఎంత మందికి సరిపోతుంది? ($\pi = \frac{22}{7}$)

సాధన : వ్యాసార్థం (r) = 2.8 మీ., ఎత్తు (h) = 3.5 మీ., $\pi = \frac{22}{7}$

నీటితొట్టి సామర్థ్యం = స్థూపాకార తొట్టి ఘనపరిమాణం

$= \pi r^2 h$

$= \frac{22}{7} \times 2.8 \times 2.8 \times 3.5$

= 86.24 మీ.^{3}

= 86.24 × 1000 లీ. ($\because$ 1మీ.^{3} = 1000 లీ.)

= 86240.00 లీ.

$\therefore$ తొట్టిలో 86240 లీటర్ల నీరు పడుతుంది.

ఒక వ్యక్తికి రోజుకు 70 లీ. నీరు అవసరమౌతుంది.

$\therefore$ పూర్తిగా నిండిన తొట్టిలోని నీరు $\frac{86240}{70}$ = 1232 మందికి సరిపోతుంది.

ఉదా. (2) 30 సెం.మీ. వ్యాసార్థంగల ఘనగోళమును కరిగించి దానినుండి 10 సెం.మీ. వ్యాసార్థం, 6 సెం.మీ. ఎత్తుగల ఘన స్థూపమును తయారు చేసినట్లయితే ఎన్ని స్థూపములు తయారువుతాయి?

సాధన : గోళ వ్యాసార్థము r = 30 సెం.మీ.

స్థూప వ్యాసార్థము R = 10 సెం.మీ.

స్థూపము ఎత్తు H = 6 సెం.మీ.

n స్థూపములు తయారవుతాయని అనుకొనిన

$\therefore$ గోళ ఘనపరిమాణము = n × ఒక స్థూప ఘనపరిమాణము

$\therefore$ స్థూపముల సంఖ్య = n = $\dfrac{\text{గోళ ఘనపరిమాణము}}{\text{ఒక స్థూప ఘనరిమాణము}}$

$$= \frac{\frac{4}{3}\pi (r)^3}{\pi (R)^2 H}$$

$$= \frac{\frac{4}{3} \times (30)^3}{10^2 \times 6} = \frac{\frac{4}{3} \times 30 \times 30 \times 30}{10 \times 10 \times 6} = 60$$

$\therefore$ మొత్తం 60 స్థూపములు తయారువుతాయి.

ఉదా. (3) సర్కస్ డేరా యొక్క కింది భాగం స్థూపాకారంగా, పైభాగం శంకువు ఆకారములో గలదు. డేరా యొక్క భూతల వ్యాసము 48 మీ. స్థూపాకార ఎత్తు 15 మీ. డేరా మొత్తం ఎత్తు 33 మీ. అయిన డేరాకు కావలసిన బట్ట వైశాల్యం మరియు డేరాలోని గాలి ఘనపరిమాణములను కనుగొనండి.

సాధన : డేరా మొత్తం ఎత్తు 33 మీ.

స్థూపాకార భాగం ఎత్తు = H అనిన H = 15 మీ.

$\therefore$ శంకువు ఆకార భాగం ఎత్తు h = (33−15) = 18 మీ. అవుతుంది.

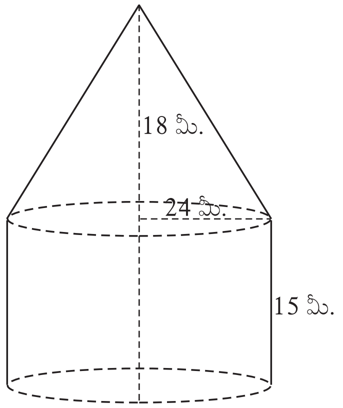
శంకువు ఏటవాలు ఎత్తు $(l) = \sqrt{r^2 + h^2}$

$= \sqrt{24^2 + 18^2}$

$= \sqrt{576 + 324}$

$= \sqrt{900}$

l = 30 మీ.



పటం 7.7

సర్కస్ డేరాకు అవసరమయ్యే బట్ట = స్థూపాకార భాగ వక్రతల వైశాల్యం + శంకువు భాగ వక్రతల వైశాల్యం

$= 2\pi rH + \pi rl$

$= \pi r\,(2H + l)$

$= \frac{22}{7} \times 24\,(2 \times 15 + 30)$

$= \frac{22}{7} \times 24 \times 60$

= 4525.71 చ.మీ..

డేరాలోని గాలి ఘనపరిమాణము = స్థూపాకార భాగ ఘనపరిమాణము + శంకువు భాగ ఘనపరిమాణము

$= \pi r^2 H + \frac{1}{3}\pi r^2 h$

$= \pi r^2 \left(H + \frac{1}{3}h\right)$

$= \frac{22}{7} \times 24^2\,(15 + \frac{1}{3} \times 18)$

$= \frac{22}{7} \times 576 \times 21$

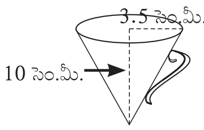
= 38,016 ఘ.మీ.

డేరాకు అవసరమయ్యే బట్ట = 4525.71 చ.మీ.

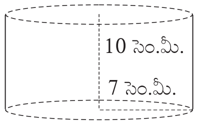
డేరాలోని గాలి ఘనపరిమాణము = 38016 ఘ.మీ.

అభ్యాసమాలిక 7.1

1. ఒక శంకువు భూతల వ్యాసార్థం 1.5 సెం.మీ. ఎత్తు 5 సెం.మీ. అయిన ఆ శంకువు ఘనపరిమాణంను కనుగొనండి.
2. 6 సెం.మీ. వ్యాసంగల గోళ ఘనపరిమాణంను కనుగొనండి.
3. ఒక క్రమ స్థూప భూతల వ్యాసార్థం 5 సెం.మీ., ఎత్తు 40 సెం.మీ. అయిన దాని సంపూర్ణతల వైశాల్యమును కనుగొనండి.
4. ఒక గోళము యొక్క వ్యాసార్థం 7 సెం.మీ. అయిన దాని వక్రతల వైశాల్యంను కనుగొనండి.
5. ఒక లోహ దీర్ఘఘనము పొడవు, వెడల్పు మరియు ఎత్తులు వరుసగా 44 సెం.మీ., 21 సెం.మీ. మరియు 12 సెం.మీ. గా గల దానిని కరిగించి 24 సెం.మీ. ఎత్తుగల శంకువును తయారు చేశారు. అయిన శంకువు యొక్క వ్యాసార్థంను కనుగొనండి.
6.



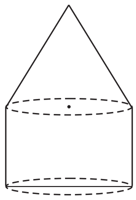
పటం 7.8
శంకువు ఆకార నీళ్ళ జగ్గు



పటం 7.9
స్థూపాకార పాత్ర

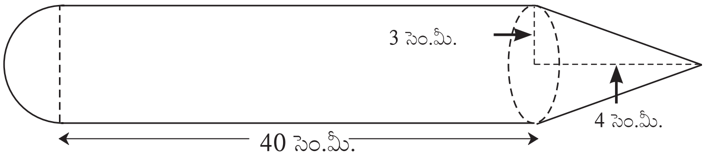
పటం 7.8 మరియు 7.9 లోని పాత్రల కొలతలు పరిశీలించి వాటి ఆధారముగా స్థూపాకార పాత్రలో ఎన్ని జగ్గుల నీరు పడుతుందో కనుగొనుము.

7. స్థూపము మరియు శంకువుల భూతలాలు సమానంగా ఉన్నాయి. స్థూపముపై శంకువును ఉంచారు. స్థూపాకార భాగము యొక్క ఎత్తు 3 సెం.మీ. భూతల వైశాల్యం 100 చ.సెం.మీ. కలదు. ఒకవేళ మొత్తం ఘనాకృతి యొక్క ఘనపరిమాణము 500 ఘ.సెం.మీ. అయిన సంపూర్ణ ఘనాకృతి యొక్క ఎత్తును కనుగొనండి.



పటం 7.10

8. పటములో ఇవ్వబడిన సమాచారం నుండి అర్ధగోళము, స్థూపము మరియు శంకువుల ద్వారా తయారైన ఆటవస్తువు (బొమ్మ) సంపూర్ణతల వైశాల్యమును కనుగొనండి.

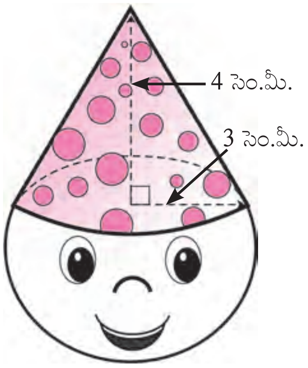


పటం 7.11

9. పటం 7.12 లో స్థూపాకార చదునైన మాత్రల 10 సెం.మీ.ల పొడవుగల లిఫాఫా కలదు. ఒక మాత్రయొక్క వ్యాసార్థం 7 మి.మీ. మరియు ఎత్తు 5 మి.మీ. గాగల ఎన్ని మాత్రలు ఆ లిఫాపాలో పడతాయి.

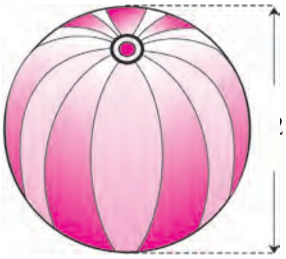
పటం 7.12

10. పటం 7.13లో ఒక పిల్లల ఆట వస్తువు కలదు. అది ఒక అర్ధగోళము మరియు ఒక శంకువుల సహాయంతో చేయబడింది. పటములో చూపించిన కొలతల ఆధారంగా (1) ఆట వస్తువు ఘనపరిమాణం (2) ఆట వస్తువు ఉపరితల వైశాల్యములను కనుగొనుము. ($\pi = 3.14$)



పటం 7.13

11. పటంలో చూపిన బీచ్ బాల్ యొక్క ఉపరితల వైశాల్యం, ఘనపరిమాణములను కనుగొనండి.



పటం 7.14

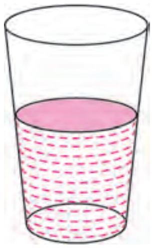
12. పటంలో చూపిన విధంగా ఒక స్థూపాకార గ్లాసులో నీరు కలదు. అందులో 2 సెం.మీ. వ్యాసంగల లోహపు గోటి మునిగింది. అయిన ఆ నీటి ఘనపరిమాణమును కనుగొనండి.

పటం 7.15

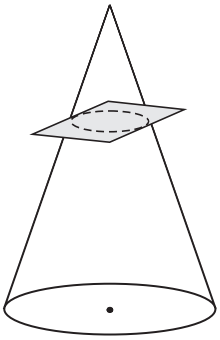
తెలుసుకుందాం.

శంకుచ్ఛేదము (frustum of the cone)

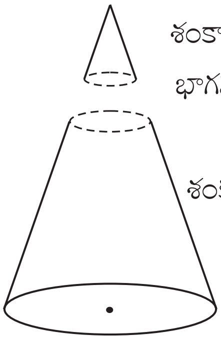
మనం నీరు త్రాగడానికి కుప్పెలాంటి గ్లాసును వాడుతాము. ఈ గ్లాసు ఆకృతి అదేవిధంగా దానిలోని నీటి ఆకృతి శంకుచ్ఛేద ఆకృతి అవుతుంది.



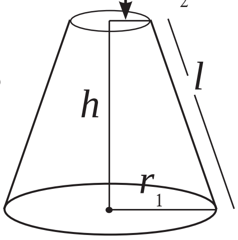
పటం 7.16



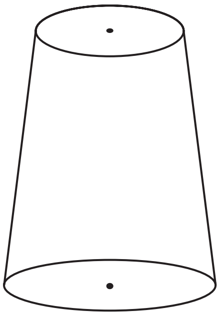
పటం 7.17
శంకువును కోస్తున్నపుడు



పటం 7.18
శంకువుకు కోసిన తర్వాత వేరయిన రెండు భాగాలు



పటం 7.19
శంకుచ్ఛేదము



పటం 7.20
బోర్లించిన గ్లాసు

పటంలో బోర్లించిన ఒక శంకువు చూపబడింది. ఈ శంకువు భూతలానికి సమాంతరంగా కోయబడింది. తద్వారా ఏర్పడిన రెండు భాగాలలో ఒకటి శంకువు ఆకారంలోనే ఉంది. మిగిలిన భాగమును శంకుచ్ఛేదము (frustum) అంటారు.

శంకువులాగానే శంకుచ్ఛేదముకు కూడా ఉపరితల వైశాల్యం, ఘనపరిమాణములను కనుగొనవచ్చును. వాటికొరకు కింది సూత్రాలను మనం ఉపయోగించబోతున్నాము.

ఇవి గుర్తుంచుకుందాం.

h = శంకుచ్ఛేద ఎత్తు, l = శంకుచ్ఛేద ఏటవాలు ఎత్తు

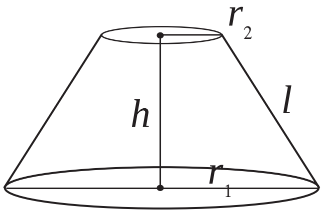
r_1 , r_2 = శంకుచ్ఛేద వృత్తాకార భాగముల వ్యాసార్థాలు ($r_1 > r_2$)

శంకుచ్ఛేద ఏటవాలు ఎత్తు $= l = \sqrt{h^2 + (r_1 - r_2)^2}$

శంకుచ్ఛేద వక్రతల వైశాల్యము $= \pi l\,(r_1 + r_2)$

శంకుచ్ఛేద సంపూర్ణతల వైశాల్యము $= \pi l\,(r_1 + r_2) + \pi r_1^2 + \pi r_2^2$

శంకచ్ఛేద ఘనపరిమాణము $= \frac{1}{3}\pi h\,(r_1^2 + r_2^2 + r_1 \times r_2)$



పటం 7.21

సాధించిన ఉదాహరణలు

ఉదా. (1) ఒక శంకుచ్ఛేద ఆకారపు బకెట్టు ఎత్తు 28 సెం.మీ. బకెటు యొక్క రెండు వృత్తకార భాగముల వ్యాసార్థాలు 12 సెం.మీ., 15 సెం.మీ. అయిన బకెట్టులో ఎన్ని లీటర్ల నీరు పడుతుంది? ($\pi = \frac{22}{7}$)

సాధన : బకెట్టు యొక్క వృత్తకార భాగాల వ్యాసార్థాలు r_1 = 15 సెం.మీ., r_2 = 12 సెం.మీ.

బకెట్టు ఎత్తు h = 28 సెం.మీ.

బకెట్టు సామర్థ్యం = శంకుచ్ఛేద ఘనపరిమాణము

$$= \frac{1}{3}\pi h\,(r_1^2 + r_2^2 + r_1 \times r_2)$$

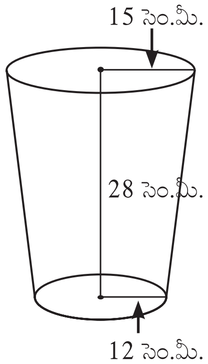
$$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 28\,(15^2 + 12^2 + 15 \times 12)$$

$$= \frac{22 \times 4}{3} \times (225 + 144 + 180)$$

$$= \frac{22 \times 4}{3} \times 549$$

$$= 88 \times 183$$

$= 16104$ సెం.మీ.^{3} $= 16.104$ లీటర్లు



పటం 7.22

బకెట్టులో 16.104 లీ. నీరు పడుతుంది.

ఉదా. (2) శంకుచ్ఛేద వృత్తకార భాగాల వ్యాసార్థాలు 14 సెం.మీ., 8 సెం.మీ. ఒక వేళ శంకుచ్ఛేద ఎత్తు 8 సెం.మీ. అయిన కింది విలువలను కనుగొనండి. ($\pi = 3.14$)

i) శంకుచ్ఛేద వక్రతల వైశాల్యము ii) శంకుచ్ఛేద సంపూర్ణతల వైశాల్యము iii) శంకుచ్ఛేద ఘనపరిమాణము.

సాధన : ఇక్కడ వ్యాసార్థాలు r_1 = 14 సెం.మీ. , r_2 = 8 సెం.మీ., ఎత్తు h = 8 సెం.మీ.

శంకుచ్ఛేద ఏటవాలు ఎత్తు $l = \sqrt{h^2 + (r_1 - r_2)^2}$

$$l = \sqrt{8^2 + (14 - 8)^2}$$

$$l = \sqrt{64 + 36}$$ = 10 సెం.మీ.

శంకుచ్ఛేద వక్రతల వైశాల్యం = $\pi(r_1 + r_2)\, l$

$= 3.14 \times (14 + 8) \times 10$

$= 690.8$ చ.సెం.మీ.

శంకుచ్ఛేద సంపూర్ణతల వైశాల్యం = $\pi(r_1 + r_2)l + \pi r_1^{\,2} + \pi r_2^{\,2}$

$= 3.14 \times 10\,(14 + 8) + 3.14 \times 14^2 + 3.14 \times 8^2$

$= 690.8 + 615.44 + 200.96$

$= 690.8 + 816.4$

$= 1507.2$ చ.సెం.మీ.

శంకుచ్ఛేద ఘనపరిమాణము = $\frac{1}{3}\pi h(r_1^{\,2} + r_2^{\,2} + r_1 \times r_2)$

$= \frac{1}{3} \times 3.14 \times 8\,(14^2 + 8^2 + 14 \times 8)$

$= 3114.88$ ఘ.సెం.మీ.

అభ్యాసమాలిక 7.2

1. 30 సెం.మీ. ఎత్తుగల శంకుచ్ఛేద ఆకార నీళ్ళ బకెట్టు యొక్క రెండు వృత్తాకార భాగాల వ్యాసార్థాలు 14 సెం.మీ., 7 సెం.మీ. అయిన బకెట్టులో ఎన్ని లీటర్ల నీరు పడుతుంది? (1 లీ = 1000 ఘ.సెం.మీ.)

2. శంకుచ్ఛేద వృత్తాకార భాగముల వ్యాసార్థాలు 14 సెం.మీ., 6 సెం.మీ. మరియు ఎత్తు 6 సెం.మీ. అయిన కింది విలువలను కనుగొనండి. ($\pi = 3.14$)

(1) శంకుచ్ఛేద వక్రతల వైశాల్యం (2) శంకుచ్ఛేద సంపూర్ణతల వైశాల్యము (3) శంకుచ్ఛేద ఘనపరిమాణం.

3. పటం 7.23 లో వృత్తాకార భూభాగం పై భాగముల పరిధులు వరుసగా 132 సెం.మీ., 88 సెం.మీ. మరియు ఎత్తు 24 సెం.మీ. అయిన ఆ శంకుచ్ఛేద వక్రతల వైశాల్యమును కనుగొనుటకు కింది కృత్యమును పూర్తిచేయండి. ($\pi = \frac{22}{7}$)

వృత్తపరిధి$_1$ = $2\pi r_1 = 132$

$r_1 = \frac{132}{2\pi} = \square$ సెం.మీ.

వృత్తపరిధి$_2$ = $2\pi r_2 = 88$

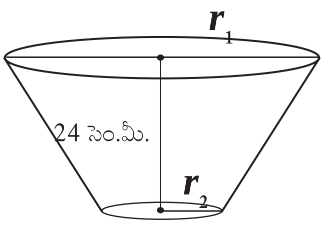
$r_2 = \frac{88}{2\pi} = \square$ సెం.మీ.

శంకుచ్ఛేద ఏటవాలు ఎత్తు = l

$l = \sqrt{h^2 + (r_1 - r_2)^2}$

$l = \sqrt{\square^2 + \square^2}$

$l = \square$ సెం.మీ.



పటం 7.23

శంకుచ్ఛేద వక్రతల వైశాల్యము $= \pi(r_1 + r_2)l$

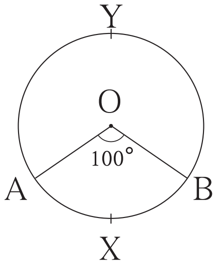
$= \pi \times \square \times \square$

$= \square$ చ.సెం.మీ.

కొంచెం గుర్తుతెచ్చుకుందాం

పక్క పటంనుండి పట్టికను పూర్తిచేయండి.

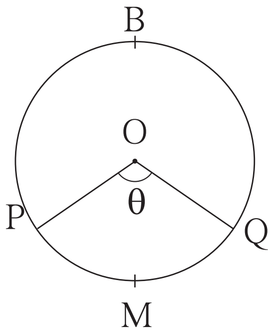
చాపముయొక్క రకము	చాపము పేరు	చాపముకొలత
అల్పచాపము	చాపము AXB	....
....	చాపము AYB	....



పటం 7.24

తెలుసుకుందాం.

వృత్తము యొక్క సెక్టరు (Sector of a circle)



పటం 7.25

పటంలో కేంద్రీయ కోణం వలన వృత్తవైశాల్యం రెండు భాగాలలో విభజించబడింది. ఈ ప్రతి భాగాన్ని వృత్తము యొక్క సెక్టరు అంటారు.

వృత్తము యొక్క రెండు వ్యాసార్థాలు మరియు వాటి అంత్యబిందువులను కలిపే వృత్త చాపముల హద్దులోని భాగమును సెక్టరు అంటారు.

పటంలో O –PMQ మరియు O-PBQ అనే రెండు సెక్టర్లు కలవు.

అల్ప సెక్టరు (Minor sector) :

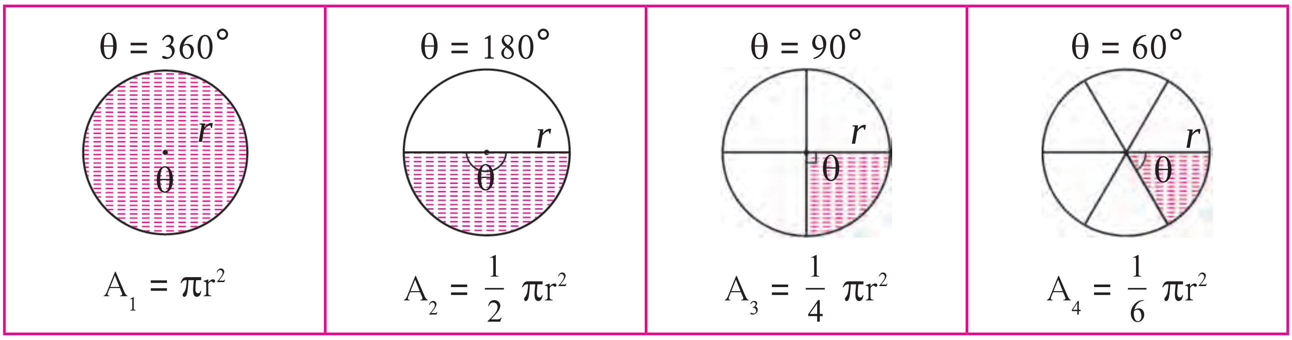
రెండు వ్యాసార్థాలు వాటి మధ్యలోని అల్పచాపముల హద్దులోని సెక్టరును అల్ప సెక్టరు అని అంటారు. పటంలో O–PMQ అనేది అల్పసెక్టరు.

అధిక సెక్టరు (Major sector) :

రెండు వ్యాసార్థాలు వాటి మధ్యలోని అధిక చాపముల హద్దులోని సెక్టరును అధిక సెక్టరు అని అంటారు. పటంలో O–PBQ అనేది అధిక సెక్టరు.

సెక్టరు వైశాల్యం (Area of a sector)

కింది పటాలలో చూపిన విధంగా సమాన వ్యాసార్థాలుగల వృత్తముల ఛాయంకిత భాగాల వైశాల్యాలను పరిశీలించి కింది పట్టికను పూర్తి చేయండి.



పటం 7.26

వృత్త కేంద్రీయ కోణ కొలత = 360° = సంపూర్ణ కోణము

వృత్త కేంద్రీయ కోణము = 360° , వృత్త వైశాల్యము = πr^2			
వృత్త సెక్టరు	వృత్తం సెక్టరు చాపము యొక్క కొలత	$\frac{\theta}{360}$	వృత్త సెక్టరు వైశాల్యం A
A_1	360°	$\frac{360}{360}=1$	$1 \times \pi r^2$
A_2	180°	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} \times \pi r^2$
A_3	90°	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4} \times \pi r^2$
A_4	60°	....	....
A	θ	$\frac{\theta}{360}$	$\frac{\theta}{360} \times \pi r^2$

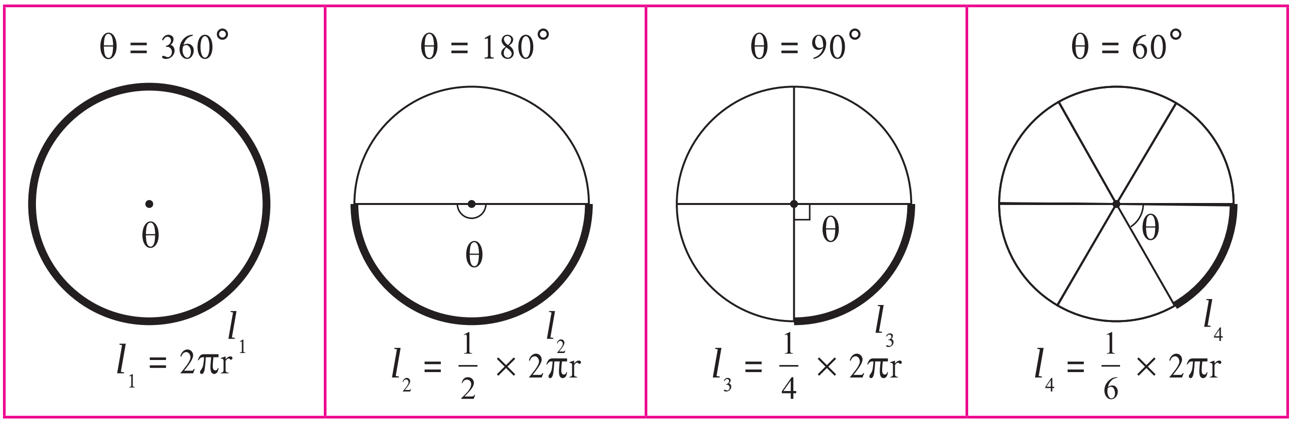
పట్టికనుండి వృత్తవైశాల్యమును $\frac{\theta}{360}$ చే గుణించగా, చాపము కొలత θ గా గల సెక్టరు వైశాల్యం లభిస్తుందని మనకి తెలుస్తుంది. దీనిని సూత్ర రూపంలో కింది విధంగా రాయవచ్చును.

సెక్టరు వైశాల్యం (A) = $\frac{\theta}{360} \times \pi r^2$

ఈ సూత్రం నుండి $\frac{A}{\pi r^2} = \frac{\theta}{360}$; అనగా $\frac{\text{సెక్టరు వైశాల్యము}}{\text{వృత్త వైశాల్యము}} = \frac{\theta}{360}$

వృత్త చాపము యొక్క పొడవు (Length of an arc)

కింద చూపిన విధంగా సమాన వ్యాసార్థాలుగల వృత్తములలో మందమైన గీతతో చూపబడిన వృత్త చాపముల యొక్క పొడవులను పరిశీలించి కింది పట్టికను పూర్తి చేయండి.



పటం 7.27

వృత్త పరిధి = $2\pi r$			
వృత్త చాపము పొడవు	వృత్త చాపము కొలత (θ)	$\frac{\theta}{360}$	వృత్త చాపము పొడవు (l)
l_1	360°	$\frac{360}{360} = 1$	$1 \times 2\pi r$
l_2	180°	$\frac{180}{360} = \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} \times 2\pi r$
l_3	90°	$\frac{90}{360} = \frac{1}{4}$	$\frac{1}{4} \times 2\pi r$
l_4	60°	....	....
l	θ	$\frac{\theta}{360}$	$\frac{\theta}{360} \times 2\pi r$

పై పట్టిక నుండి వృత్త పరిధిని $\frac{\theta}{360}$ చే గుణించగా చాపము కొలత θ గాగల వృత్త చాపము పొడవు లభిస్తుంది? దీనిని సూత్రరూపంలో కింది విధంగా రాయవచ్చును.

వృత్త చాపము పొడవు (l) = $\frac{\theta}{360} \times 2\pi r$

ఈ సూత్రము నుండి

$$\therefore \frac{l}{2\pi r} = \frac{\theta}{360}$$

$$\frac{\text{వృత్త చాపము పొడవు}}{\text{వృత్తపరిధి}} = \frac{\theta}{360}$$

వృత్తచాపము పొడవు మరియు సెక్టరు వైశాల్యముల మధ్య సంబంధం

సెక్టరు వైశాల్యము $A = \frac{\theta}{360} \times \pi r^2$ I

అదేవిధంగా వృత్త చాపము పొడవు $(l) = \frac{\theta}{360} \times 2\pi r$

$$\therefore \frac{\theta}{360} = \frac{l}{2\pi r} \quad .... \text{II}$$

$$A = \frac{l}{2\pi r} \times \pi r^2 \quad .... \text{I, II ల నుండి}$$

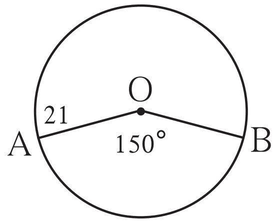
$$A = \frac{1}{2} lr = \frac{lr}{2}$$

$$\therefore \text{వృత్త సెక్టరు వైశాల్యము} = \frac{\text{వృత్తచాపము పొడవు} \times \text{వ్యాసార్థం}}{2}$$

అదే విధంగా $\frac{A}{\pi r^2} = \frac{l}{2\pi r} = \frac{\theta}{360}$

సాధించిన ఉదాహరణలు

ఉదా. (1) 21 సెం.మీ. వ్యాసార్థం గల వృత్త సెక్టరు కోణపు కొలత 150° అయిన దాని వైశాల్యం మరియు దాని చాపము పొడవులను కనుగొనండి.



పటం 7.28

సాధన : ఇచ్చట $r = 21$సెం.మీ., $\theta = 150$, $\pi = \frac{22}{7}$

$$\text{వృత్తసెక్టరు వైశాల్యము (A)} = \frac{\theta}{360} \times \pi r^2$$

$$= \frac{150}{360} \times \frac{22}{7} \times 21 \times 21$$

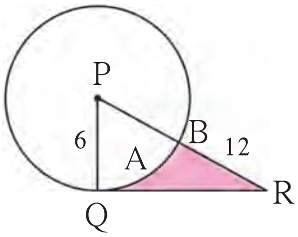
$$= \frac{1155}{2} \text{ సెం.మీ.}^2 \quad = 577.5 \text{ సెం.మీ.}^2$$

$$\text{వృత్త చాపము పొడవు} = l = \frac{\theta}{360} \times 2\pi r$$

$$= \frac{150}{360} \times 2 \times \frac{22}{7} \times 21$$

$$= 55 \text{ సెం.మీ.}$$

ఉదా. (2) పటంలోని వృత్తములో P వృత్తకేంద్రం, వ్యాసార్థం 6 సెం.మీ. రే.ఖం. QR స్పర్శరేఖ PR = 12 సెం.మీ. అయిన ఛాయాంకిత భాగము యొక్క వైశాల్యమును కనుగొనండి. ($\sqrt{3}$ = 1.73)



పటం 7.29

సాధన : వృత్తము యొక్క స్పర్శ బిందువు గుండా గీసిన వ్యాసార్థం స్పర్శరేఖకు లంబంగా ఉంటుంది.

$\therefore$ Δ PQR లో, $\angle$ PQR = 90°, PQ = 6 సెం.మీ., PR = 12 సెం.మీ.

$\therefore \ PQ = \frac{PR}{2}$

ఒక వేళ లంబకోణ త్రిభుజము యొక్క ఒక భుజం కర్ణంలో సగం పొడవు కల్గిఉన్నట్లయితే ఆ భుజానికి ఎదురుగా ఉన్న కోణం కొలత 30° ఉంటుంది.

$\therefore \ \angle R = 30^\circ$ మరియు $\angle P = 60^\circ$

30°-60°-90° సిద్ధాంతం నుండి, $QR = \frac{\sqrt{3}}{2} \times PR = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 12 = 6\sqrt{3}$

$QR = 6\sqrt{3}$ సెం.మీ.

$\therefore \ A(\Delta PQR) = \frac{1}{2} \ QR \times PQ$

$= \frac{1}{2} \times 6\sqrt{3} \times 6$

$= 18\sqrt{3} = 18 \times 1.73$

$= 31.14$ సెం.మీ.^{2}

వృత్త సెక్టరు వైశాల్యం $= \frac{\theta}{360} \times \pi r^2$

$\therefore \ A(P\text{-}QAB) = \frac{60}{360} \times 3.14 \times 6^2$

$= \frac{1}{6} \times 3.14 \times 6 \times 6 \quad = 3.14 \times 6$

$= 18.84$ సెం.మీ.^{2}

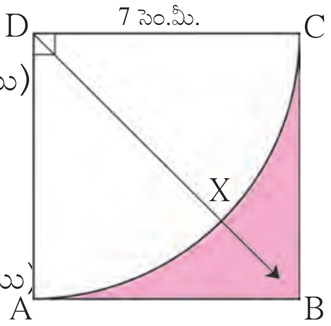
ఛాయాంకిత భాగ వైశాల్యం $= A(\Delta PQR) - A(P\text{-}QAB)$

$= 31.14 - 18.84$

$= 12.30$ సెం.మీ.^{2}

ఛాయాంకిత భాగ వైశాల్యం $= 12.30$ సెం.మీ.^{2}

ఉదా. (3) ఇచ్చిన పటంలో ABCD చతురస్రంలోని ప్రతి భుజం 7 సెం.మీ., D కేంద్రంగా తీసుకొని DA వ్యాసార్థంతో గీసిన సెక్టరు D – AXC, అయిన ఛాయాంకిత భాగ వైశాల్యమును కనుగొనుటకు ఖాళీలను నింపి ఉదాహరణను పూర్తి చేయండి.



పటం 7.30

సాధన :

చతురస్ర వైశాల్యము = ______ (సూత్రము)

= ______

= 49 చ.సెం.మీ.

వృత్తసెక్టరు (D– AXC) వైశాల్యము = ______ (సూత్రము)

$= \frac{\boxed{}}{360} \times \frac{22}{7} \times \boxed{}$

= 38.5 చ.సెం.మీ.

ఛాయాంకిత భాగ వైశాల్యము = ______ యొక్క వైశాల్యము – ______ యొక్క వైశాల్యం

= ______ చ.సెం.మీ. – ______ చ.సెం.మీ.

= ______ చ.సెం.మీ.

అభ్యాసమాలిక 7.3

1. వృత్త వ్యాసార్థము 10 సెం.మీ. వృత్త చాపము కొలత 54° అయిన ఆ చాపము ద్వారా ఏర్పడిన సెక్టరు వైశాల్యమును కనుగొనండి. (π =3.14)

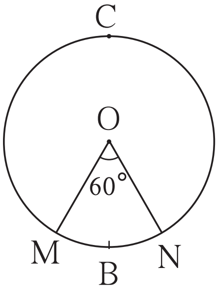
2. ఒక వృత్తములోని వృత్త చాపము కొలత 80° మరియు వ్యాసార్థం 18 సెం.మీ., అయిన వృత్త చాపము పొడవును కనుగొనండి. (π =3.14)

3. వృత్త సెక్టరు వ్యాసార్థము 3.5 సెం.మీ. వృత్తచాపము పొడవు 2.2 సెం.మీ. అయిన వృత్త సెక్టరు వైశాల్యమును కనుగొనండి.

4. వృత్త వ్యాసార్థం10 సెం.మీ. దాని సెక్టరు వైశాల్యము 100 చ.సెం.మీ., అయిన దాని అధిక వృత్త సెక్టరు వైశాల్యమును కనుగొనండి. (π =3.14)

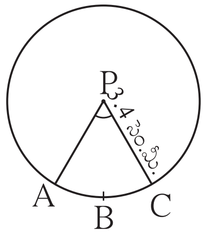
5. 15 సెం.మీ. వ్యాసార్థం గల వృత్తము యొక్క ఒక సెక్టరు వైశాల్యము 30 చ.సెం.మీ. అయిన దానికి సంబంధించిన వృత్త చాపము పొడవును కనుగొనండి.

6. పక్క పటంలోని వృత్త వ్యాసార్థం 7 సెం.మీ. మరియు
m(చాపము MBN)= 60°
అయిన (1) వృత్తవైశాల్యమును కనుగొనండి.
(2) A(O – MBN) ను కనుగొనండి.
(3) A(O – MCN) ను కనుగొనండి.

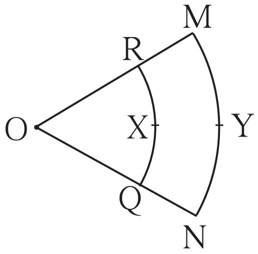


పటం 7.31

7. 3.4 సెం.మీ. వ్యాసార్థంగాగల సెక్టరు చుట్టుకొలత 12.8 సెం.మీ. అయిన సెక్టరు వైశాల్యమును కనుగొనండి.



పటం 7.32



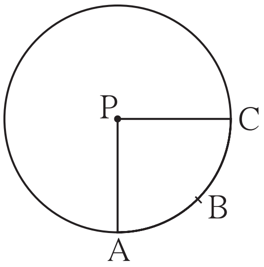
పటం 7.33

8. పటంలో, O బిందువు వృత్త కేంద్రం $\angle ROQ = \angle MON = 60^\circ$, OR = 7 సెం.మీ., OM = 21 సెం.మీ., అయిన చాపము RXQ చాపము MYN ల పొడవులను కనుగొనండి. ($\pi = \frac{22}{7}$)

9. పటంలో A(P−ABC) = 154 చ.సెం.మీ. మరియు వృత్త వ్యాసార్థం 14 సెం.మీ. అయినచో

(1) $\angle$ APC యొక్క కొలతను కనుగొనండి.

(2) చాపము ABC పొడవును కనుగొనండి.



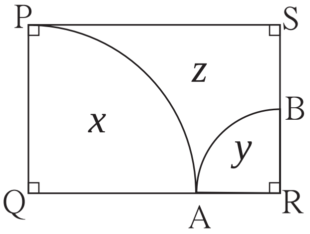
పటం 7.34

10. వృత్తవ్యాసార్థము 7 సెం.మీ. ఒక వేళ చాపముల యొక్క కొలతలు కింది విధంగా ఉన్నట్లయితే సెక్టరు వైశాల్యమును కనుగొనండి.

(1) 30° (2) 210° (3) 3 లంబకోణము

11. అల్పసెక్టరు వైశాల్యము 3.85 చ.సెం.మీ. దాని కేంద్రీయ కోణకొలత 36° అయిన వృత్త వ్యాసార్థమును కనుగొనండి.

12. పటంలో $\square$PQRS అనేది దీర్ఘచతురస్రం PQ=14 సెం.మీ., QR = 21 సెం.మీ., అయిన పటంలో చూపిన x, y మరియు z భాగముల యొక్క వైశాల్యములను కనుగొనండి.



పటం 7.35

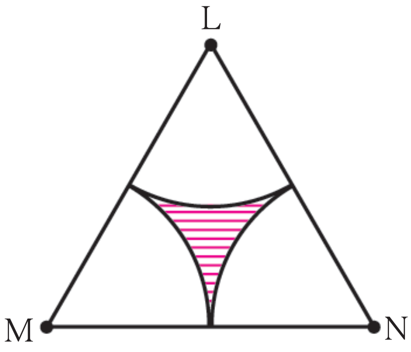
13. Δ LMN అనేది ఒక సమబాహు త్రిభుజం LM = 14 సెం.మీ. త్రిభుజ ప్రతి శీర్షబిందువును కేంద్ర బిందువుగా తీసుకొని 7 సెం.మీ. వ్యాసార్థంతో పటంలో చూపిన విధంగా మూడు సెక్టర్లను గీసితిమి వాటి నుండి.

(1) A (Δ LMN) = ?

(2) ఒక సెక్టరు వైశాల్యమును కనుగొనండి.

(3) మూడు సెక్టర్ల మొత్తం వైశాల్యమును కనుగొనండి.

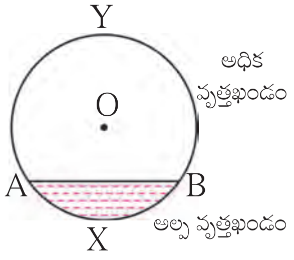
(4) గీతలు గీయబడిన భాగము యొక్క వైశాల్యమును కనుగొనండి.



పటం 7.36

తెలుసుకుందాం.

వృత్తఖండము (segment of a circle)



పటం 7.37

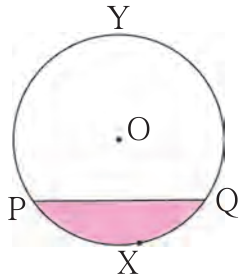
వృత్త ఖండము అనగా జ్యా మరియు సదృశ వృత్త చాపముల మధ్య భాగము.

అల్ప వృత్త ఖండం : జ్యా మరియు అల్ప వృత్త చాపముల హద్దులతో ఏర్పడిన భాగమును అల్ప వృత్తఖండము అంటారు. పటంలో వృత్తఖండము AXB అనేది అల్ప వృత్త ఖండము.

అధిక వృత్త ఖండం : జ్యా మరియు అధిక వృత్త చాపముల హద్దులతో ఏర్పడిన భాగమును అధిక వృత్తఖండము అంటారు. పటంలో వృత్తఖండం AYB అనేది అధిక వృత్తఖండము.

అర్ధవృత్తఖండము : వ్యాసము వలన ఏర్పడే వృత్తఖండమును అర్ధవృత్తఖండము అంటారు.

వృత్తఖండ వైశాల్యము (Area of a Segment)

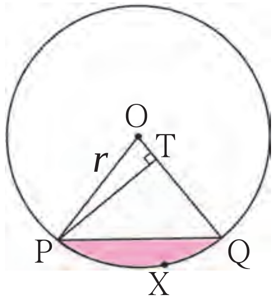


పటం 7.38

పటంలో PXQ అనేది అల్ప వృత్త ఖండము. అయిన వృత్తఖండము PYQ అనేది అధిక వృత్త ఖండము అవుతుంది.

అల్ప వృత్త ఖండ వైశాల్యమును ఏ విధంగా కనుగొనవచ్చును?

వృత్త కేంద్రం O నుండి OP, OQ లనే రెండు వ్యాసార్ధాలను గీద్దాం. మీకు సెక్టరు O–PXQ యొక్క వైశాల్యమును కనుగొనవచ్చు అదే విధంగా Δ OPQ వైశాల్యము కూడ కనుగొనవచ్చు. సెక్టరు వైశాల్యము నుండి త్రిభుజ వైశాల్యమును తీసివేసినట్లయితే వృత్తఖండ వైశాల్యము లభిస్తుంది.



పటం 7.39

వృత్తఖండము PXQ వైశాల్యము = వృత్త సెక్టరు (O – PXQ) వైశాల్యము – Δ OPQ వైశాల్యము

$$= \frac{\theta}{360} \times \pi r^2 - \Delta \text{ OPQ వైశాల్యము} \text{ ---------- (I)}$$

పటంలోని Δ OPQ లో, రే.ఖం. PT అనేది భుజము OQ పై లంబం.

లంబకోణ Δ OTP లో, $\sin \theta = \frac{PT}{OP}$

$\therefore$ PT = OP $\times$ sin θ

PT = r sin θ ($\because$ OP = r)

Δ OPQ వైశాల్యము = $\frac{1}{2}$ $\times$ భూమి $\times$ ఎత్తు

$= \frac{1}{2} \times OQ \times PT$

$= \frac{1}{2} \times r \times r \sin\theta$

$= \frac{1}{2} \times r^2 \sin\theta$ ---------------- (ii)

(I), (II) ల నుండి

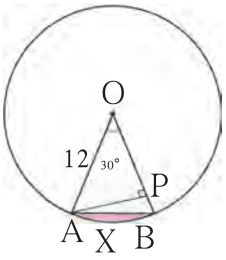
వృత్తఖండము PXQ వైశాల్యము = $\frac{\theta}{360} \times \pi r^2 - \frac{1}{2} r^2 \sin\theta$

$= r^2 \left[\frac{\pi\theta}{360} - \frac{\sin\theta}{2}\right]$

(మనం అల్పకోణముల సైన్ నిష్పత్తులను నేర్చుకున్నాము. కావున θ అనేది 90° లేదా దానికంటే తక్కువ ఉన్నపుడు ఈ సూత్రమును ఉపయోగించవచ్చును అని గుర్తుంచుకోండి.)

సాధించిన ఉదాహరణలు

ఉదా. (1) పటంలో $\angle AOB = 30^\circ$, OA = 12 సెం.మీ. అయిన అల్ప వృత్తఖండము యొక్క వైశాల్యమునుకనుగొనండి. (π = 3.14 గా తీసుకోండి)



పటం 7.40

పద్ధతి I :

r = 12, $\theta = 30^\circ$, π = 3.14

వృత్త సెక్టరు O–AXB యొక్క

వైశాల్యము = $\frac{\theta}{360} \times \pi r^2$

$= \frac{30}{360} \times 3.14 \times 12^2$

$= 3.14 \times 12$

= 37.68 చ.సెం.మీ.

$A(\Delta OAB) = \frac{1}{2} r^2 \times \sin\theta$

$= \frac{1}{2} \times 12^2 \times \sin 30$

$= \frac{1}{2} \times 144 \times \frac{1}{2}$

.....($\because \sin 30 = \frac{1}{2}$)

= 36 చ.సెం.మీ.

వృత్తఖండము AXB వైశాల్యము = సెక్టరు (O – AXB) వైశాల్యము – A(Δ OAB)

$= 37.68 - 36$

$= 1.68$ చ.సెం.మీ.

పద్ధతి II :

వృత్తఖండము AXB వైశాల్యము $= r^2 \left[\frac{\pi\theta}{360} - \frac{\sin\theta}{2}\right]$

$= 12^2\left[\frac{3.14\times 30}{360} - \frac{\sin 30}{2}\right]$

$= 144\left[\frac{3.14}{12} - \frac{1}{2\times 2}\right]$

$= \frac{144}{4}\left[\frac{3.14}{3} - 1\right]$

$= 36\left[\frac{3.14-3}{3}\right]$

$= \frac{36}{3}\times 0.14 = 12 \times 0.14$

$= 1.68$ చ.సెం.మీ..

ఉదా. (2) P కేంద్రంగా గల వృత్త వ్యాసార్ధం 10 సెం.మీ. జ్యా AB ద్వారా వృత్త కేంద్రంతో లంబకోణము ఏర్పరచిన అల్ప వృత్త ఖండము యొక్క మరియు అధిక వృత్తఖండము యొక్క వైశాల్యములను కనుగొనండి. ($\pi = 3.14$)

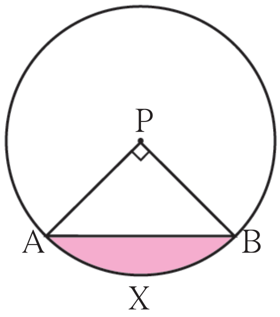
సాధన : $r = 10$ సెం.మీ., $\theta = 90$, $\pi = 3.14$

వృత్త సెక్టరు వైశాల్యము $= \frac{\theta}{360} \times \pi r^2$

$= \frac{90}{360} \times 3.14 \times 10^2$

$= \frac{1}{4} \times 314$

$= 78.5$ చ.సెం.మీ.



పటం 7.41

A(ΔAPB) $= \frac{1}{2} \times$ భూమి $\times$ ఎత్తు

$= \frac{1}{2} \times 10 \times 10$

$= 50$ చ.సెం.మీ.

అల్పవృత్తఖండము వైశాల్యము = సెక్టరు వైశాల్యము – త్రిభుజ వైశాల్యము

$= 78.5 - 50$

$= 28.5$ చ.సెం.మీ.

అధిక వృత్త ఖండము వైశాల్యము = వృత్త వైశాల్యము – అల్పవృత్తఖండ వైశాల్యం

$= 3.14 \times 10^2 - 28.5$

$= 314 - 28.5$

$= 285.5$ చ.సెం.మీ.

ఉదా. (3) 14 సెం.మీ. వ్యాసార్థంగాగల వృత్తములో ఒక క్రమ షడ్భుజిని అంతర్లిఖించబడిన షడ్భుజి బాహ్య మరియు వృత్తము యొక్క అంతర భాగం యొక్క వైశాల్యమును కనుగొనండి. ($\pi = \frac{22}{7}$, $\sqrt{3} = 1.732$)

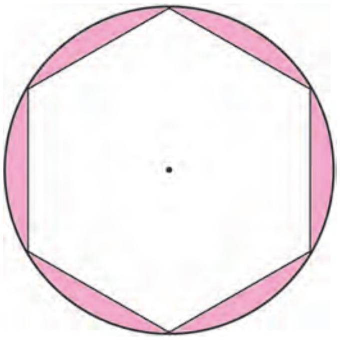
సాధన : క్రమషడ్భుజి భుజము = క్రమషడ్భుజి పరివృత్త వ్యాసార్థము.

$\therefore$ క్రమషడ్భుజి భుజము = 14 సెం.మీ.

క్రమషడ్భుజ వైశాల్యము $= 6 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times$ (భుజము)^2

$= 6 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times 14^2$

$= 509.208$ చ.సెం.మీ.



పటం 7.42

వృత్త వైశాల్యము $= \pi r^2$

$= \frac{22}{7} \times 14 \times 14$

$= 616$ చ.సెం.మీ.

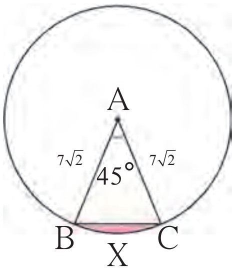
క్రమషడ్భుజి బాహ్య మరియు వృత్తము యొక్క అంతర భాగము యొక్క వైశాల్యము = వృత్త వైశాల్యము – క్రమషడ్భుజి వైశాల్యము

$= 616 - 509.208$

$= 106.792$ చ.సెం.మీ.

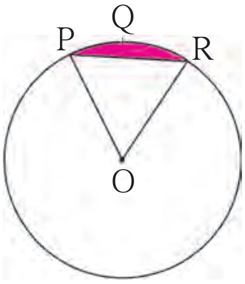
అభ్యాసమాలిక 7.4

1. పటంలో A కేంద్రంగాగల వృత్తంలో $\angle ABC = 45^\circ$, $AC = 7\sqrt{2}$ సెం.మీ., అయిన వృత్తఖండము BXC వైశాల్యమును కనుగొనండి. ($\pi = 3.14$, $\sqrt{2} = 1.41$)



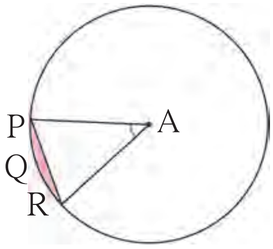
పటం 7.43

2. పటం 7.44 లో O కేంద్రంగాగల వృత్తము కలదు, m(చాపము PQR) $= 60^\circ$, OP = 10 సెం.మీ., అయిన ఛాయాంకిత భాగము యొక్క వైశాల్యమును కనుగొనండి. ($\pi = 3.14$, $\sqrt{3} = 1.73$)



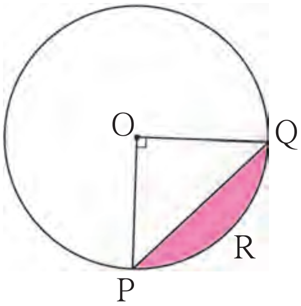
పటం 7.44

3. A కేంద్రంగాగల వృత్తములో $\angle PAR = 30^\circ$ $AP = 7.5$ అయిన, వృత్తఖండము PQR యొక్క వైశాల్యమును కనుగొనండి. ($\pi = 3.14$)



పటం 7.45

4. O కేంద్రంగాగల వృత్తములో PQ అనేది జ్యా $\angle POQ = 90^\circ$, మరియు ఛాయాంకితము చేయబడిన భాగము వైశాల్యము 114 చ.సెం.మీ. అయిన వృత్త వ్యాసార్థమును కనుగొనండి. ($\pi = 3.14$)



పటం 7.46

5. 15 సెం.మీ. వ్యాసార్థం గా గల వృత్తము యొక్క జ్యా PQ వృత్త కేంద్రం వద్ద 60° కోణము చేస్తుంది. ఆ జ్యా వలన ఏర్పడిన అధిక వృత్త ఖండము మరియు అల్ప వృత్త ఖండముల వైశాల్యాలను కనుగొనండి. ($\pi = 3.14$, $\sqrt{3} = 1.73$)

సంకీర్ణప్రశ్న సంగ్రహము 7

1. **కింద ఇచ్చిన ఐచ్ఛికములలోని సరియైన ఐచ్ఛికమును ఎన్నుకోండి.**

(1) ఒక వేళ వృత్తపరిధి, వృత్త వైశాల్యముల నిష్పత్తి 2:7 అయిన వృత్తపరిధి ఎంత?

(A) 14π (B) $\frac{7}{\pi}$ (C) 7π (D) $\frac{14}{\pi}$

(2) 44 సెం.మీ. ల పొడవు గల వృత్త చాపము కొలత 160° అయిన ఆ వృత్తపరిధి ఎంత?

(A) 66 సెం.మీ. (B) 44 సెం.మీ. (C) 160 సెం.మీ. (D) 99 సెం.మీ.

(3) చాపము కొలత 90° మరియు వ్యాసార్థం 7 సెం.మీ. గల వృత్త సెక్టరు చుట్టు కొలతను కనుగొనండి.

(A) 44 సెం.మీ. (B) 25 సెం.మీ. (C) 36 సెం.మీ. (D) 56 సెం.మీ.

(4) భూతల వ్యాసార్థం 7 సెం.మీ. ఎత్తు 24 సెం.మీ. గాగల శంకువు వక్రతల వైశాల్యము ఎంత?

(A) 440 సెం.మీ.^{2} (B) 550 సెం.మీ.^{2} (C) 330 సెం.మీ.^{2} (D) 110 సెం.మీ.^{2}

(5) 5 సెం.మీ. వ్యాసార్థం గల స్థూపము వక్రతల వైశాల్యము 440 సెం.మీ.^{2} అయిన ఆ స్థూపము యొక్క ఎత్తు ఎంత?

(A) $\frac{44}{\pi}$ సెం.మీ. (B) 22π సెం.మీ. (C) 14π సెం.మీ. (D) $\frac{22}{\pi}$ సెం.మీ.

(6) ఒక శంకువును కరిగించి దానిభూతల వ్యాసార్థానికి సమానమైన వ్యాసార్థంగల స్థూపమును తయారు చేశారు. స్థూపము యొక్క ఎత్తు 5 సెం.మీ. అయిన ఆ శంకువు ఎత్తు ఎంత?

(A) 15 సెం.మీ. (B) 10 సెం.మీ. (C) 18 సెం.మీ. (D) 5 సెం.మీ.

(7) 0.01 సెం.మీ. భుజంగా గల ఘనము యొక్క ఘనపరిమాణం ఎన్ని ఘ.సెం.మీ.?

(A) 1 (B) 0.001 (C) 0.0001 (D) 0.000001

(8) ఒక ఘనపు మీటరు ఘనపరిమాణము గల ఘనము యొక్క భుజము పొడవు ఎంత?

(A) 1 సెం.మీ. (B) 10 సెం.మీ. (C) 100 సెం.మీ. (D) 1000 సెం.మీ.

2. ఒక శంఖుచ్ఛేద ఆకృతిలోగల బట్టలు ఉతికే టబ్బు ఎత్తు 21 సెం.మీ. టబ్బు యొక్క రెండు వృత్తాకార భాగముల వ్యాసార్థాలు 20 సెం.మీ., 15 సెం.మీ. అయిన ఆ టబ్బులో ఎన్ని లీటర్ల నీరు పడుతుంది? ($\pi = \frac{22}{7}$)

3★. 1 సెం.మీ. వ్యాసార్థముగల చిన్న ప్లాస్టికు గోళీలను కరిగించి ఒక స్థూపాకార డబ్బాను తయారు చేశారు. డబ్బా యొక్క మందము 2 సెం.మీ. ఎత్తు 90 సెం.మీ. మరియు 30 సెం.మీ. బాహ్యవ్యాసార్థం కల్గినట్లయితే ఆ డబ్బ తయారి కొరకు ఎన్ని గోళీలను కరిగించిరి?

4. పొడవు 10 సెం.మీ., వెడల్పు 11 సెం.మీ. మరియు 10 సెం.మీ. ఎత్తుగల లోహ దీర్ఘఘనము నుండి 2 మి.మీ. మందము, 2 సెం.మీ. వ్యాసం గల కొన్ని నాణెములను తయారు చేసినట్లయితే ఎన్ని నాణెములు తయారువుతాయి?

5. ఒక రోలర్ యొక్క వ్యాసము 120 సెం.మీ. పొడవు 84 సెం.మీ. ఒక మైదానంను ఒకసారి చదును చేయుట రోలరు 200 చుట్లలో పూర్తవుతుంది. అయిన ప్రతి చదరపు మీటరుకు 10 రూపాయల చొప్పున ఆ మైదానము చదును చేయుటకు మొత్తం ఎంత ఖర్చువుతుందో కనుగొనండి.

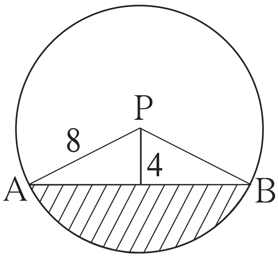
6. వ్యాసము 12 సెం.మీ. 0.01 మీ మందము గల ఒక లోహపు గుళ్ళగోళము కలదు. అయిన ఆ గోళము యొక్క బాహ్యభాగ తలవైశాల్యమును కనుగొనండి. మరియు లోహము యొక్క సాంద్రత ప్రతి ఘనపు మీటరుకు 8.88 గ్రాములు అయిన ఆ గోళము యొక్క ద్రవ్యరాశిని కనుగొనండి.

7. ఒక పొడవైన స్థూపాకార బకెట్టు వృత్త తల వ్యాసము 28 సెం.మీ. ఎత్తు 20 సెం.మీ. ఈ బకెట్టును మొత్తం ఇసుకతో నింపారు. ఈ బకెట్టులోని ఇసుకను నేలపై శంకాకారంలో పోసిరి. ఇసుక శంకువు ఎత్తు 14 సెం.మీ. ఉన్నట్లయితే శంకువు వృత్త తల వైశాల్యమును కనుగొనండి.

8. ఒక లోహ గోళము యొక్క వ్యాసార్థము 9 సెం.మీ. దానిని కరిగించి 4 మి.మీ. వ్యాసముగా గల లోహపు తీగను తయారు చేసిన ఆ తీగయొక్క పొడవు ఎంత ఉంటుంది?

9. 6 సెం.మీ. వ్యాసార్థంగా గల ఒక సెక్టరు వైశాల్యము ఒక 15π సెం.మీ.^{2}, అయిన సెక్టరు చాపము యొక్క కొలత మరియు వృత్తచాపము పొడవును కనుగొనండి.

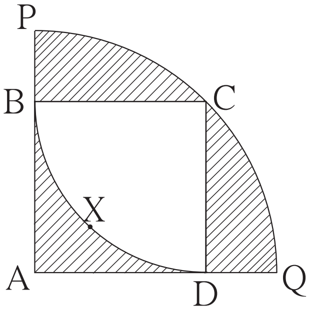
10.



పటం 7.47

పటంలో P కేంద్రంగాగల వృత్తములో రే.ఖం. AB ఒక జ్యా PA = 8 సెం.మీ., జ్యా AB వృత్త కేంద్రం నుండి 4 సెం.మీ. దూరంలో ఉన్నట్లయితే రేఖాంకితము చేయబడిన (గీతలు గీయబడిన) భాగము యొక్క వైశాల్యమును కనుగొనండి. ($\pi = 3.14$, $\sqrt{3} = 1.73$)

11. వృత్తసెక్టరు A-PCQ లో $\square$ ABCD అనేది ఒక చతురస్రం. సెక్టరు C-BXD యొక్క వ్యాసార్థము 20 సెం.మీ. అయిన బిందువలతో సూచించిన భాగము యొక్క వైశాల్యమును కనుగొనుటకు కింది కృత్యమును చేయుము.



పటం 7.48

సాధన : చతరురస్రము ABCD యొక్క భుజము = సెక్టరు C – BXD యొక్క వ్యాసార్థము = $\square$ సెం.మీ.

చతురస్ర వైశాల్యము = భుజము^{2} = $\square^2$ = $\square$ ..... (I)

చతురస్రంలో బిందువులతో సూచించిన భాగ వైశాల్యం

= చతురస్రం ABCD వైశాల్యము – సెక్టరు C – BXD వైశాల్యము

$$= \square - \frac{\theta}{360} \times \pi r^2$$

$$= \square - \frac{90}{360} \times \frac{3.14}{1} \times \frac{400}{1}$$

$$= \square - 314$$

$$= \square$$

పెద్ద సెక్టరు వ్యాసార్థము = చతురస్రం ABCD యొక్క కర్ణం పొడవు

$$= 20\sqrt{2}$$

పెద్ద సెక్టరులోని బిందువులలో సూచించిన భాగ వైశాల్యం

= సెక్టరు A – PCQ వైశాల్యం – చతురస్రం ABCD వైశాల్యం

= A(A – PCQ) – A($\square$ ABCD)

$$= \left(\frac{\theta}{360} \times \pi \times r^2\right) - \square^2$$

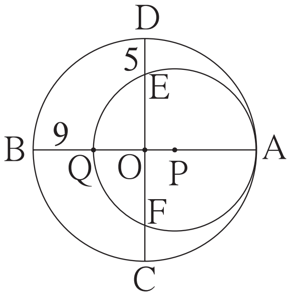
$$= \frac{90}{360} \times 3.14\,(20\sqrt{2})^2 - (20)^2$$

$$= \square - \square$$

$$= \square$$

$\therefore$ బిందువులతో సూచించిన మొత్తం భాగ వైశాల్యము = 86 + 228 = 314 చ.సెం.మీ.

12.



పటం 7.49

O మరియు P కేంద్రాలు గాగల వృత్తములు A బిందువు వద్ద అంతరంగా స్పృశించుకుంటున్నాయి. ఒక వేళ BQ = 9, DE = 5, అయిన వృత్త వ్యాసార్ధమును కనుగొనుటకు కింది కృత్యమును చేయండి.

సాధన : పెద్ద వృత్త వ్యాసార్ధమును R అనుకొనుము.

చిన్న వృత్త వ్యాసార్ధమును r అనుకొనుము.

OA, OB, OC మరియు OD పెద్ద వృత్తము యొక్క వ్యాసార్ధాలు

$\therefore$ OA = OB = OC = OD = R

PQ = PA = r

OQ = OB − BQ = □

OE = OD − DE = □

P కేంద్రంగల వృత్తములో రెండు జ్యాల అంతర ఖండన ధర్మానుసారము

$OQ \times OA = OE \times OF$

□ × R = □ × □ ($\because$ OE = OF)

$R^2 - 9R = R^2 - 10R + 25$

R = □

AQ = 2r = AB − BQ

2r = 50 − 9 = 41

r = □ = □

❒❒❒

జవాబులు

అధ్యాయం 1 సరూపత

అభ్యాసమాలిక 1.1

1. $\frac{3}{4}$ 2. $\frac{1}{2}$ 3. 3 4. 1:1 5. (1) $\frac{BQ}{BC}$, (2) $\frac{PQ}{AD}$, (3) $\frac{BC}{DC}$, (4) $\frac{DC \times AD}{QC \times PQ}$

అభ్యాసమాలిక 1.2

1. (1) సమద్విఖండనం అవుతుంది. (2) సమద్విఖండనం కాదు (3) సమద్విఖండనం అవుతుంది.

2. $\frac{PN}{NR} = \frac{PM}{MQ} = \frac{3}{2}$, కావున రేఖ NM || భుజము RQ 3. QP = 3.5 5. BQ = 17.5

6. QP = 22.4 7. $x = 6$; AE = 18 8. LT = 4.8 9. $x = 10$

10. దత్తాంశం, XQ, PD, దత్తాంశం, $\frac{\boxed{XR}}{\boxed{RF}} = \frac{\boxed{XQ}}{\boxed{QE}}$, ప్రాథమిక అనుపాత సిద్ధాంతం, $\frac{\boxed{XP}}{\boxed{PD}} = \frac{\boxed{XR}}{\boxed{RF}}$

అభ్యాసమాలిక 1.3

1. ΔABC~Δ EDC కో.కో. నియమం. ΔPQR~Δ LMN; భు.భు.భు. సరూప నియమమునననుసరించి

3. 12 మీటర్లు 4. AC = 10.5 6. OD = 4.5

అభ్యాసమాలిక 1.4

1. వైశాల్యాల నిష్పత్తి = 9 : 25 2. $\boxed{PQ^2}$, $\frac{\boxed{4}}{\boxed{9}}$ 3. $\boxed{A(\Delta PQR)}$ $\frac{16}{25}$, $\frac{4}{5}$

4. MN = 15 5. 20 సెం.మీ. 6. $4\sqrt{2}$

7. $\boxed{PF}$; $\boxed{x}$ + $\boxed{2x}$; $\boxed{\angle FPQ}$; $\boxed{\angle FQP}$; $\frac{DF^2}{PF^2}$; $\boxed{20}$; $\boxed{45}$; $\boxed{45}$ – $\boxed{20}$; $\boxed{\text{25 చదరపు యూనిట్లు}}$

సంకీర్ణ ప్రశ్నసంగ్రహము 1

1. (1) (B), (2) (B), (3) (B), (4) (D), (5) (A)

2. $\frac{7}{13}$, $\frac{7}{20}$, $\frac{13}{20}$ 3. 9 సెం.మీ. 4. $\frac{3}{4}$ 5. 11 సెం.మీ. 6. $\frac{25}{81}$ 7. 4

8. PQ = 80, QR = $\frac{280}{3}$, RS = $\frac{320}{3}$ 9. $\frac{\boxed{PM}}{\boxed{MQ}} = \frac{\boxed{PX}}{\boxed{XQ}}$, $\frac{\boxed{PM}}{\boxed{MR}} = \frac{\boxed{PY}}{\boxed{YR}}$,

10. $\frac{AX}{XY} = \frac{3}{2}$ 12. $\frac{\boxed{3}}{\boxed{2}}$, $\frac{\boxed{3}+\boxed{2}}{\boxed{2}}$, $\frac{\boxed{5}}{\boxed{3}}$, $\boxed{\text{కో.-కో.}}$, $\frac{\boxed{5}}{3}$, $\boxed{15}$

అధ్యాయం 2 పైథాగరస్ సిద్ధాంతం

అభ్యాసమాలిక 2.1

1. పైథాగరస్ త్రికములు ; (1), (3), (4), (6) 2. NQ = 6 3. QR = 20.5

4. RP = 12, PS = $6\sqrt{3}$ **5.** $\boxed{\text{దత్తాంశము}}$, $\boxed{45^\circ}$, $\boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}}$, $\boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}}$, $\boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}}$, $\boxed{2}$

6. భుజము = $5\sqrt{2}$ సెం.మీ., చుట్టుకొలత = $20\sqrt{2}$ సెం.మీ. **7.** (1) 18 (2) $4\sqrt{13}$ (3) $6\sqrt{13}$

8. 37 సెం.మీ. **10.** 8.2 మీ.

అభ్యాసమాలిక 2.2

1. 12 **2.** $2\sqrt{10}$ **4.** 18 సెం.మీ.

సంకీర్ణ ప్రశ్నసంగ్రహము 2

1. (1) (B), (2) (B), (3) (A), (4) (C), (5) (D), (6) (C), (7) (B), (8) (A).

2. (1) $a\sqrt{3}$, (2) లంబకోణ త్రిభుజం అవుతుంది. (3) 61 సెం.మీ., (4)15 సెం.మీ., (5) $x\sqrt{2}$, (6) $\angle$PRQ.

3. RS = 6 సెం.మీ., ST = $6\sqrt{3}$ సెం.మీ. **4.** 20 సెం.మీ. **5.** భుజము = 2 సెం.మీ., చుట్టుకొలత = 6 సెం.మీ.

6. 7 **7.** AP = $2\sqrt{7}$ సెం.మీ. **10.** 7.5 కి.మీ./గంట **12.** 8 సెం.మీ. **14.** 8 సెం.మీ.

15. 192 చదరపు యూనిట్లు **17.** 58 **18.** 26

అధ్యాయం 3 వృత్తము

అభ్యాసమాలిక 3.1

1. (1) 90°, స్పర్శరేఖ వ్యాసార్ధ సిద్ధాంతం (2) 6 సెం.మీ.; ఎందుకనగా లంబాల మధ్య దూరం
(3) $6\sqrt{2}$ సెం.మీ. (4) 45°

2. (1) $5\sqrt{3}$ సెం.మీ. (2) 30° (3) 60° **4.** 9 సెం.మీ.

అభ్యాసమాలిక 3.2

1. 1.3 సెం.మీ. 2. 9.7 సెం.మీ. **4.** (3) 110° **5.** $4\sqrt{6}$ సెం.మీ.

అభ్యాసమాలిక 3.3

1. *m*(చాపము DE) = 90°, *m*(చాపము DEF) = 160°

అభ్యాసమాలిక 3.4

1. (1) 60° (2) 30° (3) 60° (4) 300° **2.** (1) 70° (2) 220° (3) 110° (4) 55°

3. $\angle$R = 92°; $\angle$N = 88° **7.** 44° **8.** 121°

అభ్యాసమాలిక 3.5

1. PS = 18; RS = 10, **2.** (1) 7.5 (2) 12 లేదా 6

3. (1) 18 (2) 10 (3) 5 **4.** 4

సంకీర్ణ ప్రశ్నసంగ్రహము 3

1. (1) D (2) B (3) B (4) C (5) B (6) D (7) A (8) B (9) A (10) C.

2. (1) 9 సెం.మీ. (2) వృత్త అంతరంలో (3) 2 బిందువులు, 12 సెం.మీ.

3. (1) 6 (2) $\angle$K = 30°; $\angle$M = 60° **5.** 10 **6.** (1) 9 సెం.మీ. (2) 6.5 సెం.మీ.

(3) 90° ; MS : SR = 2 : 1 **9.** $4\sqrt{3}$ సెం.మీ.

13. (1) 180° (2) $\angle AQP \cong \angle ASQ \cong \angle ATQ$

(3) $\angle QTS \cong \angle SQR \cong \angle SAQ$ (4) 65°, 130° (5) 100° **14.**(1) 70°

(2) 130° (3) 210° **15.** (1) 56° (2) 6 (3) 16 లేదా 9 **16.** (1) 15.5°

(2) 3.36 (3) 6 **18.** (1) 68° (2) OR = 16.2, QR = 13 (3) 13 **21.** 13

అధ్యాయం 4 రేఖాగణిత నిర్మాణాలు

సంకీర్ణ ప్రశ్నసంగ్రహము 4

1. (1) C (2) A (3) A

అధ్యాయం 5 నిరూపక రేఖాగణితం

అభ్యాసమాలిక 5.1

1. (1) $2\sqrt{2}$ (2) $4\sqrt{2}$ (3) $\frac{11}{2}$ (4) 13 (5) 20 (6) $\frac{29}{2}$

2. (1) సరేఖీయాలు. (2) సరేఖీయాలు కావు. (3) సరేఖీయాలు కావు. (4) సరేఖీయాలు

3. $(-1, 0)$ **7.** 7 లేదా -5

అభ్యాసమాలిక 5.2

1. $(1, 3)$ **2.** (1) $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$ (2) $\left(\frac{4}{7}, -\frac{11}{7}\right)$ (3) $\left(0, \frac{13}{3}\right)$ **3.** 2:7 **4.** $(-6, 3)$

5. 2:5, $k = 6$ **6.** $(11, 18)$ **7.** (1) $(1, 3)$ (2) $(6, -2)$ (3) $\left(\frac{19}{3}, \frac{22}{3}\right)$

8. $(-1, -7)$ **9.** $h = 7$, $k = 18$ **10.** $(0, 2)$; $(-2, -3)$

11. $(-9, -8)$, $(-4, -6)$, $(1, -4)$ **12.** $(16, 12)$, $(12, 14)$, $(8, 16)$, $(4, 18)$

అభ్యాసమాలిక 5.3

1. (1) 1 (2) $\sqrt{3}$ (3) వాలును నిర్ణయించలేము

2. (1) 2 (2) $-\frac{3}{8}$ (3) $\frac{5}{2}$ (4) $\frac{5}{4}$ (5) $\frac{1}{2}$ (6) వాలును నిర్ణయించలేము.

3. (1) సరేఖీయాలు. (2) సరేఖీయాలు. (3) సరేఖీయాలు కావు. (4) సరేఖీయాలు.
(5) సరేఖీయాలు (6) సరేఖీయాలు.

4. -5; $\frac{1}{5}$; $-\frac{2}{3}$ 6. $k = 5$ 7. $k = 0$ 8. $k = 5$

సంకీర్ణ ప్రశ్నసంగ్రహము 5

1. (1) D (2) D (3) C (4) C

2. (1) సరేఖీయాలు. (2) సరేఖీయాలు. (3) సరేఖీయాలు కావు. **3.** $(6, 13)$ **4.** 3:1

5. (−7, 0) 6. (1) $a\sqrt{2}$ (2) 13 (3) $5a$ 7. $\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$

8. (1) అవును, విషమబాహు త్రిభుజం (2) కాదు. (3) అవును, సమబాహు త్రిభుజం 9. $k = 5$

13. 5, $2\sqrt{13}$, $\sqrt{37}$ 14. (1, 3) 16. $\left(\frac{25}{6}, \frac{13}{6}\right)$, వ్యాసార్థం = $\frac{13\sqrt{2}}{6}$ 17. (7, 3)

18. సమాంతర చతుర్భుజం 19. A(20, 10), P(16, 12), R(8, 16), B(0, 20). 20. (3, −2)

21. (7, 6) మరియు (3, 6) 22. 10 మరియు 0

అధ్యాయం 6 త్రికోణమితి

అభ్యాసమాలిక 6.1

1. $\cos\theta = \frac{24}{25}$; $\tan\theta = \frac{7}{24}$ 2. $\sec\theta = \frac{5}{4}$; $\cos\theta = \frac{4}{5}$

3. $\text{cosec}\,\theta = \frac{41}{9}$; $\sin\theta = \frac{9}{41}$ 4. $\sec\theta = \frac{13}{5}$; $\cos\theta = \frac{5}{13}$; $\sin\theta = \frac{12}{13}$

5. $\frac{\sin\theta + \cos\theta}{\sec\theta + \text{cosec}\,\theta} = \frac{1}{2}$

అభ్యాసమాలిక 6.2

1. చర్చ్ యొక్క ఎత్తు 80 మీటర్లు
2. ఓడ, దీపస్థంబంల మధ్య దూరం 51.60 మీటర్లు
3. రెండవ భవన ఎత్తు $(10 + 12\sqrt{3})$ మీటర్లు
4. క్షితిజ సమాంతర తలంతో చేయుకోణం 30°
5. చెట్టు యొక్క ఎత్తు $(40 + 20\sqrt{3})$ మీటర్లు
6. గాలిపటం దారం యొక్క పొడవు 69.20 మీటర్లు

సంకీర్ణ ప్రశ్నసంగ్రహము 6

1. (1) A (2) B (3) C (4) A

2. $\cos\theta = \frac{60}{61}$ 3. $\sin\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$; $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$; $\text{cosec}\,\theta = \frac{\sqrt{5}}{2}$; $\sec\theta = \sqrt{5}$; $\cot\theta = \frac{1}{2}$

4. $\sin\theta = \frac{5}{13}$; $\cos\theta = \frac{12}{13}$; $\text{cosec}\,\theta = \frac{13}{5}$; $\tan\theta = \frac{5}{12}$; $\cot\theta = \frac{12}{5}$

6. భవనం యొక్క ఎత్తు $16\sqrt{3}$ మీటర్లు

7. దీపస్తంబం నుండి ఓడ యొక్క దూరం $\frac{100\sqrt{3}}{3}$ మీటర్లు

8. భవనం యొక్క ఎత్తు $(12 + 15\sqrt{3})$ మీటర్లు

9. నిచ్చెన యొక్క రెండవ చివర నేల నుండి ఎక్కువలో ఎక్కువ 20.80 మీటర్ల ఎత్తు ఉంటుంది.

10. విమానం నేల నుండి ఎక్కువలో ఎక్కువ 68.40 మీటర్ల ఎత్తులో ఉండెను.

అధ్యాయం 7 క్షేత్రమితి

అభ్యాసమాలిక 7.1

1. 11.79 ఘ.సెం.మీ. **2.** 113.04 ఘ.సెం.మీ. **3.** 1413 చ.సెం.మీ. (π=3.14 తీసుకొనిన) **4.** 616 చ.సెం.మీ.
5. 21 సెం.మీ. **6.** 12 జగ్గులు **7.** 5 సెం.మీ. **8.** 273π చ.సెం.మీ. **9.** 20 గోలీలు
10. 94.20 ఘ.సెం.మీ., 103.62 చ.సెం.మీ. **11.** 5538.96 చ.సెం.మీ., 38772.72 ఘ.సెం.మీ.
12. 1468.67π ఘ.సెం.మీ.

అభ్యాసమాలిక 7.2

1. 10.780 లీటర్లు **2.** (1) 628 చ.సెం.మీ. (2) 1356.48 చ.సెం.మీ. (3) 1984.48 ఘ.సెం.మీ.

అభ్యాసమాలిక 7.3

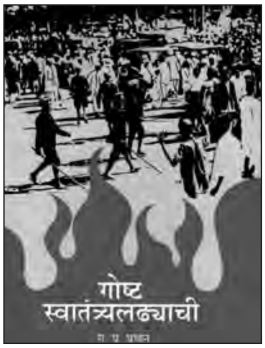
1. 47.1 చ.సె.ంమీ. **2.** 25.12 సెం.మీ. **3.** 3.85 చ.సెం.మీ. **4.** 214 చ.సెం.మీ. **5.** 4 సెం.మీ.
6. (1) 154 చ.సెం.మీ. (2) 25.7 చ.సెం.మీ. (3) 128.3 చ.సెం.మీ. **7.** 10.2 చ.సెం.మీ.
8. 7.3 సెం.మీ. ; 22 సెం.మీ. **9.** (1) 90° (2) 22 సెం.మీ.
10.(1) 12.83 చ.సెం.మీ. (2) 89.83 చ.సెం.మీ. (3) 115.5 చ.సెం.మీ. **11.** 3.5 సెం.మీ.
12. x = 154 చ.సెం.మీ. ; y = 38.5 చ.సెం.మీ.. ; z = 101.5 చ.సెం.మీ..
13. (1) 84.87 చ.సెం.మీ. (2) 25.67 చ.సెం.మీ. (3) 77.01 చ.సెం.మీ. (4) 7.86 చ.సెం.మీ.

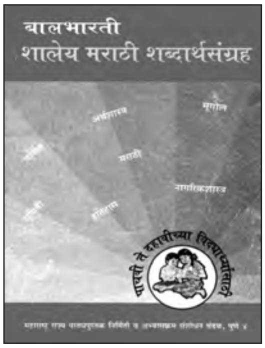
అభ్యాసమాలిక 7.4

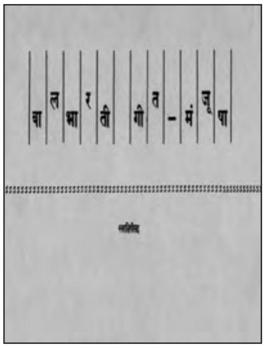
1. 3.72 చ.సెం.మీ. **2.** 9.08 చ.సెం.మీ **3.** 0.65625 చ.యూ. **4.** 20 సెం.మీ.
5. 20.43 చ.సెం.మీ. ; 686.07 చ.సెం.మీ.

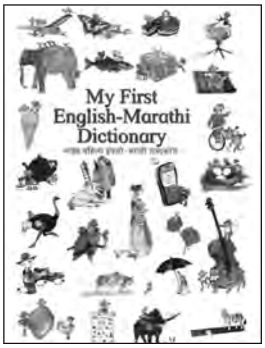
సంకీర్ణ ప్రశ్నసంగ్రహము 7

1. (1) A, (2) D, (3) B, (4) B, (5) A, (6) A, (7) D, (8) C.
2. 20.35 లీటర్లు **3.** 7830 గోళీలు **4.** 2800 నాణెములు ($\pi = \frac{22}{7}$ తీసుకొనిన) **5.** 6336 రూపాయలు
6. 452.16 చ.సెం.మీ. ; 3385.94 గ్రా. **7.** 2640 చ.సెం.మీ. **8.** 108 మీటర్లు
9. 150°; 5π సెం.మీ. **10.** 39.28 చ.సెం.మీ.









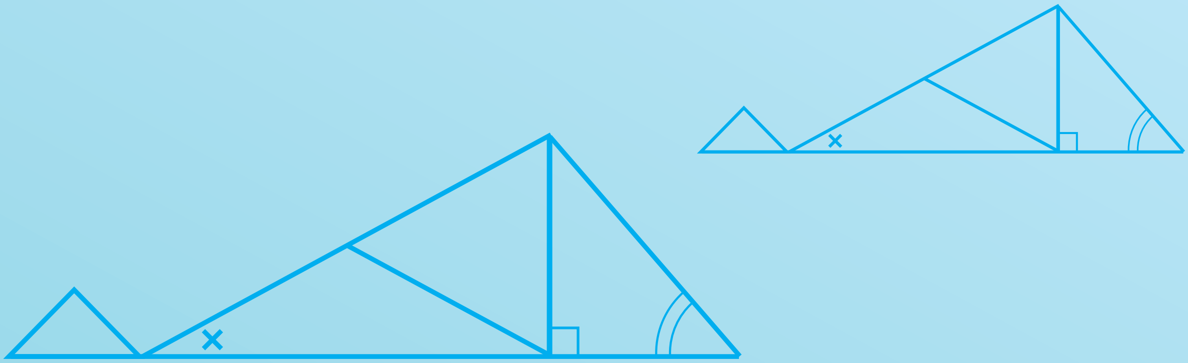
- पाठ्यपुस्तक मंडळाची वैशिष्ट्यपूर्ण पाठ्येत्तर प्रकाशने.
- नामवंत लेखक, कवी, विचारवंत यांच्या साहित्याचा समावेश.
- शालेय स्तरावर पूरक वाचनासाठी उपयुक्त.

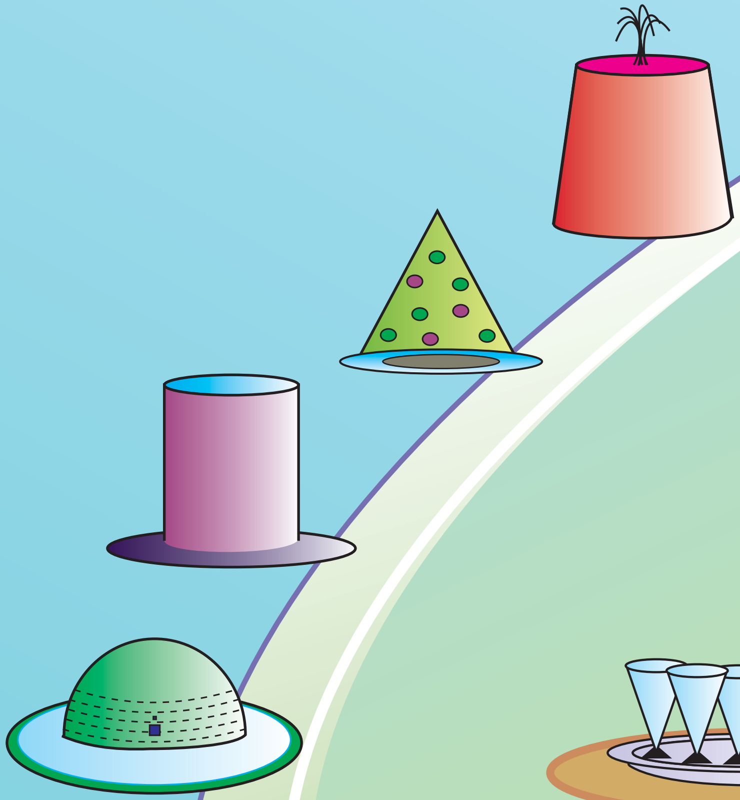
पुस्तक मागणीसाठी www.ebalbharati.in, www.balbharati.in संकेत स्थळावर भेट द्या.

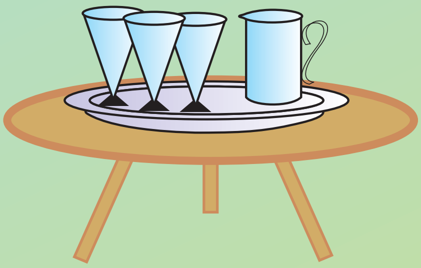
साहित्य पाठ्यपुस्तक मंडळाच्या विभागीय भांडारांमध्ये विक्रीसाठी उपलब्ध आहे.

ebalbharati

विभागीय भांडारे संपर्क क्रमांक : पुणे - ☎ २५६५९४६५, कोल्हापूर- ☎ २४६८५७६, मुंबई (गोरेगाव) - ☎ २८७७१८४२, पनवेल - ☎ २७४६२६४६५, नाशिक - ☎ २३९१५११, औरंगाबाद - ☎ २३३२१७१, नागपूर - ☎ २५४७७१६/२५२३०७८, लातूर - ☎ २२०९३०, अमरावती - ☎ २५३०९६५







మహారాష్ట్ర రాష్ట్ర పాఠ్యపుస్తక నిర్మితి మరియు
పాఠ్యప్రణాళిక పరిశోధన సంస్థ,
పుణె–411 004.
तेलुगु गणित इ.१०वी भाग-२ ₹ 77.00