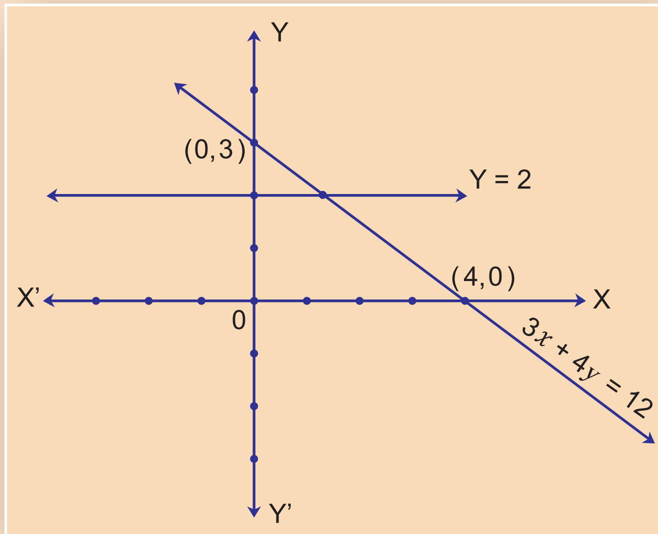
గణితశాస్త్రం Iవ-భాగం

పదవ తరగతి



$$1 + 2 + 3 + \cdots \cdots + 78 + 79 + 80$$
$$= (1 + 80) + (2 + 79) + \cdots + (39 + 42) + (40 + 41)$$

భారత సంవిధానము

పార్ట్ – IV A

ప్రాథమిక బాధ్యతలు

51 ఎ) ప్రాథమిక బాధ్యతలు

ప్రతి పౌరుడు ఈ క్రింది బాధ్యతలను మనసారా స్వీకరించి బాధ్యతాయుతంగా ప్రవర్తించవలెను.

ఎ) రాజ్యాంగ శాసనబద్ధుడై యుండుట. శాసనమందలి ఆశయములనూ, శాసనం స్థాపించే సంస్థలనూ, జాతీయ పతకాన్ని, జాతీయ గీతాన్ని అంకితభావంతో గౌరవించుట.

బి) స్వాతంత్ర్యోద్యమ స్ఫూర్తితో అన్ని రంగాలలో వ్యవహరించుట.

సి) దేశ సార్వభౌమత్వాన్ని, సమన్వయతనూ, సమగ్రతను రక్షించుట.

డి) దేశరక్షణలో అనుక్షణం సంసిద్ధుడై ఉండుట.

ఇ) ప్రజాజీవనంలో అన్యోన్యతనూ, భ్రాతృభావాన్ని పోషించుట, మత, భాష, ప్రాంతీయతత్వాలకు వర్గవైరుధ్యములకు అతీతముగా ఉండుట. స్త్రీలను అగౌరవపరచే ఆచారములను విడనాడుట.

ఎఫ్) అమూల్యమైన భారతీయ చారిత్రక సంపదనూ, సుసంపన్న సంస్కృతినీ పరిరక్షించుట.

జి) పర్యావరణాన్ని అడవులను, కొలనులనూ, నదులనూ రక్షించుట, అభివృద్ధి పరచుట, మృగరక్షణ జలజంతు జీవరాసులపై కరుణార్ద్రత.
హెచ్) శాస్త్రీయ మరియు మానవతా దృక్పథాలను అలవరచుకొనుట, జిజ్ఞాసను పెంపొందించు కొనుట, సంస్కరణ తత్వమును పెంపొందించుట.

ఐ) హింసను విడనాడుట, ప్రజల ఆస్తుల విధ్వంసం చర్యలను నిరోధించుట.

జె) వ్యక్తిత్వ శక్తి సామర్థ్యాల ఔన్నత్యాన్ని పెంపొందించుకొనుట ద్వారా మరియూ సమిష్టి కృషి ద్వారా అన్ని రంగాలలో గణనీయమైన స్థాయిని చేరుటకొరకు, శిఖరాగ్ర సాధనకొరకు నిరంతరం కృషి సల్పుట.

కె) రక్షకులు లేదా సంరక్షకులుగా ఉన్నవారందరూ ఆరు నుంచి 14 సంవత్సరముల లోపల పసివారికి విద్యాభ్యాసము చేయు అవకాశమును కల్పించవలెను.

ప్రభుత్వ తీర్మానం క్రమ సంఖ్య : అభ్యాస్-2116/(ప్ర.క్ర.43/16) ఎస్‌డి-4 తేదీ 25.4.2016 ప్రకారం స్థాపించబడిన సమన్వయ సమితి యొక్క తేదీ 29.12.2017 రోజు సమావేశంలో ఈ పాఠ్య పుస్తకమును 2018-19 విద్యాసంవత్సరం నుంచి నిర్దేశించుటకుగాను అనుమతి ఇవ్వబడినది.

గణితశాస్త్రం

Iవ భాగం

పదవ తరగతి

మహారాష్ట్ర రాష్ట్ర పాఠ్యపుస్తక నిర్మితి మరియు పాఠ్యప్రణాళిక పరిశోధన సంస్థ, పుణె-411 004.

NZ3PF9

మీ స్మార్ట్‌ఫోన్‌తో DIKSHA App నుపయోగించి పాఠ్యపుస్తకం మొదటి పుటలోని QR CODE ను స్కాన్ చేసిన డిజిటల్ పాఠ్యపుస్తకం మరియు ప్రతి పాఠంలోని QR CODE ను స్కాన్ చేసిన ఆ పాఠానికి సంబంధించిన అధ్యయన-అధ్యాపనలకు ఉపయుక్తమగు దృశ్య-శ్రవణ సాహిత్యం లభిస్తుంది.

ప్రథమ ప్రచురణ : 2018
పునర్ముద్రణ : 2022

© మహారాష్ట్ర రాష్ట్ర పాఠ్యపుస్తక నిర్మితి మరియు పాఠ్య ప్రణాళిక పరిశోధన సంస్థ, పుణె-411004.

ఈ పుస్తకమునకు సంబంధించిన సర్వహక్కులు మహారాష్ట్ర రాష్ట్ర పాఠ్యపుస్తక నిర్మితి మరియు పాఠ్య ప్రణాళిక పరిశోధన సంస్థవి. ఈ పుస్తకము నందలి ఏ భాగమును సంచాలకులు, మహారాష్ట్ర రాష్ట్ర పాఠ్యప్రణాళిక పరిశోధన సంస్థ వారి లిఖిత అనుమతి లేకుండా ఉటంకించటం చేయరాదు.

గణిత విషయ నిపుణుల సమితి

డా॥ మంగళ నార్లీకర్ (అధ్యక్షులు)
డా॥ జయశ్రీ అత్రే (సభ్యులు)
శ్రీ వినాయక్ గోడ్‌బోలె (సభ్యులు)
శ్రీ రమాకాంత్ సరోదే (సభ్యులు)
శ్రీమతి ప్రాజక్తి గోఖలే (సభ్యులు)
శ్రీ సందీప్ పంచ్‌భాయ్ (సభ్యులు)
శ్రీమతి పూజ జాదవ్ (సభ్యులు)
శ్రీమతి ఉజ్వల గోడ్‌బోలె (సభ్యకార్యదర్శి)

గణిత విషయం - రాష్ట్ర అధ్యయనవర్గ సభ్యులు

శ్రీమతి జయశ్రీ పురందరె
శ్రీ రాజేంద్ర చౌదరి
శ్రీ రామా వన్యాళ్‌కర్
శ్రీ అన్నాప్పా పారిట్
శ్రీ అన్సార్ శేఖ్
శ్రీ శ్రీపాద్ దేశ్‌పాండే
శ్రీ సురేష్ దాతె
శ్రీ ఉమేష్ రేఖె
శ్రీ బన్సి హవలె
శ్రీమతి రోహిణి శిర్కె
శ్రీ ప్రకాశ్ జెండె
శ్రీ లక్ష్మణ్ దావణ్‌కర్
శ్రీ శ్రీకాంత్ రత్నపారఖీ
శ్రీ సునిల్ శ్రీవాస్తవ్
శ్రీ అన్సారి అబ్దుల్ హమీద్
శ్రీమతి సువర్ణ దేశ్‌పాండే
శ్రీమతి తరూబెన్ పోపట్
శ్రీ ప్రమోద్ ఠోంబ్రె
డా॥ భారతి సహస్రబుద్దే
శ్రీ వసంత్ శెవాలే
శ్రీ ప్రతాప్ కాశిద్
శ్రీ మిలింద్ భాకరే
శ్రీ జ్ఞానేశ్వర్ మషాల్‌కర్
శ్రీ గణేష్ కోల్‌తే
శ్రీ సందేశ్ సోనావ్‌నే
శ్రీ సుధీర్ పాటిల్
శ్రీ ప్రకాశ్ కాపసే
శ్రీ రవీంద్ర ఖందారే
శ్రీమతి స్వాతి ధర్మాధికారి
శ్రీ అరవింద్‌కుమార్ తివారి
శ్రీ మల్లేషం బేతి
శ్రీమతి ఆర్యా భిడే

ముఖచిత్రం మరియు కంప్యూటర్ స్కెచ్

శ్రీ సందీప్ కోళీ, చిత్రకారుడు, ముంబయి

అక్షరకూర్పు **PC Graphic, Mumbai**

ప్రధాన సంయోజకులు

శ్రీమతి ఉజ్వల శ్రీకాంత్ గోడ్‌బోలే
ఇ. విశేషాధికారిణి, గణితం
పాఠ్యపుస్తక సంస్థ, పుణె.

అనువాదం మరియు సమీక్ష : శ్రీ మల్లేశం కృష్ణహరి బేతి
శ్రీమతి ఈరబత్తి ప్రతిభ అనిల్

పునః సమీక్ష : శ్రీ మురళి రాజేశం కుందారం

అనువాద సంయోజకులు : **డా॥ శ్రీమతి తులసీ భారత్,**
విశేషాధికారిణి-తెలుగు,
పాఠ్యపుస్తక సంస్థ, పుణె

నిర్మితి

శ్రీ సచ్చితానంద్ ఆఫళే
ముఖ్యనిర్మితి అధికారి
శ్రీ సంజయ్ కాంబ్లే
నిర్మితి అధికారి
శ్రీ ప్రశాంత్ హరణె
సహాయ నిర్మితి అధికారి

కాగితం: 70 జి.యస్.యమ్. క్రీమ్‌వోవ్

ముద్రణాదేశం: N/PB/2018-19/ 1000

ముద్రకులు: INDIA PRINTING WORKS, MUMBAI

ప్రకాశకులు

శ్రీ వివేక్ ఉత్తమ్ గోసావి, నియంత్రకులు,
పాఠ్యపుస్తక నిర్మితి సంస్థ,
ప్రభాదేవి, ముంబయి-25.

భారత సంవిధానము

ప్రస్తావన

భారతదేశ ప్రజలమగు మేము, భారతదేశమును **సార్వభౌమ్య సామ్యవాద లౌకిక ప్రజాస్వామ్య గణరాజ్యముగ** నెలకొల్పుటకు మరియు అందలి పౌరులెల్లరకు

సామాజిక, ఆర్థిక, రాజకీయ **న్యాయమును**,

భావము, భావప్రకటన, విశ్వాసము,

ధర్మము, ఆరాధన -- వీటి **స్వాతంత్ర్యమును**,

అంతస్తులోను, అవకాశములోను **సమానత్వమును**

చేకూర్చుటకు; మరియు వారందరిలో

వ్యక్తి గౌరవమును, జాత్యైక్యతను,

అఖండతను తప్పక ఒనగూర్చు **సౌభ్రాత్రమును**,

పెంపొందించుటకు; సత్యనిష్ఠా పూర్వకముగ తీర్మానించుకొని,

ఈ 1949వ సంవత్సరము నవంబరు ఇరువది యారవ

దినమున **మా సంవిధాన సభయందు ఇందుమూలముగ,**

ఈ సంవిధానమును అంగీకరించి, అధిశాసనము చేసి

మాకు మేము ఇచ్చుకొన్నవారమైతిమి.

జాతీయ గీతము

జనగణమన – అధినాయక జయ హే
భారత – భాగ్యవిధాతా
పంజాబ, సింధు, గుజరాత, మరాఠా,
ద్రావిడ, ఉత్కల, బంగ,
వింధ్య, హిమాచల, యమునా, గంగా,
ఉచ్ఛల జలధితరంగ,
తవ శుభ నామే జాగే, తవ శుభ ఆశిస మాగే,
గాహే తవ జయగాథా,
జనగణ మంగలదాయక జయ హే,
భారత – భాగ్యవిధాతా
జయ హే, జయ హే, జయ హే,
జయ జయ జయ, జయ హే

ప్రతిజ్ఞ

భారతదేశం నా మాతృభూమి. భారతీయులందరు నా సహోదరులు.

నేను నా దేశాన్ని ప్రేమిస్తున్నాను. సుసంపన్నమైన, బహువిధమైన నా దేశ వారసత్వ సంపద నాకు గర్వకారణం. దీనికి అర్హత పొందడానికి సర్వదా నేను కృషిచేస్తాను.

నా తల్లిదండ్రుల్ని, ఉపాధ్యాయుల్ని, పెద్దలందర్ని గౌరవిస్తాను. ప్రతివారితోను మర్యాదగా నడుచుకొంటాను.

నా దేశంపట్ల, నా ప్రజలపట్ల సేవానిరతితో ఉంటానని ప్రతిజ్ఞ చేస్తున్నాను. వారి శ్రేయోభివృద్ధులే నా ఆనందానికి మూలం.

ప్రస్తావన

విద్యార్థి మిత్రులారా,

పదవ తరగతి పాఠ్యప్రణాళికకు మీకు స్వాగతం!

గణితం Iవ భాగం మరియు గణితం IIవ భాగం పాఠ్య పుస్తకాలను అభ్యసించాలి.

గణితం Iవ భాగంలో బీజగణితం, గ్రాఫ్, ఆర్థిక (నియోజన) ప్రణాళిక, సాంఖ్యకశాస్త్రం ఇవి ముఖ్యమైన భాగాలు. 9వ తరగతి వరకు పరిచయం చేయబడిన అంశాలను గూర్చి కొంత అధికంగా అభ్యాసం చేయాలి. ఆర్థిక ప్రణాళిక లో GST అనుకొత్త పన్ను విధానం పరిచయం చేయబడింది. ఎక్కడయితే కొత్త భాగం, సూత్రాలు లేదా వాటి ఉపయోగాలున్నాయో అక్కడ సరళమైన వివరణ ఇవ్వబడినది. సాధించబడినమాదిరి ఉదాహరణలు అభ్యాసానికై సమస్యలునూ ఉన్నాయి. అంతే గాక ప్రజ్ఞావంతులైన విద్యర్థులకై కొన్ని సవాళ్ళవంటి ప్రశ్నలు నక్షత్ర చిహ్నాంకితం చేసి ఇవ్వబడినవి. సామాన్య విద్యార్థులు పదవ తరగతి అనంతరం గణితం అభ్యసించదలచుకోనట్లయితే, వాటిలోని మూలాధార (కనిస) భావనలను అర్థం చేసుకోవాలి. అలాగే ఇతర రంగాలలో పని చేస్తున్నప్పుడు అవసరమైన గణితజ్ఞానాన్ని ఉపయోగించగల పరిజ్ఞానం వారికి ఈ పుస్తకం నుండి లభిస్తుంది. 'అధిక వివరాలకై' ఈ శీర్షిక కింద ఇవ్వబడిన సారము, ఏ విద్యార్థులకయితే పదవతరగతి అనంతరం గణితాన్ని అభ్యసించి ప్రావీణ్యం పొందాలన్న కోరిక కలదో వారికి బాగా ఉపయోగపడుతుంది. కాబట్టి ఇలాంటి విద్యార్థులు దీనిని తప్పకుండా అభ్యసించాలి. మొత్తం పుస్తకాన్ని కనీసం ఒక్కసారి చదివి, అర్థం చేసుకోండి.

యాప్‌ను ఉపయోగించి క్యు. ఆర్ కోడ్ ద్వారా ప్రతి అధ్యాయమునకు సంబంధించి ఉపయుక్తమైన దృశ్య-శ్రవణ సాహిత్యం లభిస్తుంది. అది అధ్యయనం కొరకు తప్పకుండ ఉపయోగపడుతుంది.

పదవ తరగతి పరీక్షలు అతిముఖ్యమైనవిగా భావించబడుతాయి. ఈ అంశాలను గూర్చి ఒత్తిడికి లోనుగాకుండా బాగా అభ్యసించి కోరుకున్న కార్యసాఫల్యతను పొందడానికి విద్యార్థులకు శుభాకాంక్షలు!

(డా॥ సునిల్ మగర్)
సంచాలకులు
మహారాష్ట్ర రాష్ట్ర పాఠ్యపుస్తక నిర్మితి మరియు
పాఠ్యప్రణాళిక పరిశోధన సంస్థ, పుణె.

పుణె
మార్చి 18వ తేది, 2018 ఉగాది
భారతీయ సౌరదినం: 27 ఫాల్గుణం 1939.

10వ తరగతి గణితం Iవ భాగం పాఠ్యప్రణాళిక ద్వారా దిగువనీయబడిన సామర్థ్యాలు విద్యార్థులలో అభివృద్ధి చెందుతాయి.

క్షేత్రం	అధ్యాయం	సామర్థ్యాల వివరణ
1. సంఖ్యాజ్ఞానం	1.1 అంకశ్రేఢి	• అంకశ్రేఢిని ఉపయోగించి ఉదాహరణలను సాధించగల్గుట. • భవిష్యత్తులోని ఏదేని విషయమును సాధించుటకై వివిధ దశలలో ప్రణాళిక రచించగల్గుట.
2. బీజగణితం	2.1 వర్గసమీకరణాలు 2.2 రెండు చరరాశులు గల రేఖీయ సమీకరణములు	• వ్యవహారిక సమస్యలను వర్గసమీకరణాల రూపంలో వ్యక్తం చేయగల్గుట, వాటిని సాధించగల్గుట. • శాబ్దిక ఉదాహరణల సాధన కనుగొనుటకు ఎన్ని చరరాశులను ఉపయోగించవలెనో నిర్ణయించగల్గుట. • శాబ్దిక ఉదాహరణలను రెండు చరరాశులుగల సమీకరణములోకి రూపాంతరం చెందించి సాధనలను కనుగొనగల్గుట.
3. వ్యవహారిక గణితం	3.1 వ్యవహారిక గణితము (ఆర్థిక ప్రణాళిక)	• పొదుపు, పెట్టుబడి లాంటి విషయాలను అర్థం చేసుకొనుట. • పరిశ్రమలు, వ్యాపారంలోని ఆర్థిక వ్యవహారాల ముఖ్య పరిచయం కల్గుట.
4. సాంఖ్యక శాస్త్రం మరియు సంభావ్యత	4.1 సంభావ్యత 4.2 గ్రాఫ్ మరియు కేంద్రీయ స్థానకొలతలు	• ఆటలు, ఎంపిక మొదలైన క్షేత్రాలలో సంభావ్యతను ఉపయోగించగల్గుట. • విశిష్టమైన రకాల సమాచారమును సేకరించిన పిదప దానిని గ్రాఫ్ రూపంలో/చిత్ర రూపంలో గీయుటకు విశిష్ట గ్రాఫ్‌లను ఎన్నుకొనగల్గుట. • వర్గీకృత దత్తాంశము ఇచ్చిన సగటు, మధ్యగతము, బహుళకములను కనుగొనగల్గుట.

ఉపాధ్యాయులకు సూచనలు

మొట్ట మొదటగా పుస్తకమును కూలంకషంగా చదివి, దానిని అర్థంచేసుకోండి. వివిధ అంశాల వివరణ మరియు సూత్రాలను సరిచూసుకోవడం లాంటి వాటికై కృత్యాల సహాయం తీసుకోండి.

ప్రయోగాల నుండి మూల్యమాపన చేయవలసినది అందుకై కూడా కృత్యాలుపయోగించవచ్చు. విద్యార్థులను స్వంతంగా ఆలోచించుటకు ఉత్తేజ పరచండి ఏదేని సమస్యను వేరే విధంగా కానీ తార్కిక పద్ధతిలో సాధించిన విద్యార్థులకు ప్రత్యేక ప్రోత్సాహన్నివ్వండి.

ప్రయోగాల పట్టిక (నమూనా)

1. గ్రాఫ్ కాగితంపై X–అక్షం లేదా Y–అక్షానికి సమాంతర రేఖను గీసి, దానిపై ఏవేని నాలుగు బిందువుల నిరూపకములను రాయుము. నిరూపకముల విలువలను బట్టి రేఖీయ సమీకరణం ఎలా తయారవుతుందో చూడుము.

   [సమాంతరరేఖకు బదులుగా మూలబిందువు నుండి వెళ్ళే లేదా X మరియు Y అక్షాలను ఖండించు రేఖను తీసుకొన్నను సరే.]

2. ఏదేని రెండంకెల సంఖ్యను మనసులో అనుకొనుము. దానిని వెల్లడించకుండా సంఖ్యను గుర్తించడానికి గూఢ ప్రశ్నతయారు చేయుము. సంఖ్యలోని అంకెలమధ్య రెండు బీజీయ సంబంధాలను తయారుచేసి గూఢ ప్రశ్నను సాధించి చూపుము.

   [పై ప్రయోగాన్ని మూడంకెల సంఖ్యకై కూడా చేయవచ్చు.]

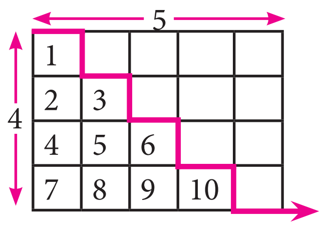
3. ఏదైనా ఆహారపదార్థం పాకెట్‌పైనున్న వివరణను చదివి, ఆ వివరణను చూపే వృత్తరేఖా చిత్రాన్ని గీయండి. ఉదాహరణకు బిస్కెట్ పాకెట్ పైన మాంసకృత్తులు, కార్బోహైడ్రేట్స్, విటమిన్స్ మొదలైన వాటి పట్టిక చూడుము. వాటి బరువులు ఎంత ఇవ్వబడినవో చూడండి. దానిని బట్టి బరువు యొక్క పై చార్ట్ వితరణను చూపే వృత్తరేఖా చిత్రాన్ని గీయుము. ఉదా! కర్బనయుక్త, కొవ్వు, మాంసకృత్తులు మరియు ఇతర ఇలా నాలుగు భాగాలు చేయవచ్చు.

4. ఇచ్చిన పౌనఃపున్య విభాజన పట్టిక Excel sheet తయారు చేయుము. ఆ పట్టికను బట్టి పౌనఃపున్య బహుభుజి మరియు కమ్మీరేఖా చిత్రం Excelలో తయారుచేయుము.

5. ఒక పాచికను పదిసార్లు విసిరిన వచ్చిన ఫలితాలను నమోదు చేసి, పట్టికను తయారు చేయుము.

6. జియస్‌టి వ్యవహారంలో ఇచ్చిన పన్ను రశీదులను చూడుము. అందులోని అన్ని అంశాలను నమోదు చేయండి. అందులోని పన్ను విధింపును మళ్ళీ గణించి చూడండి. అన్ని గణనలు సరిగా ఉన్నట్లు ధృవపరుచుకోండి.

7. ఇచ్చిన క్రమము సహజ సంఖ్యలను కూడుటకు ఇచ్చిన కృత్యాన్ని చేసి చూడండి. ఉదాహరణకు 1 నుండి 4 వరకు సహజ సంఖ్యలను కూడాలి అనుకోండి అందుకై 4 × 5 గల ఒక చదరపు కాగితాన్ని తీసుకొని పటంలో చూపిన విధంగా కత్తిరించండి.(ఇచ్చట n = 4.) దానినిబట్టి $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$ ఈ సూత్రాన్ని సరిచూసుకోండి.



$$S_n = \frac{n(n+1)}{2} \quad \therefore\ S_4 = \frac{4\,(4+1)}{2} = \frac{4\times 5}{2} = \frac{20}{2} = 10$$

[సూచన : ఇచ్చట a = 1 మరియు d = 1. అధిక సంఖ్యలను తీసుకొని a మరియు d ఈ సంఖ్యలను మార్చి అలాగే సరి, బేసి సంఖ్యలకై, ఘనాల మొత్తానికై ఇలాంటి కృత్యంను చేయవచ్చు.]

8. ఒక కార్డుపై ముందువైపు $\alpha = 6$ వెనకవైపు $\alpha = -6$ రాయండి. అలాగే రెండవ కార్డుపై $\beta = -3$ మరియు $\beta = 7$ ఇలారాయండి. దానిని బట్టి $(\alpha + \beta)$ మరియు $(\alpha\beta)$ ల వేర్వేరు విలువలు తయారవుతాయి. ఆ విలువలనుపయోగించి వర్గసమీకరణలను తయారు చేయండి.

విషయసూచిక

అధ్యాయములు	పేజీలు
1. రెండు చరరాశులు గల రేఖీయ సమీకరణములు	1 నుండి 29
2. వర్గ సమీకరణములు	30 నుండి 54
3. అంకశ్రేఢి	55 నుండి 80
4. ఆర్థిక ప్రణాళిక	81 నుండి 112
5. సంభావ్యత	113 నుండి 128
6. సాంఖ్యక శాస్త్రము	129 నుండి 168
• జవాబులు	169 నుండి 176

1 రెండు చరరాశులుగల రేఖీయ సమీకరణములు

పదండి, నేర్చుకుందాం

- రెండు చరరాశులుగల రేఖీయ సమీకరణములను సాధించు పద్ధతులు – గ్రాఫ్ పద్ధతి, క్రామర్స్ పద్ధతి.
- సమీకరణములను రెండు రేఖాయుగ్మ సమీకరణములుగా మార్చుట.
- సమకాలిక సమీకరణముల అనువర్తనములు.

కొంచెం గుర్తుకు తెచ్చుకుందాం

రెండు చరరాశులుగల రేఖీయ సమీకరణం (Linear equation in two variables)

ఏ సమీకరణములో రెండు చరరాశులు ఉపయోగించబడుతాయో మరియు చరరాశిగల ప్రతి పదము యొక్క పరిమాణము 1 ఉంటే ఆ సమీకరణమును రెండు చరరాశులుగల రేఖీయ సమీకరణము అంటారు, దీనిని మీరు కింది తరగతిలో నేర్చుకున్నారు.

$ax + by + c = 0$ ఇది రెండు చరరాశులుగల రేఖీయ సమీకరణము యొక్క సాధారణ రూపం. ఇక్కడ a, b, c లు వాస్తవ సంఖ్యలు అయి a మరియు b లు ఒకేసారి శూన్యములు కావు అని కూడా మనకు తెలుసు.

ఉదా. $3x = 4y - 12$ ఈ సమీకరణము యొక్క సాధారణ రూపము $3x - 4y + 12 = 0$

కృత్యం: కింది పట్టికను పూరించండి.

క్రమసంఖ్య	సమీకరణము	రెండు చరరాశులు గల రేఖీయ సమీకరణం అగునా, కాదా?
1	$4m + 3n = 12$	అగును
2	$3x^2 - 7y = 13$	
3	$\sqrt{2}x - \sqrt{5}y = 16$	
4	$0x + 6y - 3 = 0$	
5	$0.3x + 0y - 36 = 0$	
6	$\frac{4}{x} + \frac{5}{y} = 4$	
7	$4xy - 5y - 8 = 0$	

సమకాలిక రేఖీయ సమీకరణములు (Simultaneous linear equations)

ఎప్పుడయితే మనం రెండు చరరాశులుగల రేఖీయ సమీకరణముల సాధనను ఒకే సమయంలో చేస్తామో వాటిని సమకాలిక రేఖీయ సమీకరణములు అంటారు.

కింది తరగతిలో ఒక చరరాశిని తొలగించి సమీకరణములను సాధించే పద్ధతి గురించి మీరు తెలుసుకున్నారు. దానిని క్లుప్తంగా గుర్తుకు తెచ్చుకుందాం.

ఉదా. (1) కింది సమకాలిక సమీకరణములను సాధించండి.

$5x - 3y = 8;\ 3x + y = 2$

సాధన :

పద్ధతి I : $5x - 3y = 8 \ldots$ (I)

$3x + y = 2 \ldots$ (II)

సమీకరణము (II)ను ఇరువైపుల 3చే గుణించుదాం

$9x + 3y = 6 \ldots$ (III)

$5x - 3y = 8 \ldots$ (I)

ఇప్పుడు సమీకరణము (I) మరియు (III)లను కూడుదాం

$$\begin{array}{r} 5x - 3y = 8 \\ + \quad 9x + 3y = 6 \\ \hline 14x = 14 \end{array}$$

$\therefore x = 1$

$x = 1$ విలువను సమీకరణం (II)లో ప్రతిక్షేపించుదాం.

$3x + y = 2$

$\therefore 3 \times 1 + y = 2$

$\therefore 3 + y = 2$

$\therefore y = -1$

$x = 1, y = -1$ సాధన అవుతుంది.

ఇదే సాధనను $(x, y) = (1, -1)$ ఈ విధంగా కూడా రాస్తారు.

పద్ధతి (II)

$5x - 3y = 8 \ldots$ (I)

$3x + y = 2 \ldots$ (II)

సమీకరణము (II) నుండి y చరరాశి విలువను x చరరాశి రూపంలో రాద్దాం.

$y = 2 - 3x \ldots$ (III)

ఇప్పుడు y యొక్క ఈ విలువను సమీకరణము (I)లో ప్రతిక్షేపించుదాం.

$5x - 3y = 8$

$\therefore 5x - 3(2 - 3x) = 8$

$\therefore 5x - 6 + 9x = 8$

$\therefore 14x - 6 = 8$

$\therefore 14x = 8 + 6$

$\therefore 14x = 14$

$\therefore x = 1$

$x = 1$ విలువను సమికరణం(III)లో ప్రతిక్షేపించుదాం.

$y = 2 - 3x$

$\therefore y = 2 - 3 \times 1$

$\therefore y = 2 - 3$

$\therefore y = -1$

$x = 1, y = -1$ సాధన అవుతుంది.

ఉదా. (2) సాధించండి**:** $3x + 2y = 29;\ 5x - y = 18$

సాధన : $3x + 2y = 29 \ldots$ (I) మరియు $5x - y = 18 \ldots$ (II)

ఇచ్చిన సమీకరణములలో y చరరాశిని తొలగించి సాధించుదాం. దానికొరకు కింది ఖాళీ గడులలో యోగ్యమైన సంఖ్యను రాయుము.

సమీకరణం (II) ను 2 చే గుణించగా

$\therefore\ 5x \times \square - y \times \square = 18 \times \square$

$\therefore\ 10x - 2y = \square \ldots$ (III)

సమీకరణము (I) లో సమీకరణము (III) ను కలుపుదాం.

$$\begin{array}{r} 3x + 2y = 29 \\ + \ \square - \square = \square \\ \hline \square = \square \end{array}$$

$\therefore\ x = \square$

$x = 5$ విలువను సమీకరణం (I) లో ప్రతిక్షేపించుదాం.

$3x + 2y = 29$

$\therefore\ 3 \times \square + 2y = 29$

$\therefore\ \square + 2y = 29$

$\therefore\ 2y = 29 - \square$

$\therefore\ 2y = \square$ $\qquad \therefore\ y = \square$

$(x, y) = (\square, \square)$ సాధన అవుతుంది.

ఉదా. (3) $15x + 17y = 21;\ 17x + 15y = 11$

సాధన : $15x + 17y = 21 \ldots$ (I)

$17x + 15y = 11 \ldots$ (II)

ఈ రెండు సమీకరణములలో x మరియు yల గుణకములు తారుమారుగా ఉన్నాయి. ఈ రకమైన సమకాలిక సమీకరణములను సాధించుతున్నపుడు ఆ రెండు సమీకరణముల మొత్తం మరియు భేదమును తీసుకొనిన రెండు కొత్త సరళమైన సమీకరణములు లభిస్తాయి. ఆ సమీకరణములను సాధిస్తే సమీకరణముల సాధన సులభంగా లభిస్తుంది.

సమీకరణం (I) మరియు సమీకరణము (II)లను కూడగా,

$$\begin{array}{r} 15x + 17y = 21 \\ + \ 17x + 15y = 11 \\ \hline 32x + 32y = 32 \end{array}$$

సమీకరణము యొక్క ఇరువైపులా 32చే భాగించగా

$$x + y = 1 \quad . . . \quad (III)$$

సమీకరణం (I) నుండి సమీకరణం (II)ను తీసివేద్దాం.

$$\begin{array}{r} 15x + 17y = 21 \\ - \quad \underset{-}{17x} \underset{-}{+} 15y = \underset{-}{11} \\ \hline -2x + 2y = 10 \end{array}$$

సమీకరణం ఇరువైపులా 2చే భాగించగా,

$$-x + y = 5 \quad . . . \quad (IV)$$

సమీకరణం (III) మరియు సమీకరణం (IV)లను కూడుదాం.

$$\begin{array}{r} x + y = 1 \\ + \quad -x + y = 5 \\ \hline \end{array}$$

$\therefore \quad 2y = 6 \qquad \therefore \quad y = 3$

$y = 3$ విలువను సమీకరణం (III)లో ప్రతిక్షేపించుదాం.

$x + y = 1$

$\therefore \ x + 3 = 1$

$\therefore \ x = 1 - 3 \qquad \therefore \ x = -2$

$(x, y) = (-2, 3)$ సమీకరణము యొక్క సాధన అవుతుంది.

అభ్యాసమాలిక 1.1

1. కింది కృత్యమును పూర్తిచేసి సమకాలిక సమీకరణములను సాధించుము.

$5x + 3y = 9$ ----- (I)

$2x - 3y = 12$ ----- (II)

సమీ. (I) మరియు సమీ. (II)లను కూడుదాం.

$$\begin{array}{r} 5x + 3y = 9 \\ + \quad 2x - 3y = 12 \\ \hline \square \ x = \square \end{array}$$

$x = \dfrac{\square}{\square} \qquad x = \square$

$x = 3$ సమీ.(I)లో ప్రతిక్షేపించుదాం.

$5 \times \square + 3y = 9$

$3y = 9 - \square$

$3y = \square$

$y = \dfrac{\square}{3}$

$y = \square$

$(x, y) = (\square, \square)$ సమీకరణముల సాధన అవుతుంది.

2. కింది సమకాలిక సమీకరణములను సాధించండి.

(1) $3a + 5b = 26;\ a + 5b = 22$ (2) $x + 7y = 10;\ 3x - 2y = 7$

(3) $2x - 3y = 9;\ 2x + y = 13$ (4) $5m - 3n = 19;\ m - 6n = -7$

(5) $5x + 2y = -3;\ x + 5y = 4$ (6) $\frac{1}{3}x + y = \frac{10}{3};\ 2x + \frac{1}{4}y = \frac{11}{4}$

(7) $99x + 101y = 499;\ 101x + 99y = 501$

(8) $49x - 57y = 172;\ 57x - 49y = 252$

కొంచెం గుర్తుకు తెచ్చుకుందాం

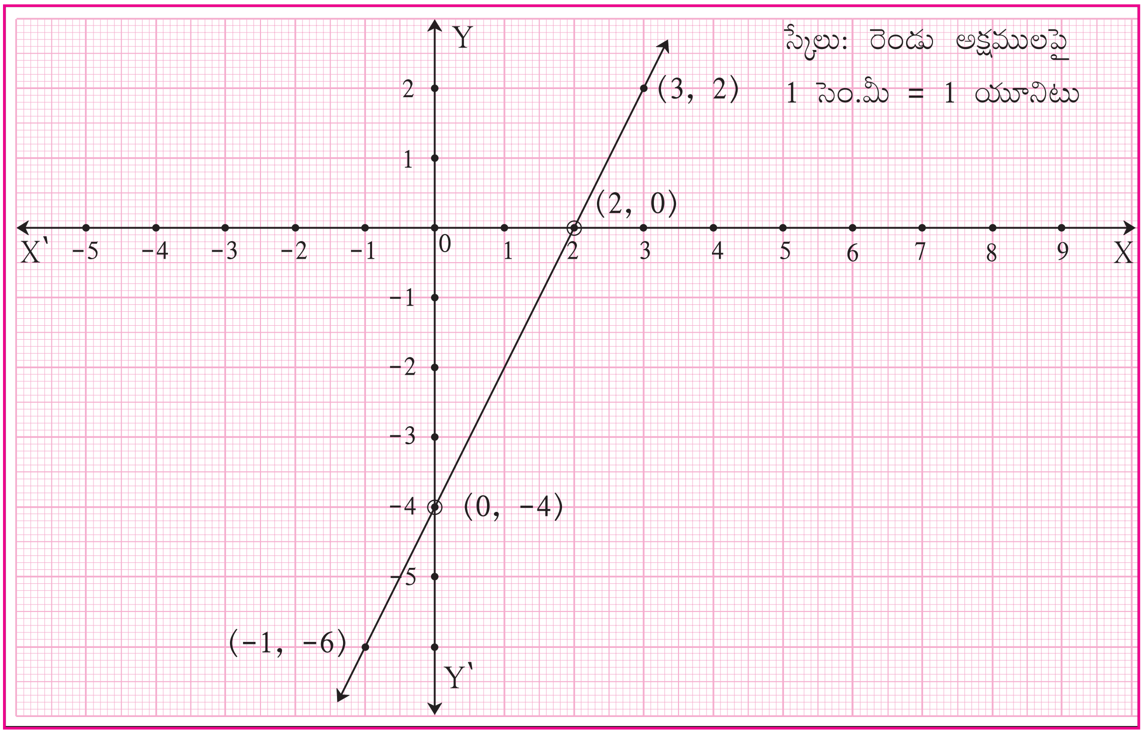
రెండు చరరాశులు గల రేఖీయ సమీకరణముల గ్రాఫ్ (Graph of a linear equation in two variables)

కింది తరగతిలో, రెండు చరరాశులుగల రేఖీయ సమీకరణము యొక్క గ్రాఫ్ ఒక సరళ రేఖ అని మీరు నేర్చుకున్నారు. ఏ క్రమయుగ్మమయితే ఇచ్చిన సమీకరణమును తృప్తిపరుస్తుందో ఆ యుగ్మము ఆ సమీకరణము యొక్క సాధన అవుతుంది. అదే విధంగా క్రమయుగ్మము ఆ సమీకరణముయొక్క గ్రాఫ్‌పై ఒక బిందువును సూచిస్తుంది.

ఉదా. $2x - y = 4$ సమీకరణము యొక్క గ్రాఫ్‌ను గీయండి.

సాధన: $2x - y = 4$ సమీకరణము యొక్క గ్రాఫ్‌ను గీయడానికి (x, y) యొక్క 4 క్రమయుగ్మములను తయారు చేద్దాం. క్రమయుగ్మాలను సాధించేటప్పుడు పట్టికలో చూపిన విధంగా x మరియు yల శూన్య విలువలను తీసుకోవడం సులభంగా ఉంటుంది.

x	0	2	3	−1
y	−4	0	2	−6
(x, y)	(0, −4)	(2, 0)	(3, 2)	(−1, −6)



రెండు చరరాశులు గల రేఖీయ సమీకరణముల యొక్క గ్రాఫ్ గీయునప్పుడు కింది సోపానములను గుర్తుంచుకోండి.

ఇచ్చిన సమీకరణములకై కనీసం 4 క్రమయుగ్మాలను (బిందువుల నిరూపకాలు) వెదకండి

↓

గ్రాఫ్ కాగితముపై X- అక్షము మరియు Y- అక్షములను గీసి బిందువులను గుర్తించండి.

↓

అన్ని బిందువులు సరేఖీయ బిందువులుగా లభిస్తాయి. వాటి నుండి పోయే రేఖను గీయండి.

రేఖను గీయుట కొరకు రెండు బిందువులు సరిపోతాయి కాని వాటిలోని ఒక బిందు నిరూపకాలు కనుగొనేప్పుడు తప్పు అయినచో రేఖ కూడా తప్పవుతుంది.

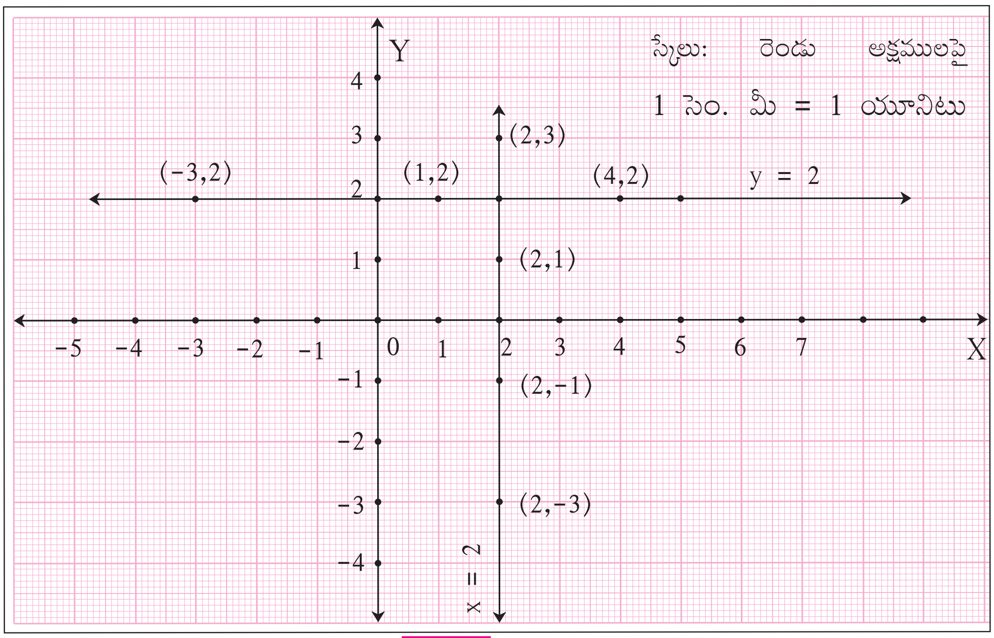
మూడుబిందువుల నిరూపకాలను కనుగొనేప్పుడు ఒక బిందువుయొక్క నిరూపకం తప్పైనచో, ఆ మూడు బిందువులు ఒకే రేఖ పై రావు, దానినిబట్టి ఏదేని ఒక నిరూపకం తప్పుగా వచ్చిందని గమనిస్తాం. కాని కచ్చితంగా ఏ బిందు నిరూపకం తప్పుగా వచ్చిందో, తెలుసుకొనుటకు సమయం పడుతుంది.

నాలుగు బిందువుల నిరూపకాలను కనుగొనేప్పుడు ఒకవేళ ఒక బిందువు యొక్క నిరూపకం తప్పైనచో, మిగతా మూడు బిందు నిరూపకాలు ఒకే రేఖపై వస్తాయి. కావున తప్పును వెంటనే గుర్తించవచ్చు. అందుకే నాలుగు బిందు నిరూపకాలను కనుగొనుట మంచిది.

$0x + y = 2$ సమీకరణమును వీలుకొరకు $y = 2$గా రాస్తారు. ఈ సమీకరణము యొక్క గ్రాఫ్ X- అక్షమునకు సమాంతరంగా ఉంటుంది. ఎందుకనగా x నిరూపకము యొక్క ఏదైన విలువను తీసుకున్న బిందువు యొక్క y నిరూపకం 2 వస్తుంది.

x	1	4	-3
y	2	2	2
(x, y)	(1, 2)	(4, 2)	(−3, 2)

ఇదే విధంగా $x + 0y = 2$ సమీకరణము $x = 2$గా రాస్తారు మరియు దాని గ్రాఫ్ Y- అక్షమునకు సమాంతరంగా ఉంటుంది.



తెలుసుకుందాం.

గ్రాఫ్ పద్ధతిలో సమకాలిక రేఖీయ సమీకరణములను సాధించుట
(Solution of simultaneous equations by Graphical method)

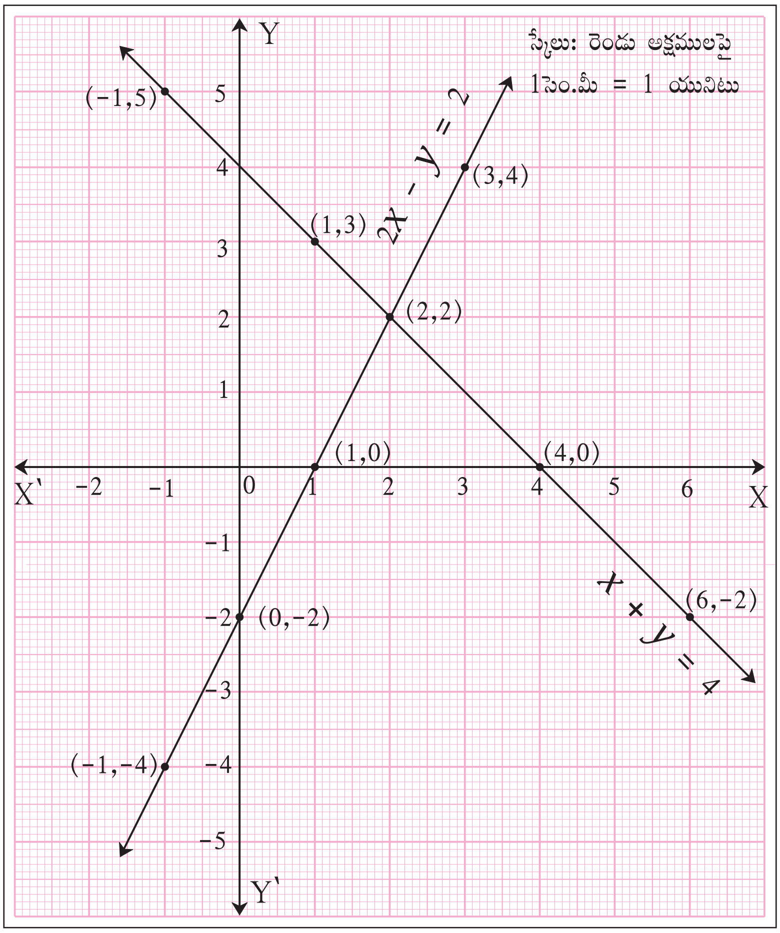
ఉదా. $x + y = 4$ మరియు $2x - y = 2$ ఈ సమీకరణముల గ్రాఫ్ గీసి వాటిని పరిశీలించుదాం.

$x + y = 4$

x	−1	4	1	6
y	5	0	3	−2
(x,y)	(−1, 5)	(4, 0)	(1, 3)	(6, −2)

$2x - y = 2$

x	0	1	3	−1
y	−2	0	4	−4
(x,y)	(0, −2)	(1, 0)	(3, 4)	(−1, −4)



గ్రాఫ్ కాగితంపై గల ప్రతీ బిందువు ఆ గ్రాఫ్ సమీకరణములను తృప్తిపరుస్తుంది. రెండు రేఖలు పరస్పరం (2, 2) బిందువు వద్ద ఖండించుకుంటాయి.

కావున (2, 2) అనే క్రమయుగ్మము, అనగా $x = 2$ మరియు $y = 2$ ఈ విలువలు, $x + y = 4$ మరియు $2x - y = 2$ ఈ రెండు సమీకరణములను తృప్తి పరుస్తాయి.

చరరాశుల ఏ విలువలు ఇచ్చిన సమాకాలిక సమీకరణములను తృప్తి పరుస్తాయో, ఆ విలువలే ఆ సమీకరణముల సాధనలు అవుతాయి.

$x + y = 4$ మరియు $2x - y = 2$ ఈ సమకాలిక సమీకరణముల సాధనలు $x = 2$ మరియు $y = 2$ అవుతాయి.

ఈ సమీకరణములను చరరాశులను తొలగించు పద్ధతిలో సాధించి ఆ సాధనను సరిచూద్దాం.

$x + y = 4 \ . \ . \ . \quad$ (I)

$2x - y = 2 \ . \ . \ . \quad$ (II)

సమీకరణము (I) మరియు (II)లను కూడగా,

$3x = 6 \quad \therefore \quad x = 2$

సమీకరణం (I) లో $x = 2$ విలువను ప్రతిక్షేపించుదాం.

$x + y = 4$

$\therefore \ 2 + y = 4$

$\therefore \ y = 2$

కృత్యం I : $x - y = 1$; $5x - 3y = 1$ ఈ సమకాలిక సమీకరణములను గ్రాఫ్ పద్ధతిలో సాధించుట కొరకు కింద ఇచ్చిన పట్టికలను పూరించి నిరూపకాలను పొందండి.

$x - y = 1$

x	0		3	
y		0		-3
(x, y)				

$5x - 3y = 1$

x	2			-4
y		8	-2	
(x, y)				

- ఒకే నిరూపక పద్ధతి ద్వారా పై నిరూపకాలను అనుసరించి బిందువులను గుర్తించుము.
- సమీకరణముల గ్రాఫ్‌ను గీయండి.
- రేఖల యొక్క ఖండన బిందు నిరుపకాలను చదువుము దానిని బట్టి సమకాలిక సమీకరణముల సాధనను రాయుము.

కృత్యం II : పైన ఇచ్చిన సమకాలిక సమీకరణములను చరరాశులను తొలగించు పద్ధతిలో సాధించి, గ్రాఫ్‌పై వచ్చిన సాధనను సరిచూడండి.

ఆలోచిద్దాం

$5x - 3y = 1$ యొక్క గ్రాఫ్ గీయుట కొరకు కింది పట్టికలో కొన్ని నిరూపకాలను కనుగొన్నారు, వాటిని చూడండి.

x	0	$\frac{1}{5}$	1	-2
y	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{4}{3}$	$-\frac{11}{3}$
(x, y)	$\left(0, -\frac{1}{3}\right)$	$\left(\frac{1}{5}, 0\right)$	$\left(1, \frac{4}{3}\right)$	$\left(-2, -\frac{11}{3}\right)$

- బిందువులను సూచించుటకొరకు ఈ నిరూపకాలు వీలుగా ఉన్నాయా?
- నిరూపకాలను సాధించుటకొరకు ఎలాంటి జాగ్రత్తలు తీసుకోవాలి, అనగా బిందువును సూచించుట సులువు అవుతుంది?

అభ్యాస మాలిక 1.2

1. కింది సమకాలిక సమీకరణములను గ్రాఫ్ సహాయంతో సాధించుటకు పట్టికలను పూరించండి.

$x + y = 3$; $x - y = 4$

$x + y = 3$

x	3	□	□
y	□	5	3
(x, y)	(3, 0)	□	(0, 3)

$x - y = 4$

x	□	-1	0
y	0	□	-4
(x, y)	□	□	(0, -4)

2. కింది సమకాలిక సమీకరణములను గ్రాఫ్ పద్ధతిలో సాధించండి.

(1) $x + y = 6$; $x - y = 4$

(2) $x + y = 5$; $x - y = 3$

(3) $x + y = 0$; $2x - y = 9$

(4) $3x - y = 2$; $2x - y = 3$

(5) $3x - 4y = -7$; $5x - 2y = 0$

(6)★ $2x - 3y = 4$; $3y - x = 4$

పదండి, చర్చిద్దాం.

$x + 2y = 4$; $3x + 6y = 12$ అనే సమకాలిక సమీకరణములు ఇవ్వబడినవి, వీటిని గ్రాఫ్ పద్ధతిలో సాధించుట కొరకు నిర్ణయించిన కొన్ని క్రమయుగ్మాల జతలు కింది విధంగా ఉన్నాయి.

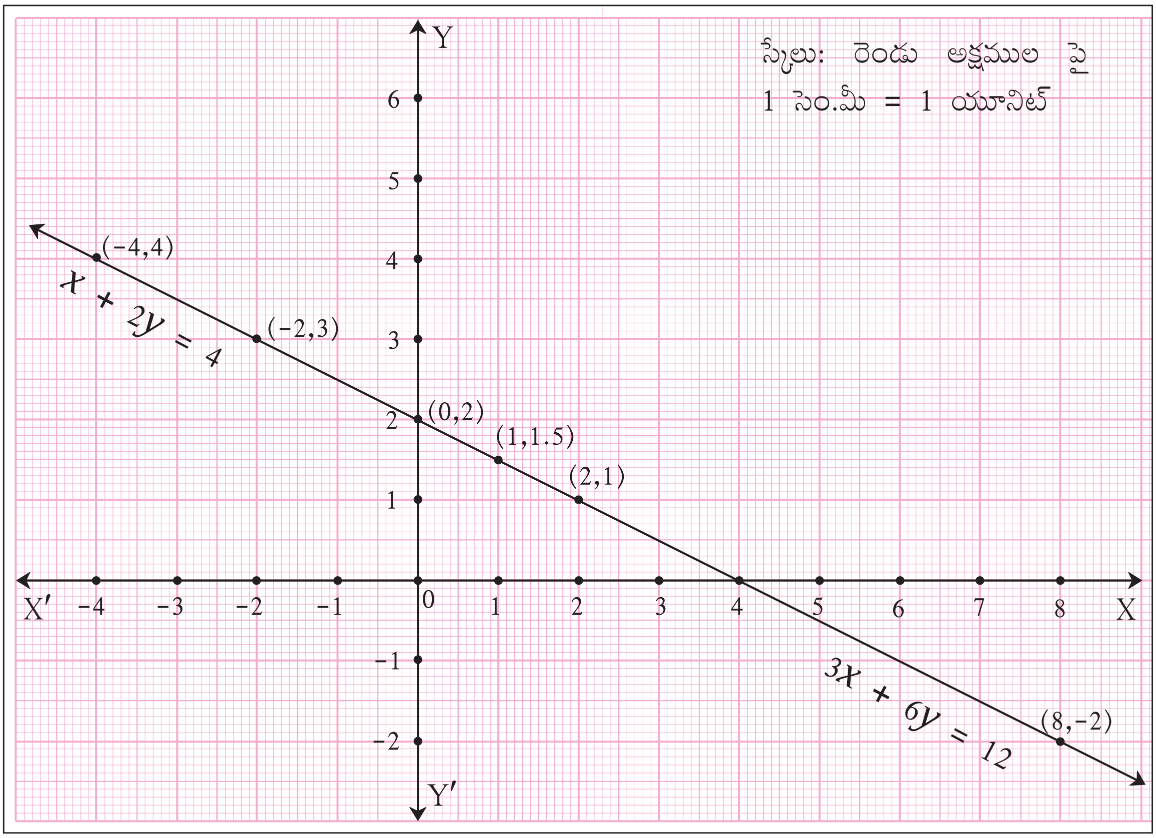
$x + 2y = 4$

x	−2	0	2
y	3	2	1
(x, y)	(−2, 3)	(0, 2)	(2, 1)

$3x + 6y = 12$

x	−4	1	8
y	4	1.5	−2
(x, y)	(−4, 4)	(1, 1.5)	(8, −2)

ఈ క్రమయుగ్మాలను గుర్తించి గీయబడిన గ్రాఫ్ కింద ఇవ్వబడింది. దానిని పరిశీలించుము మరియు దాని కింద ఇచ్చిన ప్రశ్నలపై చర్చించండి.



(1) పై రెండు సమీకరణముల గ్రాఫ్ ఒకటేనా లేదా వేరుగా ఉన్నాయా ?

(2) $x + 2y = 4$ మరియు $3x + 6y = 12$ ఈ సమకాలిక సమీకరణముల సాధనలు ఏవి? అవి ఎన్ని ఉంటాయి?

(3) పై రెండు సమీకరణములలోని x యొక్క గుణకం, y యొక్క గుణకం మరియు స్థిరపదములు వీటి మధ్య ఏ విధమైన సంబంధం కనబడుతుంది?

(4) రెండు చరరాశుల రెండు రేఖీయ సమీకరణములు ఇచ్చినప్పుడు ఆ సమీకరణముల గ్రాఫ్ ఒకే రేఖగా ఎప్పుడు ఉంటుందో దానినెలా గుర్తించవచ్చు?

ఇప్పుడు వేరొక ఉదాహరణను చూద్దాం.

$x - 2y = 4$ మరియు $2x - 4y = 12$ ఈ సమీకరణముల గ్రాఫ్ పై విధంగానే ఒకే నిరూపకపద్ధతి ప్రకారం చేయండి. గ్రాఫ్‌ను పరిశీలించుము. $x - 2y = 4$; $2x - 4y = 12$ సమకాలిక సమీకరణముల సాధన గురించి ఆలోచించండి. x మరియు yల గుణకముల, అదే విధంగా స్థిరపదముల మధ్య సంబంధం గురించి ఆలోచించి సారాంశంను కనుగొనండి.

ICT Tools or Links

Geogebra software సహాయంతో X-అక్షము, Y-అక్షములను గీయుము. వివిధ సమకాలిక సమీకరణముల గ్రాఫ్ గీసి వాటి సాధనలను పరిక్షించండి.

తెలుసుకుందాం

నిర్ధారకం (Determinant)

$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ అనేది నాలుగు మూలకాల నిర్ధారకం. ఇందులో $(a, b), (c, d)$ లు అడ్డువరుసలలో ఉన్నాయి. అదే విధంగా $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$లు రెండు నిలువు వరుసలలో ఉన్నాయి. ఈ నిర్ధారకము యొక్క పరిమాణం 2, ఎందుకనగా ప్రతీ అడ్డ వరుసలో లేదా నిలువు వరసలో 2 మూలకములు ఉన్నాయి. ఈ నిర్ధారకము ఒకే సంఖ్య కొరకు రాయబడుతుంది. ఆ సంఖ్య $ad-bc$ అవుతుంది.

అనగా $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad-bc$

$ad-bc$ అనేది $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ యొక్క నిర్ధారక విలువ.

నిర్ధారకముల పేర్లను రాయుట కొరకు సర్వ సాధారణంగా A, B, C, D, ... అనే ఇంగ్లీషు పెద్ద అక్షరములను వాడతారు.

సాధించిన ఉదాహరణలు

ఉదాహరణ: కింది నిర్ధారకముల విలువలను కనుగొనండి.

(1) $A = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix}$ (2) $N = \begin{vmatrix} -8 & -3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$ (3) $B = \begin{vmatrix} 2\sqrt{3} & 9 \\ 2 & 3\sqrt{3} \end{vmatrix}$

సాధన :

(1) $A = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = (5 \times 9) - (3 \times 7) = 45 - 21 = 24$

(2) $N = \begin{vmatrix} -8 & -3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = [(-8) \times (-4)] - [(-3) \times 2] = -32 - (-6)$

$= -32 + 6 = -26$

(3) $B = \begin{vmatrix} 2\sqrt{3} & 9 \\ 2 & 3\sqrt{3} \end{vmatrix} = [2\sqrt{3} \times 3\sqrt{3}] - [2 \times 9] = 18 - 18 = 0$

తెలుసుకుందాం.

నిర్ధారక పద్ధతి (క్రామర్స్ పద్ధతి) Determinant method (Crammer's Method)

ఇచ్చిన సమకాలిక సమీకరణములను సులభ పద్ధతిలో మరియు అతి తక్కువ చోటు ఉపయోగించి నిర్ధారకముల సహాయముతో సాధించవచ్చు. దీనినే సమకాలిక సమీకరణములను సాధించుటకొరకు నిర్ధారక పద్ధతి అని అంటారు. ఈ పద్ధతిని గాబ్రియల్ క్రామర్ అనే స్విస్ గణిత శాస్త్రజ్ఞుడు శోధించి కనుగొన్నాడు. కావున ఈ పద్ధతిని క్రామర్స్ పద్ధతి అని కూడా అంటారు.

ఈ పద్ధతిలో ఇవ్వబడిన సమకాలిక సమీకరణములను

$a_1x + b_1y = c_1$ మరియు $a_2x + b_2y = c_2$గా రాస్తారు.

$a_1x + b_1y = c_1 \quad . . . \quad$ (I)

మరియు $a_2x + b_2y = c_2 \quad . . . \quad$ (II) అనుకొండి

ఇక్కడ a_1, b_1, c_1 మరియు a_2, b_2, c_2లు వాస్తవ సంఖ్యలు.

మనం ఈ సమకాలిక సమీకరణములను సాదిద్దాం.

సమీకరణం (I) ని b_2చే గుణించగా

$a_1b_2x + b_1b_2y = c_1b_2 \quad . . . \quad$ (III)

సమీకరణం (II)ని b_1చే గుణించగా

$a_2b_1x + b_2b_1y = c_2b_1 \quad . . . \quad$ (IV)

సమీకరణము (III) నుండి (IV)ను తీసివేయగా

$$\begin{array}{r} a_1 b_2 x + b_1 b_2 y = c_1 b_2 \\ - \quad a_2 b_1 x + b_2 b_1 y = c_2 b_1 \\ \hline (a_1 b_2 - a_2 b_1)\, x = c_1 b_2 - c_2 b_1 \end{array}$$

$$x = \frac{c_1 b_2 - c_2 b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} \quad . \; . \; . \quad \text{(V)}$$

ఇదే విధంగా xని లోపింపజేసిన, $y = \dfrac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}$ . . . (VI)

పై సాధనలో $c_1 b_2 - c_2 b_1$, $a_1 b_2 - a_2 b_1$, $a_1 c_2 - a_2 c_1$ ఈ రాశులను గుర్తుంచుకొనుటకు మరియు తక్కువ స్థలంలో చక్కగా రాయుట కొరకు నిర్ధారక రూపంలో రాద్దాం.

కింది సమీకరణముల గుణకము మరియు స్థిరపదములను చూడండి.

$$a_1 x + b_1 y = c_1$$

మరియు $$a_2 x + b_2 y = c_2$$

ఇక్కడ $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ అనే మూడు స్థంబాలు లభిస్తాయి.

సమీకరణము (V) మరియు సమీకరణము (VI)ల నుండి x మరియు y విలువలను నిర్ధారకముల రూపంలో రాద్దాం.

$$x = \frac{c_1 b_2 - c_2 b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

మరియు $$y = \frac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, \qquad (a_1 b_2 - a_2 b_1) \neq 0$$

గుర్తుంచుకొనుట కొరకు $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \mathrm{D}_x$, $\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = \mathrm{D}_x$, $\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = \mathrm{D}_y$లచే సూచించుదాం.

అనగా క్లుప్తంగా $x = \dfrac{\mathrm{D}_x}{\mathrm{D}}$ మరియు $y = \dfrac{\mathrm{D}_y}{\mathrm{D}}$

D, D_x, D_y నిర్ధారకములను రాయుట కొరకు $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ స్థంబాల క్రమములను గుర్తుంచుకోండి.

మరియు $\begin{aligned} a_1x + b_1y &= c_1 \\ a_2x + b_2y &= c_2 \end{aligned}$ ఈ సమీకరణముల నుండి $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ అనే మూడు స్తంభాలు లభిస్తాయి.

- D లో స్థిరపదము $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ ఈ స్తంబమును వదిలివేశాం.
- D_x కొరకు D లో $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ అనే x యొక్క గుణక స్తంబమును వదిలివేసి దానికి బదులు స్థిరపదముల స్తంబంను తీసుకున్నాం.
- D_y కొరకు D లో $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ అనే y యొక్క గుణక స్తంబమును వదిలివేసి దానికి బదులు స్థిరపదముల స్తంబంను తీసుకున్నాం.

ఇది గుర్తుంచుకోండి

క్రామర్స్ పద్ధతిని ఉపయోగించి సమకాలిక సమీకరణములను సాధించు విధానం

ఇచ్చిన సమీకరణములను $ax + by = c$ రూపములో రాయుము.

↓

D, D_x మరియు D_yల నిర్ధారకము విలువలను కనుగొనండి

↓

$x = \frac{D_x}{D}$ మరియు $y = \frac{D_y}{D}$

వీటి నుండి x మరియు yల విలువలను కనుగొనండి

గాబ్రియల్ క్రామర్ (Gabriel Cramer)

(జూలై 31, 1704 నుండి జనవరి 4, 1752)

ఈ స్విస్ గణితశాస్త్రజ్ఞుడి జననం జెనీవాలో జరిగింది. గణిత విషయంలో ఈయన చిన్న తనం నుండే అత్యంత ప్రవీణుడు. పద్దెనిమిదవ ఏటనే డాక్టరేట్ పట్టాను (డిగ్రీని) పొందిరి. వీరు జెనీవాలో ప్రొఫెసర్ గా పనిచేసారు.

సాధించిన ఉదాహరణలు

ఉదా. క్రామర్స్ పద్ధతిలో కింది సమకాలిక సమీకరణములను సాధించుము.

$5x + 3y = -11$; $2x + 4y = -10$

సాధన : ఇచ్చిన సమీకరణములు

$5x + 3y = -11$

$2x + 4y = -10$

$$D = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = (5 \times 4) - (2 \times 3) = 20 - 6 = 14$$

$$D_x = \begin{vmatrix} -11 & 3 \\ -10 & 4 \end{vmatrix} = (-11) \times 4 - (-10) \times 3 = -44 -(-30)$$

$$= -44 + 30 = -14$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 5 & -11 \\ 2 & -10 \end{vmatrix} = 5 \times (-10) - 2 \times (-11) = -50 -(-22)$$

$$= -50 + 22 = -28$$

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-14}{14} = -1 \qquad y = \frac{D_y}{D} = \frac{-28}{14} = -2$$

$\therefore$ $(x, y) = (-1, -2)$ అనేది ఇచ్చిన సమకాలిక సమీకరణముల సాధన.

కృత్యం 1 : నిర్ధారక పద్ధతిలో కింది సమకాలిక సమీకరణములను సాధించుట కొరకు కింది గడులను పూరించండి.

$y + 2x - 19 = 0$; $2x - 3y + 3 = 0$

సాధన : ఇచ్చిన సమీకరణములను $ax + by = c$ రూపములో రాద్దాం.

$2x + y = 19$

$2x - 3y = -3$

$$D = \begin{vmatrix} \square & \square \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = \square \times (-3) - 2 \times (\square) = \square - (\square)$$

$$= \square - \square = \square$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 19 & \square \\ \square & -3 \end{vmatrix} = 19 \times (\square) - (\square) \times (\square) = \square - \square$$

$$= \square$$

$$D_y = \begin{vmatrix} \square & 19 \\ 2 & \square \end{vmatrix} = [(\square) \times (\square)] - [(\square) \times (\square)]$$

$$= \square - \square = \square$$

$x = \dfrac{D_x}{D}$

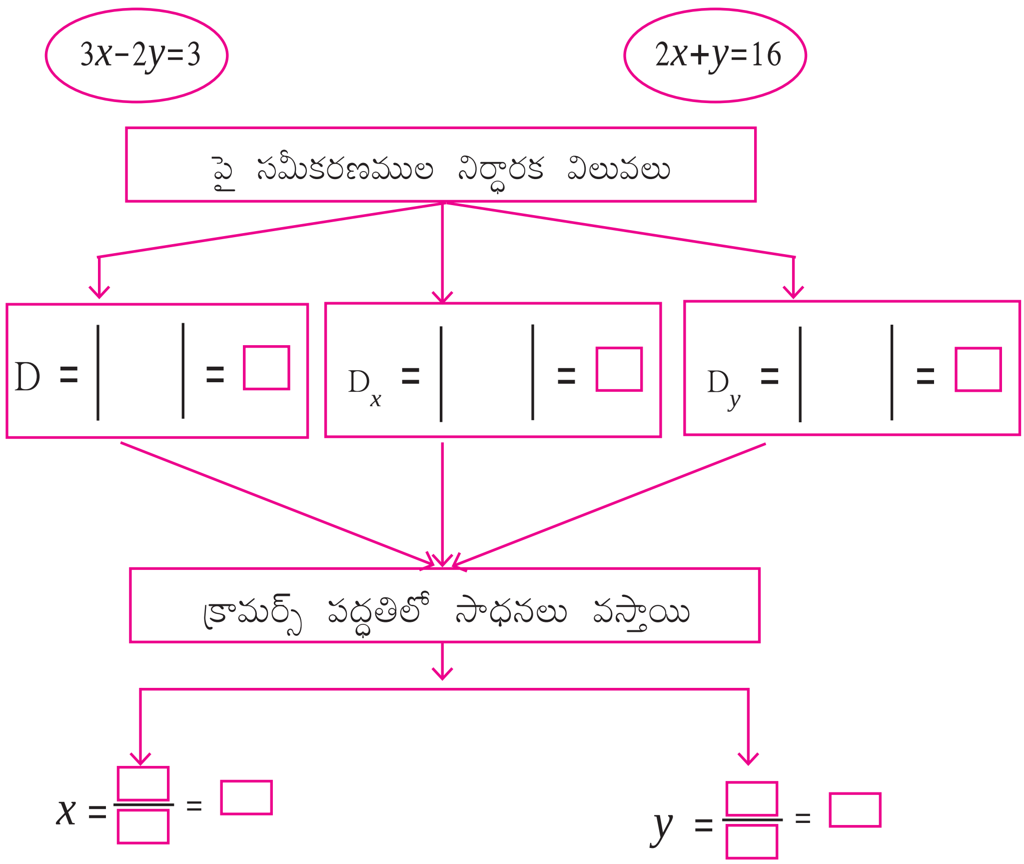
$\therefore x = \dfrac{\square}{\square} = \square$

$y = \dfrac{D_y}{D}$

$y = \dfrac{\square}{\square} = \square$

$\therefore (x, y) = (\square, \square)$ అనేది ఇచ్చిన సమకాలిక సమీకరణముల సాధన అవుతుంది.

కృత్యం 2 : కింది కృత్యమును పూర్తి చేయండి.



$\therefore (x, y) = (\square, \square)$ సాధన అవుతుంది.

ఆలోచిద్దాం

- ఒకవేళ, D = 0 అయినచో, సాధనల యొక్క స్వరూపము ఎలా ఉంటుంది?
- ఉమ్మడి సాధన శక్యము కానిచో వాటి సమీకరణముల రేఖీయ స్వరూపము ఏ విధంగా ఉంటుంది?

అభ్యాస మాలిక 1.3

1. $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 3 \times \square - \square \times 4 = \square - 8 = \square$

2. కింది నిర్ధారకముల విలువలను కనుగొనండి.

 (1) $\begin{vmatrix} -1 & 7 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$ (2) $\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -7 & 0 \end{vmatrix}$ (3) $\begin{vmatrix} \frac{7}{3} & \frac{5}{3} \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix}$

3. కింది సమకాలిక సమీకరణములను క్రామర్స్ పద్ధతిలో సాధించండి.

 (1) $3x - 4y = 10 \; ; \; 4x + 3y = 5$ (2) $4x + 3y - 4 = 0 \; ; \; 6x = 8 - 5y$

 (3) $x + 2y = -1 \; ; \; 2x - 3y = 12$ (4) $6x - 4y = -12 \; ; \; 8x - 3y = -2$

 (5) $4m + 6n = 54 \; ; \; 3m + 2n = 28$ (6) $2x + 3y = 2 \; ; \; x - \frac{y}{2} = \frac{1}{2}$

తెలుసుకుందాం.

రెండు చరరాశులుగల రేఖీయయుగ్మ సమీకరణములుగా మార్చదగిన సమీకరణాలు:
(Equations reducible to a pair of linear equations in two variables)

కృత్యం : కింది పట్టికను పూరించుము.

సమీకరణములు	చరరాశుల సంఖ్య	రేఖీయం అగునా, కాదా.
$\frac{3}{x} - \frac{4}{y} = 8$	2	కాదు
$\frac{6}{x-1} + \frac{3}{y-2} = 0$		
$\frac{7}{2x+1} + \frac{13}{y+2} = 0$		
$\frac{14}{x+y} + \frac{3}{x-y} = 5$		

ఆలోచిద్దాం

పై పట్టికలో రెండు చరరాశులుగల కొన్ని సమీకరణములు ఇవ్వబడినవి. అవి రేఖీయ సమీకరణాలు కావు కాని ఆ సమీకరణములను రేఖీయ సమీకరణములుగా మార్చవచ్చా?

ఇది గుర్తుంచుకోండి

ఇచ్చిన చరరాశులలో సరియైన మార్పులను చేసి కొత్త చరరాశులను తయారు చేసుకోవచ్చు. ఈ కొత్త చరరాశులను ఉపయోగించి అదే సమీకరణములను రేఖీయ సమీకరణముల రూపంలో రాయవచ్చు. ఏదేని $\frac{m}{n}$ వంటి భిన్నం యొక్క హారం సున్న ఉండకూడదని మరిచిపోవద్దు.

సాధించిన ఉదాహరణలు.

ఉదా.(1) సాధించండి : $\frac{4}{x} + \frac{5}{y} = 7;\ \frac{3}{x} + \frac{4}{y} = 5$

సాధన : $\frac{4}{x} + \frac{5}{y} = 7;\ \frac{3}{x} + \frac{4}{y} = 5$

$$4\left(\frac{1}{x}\right) + 5\left(\frac{1}{y}\right) = 7 \quad \ldots \quad (I)$$

$$3\left(\frac{1}{x}\right) + 4\left(\frac{1}{y}\right) = 5 \quad \ldots \quad (II)$$

సమీకరణము(I) మరియు (II)లలో $\left(\frac{1}{x}\right)=m$ మరియు $\left(\frac{1}{y}\right)=n$ అనుకొనిన కింది సమీకరణములు లభిస్తాయి.

$$4m + 5n = 7 \quad \ldots \quad (III)$$

$$3m + 4n = 5 \quad \ldots \quad (IV)$$

ఈ సమీకరణములను సాధించగా,

$m = 3,\ n = -1$ అనే సాధనలు లభిస్తాయి.

ఇప్పుడు, $m = \frac{1}{x}$ $\quad \therefore\ 3 = \frac{1}{x} \quad \therefore\ x = \frac{1}{3}$

అదే విధంగా, $n = \frac{1}{y}$ $\quad \therefore\ -1 = \frac{1}{y} \quad \therefore\ y = -1$

$\therefore\ (x, y) = (\frac{1}{3}, -1)$ అనేది ఇచ్చిన సమకాలిక సమీకరణముల సాధన అవుతుంది.

ఉదా.(2) సాధించండి : $\frac{4}{x-y} + \frac{1}{x+y} = 3$; $\frac{2}{x-y} - \frac{3}{x+y} = 5$

సాధన : $\frac{4}{x-y} + \frac{1}{x+y} = 3$; $\frac{2}{x-y} - \frac{3}{x+y} = 5$

$$4\left(\frac{1}{x-y}\right) + 1\left(\frac{1}{x+y}\right) = 3 \quad . . . \quad \text{(I)}$$

$$2\left(\frac{1}{x-y}\right) - 3\left(\frac{1}{x+y}\right) = 5 \quad . . . \quad \text{(II)}$$

సమీకరణము (I) మరియు (II)లలో $\left(\frac{1}{x-y}\right) = a$ మరియు $\left(\frac{1}{x+y}\right) = b$లను ప్రతిక్షేపించగా కింది సమీకరణములు లభిస్తాయి.

$$4a + b = 3 \quad . . . \quad \text{(III)}$$

$$2a - 3b = 5 \quad . . . \quad \text{(IV)}$$

సమీకరణము (III) మరియు (IV)లను సాధించగా $a = 1$ మరియు $b = -1$ అనే సాధనలు లభిస్తాయి.

కాని $a = \left(\frac{1}{x-y}\right)$ మరియు $b = \left(\frac{1}{x+y}\right)$

$\left(\frac{1}{x-y}\right) = 1$ మరియు $\left(\frac{1}{x+y}\right) = -1$

$$x - y = 1 \quad . . . \quad \text{(V)}$$

$$x + y = -1 \quad . . . \quad \text{(VI)}$$

సమీకరణము (V) మరియు సమీకరణము (VI) లను సాధించగా $x = 0$ మరియు $y = -1$ అనే సాధన లభిస్తుంది.

$\therefore$ $(x, y) = (0, -1)$ అనేది దత్త సమీకరణముల సాధన అవుతుంది.

ఆలోచిద్దాం.

పై ఉదాహరణలో రూపాంతరం చేయగా వచ్చిన సమకాలిక సమీకరణములను ప్రతిక్షేపించే బీజీయ పద్ధతిలో సాధించాం. ఆ సమీకరణములను క్రామర్స్ పద్ధతిలో లేదా గ్రాఫ్ పద్ధతిలో సాధించిన వాటికి సాధనలు లభిస్తాయా? చేసి చూడుము.

కృత్యం : గడులలోని సమీకరణముల సాధన కనుగొనుట కొరకు కింది కృత్యమును చేయండి.

$$\frac{5}{x-1} + \frac{1}{y-2} = 2 \;;\; \frac{6}{x-1} - \frac{3}{y-2} = 1$$

$\left(\frac{1}{x-1}\right) = m$ మరియు $\left(\frac{1}{y-2}\right) = n$ ప్రతిక్షేపించిన,

కొత్త సమీకరణములు: $\square$; $6m - 3n = 1$

సమీకరణములను సాధించిన,

$m = \square$ మరియు $n = \square$

m మరియు nల విలువలను ప్రతిక్షేపించగా లభించు సమీకరణములు

$\left(\frac{1}{x-1}\right) = \frac{1}{3}$; $\square$

సమీకరణములను సాధించిన,

$x = \square$ మరియు $y = \square$

$\therefore$ $(x, y) = (\quad , \quad)$ అనేది ఇచ్చిన సమకాలిక సమీకరణముల సాధన అవుతుంది.

అభ్యాసమాలిక 1.4

1. కింది సమకాలిక సమీకరణములను సాధించండి.

(1) $\frac{2}{x} - \frac{3}{y} = 15 \;;\; \frac{8}{x} + \frac{5}{y} = 7'$

(2) $\frac{10}{x+y} + \frac{2}{x-y} = 4 \;;\; \frac{15}{x+y} - \frac{5}{x-y} = -2$

(3) $\frac{27}{x-2} + \frac{31}{y+3} = 85 \;;\; \frac{31}{x-2} + \frac{27}{y+3} = 89$

(4) $\frac{1}{3x+y} + \frac{1}{3x-y} = \frac{3}{4} \;;\; \frac{1}{2(3x+y)} - \frac{1}{2(3x-y)} = -\frac{1}{8}$

తెలుసుకుందాం.

సమకాలిక సమీకరణముల అనువర్తనములు (Application of simultaneous equations)

కృత్యం : కింది గడులలో కొన్ని షరతులు ఇవ్వబడ్డాయి. వాటి నుండి లభించు సమీకరణములను సంబంధిత గడిలో రాయండి.

[ ]

↑

సార్థక్ యొక్క వయస్సు సాక్షి వయస్సు రెట్టింపు కంటే 8 సంవత్సరాలు తక్కువ.

↑

నేను సార్థక్. నా ప్రస్తుత వయస్సు x సంవత్సరాలు.

నా ప్రస్తుత వయస్సు y సంవత్సరాలు. నేను సాక్షి

[ ] ← 4 సంవత్సరాల క్రితం సాక్షి వయస్సు సార్థక్ కంటే 3 సంవత్సరాలు తక్కువ.

[ ] ← సార్థక్ మరియు సాక్షిల ప్రస్తుత వయస్సుల మొత్తం 25 సంవత్సరములు.

ఉదా. (1) ఒక దీర్ఘచతురస్రము చుట్టుకొలత 40 సెం.మీ. దీర్ఘచతురస్రము యొక్క పొడువు వెడల్పు యొక్క రెట్టింపు కంటే 2 సెం.మీలు ఎక్కువ, అయిన దీర్ఘచతురస్రము పొడువు మరియు వెడల్పులను కనుగొనండి.

సాధన : దీర్ఘచతురస్రపు పొడవు x సెం.మీ మరియు వెడల్పు y సెం.మీ అనుకుందాం.

మొదటి షరతు ప్రకారం –

$$2(x + y) = 40$$

$$x + y = 20 \quad . . . \quad (I)$$

రెండవ షరతు ప్రకారం –

$$x = 2y + 2$$

$$\therefore x - 2y = 2 \quad . . . \quad (II)$$

సమీకరణము (I) మరియు (II) లను నిర్ధారక పద్ధతి ద్వారా సాధించుదాం.

$$x + y = 20$$

$$x - 2y = 2$$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = [1 \times (-2)] - (1 \times 1) = -2 - 1 = -3$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 20 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = [20 \times (-2)] - (1 \times 2) = -40 - 2 = -42$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 20 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = (1 \times 2) - (20 \times 1) = 2 - 20 = -18$$

$x = \frac{D_x}{D}$ మరియు $y = \frac{D_y}{D}$

$\therefore x = \frac{-42}{-3}$ మరియు $y = \frac{-18}{-3}$

$\therefore x = 14$ మరియు $y = 6$

$\therefore$ దీర్ఘచతురస్రం పొడవు 14 సెం.మీ మరియు వెడల్పు 6 సెం.మీ.

ఉదా. (2)

సేల్ ! సేల్ !! సేల్ !!! కేవలం రెండు రోజులు మాత్రమే

నా దగ్గర కొన్ని ముళ్ళున్న మరియు కొన్ని డిజిటల్ గడియారాలు ఉన్నాయి. వాటిని నేను తగ్గింపు ధరలో అమ్మబోతున్నాను.

మొదటి రోజు అమ్మకాలు	
ముళ్ళున్న గడియారాలు	= 11
డిజిటల్ గడియారాలు	= 6
నాకు లభించినవి	4330 రూ॥లు.

రెండవ రోజు అమ్మకాలు	
ముళ్ళున్న గడియారాలు	= 22
డిజిటల్ గడియారాలు	= 5
నాకు లభించినవి	7330 రూ॥లు.

అయిన నేను అమ్మిన ప్రతీ రకం గడియారం విలువ ఎంత?

సాధన : ముళ్ళున్న ఒక గడియారం విలువ = x రూ.

మరియు డిజిటల్ గడియారం విలువ = y రూ. అనుకోండి.

మొదటి షరతు ప్రకారం,

$$11x + 6y = 4330 \quad . \; . \; . \quad (I)$$

రెండవ షరతు ప్రకారం,

$$22x + 5y = 7330 \quad . \; . \; . \quad (II)$$

సమీకరణము (I) ని 2 చే గుణించగా,

$$22x + 12y = 8660 \quad . \; . \; . \quad (III)$$

సమీకరణము (II) నుండి సమీకరణము (III) ను తీసివేద్దాం.

$$\begin{array}{rcl} 22x + 5y &=& 7330 \\ -\;\; \underset{-}{22x} \; \underset{-}{+} \; 12y &=& \underset{-}{8660} \\ \hline -7y &=& -1330 \end{array}$$

$$\therefore \quad y = 190$$

$y = 190$ ఈ విలువను సమీకరణము (I) లో ప్రతిక్షేపించుదాం.

$$11x + 6y = 4330$$

$$\therefore \quad 11x + 6(190) = 4330$$

$$\therefore \quad 11x + 1140 = 4330$$

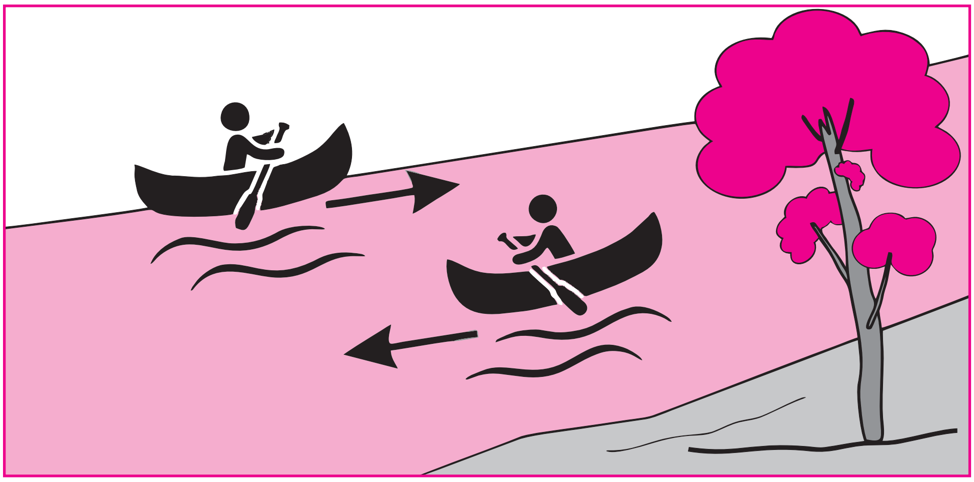
$$\therefore \quad 11x = 3190$$

$$\therefore \quad x = 290$$

$\therefore$ ముళ్ళున్న ఒక గడియారం విలువ 290 రూ. మరియు

ఒక డిజిటల్ గడియారం విలువ 190 రూ.లు.

ఉదా. (3)



ఒక పడవ 6 గంటలలో ప్రవాహ వ్యతిరేక దిశలో 16 కి.మీ మరియు ప్రవాహ దిశలో 24 కి.మీ ప్రయాణిస్తుంది.

అదే పడవ 13 గంటలలో ప్రవాహ వ్యతిరేక దిశలో 36 కి.మీ మరియు ప్రవాహ దిశలో 48 కి.మీ ప్రయాణిస్తుంది.

ఇప్పుడు చెప్పండి! నిలకడ నీటిలోని పడవ వేగము మరియు ప్రవాహ వేగము ఎంత?

సాధన : నిలకడ నీటిలోని పడవ వేగము = x కి.మీ/గంట, మరియు ప్రవాహదిశలో పడవ వేగము = y కి.మీ/గంట, అనుకోండి.

$\therefore$ ప్రవాహదిశలో పడవ వేగము = $(x + y)$ కి.మీ/గంట

ప్రవాహదిశకు వ్యతిరేక దిశలో పడవ వేగము = $(x - y)$ కి.మీ/గంట

దూరము = వేగము $\times$ కాలం $\quad\therefore$ కాలం = $\dfrac{\text{దూరము}}{\text{వేగము}}$

పడవ, ప్రవాహ వ్యతిరేక దిశకు 16 కి.మీ ప్రయాణించుటకు పట్టు కాలం = $\dfrac{16}{x-y}$ గంటలు

ప్రవాహ దిశలో 24 కి.మీ ప్రయాణించుటకు పడవకు పట్టు కాలం = $\dfrac{24}{x+y}$ గంటలు

మొదటి షరతు ప్రకారం,

$$\frac{16}{x-y} + \frac{24}{x+y} = 6 \quad . . . \quad \text{(I)}$$

రెండవ షరతు ప్రకారం,

$$\frac{36}{x-y} + \frac{48}{x+y} = 13 \quad . . . \quad \text{(II)}$$

సమీకరణము (I) మరియు (II)లో $\dfrac{1}{x-y}=m$ మరియు $\dfrac{1}{x+y}=n$ ప్రతిక్షేపించిన కింది రెండు సమీకరణములు లభిస్తాయి.

$16m + 24n = 6 \quad . . . \quad \text{(III)}$

$36m + 48n = 13 \quad . . . \quad \text{(IV)}$

సమీకరణము (III) మరియు (IV) లను సాధించగా $m = \frac{1}{4}, n = \frac{1}{12}$

m మరియు n ల విలువలను తిరిగి ప్రతిక్షేపించగా కింది సమీకరణములు లభిస్తాయి.

$x - y = 4 \ldots$ (V)

$x + y = 12 \ldots$ (VI)

సమీకరణము (V) మరియు (VI) లను సాధించగా $x = 8, y = 4$ విలువలు లభిస్తాయి.

$\therefore$ నిలకడ నీటిలో పడవవేగము = 8 కి.మీ./గంట మరియు ప్రవాహ వేగము = 4 కి.మీ./గంట

ఉదా. (4) కొంత డబ్బును కొంతమంది పిల్లలకు సమానంగా పంచారు. ఒకవేళ 10 మంది పిల్లలు ఎక్కువగా ఉన్నచో ప్రతిఒక్కరికి 2 రూపాయలు తక్కువగా లభిస్తాయి. ఒకవేళ 15 మంది పిల్లలు తక్కువగా ఉన్నచో ప్రతిఒక్కరికి 6 రూపాయలు ఎక్కువగా లభిస్తాయి, అయితే మొత్తం డబ్బు ఎంత? ఆ డబ్బును ఎంత మంది పిల్లలకు పంచారు?

సాధన : పిల్లల సంఖ్యను x మరియు ప్రతి ఒక్కరికి లభించిన డబ్బును y అనుకుందాం.

$\therefore$ మొత్తం xy రూపాయలను పంచారు.

మొదటి షరతు ప్రకారం,

$$(x + 10)(y - 2) = xy$$

$$\therefore xy - 2x + 10y - 20 = xy$$

$$\therefore -2x + 10y = 20$$

$$\therefore -x + 5y = 10 \ldots \quad \text{(I)}$$

రెండవ షరతు ప్రకారం

$$(x - 15)(y + 6) = xy$$

$$\therefore xy + 6x - 15y - 90 = xy$$

$$\therefore 6x - 15y = 90$$

$$\therefore 2x - 5y = 30 \ldots \quad \text{(II)}$$

సమీకరణం (I) లో సమీకరణం (II) ను కలుపుదాం.

$$\begin{array}{r} -x + 5y = 10 \\ + \quad 2x - 5y = 30 \\ \hline x = 40 \end{array}$$

$x = 40$ విలువను సమీకరణం (I) లో ప్రతిక్షేపించుదాం.

$$-x + 5y = 10$$

$$\therefore -40 + 5y = 10$$

$$\therefore 5y = 50$$

∴ $y = 10$

మొత్తం డబ్బు = $xy = 40 \times 10 = 400$ రూ.

∴ 40 మంది పిల్లలకు 400 రూపాయలను సమానంగా పంచారు.

ఉదా. (5) ఒక మూడంకెల సంఖ్య దానిలోని అంకెల మొత్తమునకు 17 రెట్లు. ఆ సంఖ్యకు 198 కలుపగా అవే అంకెలు తారుమారు క్రమములో గల సంఖ్య లభిస్తుంది, అదేవిధంగా ఒకట్ల మరియు వందల స్థానములోని అంకెల మొత్తం మధ్యలోని అంకెకంటే 1 తక్కువ, అయిన ఆ మూడంకెల సంఖ్యను కనుగొనుము.

సాధన : వందల స్థానములోని అంకెను x మరియు ఒకట్ల స్థానములోని అంకెను y అనుకుందాం.

పదులస్థానము (మధ్యనున్న అంకె) = చివరి అంకెల మొత్తము కంటె 1 ఎక్కువ.

వందలు	పదులు	ఒకట్లు
x	$x + y + 1$	y

∴ మూడు అంకెల సంఖ్య = $100x + 10(x + y + 1) + y$

$= 100x + 10x + 10y + 10 + y = 110x + 11y + 10$

ఈ సంఖ్యలోని అంకెల మొత్తం = $x + (x + y + 1) + y = 2x + 2y + 1$

∴ మొదటి షరతు ప్రకారం,

మూడంకెల సంఖ్య = $17 \times$ (అంకెల మొత్తం)

∴ $110x + 11y + 10 = 17 \times (2x + 2y + 1)$

∴ $110x + 11y + 10 = 34x + 34y + 17$

∴ $76x - 23y = 7$ . . . (I)

ఇచ్చిన సంఖ్యలోని అంకెలను తారుమారు క్రమములో రాయగా లభించు కొత్త సంఖ్య

$= 100y + 10(x + y + 1) + x = 110y + 11x + 10$

ఇచ్చిన సంఖ్య = $110x + 11y + 10$

ఇవ్వబడిన రెండవ షరతు ప్రకారం, ఇచ్చిన సంఖ్య + 198 = అంకెలను తారుమారు క్రమంలో అమర్చిన లభించు సంఖ్య.

∴ $110x + 11y + 10 + 198 = 110y + 11x + 10$

∴ $99x - 99y = -198$

∴ $x - y = -2$

అనగా $x = y - 2$ . . . (II)

సమీకరణము (II) లో లభించిన x విలువను సమీకరణము (I) లో ప్రతిక్షేపించగా,

∴ $76(y - 2) - 23y = 7$

∴ $76y - 152 - 23y = 7$

$53y = 159$

∴ $y = 3$ ∴ ఒకట్ల స్థానములోని అంకె = 3

$y = 3$ ఈ విలువను సమీకరణము (II)లో ప్రతిక్షేపించుదాం.

$x = y - 2$

∴ $x = 3 - 2 = 1$

∴ $x = 1$ ∴ వందలస్థానములోని అంకె = 1

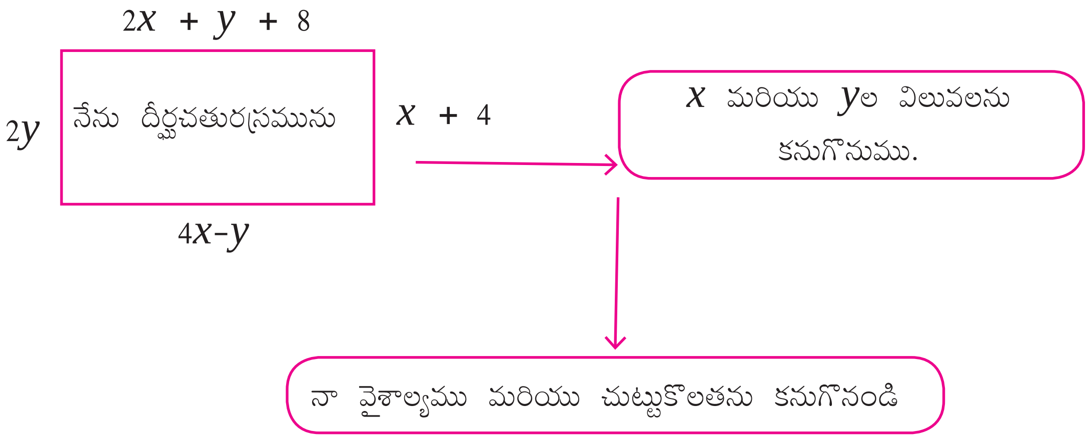
పదుల స్థానములోని అంకె = మధ్యలోని అంకె = $x + y + 1 = 1 + 3 + 1 = 5$

∴ ఇచ్చిన మూడంకెల సంఖ్య = 153.

అభ్యాస మాలిక 1.5

1. రెండు సంఖ్యల మధ్య భేదం 3 అయి పెద్ద సంఖ్య యొక్క మూడురెట్లు మరియు చిన్న సంఖ్య యొక్క రెండు రెట్ల యొక్క మొత్తం 19 అయిన. ఆ సంఖ్యలను కనుగొనండి.

2. కృత్యమును పూర్తి చేయండి.



3. తండ్రి వయస్సుకు కొడుకు రెట్టింపు వయస్సును కలిపిన మొత్తము 70 వచ్చును మరియు కొడుకు వయస్సుకు తండ్రి రెట్టింపు వయస్సును కలిపిన మొత్తము 95 వచ్చును. అయిన ఇద్దరి వయస్సులను కనుగొనండి.

4. ఒక భిన్నములోని హారము, లవము యొక్క రెట్టింపు కంటే 4ఎక్కువ ఒకవేళ లవహారములు రెండింటిలో 6 తక్కువ చేసినచో హారము లవమునకు 12 రెట్లు అవుతుంది, అయిన ఆ భిన్నమును కనుగొనండి.

5. 10 టన్నుల సామర్థ్యముగల లారిలో A మరియు B అనే రెండు రకాల పెట్టెలు నింపబడి ఉన్నాయి. ఒకవేళ A రకము 150 పెట్టెలు మరియు B రకము 100 పెట్టెలు నింపినచో లారి యొక్క 10 టన్నుల సామర్థ్యం పూర్తి అవుతుంది. ఒకవేళ A రకము 260 పెట్టెలు నింపినచో లారి యొక్క 10 టన్నుల సామర్థ్యాన్ని పూర్తి చేయుటకు B రకము 40 పెట్టెలు పడుతాయి. అయిన ప్రతీ రకము పెట్టెల బరువు ఎంత?

6.★ విశాల్ 1900 కి.మీ ప్రయాణంలో కొంత దూరము బస్సులో మిగిలిన దూరము విమానంలో ప్రయాణించి పూర్తి చేశాడు. ప్రతిగంటకు బస్సు యొక్క సరాసరి వేగము 60 కి.మీ, విమానము యొక్క సరాసరి వేగము 700కి.మీ/గంట. ఒకవేళ ఈ ప్రయాణమును తాను 5 గంటలలో పూర్తి చేసినచో విశాల్ బస్సులో ఎన్ని కి.మీ. ప్రయాణం చేశాడు?

సంకీర్ణ ప్రశ్న సంగ్రహము 1

1. కింది ప్రశ్నలకు సరియైన ఐచ్ఛికమును ఎంచుకొండి.

(1) $4x + 5y = 19$ యొక్క గ్రాఫ్ గీయుటకొరకు $x = 1$ అయినపుడు y విలువ ఎంత?

(A) 4 (B) 3 (C) 2 (D) −3

(2) x మరియు y అనే చరరాశులుగల సమకాలిక సమీకరణముల కొరకు ఒకవేళ $D_x = 49$, $D_y = -63$ మరియు $D = 7$ అయిన x = ఎంత?

(A) 7 (B) −7 (C) $\frac{1}{7}$ (D) $\frac{-1}{7}$

(3) $\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -7 & -4 \end{vmatrix}$ యొక్క నిర్ధారకము విలువ ఎంత?

(A) −1 (B) −41 (C) 41 (D) 1

(4) $x + y = 3$; $3x - 2y - 4 = 0$ అనే సమకాలిక సమీకరణములను సాధించుటకొరకు D యొక్క విలువ ఎంత?

(A) 5 (B) 1 (C) −5 (D) −1

(5) $ax + by = c$; మరియు $mx + ny = d$ ఈ సమకాలిక సమీకరణములలో ఒకవేళ $an \neq bm$ అయిన ఇచ్చిన సమీకరణములకు -

(A) ఒకే సాధన ఉంటుంది. (B) సాధన ఉండదు.

(C) అనంత సాధనలు ఉంటాయి. (D) కేవలం రెండు సాధనలు ఉంటాయి.

2. $2x - 6y = 3$ ఈ సమీకరణముల గ్రాఫ్ గీయుట కొరకు కింది పట్టికను పూరించండి.

x	−5	☐
y	☐	0
(x, y)	☐	☐

3. కింది సమకాలిక సమీకరణములను గ్రాఫ్ పద్ధతిలో సాధించండి.

(1) $2x + 3y = 12$; $x - y = 1$

(2) $x + 5y = 5$; $2x - y + 2 = 0$

(3) $5x - 6y + 30 = 0$; $5x + 4y - 20 = 0$

(4) $3x - y - 2 = 0$; $2x + y = 8$

(5) $3x + y = 10$; $x - y = 2$

4. కింది నిర్ధారకముల విలువలను కనుగొనండి.

(1) $\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}$ (2) $\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}$ (3) $\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$

5. కింది సమకాలిక సమీకరణములను క్రామర్స్ పద్ధతిలో సాధించండి.

(1) $6x - 3y = -10$; $3x + 5y - 8 = 0$

(2) $4m - 2n = -4$; $4m + 3n = 16$

(3) $3x - 2y = \frac{5}{2}$; $\frac{1}{3}x + 3y = -\frac{4}{3}$

(4) $7x + 3y = 15$; $12y - 5x = 39$

(5) $\frac{x+y-8}{2} = \frac{x+2y-14}{3} = \frac{3x-y}{4}$

6. కింది సమకాలిక సమీకరణములను సాధించండి.

(1) $\frac{2}{x}+\frac{2}{3y}=\frac{1}{6}$; $\frac{3}{x}+\frac{2}{y}=0$ (2) $\frac{7}{2x+1}+\frac{13}{y+2}=27$; $\frac{13}{2x+1}+\frac{7}{y+2}=33$

(3) $\frac{148}{x}+\frac{231}{y}=\frac{527}{xy}$; $\frac{231}{x}+\frac{148}{y}=\frac{610}{xy}$ (4) $\frac{7x-2y}{xy}=5$; $\frac{8x+7y}{xy}=15$

(5) $\frac{1}{2(3x+4y)}+\frac{1}{5(2x-3y)}=\frac{1}{4}$; $\frac{5}{(3x+4y)}-\frac{2}{(2x-3y)}=-\frac{3}{2}$

7. కింది రాత లెక్కలను సాధించండి.

(1) ఒక రెండంకెల సంఖ్య మరియు ఆ అంకెలను తారుమారు చేసిన లభించు సంఖ్యల యొక్క మొత్తము 143, ఒకవేళ ఇచ్చిన సంఖ్యలోని ఒకట్ల స్థానములోని అంకె పదుల స్థానములోని అంకె కంటె 3 ఎక్కువ అయినచో ఇచ్చిన ఆరంభ సంఖ్య ఏది? జవాబు కొరకు క్రింది కృత్యమును పూర్తి చేయండి.

ఒకట్ల స్థానములోని అంకె = x

పదుల స్థానములోని అంకె = y అనుకోండి.

$\therefore$ ఆరంభ సంఖ్య = $\square\, y + x$

అంకెలను తారుమారు చేసిన లభించు సంఖ్య = $\square\, x + y$

రెండవ షరతు ప్రకారం,

రెండంకెల సంఖ్య + అంకెలు తారుమారు చేయగా లభించిన సంఖ్య = 143

$\boxed{10x + y} + \square = 143$

$\square\, x + \square\, y = 143$

$x + y = \square$ . . . . . (I)

రెండవ షరతు ప్రకారం,

ఒకట్ల స్థానములోని అంకె = పదుల స్థానములోని అంకె + 3

$x = \square + 3$

$x - y = 3$ . . . . . (II)

(I) మరియు (II)లను కూడగా,

$2x = \square \qquad \therefore x = 8$

$x = 8$ని సమీకరణము (I)లో ప్రతిక్షేపించగా,

$x + y = 13$

$8 + \square = 13$

$\therefore y = \square$

ఆరంభ సంఖ్య $= 10y + x$

$= \square + 8 = 58$

(2) కాంత బాయి దుకాణం నుండి కిలోనర చాయ్‌పత్తి మరియు ఐదు కిలోల చక్కెర తీసుకువచ్చింది. దుకాణమునకు వెళ్ళి రావడానికి తనకి 50 రూపాయల రిక్ష కిరాయి అయ్యింది. వీటన్నింటి కొరకు తనకు మొత్తము 700 రూపాయల ఖర్చు అయ్యింది. తరువాత తనకి ఈ వస్తువులను ఆన్‌లైన్‌లో ఆర్డర్ చేస్తే అదే ధరకు ఇంటి వరకు తెచ్చి ఇస్తారు అని అర్థమయింది. తరువాత నెలలో తను 2 కిలోల చాయ్‌పత్తి మరియు 7 కిలోల చక్కెర ఆన్‌లైన్‌లో తెప్పించింది, అప్పుడు తనకి 880 రూపాయల ఖర్చు అయ్యింది. అయితే కిలో చాయ్‌పత్తి మరియు చక్కెర ధరలను కనుగొనండి.

(3) అనుష్కా దగ్గర 100 రూపాయల నోట్లు x మరియు 50 రూపాయల నోట్లు y.

అనుష్కా ఆనంద్‌కు పైనోట్ల రూపంలో ఇచ్చిన సొమ్ము 2500 రూపాయలు.
- - - - - సమీకరణము I

ఆనంద్ తనకు నోట్ల సంఖ్యను తారుమారు చేసి డబ్బులు ఇచ్చినచో ఆ సొమ్ము 500 రూపాయలు తక్కువయి ఉండేవి.
- - - - - - - సమీకరణము II

సమీకరణములను సాధించి సమాధానమును రాయండి.

100 రూపాయల నోట్ల సంఖ్య $\square$ 50 రూపాయల నోట్ల సంఖ్య $\square$

(4) మనీషా మరియు సవితల ప్రస్తుత వయస్సుల మొత్తం 31 సంవత్సరాలు. 3 సంవత్సరాల క్రితం మనీషా వయస్సు సవిత యొక్క అప్పటి వయస్సుకి నాలుగు రెట్లు ఉండెను, అయిన వారి ఇద్దరి ప్రస్తుత వయస్సులను కనుగొనండి.

(5)★ ఒక పరిశ్రమలో నైపుణ్యంగల మరియు నైపుణ్యం లేని కార్మికుల నిష్పత్తి 5:3. ఒక రోజు యొక్క మొత్తం కూలీ 720 రూ॥లు అయిన ప్రతి నైపుణ్యంగల మరియు నైపుణ్యంలేని కార్మికుల కూలీలను కనుగొనండి.

(6)★ ఒక రహదారిపై A మరియు B అనే రెండు ప్రదేశాలు ఉన్నాయి. వాటి మధ్య దూరము 30 కి.మీ. హమీద్ మోటర్‌సైకిల్‌పై A నుండి B యొక్క వైపు వెళ్ళుటకు బయలుదేరాడు. అదే సమయములో జోసెఫ్ B నుండి A వైపు వెళ్ళుటకు బయలుదేరాడు. వారిద్దరు 20 నిమిషాలలో ఒకరినొకరు కలుసుకుంటారు. జోసెఫ్ ఒకవేళ అదే సమయానికి బయలుదేరి వ్యతిరేక దిశలో వెళ్ళినచో, అతనికి హమీద్ మూడుగంటల తరువాత కలుసుకుంటాడు, అయితే ఒక్కొక్కరి ప్రయాణ వేగము ఎంత ఉంటుంది?

NZCKGH

2 వర్గసమీకరణములు

చదవండి, నేర్చుకుందాం.

- వర్గసమీకరణములు : పరిచయం
- వర్గసమీకరణములను సాధించు పద్ధతి.
- వర్గసమీకరణం యొక్క మూలాల స్వభావం
- మూలాలకు మరియు గుణకాలకు మధ్యగల సంబంధం
- వర్గసమీకరణముల అనువర్తనములు

కొంచెం గుర్తుకు తెచ్చుకుందాం

విద్యార్థి మిత్రులారా, తొమ్మిదవ తరగతిలో మీరు బహుపదులు నేర్చుకున్నారు. దీనిలో బహుపదుల పరిమాణాలను బట్టి ఏర్పడే రకాలను గురించి తెలుసుకున్నారు. ఏక చరరాశిగల బహుపది యొక్క పరిమాణం ఒకటి ఉంటే దానిని రేఖీయ బహుపది మరియు పరిమాణం రెండు గలదానిని వర్గబహుపది అని అంటారు.

కృత్యం : కింది బహుపదులను రేఖీయ బహుపది మరియు వర్గబహుపదులుగా వర్గీకరించండి.

$5X + 9$, $X^2 + 3X - 5$, $3X - 7$, $3X^2 - 5X$, $5X^2$

రేఖీయ బహుపది	వర్గ బహుపది

మనం ఇప్పుడు వర్గ బహుపది విలువ 0 తీసుకొనిన ఏ సమీకరణము లభించునో దానిని నేర్చుకుందాం. ఇటువంటి సమీకరణములను వర్గసమీకరణం అంటారు. మనం రోజువారి జీవితంలో అనేక సార్లు ఈ వర్గసమీకరణములను ఉపయోగిస్తాం.

ఉదాహరణ: సంకేత్ 200 చ.మీ వైశాల్యముగల ఒక దీర్ఘచతురస్రాకారపు స్థలమును కొన్నాడు. స్థలము యొక్క పొడువు వెడల్పు కంటే 10 మీటర్లు ఎక్కువగా ఉంది, అయిన ఆ స్థలము యొక్క పొడువు మరియు వెడల్పులు ఎంత ఉంటాయి?

స్థలం యొక్క వెడల్పు X మీటర్లు ఉంది అని అనుకోండి.

$\therefore$ పొడవు = $(X + 10)$ మీటర్లు

దీర్ఘచతురస్రాకారపు స్థలము యొక్క వైశాల్యము = పొడవు × వెడల్పు.

$\therefore\ 200 = (X + 10) \times X$

$\therefore\ 200 = X^2 + 10X$

అనగా, $X^2 + 10X = 200$

$\therefore\ X^2 + 10X - 200 = 0$

ఇప్పుడు $x^2 + 10x - 200 = 0$ ఈ వర్గసమీకరణమును సాధించి మనం స్థలముయొక్క వెడల్పు మరియు పొడవులను నిర్ణయించవచ్చు. వర్గసమీకరణమును ఏ విధంగా సాధించవలెనో దానిని మనం నేర్చుకుందాం.

కొంచెం గుర్తుకు తెచ్చుకుందాం

కృత్యం : $x^2 + 3x - 5$, $3x^2 - 5x$, $5x^2$; ఈ బహుపదులను ఘాతాంకరూపములో రాసి వాటిలోని పదముల గుణకములను పరిశీలించి కింది గడులను సరియైన వాటితో పూరించండి.

$x^2 + 3x - 5$, $3x^2 - 5x + 0$, $5x^2 + 0x + 0$

- x^2 యొక్క గుణకములు వరుసగా [1], [3] మరియు [5] అనగా 0 లేదు.
- x యొక్క గుణకములు వరుసగా 3, [ ] మరియు [ ].
- స్థిరపదములు వరుసగా [ ], [ ] మరియు [ ].

ఇక్కడ రెండవ మరియు మూడవ బహుపదులలో స్థిరపదము 0.

తెలుసుకుందాం.

వర్గసమీకరణము యొక్క ప్రామాణిక రూపము (Standard form of quadratic equation)

ఏకచరరాశి గల సమీకరణములో చరరాశి ఘాతాంకం ఎక్కువలో ఎక్కువ 2 ఉన్నచో ఆ సమీకరణము వర్గసమీకరణము అవుతుంది.

దాని ప్రామాణిక రూపం $ax^2 + bx + c = 0$ గా రాయవచ్చు. $ax^2 + bx + c = 0$, లో a, b మరియు c లు వాస్తవ సంఖ్యలై a శూన్యేతర సంఖ్య అవుతుంది.

$ax^2 + bx + c = 0$ ఈ రూపములోని సమీకరణమును వర్గసమీకరణము యొక్క ప్రామాణిక రూపము అంటారు.

కృత్యం : కింది పట్టికను పూరించండి.

వర్గసమీకరణము	ప్రామాణిక రూపము	a	b	c
$x^2 - 4 = 0$	$x^2 + 0x - 4 = 0$	1	0	-4
$y^2 = 2y - 7$	. . . .	. . .	. . .	. . .
$x^2 + 2x = 0$	. . . .	. . .	. . .	. . .

సాధించిన ఉదాహరణలు

ఉదా. (1) కింది వాటిలో ఏ సమీకరణములు వర్గసమీకరణములగునో గుర్తించండి.

(1) $3x^2 - 5x + 3 = 0$ (2) $9y^2 + 5 = 0$

(3) $m^3 - 5m^2 + 4 = 0$ (4) $(l + 2)(l - 5) = 0$

సాధన : (1) $3x^2 - 5x + 3 = 0$ దీనిలో చరరాశి యొక్క అతి పెద్ద ఘాతాంకం 2

$\therefore$ ఈ సమీకరణము వర్గసమీకరణం అవుతుంది.

(2) $9y^2 + 5 = 0$ దీనిలో $\square$ చరరాశి యొక్క అతి పెద్ద ఘాతాంకం $\square$

$\therefore$ ఈ సమీకరణము వర్గసమీకరణము $\square$.

(3) $m^3 - 5m^2 + 4 = 0$ దీనిలో చరరాశి యొక్క పెద్ద ఘాతాంకం 2 కాదు.

$\therefore$ ఈ సమీకరణము వర్గసమీకరణము $\square$.

(4) $(l + 2)(l - 5) = 0$

$\therefore l(l - 5) + 2(l - 5) = 0$

$\therefore l^2 - 5l + 2l - 10 = 0$

$\therefore l^2 - 3l - 10 = 0$ దీనిలో $\square$ అనే ఒక చరరాశి అయి, చరరాశి యొక్క పెద్ద ఘాతాంకం $\square$

$\therefore$ ఇచ్చిన సమీకరణము వర్గసమీకరణము $\square$

తెలుసుకుందాం.

వర్గసమీకరణము యొక్క మూలాలు (Roots of a quadratic equation)

మనం కింది తరగతిలో x యొక్క a విలువను తీసుకొని బహుపది యొక్క విలువ సున్న లభించినచో $(x-a)$ అనేది ఆ బహుపది యొక్క కారణాంకము అవుతుంది అని చూశాము. అనగా $p(x)$ బహుపది అయి మరియు $p(a) = 0$ అయినచో $(x-a)$ అనేది $p(x)$ యొక్క కారణాంకం అవుతుంది. ఈ స్థానములో a అనేది $p(x) = 0$ యొక్క ఒక సాధన లేదా a అనేది $p(x) = 0$ యొక్క మూలము అవుతుంది అని అంటారు.

ఉదాహరణకు,

$x^2 + 5x - 6$ ఈ బహుపదిలో $x = -6$ ను ప్రతిక్షేపించగా,

$$x^2 + 5x - 6 = (-6)^2 + 5 \times (-6) - 6$$
$$= 36 - 30 - 6 = 0$$

$\therefore x = -6$ అనేది $x^2 + 5x - 6$ ఈ సమీకరణము యొక్క ఒక మూలము.

అనగా -6 అనేది $x^2 + 5x - 6 = 0$ ఈ సమీకరణము యొక్క ఒక మూలము.

$x^2 + 5x - 6$ ఈ బహుపదిలో $x = 2$ను ప్రతిక్షేపించగా,

$$x^2 + 5x - 6 = 2^2 + 5 \times 2 - 6$$
$$= 4 + 10 - 6$$
$$= 8 \neq 0$$

$\therefore x = 2$ అనేది $x^2 + 5x - 6 = 0$ ఈ వర్గ సమీకరణము యొక్క సాధన కాదు.

సాధించిన ఉదాహరణలు

ఉదా. $2x^2 - 7x + 6 = 0$ ఈ సమీకరణము యొక్క (i) $x = \frac{3}{2}$ మరియు (ii) $x = -2$ అనేవి సాధనలు అగునా కాదా నిర్ణయించండి.

సాధన: (i) $2x^2 - 7x + 6$ ఈ బహుపదిలో $x = \frac{3}{2}$ విలువను ప్రతిక్షేపించి బహుపది విలువను కనుగొందాం.

$$2x^2 - 7x + 6 = 2\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 7\left(\frac{3}{2}\right) + 6$$

$$= 2 \times \frac{9}{4} - \frac{21}{2} + 6$$

$$= \frac{9}{2} - \frac{21}{2} + \frac{12}{2} = 0$$

$\therefore\ x = \frac{3}{2}$ అనేది ఈ సమీకరణము యొక్క ఒక సాధన అవుతుంది.

(ii) $2x^2 - 7x + 6$ అనే బహుపదిలో $x = -2$ విలువను ప్రతిక్షేపించి బహుపది విలువను కనుగొందాం.

$$2x^2 - 7x + 6 = 2(-2)^2 - 7(-2) + 6$$

$$= 2 \times 4 + 14 + 6$$

$$= 28 \neq 0$$

$\therefore\ x = -2$ అనేది $2x^2 - 7x + 6 = 0$ ఈ సమీకరణము యొక్క సాధన కాదు.

కృత్యం : ఒకవేళ $x = 5$ అనేది $kx^2 - 14x - 5 = 0$ ఈ సమీకరణము యొక్క ఒక మూలము అయినచో, k విలువను కనుగొనుట కొరకు కింది కృత్యమును పూర్తి చేయండి.

సాధన : $kx^2 - 14x - 5 = 0$ ఈ వర్గసమీకరణం యొక్క ఒక మూలము $\square$

$\therefore\ x = \square$ అనే విలువను పై వర్గసమీకరణములో ప్రతిక్షేపించుదాం.

$\therefore\ k\boxed{5}^2 - 14\boxed{5} - 5 = 0$

$\therefore\ 25k - 70 - 5 = 0$

$\therefore\ 25k - \square = 0$

$\therefore\ 25k = \square$

$\therefore\ k = \frac{\square}{\square} = 3$

ఇవి గుర్తుంచుకుందాం

(1) $ax^2 + bx + c = 0$ అనేది వర్గసమీకరణము యొక్క ప్రామాణిక రూపం. దీనిలో a, b మరియు cలు వాస్తవ సంఖ్యలై a అనేది శూన్యేతర సంఖ్య అవుతుంది.

(2) చరరాశియొక్క ఏ విలువలతో వర్గసమీకరణము యొక్క ఇరువైపులు సమానంగా అవుతాయో (అనగా వర్గసమీకరణము తృప్తిపడునో) ఆ విలువలను వర్గసమీకరణము యొక్క సాధనలు లేదా వర్గసమీకరణము యొక్క మూలాలు అంటారు.

అభ్యాసమాలిక 2.1

1. ఏవేని రెండు వర్గసమీకరణములను రాయండి.

2. కింది సమీకరణములనుండి వర్గసమీకరణములు ఏవో గుర్తించండి.

(1) $x^2 + 5x - 2 = 0$ (2) $y^2 = 5y - 10$ (3) $y^2 + \frac{1}{y} = 2$

(4) $x + \frac{1}{x} = -2$ (5) $(m + 2)(m - 5) = 0$ (6) $m^3 + 3m^2 - 2 = 3m^3$

3. కింది సమీకరణములను $ax^2 + bx + c = 0$ రూపములో రాయండి a, b, c ల విలువలను గుర్తించండి.

(1) $2y = 10 - y^2$ (2) $(x - 1)^2 = 2x + 3$ (3) $x^2 + 5x = -(3 - x)$

(4) $3m^2 = 2m^2 - 9$ (5) $p(3 + 6p) = -5$ (6) $x^2 - 9 = 13$

4. వర్గసమీకరణములకు ఎదురుగా ఇవ్వబడిన చరరాశి విలువలు ఆ సమీకరణముల మూలాలు అగునా లేక కాదా కనుగొనండి.

(1) $x^2 + 4x - 5 = 0$, $x = 1, -1$ (2) $2m^2 - 5m = 0$, $m = 2, \frac{5}{2}$

5. ఒకవేళ $kx^2 - 10x + 3 = 0$ ఈ వర్గసమీకరణము యొక్క ఒక మూలము $x = 3$ అయినచో k విలువ ఎంత?

6. $5m^2 + 2m + k = 0$ ఈ వర్గసమీకరణము యొక్క ఒక మూలము $\frac{-7}{5}$ అయినచో k విలువను కనుగొనట కొరకు కింది కృత్యమును పూర్తి చేయండి.

సాధన : $5m^2 + 2m + k = 0$ ఈ వర్గసమీకరణ యొక్క ఒక మూలము $\boxed{}$

$\therefore\ m = \boxed{}$ పై వర్గసమీకరణములో ప్రతిక్షేపించుదాం.

$\therefore\ 5 \times \boxed{}^2 + 2 \times \boxed{} + k = 0$

$\therefore\ \boxed{} + \boxed{} + k = 0$

$\therefore\ \boxed{} + k = 0$

$\therefore\ k = \boxed{}$

కొంచెం గుర్తుకు తెచ్చుకుందాం

మీరు గత సంవత్సరములో బహుపది అధ్యాయంలో $x^2 - 4x - 5$, $2m^2 - 5m$, $a^2 - 25$ లాంటి బహుపదుల కారణాంకములు కనుగొనే పద్ధతిని నేర్చుకున్నారు. కింది కృత్యమును చేసి దానిని మననం చేసుకుందాం.

కృత్యం : కింది వర్గబహుపదుల కారణాంకములను కనుగొనండి.

(1) $x^2 - 4x - 5$

$= x^2 - 5x + 1x - 5$

$= x(\ldots\ldots) + 1(\ldots\ldots)$

$= (\ldots\ldots)(\ldots\ldots)$

(2) $2m^2 - 5m$

$= \ldots\ldots$

(3) $a^2 - 25$

$= a^2 - 5^2$

$= (\ldots\ldots)(\ldots\ldots)$

తెలుసుకుందాం.

కారణాంక పద్ధతిలో వర్గసమీకరణముల మూలాలను కనుగొనుట.

(Solution of a quadratic equation by factorisation)

మనం చరరాశులకు వేరువేరు విలువలను తీసుకొని వర్గసమీకరణము యొక్క మూలాలను నిర్ణయించాము కాని ఇది ఎక్కువ సమయము పట్టే పద్ధతి కావున మనము ఈ విధానమును వర్గసమీకరణం యొక్క మూలాలను కారణాంక పద్ధతి ద్వారా కనుగొనుటను నేర్చుకోబోతున్నాము.

$$x^2 - 4x - 5 = (x - 5)(x + 1)$$

ఇక్కడ $(x - 5)$ మరియు $(x + 1)$ లు వర్గబహుపది $x^2 - 4x - 5$ యొక్క రెండు రేఖీయ కారణాంకాలు కావున $x^2 - 4x - 5$ అనేది వర్గబహుపది నుండి వచ్చు $x^2 - 4x - 5 = 0$ ఈ వర్గసమీకరణమును కింది విధంగా రాయవచ్చు.

$$(x - 5)(x + 1) = 0$$

ఒకవేళ రెండు సంఖ్యల లబ్దం సున్న అయినచో ఆ రెండు సంఖ్యలలో కనీసం ఒక సంఖ్య అయిన సున్న అవుతుంది.

$\therefore$ $x - 5 = 0$ లేదా $x + 1 = 0$

$\therefore$ $x = 5$ లేదా $x = -1$

$\therefore$ ఇచ్చిన వర్గసమీకరణము యొక్క మూలాలు 5 మరియు -1

ఈ ఉదాహరణలు సాధించేటప్పుడు మనకు మొదటగా వర్గబహుపది యొక్క రెండు రేఖీయ కారణాంకాలు లభించాయి. ఈ విధంగా వర్గసమీకరణములను సాధించే పద్ధతిని కారణాంక పద్ధతి అని అందాం.

సాధించిన ఉదాహరణలు

ఉదా. కింది వర్గసమీకరణములను కారణాంక పద్ధతిలో సాధించండి.

(1) $m^2 - 14m + 13 = 0$ (2) $3x^2 - x - 10 = 0$

(3) $3y^2 = 15y$ (4) $x^2 = 3$ (5) $6\sqrt{3}x^2 + 7x = \sqrt{3}$

(1) $m^2 - 14m + 13 = 0$

$\therefore m^2 - 13m - 1m + 13 = 0$

$\therefore m(m - 13) - 1(m - 13) = 0$

$\therefore (m - 13)(m - 1) = 0$

$\therefore m - 13 = 0$ లేదా $m - 1 = 0$

$\therefore m = 13$ లేదా $m = 1$

$\therefore$ ఇచ్చిన వర్గసమీకరణము యొక్క మూలాలు 13 మరియు 1.

(2) $3x^2 - x - 10 = 0$

$\therefore 3x^2 - 6x + 5x - 10 = 0$

$\therefore 3x(x - 2) + 5(x - 2) = 0$

$\therefore (3x + 5)(x - 2) = 0$

$\therefore 3x + 5 = 0$ లేదా $x - 2 = 0$

$\therefore x = -\frac{5}{3}$ లేదా $x = 2$

$\therefore$ ఇచ్చిన వర్గ సమీకరణము యొక్క మూలాలు $-\frac{5}{3}$ మరియు 2.

(3) $3y^2 = 15y$

$\therefore\ 3y^2 - 15y = 0$

$\therefore\ 3y(y - 5) = 0$

$\therefore\ 3y = 0$ లేదా $y - 5 = 0$

$\therefore\ y = 0$ లేదా $y = 5$

$\therefore$ వర్గసమీకరణము యొక్క మూలాలు 0 మరియు 5

(4) $x^2 = 3$

$\therefore x^2 - 3 = 0$

$\therefore x^2 - (\sqrt{3})^2 = 0$

$\therefore (x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3}) = 0$

$\therefore\ x + \sqrt{3} = 0$ లేదా $x - \sqrt{3} = 0$

$\therefore\ x = -\sqrt{3}$ లేదా $x = \sqrt{3}$

$\therefore$ ఇచ్చిన వర్గసమీకరణము యొక్క మూలాలు $-\sqrt{3}$ మరియు $\sqrt{3}$

(5) $6\sqrt{3}x^2 + 7x = \sqrt{3}$

$\therefore\ 6\sqrt{3}x^2 + 7x - \sqrt{3} = 0$

$\therefore\ 6\sqrt{3}x^2 + 9x - 2x - \sqrt{3} = 0$

$\therefore 3\sqrt{3}x(2x + \sqrt{3}) - 1(2x + \sqrt{3}) = 0$

$\therefore\ (2x + \sqrt{3})(3\sqrt{3}x - 1) = 0$

$\therefore 2x + \sqrt{3} = 0$ లేదా $3\sqrt{3}x - 1 = 0$

$\therefore\ 2x = -\sqrt{3}$ లేదా $3\sqrt{3}x = 1$

$\therefore\ x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ లేదా $x = \dfrac{1}{3\sqrt{3}}$

$6\sqrt{3} \times -\sqrt{3} = -18$

-18

$9 \quad -2$

$9 = 3\sqrt{3} \times \sqrt{3}$

$\therefore$ వర్గసమీకరణ మూలాలు $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ మరియు $\dfrac{1}{3\sqrt{3}}$

అభ్యాసమాలిక 2.2

1. కింది వర్గసమీకరణములను కారణాంక పద్ధతి ద్వారా సాధించండి.

(1) $x^2 - 15x + 54 = 0$ (2) $x^2 + x - 20 = 0$ (3) $2y^2 + 27y + 13 = 0$

(4) $5m^2 = 22m + 15$ (5) $2x^2 - 2x + \dfrac{1}{2} = 0$ (6) $6x - \dfrac{2}{x} = 1$

(7) $\sqrt{2}x^2 + 7x + 5\sqrt{2} = 0$ ఈ వర్గసమీకరణమును కారణాంక పద్ధతిలో సాధించుటకై కింది కృత్యమును పూర్తి చేయండి.

సాధన $\sqrt{2}x^2 + 7x + 5\sqrt{2} = 0$

$\therefore\ \sqrt{2}x^2 + \square + \square + 5\sqrt{2} = 0$

$\therefore\ x(.\,.\,.\,.\,.) + \sqrt{2}(.\,.\,.\,.\,.) = 0$

$\therefore \quad (\ldots\ldots)(x + \sqrt{2}\,) = 0$

$\therefore \quad (\ldots\ldots) = 0$ లేదా $(x + \sqrt{2}\,) = 0$

$\therefore\ x = \square$ లేదా $x = -\sqrt{2}$

$\therefore$ వర్గసమీకరణము మూలాలు $\square$ మరియు $-\sqrt{2}$

(8)★ $3x^2 - 2\sqrt{6}\ x + 2 = 0$ (9) $2m\ (m - 24) = 50$

(10) $25m^2 = 9$ (11) $7m^2 = 21m$ (12) $m^2 - 11 = 0$

తెలుసుకుందాం.

కచ్చిత వర్గ పద్ధతిలో వర్గసమీకరణమును సాధించుట
(Solution of a quadratic equation by completing the square)

టీచర్ : $x^2 + 10x + 2 = 0$ అనేది వర్గసమీకరణం అగునా ,కాదా?

యోగేష్ : అవును సర్. ఎందుకనగా అది $ax^2 + bx + c = 0$ రూపంలో ఉంది. ఇక్కడ x చరరాశి ఘాతాంకం ఎక్కువలో ఎక్కువ 2. a యొక్క విలువ సున్న కాదు.

టీచర్ : ఈ సమీకరణమును మీరు సాధించగలరా?

వర్షా : లేదు సర్. ఎందుకనగా 10 మొత్తం వచ్చునట్లు 2 ఈ సంఖ్య యొక్క కారణాంకాలు చెప్పలేము.

టీచర్ : కావున ఇటువంటి ఉదాహరణలు సాధించుట కొరకు వేరే విధానమును ఉపయోగించవలెను. ఈ విధానమును అర్థము చేసుకుందాం.

$x^2 + 10x$ ఈ సమాసములో సరైన పదమును కలిపి ఒక పూర్తి వర్గసమాసమును పొందుదాం.

ఒకవేళ $x^2 + 10x + k = (x + a)^2$

అయిన $x^2 + 10x + k = x^2 + 2ax + a^2$

$\therefore$ గుణకములను పోల్చి చూసిన, $10 = 2a$ మరియు $k = a^2$

$\therefore\ a = 5$ మరియు కావున $k = a^2 = (5)^2 = 25$

ఇప్పుడు, $x^2 + 10x + 2 = (x + 5)^2 - 25 + 2 = (x + 5)^2 - 23$

$x^2 + 10x + 2 = 0$ వర్గసమీకరణమును ఇప్పుడు మీరు సాధించగలరా?

రేహన : అవును సర్ , సమీకరణమునకు ఎడమ వైపు రెండింటి వర్గముల యొక్క తీసివేత రూపములోకి వచ్చినందున వాటి కారణాంకములను కనుగొనవచ్చు.

$(x + 5)^2 - (\sqrt{23}\,)^2 = 0$

$\therefore\ (x + 5 + \sqrt{23}\,)(x + 5 - \sqrt{23}\,) = 0$

$\therefore\ x + 5 + \sqrt{23} = 0$ లేదా $x + 5 - \sqrt{23} = 0$

$\therefore\ x = -5 - \sqrt{23}$ లేదా $x = -5 + \sqrt{23}$

హమీద్ : సర్, దీనిని సాధించే వేరొక పద్ధతి నాకు తోచింది

$(x + 5)^2 - (\sqrt{23})^2 = 0$

$\therefore (x + 5)^2 = (\sqrt{23})^2$

$\therefore x + 5 = \sqrt{23}$ లేదా $x + 5 = -\sqrt{23}$

$\therefore x = -5 + \sqrt{23}$ లేదా $x = -5 - \sqrt{23}$

సాధించిన ఉదాహరణలు

ఉదా. (1) సాధించండి : $5x^2 - 4x - 3 = 0$

సాధన : సమీకరణములో వర్గసమాసము యొక్క రూపాంతరము రెండింటి వర్గాల యొక్క తీసివేత రూపములోకి తీసుకురావడానికి, x^2 యొక్క గుణకమును 1గా చేయుట వీలుగా ఉంటుంది. కావున ఇచ్చిన సమీకరణమును 5 చే భాగించగా,

$x^2 - \frac{4}{5}x - \frac{3}{5} = 0$

ఇప్పుడు ఒకవేళ $x^2 - \frac{4}{5}x + k = (x - a)^2$ అయిన $x^2 - \frac{4}{5}x + k = x^2 - 2ax + a^2$.

$x^2 - \frac{4}{5}x$ ని $x^2 - 2ax$ తో పోల్చగా,

$-2ax = -\frac{4}{5}x \quad \therefore a = \frac{1}{2} \times \frac{4}{5} = \frac{2}{5}$

$\therefore k = a^2 = \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{4}{25}$

ఇప్పుడు, $x^2 - \frac{4}{5}x - \frac{3}{5} = 0$

$\therefore x^2 - \frac{4}{5}x + \frac{4}{25} - \frac{4}{25} - \frac{3}{5} = 0$

$\therefore \left(x - \frac{2}{5}\right)^2 - \left(\frac{4}{25} + \frac{3}{5}\right) = 0$

$\therefore \left(x - \frac{2}{5}\right)^2 - \left(\frac{19}{25}\right) = 0$

$\therefore \left(x - \frac{2}{5}\right)^2 = \left(\frac{19}{25}\right)$

$\therefore x - \frac{2}{5} = \frac{\sqrt{19}}{5}$ లేదా $x - \frac{2}{5} = -\frac{\sqrt{19}}{5}$

$\therefore x = \frac{2}{5} + \frac{\sqrt{19}}{5}$ లేదా $x = \frac{2}{5} - \frac{\sqrt{19}}{5}$

$\therefore x = \frac{2+\sqrt{19}}{5}$ లేదా $x = \frac{2-\sqrt{19}}{5}$

$\therefore$ వర్గసమీకరణము యొక్క మూలాలు $\frac{2+\sqrt{19}}{5}$ మరియు $\frac{2-\sqrt{19}}{5}$

> సమీకరణము $x^2 + bx + c = 0$ రూపములో ఉన్నచో, అప్పుడు $x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 + c = 0$ ఈ రూపములో, అనగా $\left(x + \frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - c$ రూపములో రాయవచ్చు.

ఉదా. (2) సాధించండి : $x^2 + 8x - 48 = 0$

పద్ధతి I : కచ్చిత వర్గ పద్ధతి

$x^2 + 8x - 48 = 0$

$\therefore x^2 + 8x + 16 - 16 - 48 = 0$

$\therefore (x + 4)^2 - 64 = 0$

$\therefore (x + 4)^2 = 64$

$\therefore x + 4 = 8$ లేదా $x + 4 = -8$

$\therefore x = 4$ లేదా $x = -12$

$\therefore$ వర్గసమీకరణము యొక్క మూలాలు 4 మరియు -12.

పద్ధతి II : కారణాంక పద్ధతి

$x^2 + 8x - 48 = 0$

$\therefore x^2 + 12x - 4x - 48 = 0$

$\therefore x(x + 12) - 4(x + 12) = 0$

$\therefore (x + 12)(x - 4) = 0$

$\therefore x + 12 = 0$ లేదా $x - 4 = 0$

$\therefore x = -12$ లేదా $x = 4$

అభ్యాసమాలిక 2.3

కింది వర్గసమీకరణములను కచ్చిత వర్గ పద్ధతిలో సాధించండి.

(1) $x^2 + x - 20 = 0$ (2) $x^2 + 2x - 5 = 0$ (3) $m^2 - 5m = -3$

(4) $9y^2 - 12y + 2 = 0$ (5) $2y^2 + 9y + 10 = 0$ (6) $5x^2 = 4x + 7$

తెలుసుకుందాం.

వర్గసమీకరణమును సాధించే సూత్రం (Formula for solving a quadratic equation)

$ax^2 + bx + c$ ఈ సమాసమును a చే భాగించిన ($\because a \neq 0$) $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}$ అనే సమాసము లభిస్తుంది.

$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}$ ఈ సమాసమును రెండు వర్గముల యొక్క తీసివేత రూపములో అమర్చి $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$ ఈ సమీకరణము యొక్క, అనగా $ax^2 + bx + c = 0$ ఈ సమీకరణమును యొక్క సాధారణ సాధన లేదా మూలాలు కనుగొనవచ్చు.

$ax^2 + bx + c = 0 \ . . . \ (I)$

$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$ . . . . . ఇరువైపులా aచే భాగించగా,

$$\therefore x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} = 0$$

$$\therefore \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0$$

$$\therefore \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2} = 0 \qquad \therefore \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

$$\therefore\ x+\frac{b}{2a} = \sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}} \text{ లేదా } x+\frac{b}{2a} = -\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$$

$$\therefore\ x = -\frac{b}{2a}+\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}} \text{ లేదా } x = -\frac{b}{2a}-\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$$

$$\therefore\ x = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \text{ లేదా } x = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

ఈ సాధనలను క్లుప్తంగా $x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ అని రాస్తారు మరియు వాటిని α (ఆల్ఫా), β(బీటా) ఈ అక్షరములతో సూచిస్తారు $\therefore\ \alpha = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ మరియు $\beta = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ .... (I)

$ax^2 + bx + c = 0$ ఈ సమీకరణములో a, b, c ల విలువలు $\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ ఈ సమాసములో రాసి సమాసమునకు సులభ రూపము ఇవ్వటం వలన సమీకరణము యొక్క సాధనలు లభించును. కావున $x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ దీనిని వర్గసమీకరణమును సాధించే సూత్రము అంటారు. వర్గసమీకరణము యొక్క రెండు సాధనలలోని ఏదేని ఒక సాధనకు ఏదేని గుర్తును ఉపయోగించే వీలు ఉంటుంది.

సమీకరణము (I) కి బదులు $\alpha = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ మరియు $\beta = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ అని కూడా అనవచ్చు.

$\alpha = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ అయితే $\alpha > \beta$, $\alpha = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ అయితే $\alpha < \beta$ అని గుర్తుపెట్టుకోండి.

సాధించిన ఉదాహరణలు

సూత్రమును ఉపయోగించి కింది వర్గసమీకరణములను సాధించండి.

ఉదా.(1) $m^2 - 14m + 13 = 0$

సాధన : $m^2 - 14m + 13 = 0$ ను

$ax^2 + bx + c = 0$ తో పోల్చగా,

$a = 1,\ b = -14,\ c = 13,$

$\therefore b^2 - 4ac = (-14)^2 - 4 \times 1 \times 13$

$= 196 - 52$

$= 144$

$$m = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-(-14)\pm\sqrt{144}}{2\times1}$$

$$= \frac{14\pm12}{2}$$

$\therefore\ m = \frac{14+12}{2}$ లేదా $m = \frac{14-12}{2}$

$\therefore\ m = \frac{26}{2}$ లేదా $m = \frac{2}{2}$

$\therefore\ m = 13$ లేదా $m = 1$

$\therefore$ వర్గసమీకరణము యొక్క మూలాలు 13 మరియు 1.

ఉదా. (2) $x^2 + 10x + 2 = 0$

సాధన: $x^2 + 10x + 2 = 0$ ను

$ax^2 + bx + c = 0$తో పోల్చగా,

$a = 1,\ b = 10,\ c = 2,$

$\therefore b^2 - 4ac = (10)^2 - 4 \times 1 \times 2$

$= 100 - 8$

$= 92$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-10 \pm \sqrt{92}}{2 \times 1}$$

$$= \frac{-10 \pm \sqrt{4 \times 23}}{2}$$

$$= \frac{-10 \pm 2\sqrt{23}}{2}$$

$$= \frac{2(-5 \pm \sqrt{23})}{2}$$

$\therefore\ x = -5 \pm \sqrt{23}$

$\therefore\ x = -5 + \sqrt{23}$ లేదా $x = -5 - \sqrt{23}$

$\therefore$ వర్గసమీకరణము యొక్క మూలాలు $-5 + \sqrt{23}$ మరియు $-5 - \sqrt{23}$

ఉదా. (3) $x^2 - 2x - 3 = 0$

సాధన: $ax^2 + bx + c = 0$తో పోల్చగా,

$a = 1,\ b = -2,\ c = -3,$

$\therefore b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 4 + 12 = 16$

$\therefore x = \dfrac{-(-2) + \sqrt{16}}{2}$ లేదా $x = \dfrac{-(-2) - \sqrt{16}}{2}$

$= \dfrac{2+4}{2}$ లేదా $\dfrac{2-4}{2}$

$= 3$ లేదా -1

అధిక వివరాలకై :

$x^2 - 2x - 3 = 0$ ఇదే వర్గసమీకరణము కింది గ్రాఫ్‌పై సాధించబడింది, దానిని అర్థం చేసుకోండి.

$x^2 - 2x - 3 = 0$ అనగా $x^2 = 2x + 3$

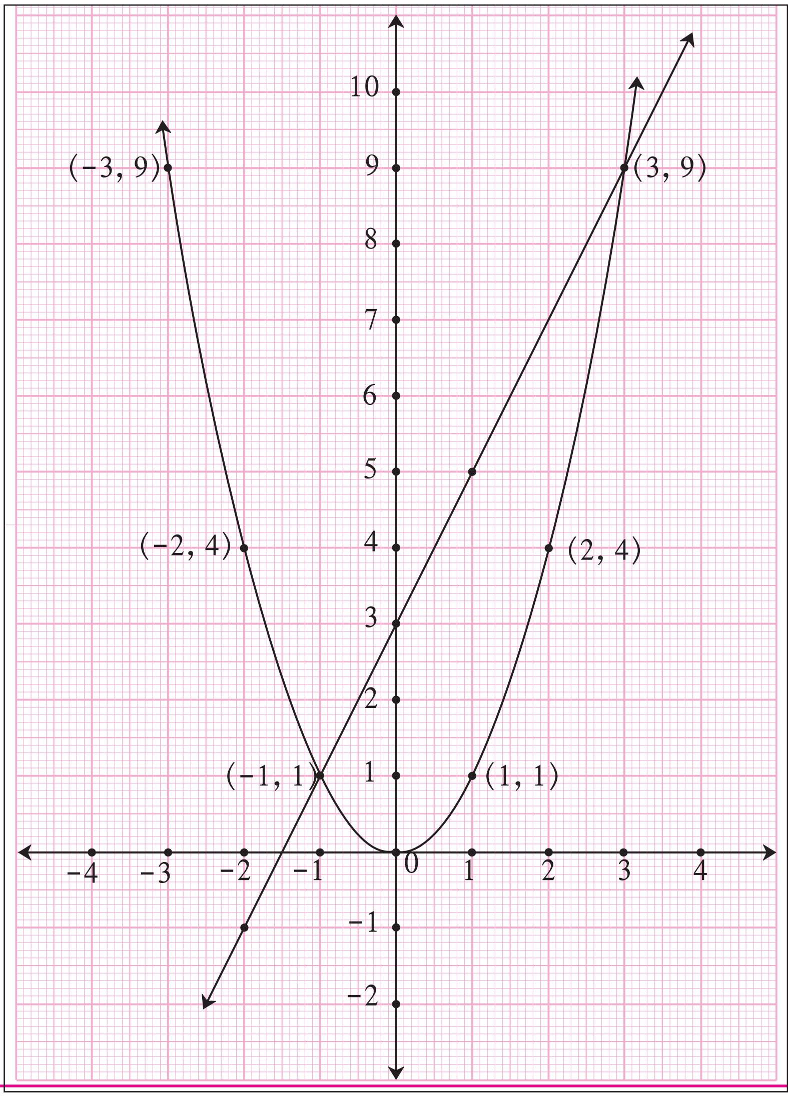
x యొక్క ఏ విలువ $x^2 = 2x + 3$ ఈ సమీకరణమును తృప్తిపరుస్తుందో, ఆ విలువ ఈ సమీకరణము యొక్క సాధన అవుతుంది. $y = x^2 = 2x + 3$ అనుకుందాం. $y = x^2$ మరియు $y = 2x + 3$ ఈ సమీకరణముల గ్రాఫ్‌ను గీద్దాం.

$y = x^2$

x	3	2	1	0	−1	−2	−3
y	9	4	1	0	1	4	9

$y = 2x + 3$

x	−1	0	1	−2
y	1	3	5	−1



ఈ గ్రాఫ్‌లో రేఖలు పరస్పరం (−1, 1) మరియు (3, 9) బిందువుల వద్ద ఖండించుకుంటాయి.

$\therefore$ $x^2 = 2x + 3$ ఈ సమీకరణము యొక్క , అనగా $x^2 - 2x - 3 = 0$ యొక్క సాధన $x = -1$ లేదా $x = 3$ అగును.

పక్క పటములో $y = x^2$ మరియు $y = 2x + 3$ ఈ సమీకరణముల గ్రాఫ్ గీయబడింది. వాటి ఖండన బిందువుల నుండి $x^2 = 2x + 3$ సమీకరణము యొక్క, అనగా $x^2 - 2x - 3 = 0$ యొక్క సాధనలు ఏ విధంగా లభిస్తాయో అర్థం చేసుకోండి.

ఉదా. **(4)** $25x^2 + 30x + 9 = 0$

సాధన: $25x^2 + 30x + 9 = 0$ ని

$ax^2 + bx + c = 0$ తో పోల్చగా,

$a = 25,\ b = 30,\ c = 9,$

$\therefore b^2 - 4ac = (30)^2 - 4 \times 25 \times 9$

$= 900 - 900 \quad = 0$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-30 \pm \sqrt{0}}{2 \times 25}$$

$$\therefore \quad x = \frac{-30+0}{50} \text{ లేదా } x = \frac{-30-0}{50}$$

$$\therefore \quad x = -\frac{30}{50} \text{ లేదా } x = -\frac{30}{50}$$

$$\therefore \quad x = -\frac{3}{5} \text{ లేదా } x = -\frac{3}{5}$$

$25x^2 + 30x + 9 = 0$ సమీకరణము యొక్క రెండు మూలాలు సమానం అని గుర్తుంచుకోండి. అదే విధంగా $25x^2 + 30x + 9 = 0$. అనగా $(5x + 3)^2 = 0$ అని గుర్తుంచుకోండి.

ఉదా. **(5)** $x^2 + x + 5 = 0$

సాధన: $x^2 + x + 5 = 0$ ని

$ax^2 + bx + c = 0$తో పోల్చగా,

$a = 1,\ b = 1,\ c = 5,$

$\therefore b^2 - 4ac = (1)^2 - 4 \times 1 \times 5$

$= 1 - 20$

$= -19$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{-19}}{2 \times 1}$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{-19}}{2}$$

కాని $\sqrt{-19}$ అనేది వాస్తవ సంఖ్య కాదు. కావున ఇచ్చిన వర్గసమీకరణము యొక్క మూలాలు వాస్తవ సంఖ్యలు కావు.

కృత్యం: $2x^2+13x+15=0$ వర్గసమీకరణమును కారణాంక పద్ధతిలో, కచ్చిత వర్గ పద్ధతిలో మరియు సూత్రమును ఉపయోగించి సాధించండి. సమాధానములు ఒకే విధంగా ఉన్నాయా అని సరి చూడండి.

అభ్యాసమాలిక 2.4

1. కింది వర్గసమీకరణములను ప్రామాణిక రూపముతో పోల్చి a, b, c ల విలువలను రాయండి.

(1) $x^2 - 7x + 5 = 0$ (2) $2m^2 = 5m - 5$ (3) $y^2 = 7y$

2. కింది వర్గసమీకరణములను సూత్రమును ఉపయోగించి సాధించండి.

(1) $x^2 + 6x + 5 = 0$ (2) $x^2 - 3x - 2 = 0$ (3) $3m^2 + 2m - 7 = 0$

(4) $5m^2 - 4m - 2 = 0$ (5) $y^2 + \frac{1}{3}y = 2$ (6) $5x^2 + 13x + 8 = 0$

3. $x^2 + 2\sqrt{3}x + 3 = 0$ వర్గసమీకరణములను సూత్రమును ఉపయోగించి కింది ప్రవాహ ఆకృతిలో ఇచ్చిన వివరాల ఆధారంగా సాధించండి.

సాధన : $x^2 + 2\sqrt{3}x + 3 = 0$ను $ax^2 + bx + c = 0$తో పోల్చి a, b, c విలువలను రాయండి. → $b^2 - 4ac$ యొక్క విలువను కనుగొనండి → వర్గసమీకరణమును సాధించే సూత్రమును రాయండి. → సూత్రములో విలువలను రాసి సాధనలను కనుగొనండి.

తెలుసుకుందాం

వర్గసమీకరణము యొక్క మూలాల స్వభావం (Nature of roots of a quadratic equation)

వర్గసమీకరణము $ax^2+bx+c=0$ యొక్క మూలాలు $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ గా ఉంటాయి, అని మనం నేర్చుకున్నాం.

(1) ఒకవేళ $b^2 - 4ac = 0$ అయినచో $x = \frac{-b \pm \sqrt{0}}{2a}$ $\therefore$ $x = \frac{-b+0}{2a}$ లేదా $x = \frac{-b-0}{2a}$

$\therefore$ వర్గసమీకరణము యొక్క మూలాలు వాస్తవ సంఖ్యలు మరియు సమానంగా ఉంటాయి.

(2) ఒకవేళ $b^2 - 4ac > 0$ అయినచో $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

అనగా $x = \frac{-b + \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ మరియు $x = \frac{-b - \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$\therefore$ వర్గసమీకరణము యొక్క మూలాలు వాస్తవ సంఖ్యలుగా మరియు అసమానంగా ఉంటాయి.

(3) ఒకవేళ $b^2 - 4ac < 0$ అయినచో $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ అనేది వాస్తవ సంఖ్యలు కావు అనగా ఇక్కడ వర్గసమీకరణము యొక్క మూలాలు వాస్తవాలు కావు.

వర్గసమీకరణము $ax^2 + bx + c = 0$ యొక్క మూలాల స్వరూపం $b^2 - 4ac$ విలువ అధారంగా నిశ్చయించబడుతుంది. కావున $b^2 - 4ac$ ని వర్గసమీకరణము యొక్క విచక్షణి (discriminant) అంటారు. దీనిని Δ(డెల్టా) చిహ్నంతో సూచిస్తారు. (Δ అనేది గ్రీక్ అక్షరం.)

సాధించిన ఉదాహరణలు

కృత్యం : కింది వివరాల ఆధారంగా ఖాళీలను పూరించండి.

	విచక్షణి విలువ		మూలాల స్వభావం
(1)	50	→	
(2)	-30	→	
(3)	0	→	

ఉదా. (1) $x^2 + 10x - 7 = 0$ వర్గసమీకరణములో విచక్షణి విలువను కనుగొనండి.

సాధన : $x^2 + 10x - 7 = 0$ ను $ax^2 + bx + c = 0$తో పోల్చగా

$a = 1,\ b = 10\ ,\ c = -7\ ,$

$\therefore b^2 - 4ac = 10^2 - 4 \times 1 \times (-7)$

$= 100 + 28$

$= 128$

ఉదా. (2) విచక్షణి ఆధారంగా వర్గసమీకరణము యొక్క మూలాల స్వరూపం నిర్ణయించండి.

(i) $2x^2 - 5x + 7 = 0$

సాధన : $2x^2 - 5x + 7 = 0$ ను

$ax^2 + bx + c = 0$తో పోల్చగా

$a = 2,\ b = -5\ ,\ c = 7$

$\therefore b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \times 2 \times 7$

$\therefore \quad \Delta = 25 - 56$

$= -31$

$\therefore b^2 - 4ac < 0$

$\therefore$ వర్గసమీకరణము యొక్క మూలాలు వాస్తవ సంఖ్యలు కావు.

(ii) $x^2 + 2x - 9 = 0$

సాధన : $x^2 + 2x - 9 = 0$ ను

$ax^2 + bx + c = 0$తో పోల్చగా

$a = \square,\ b = 2,\ c = \square$

$\therefore b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \times \square \times \square$

$\therefore \quad \Delta = 4 + \square$

$= 40$

$\therefore b^2 - 4ac > 0$

$\therefore$ వర్గసమీకరణము యొక్క మూలాలు వాస్తవ సంఖ్యలు మరియు అసమానములు.

(iii) $\sqrt{3}x^2 + 2\sqrt{3}x + \sqrt{3} = 0$

సాధన : $\sqrt{3}x^2 + 2\sqrt{3}x + \sqrt{3} = 0$ను

$ax^2 + bx + c = 0$ తో పోల్చగా,

ఇక్కడ $a = \sqrt{3},\ b = 2\sqrt{3}\ ,\ c = \sqrt{3}\ ,$

$\therefore b^2 - 4ac = (2\sqrt{3})^2 - 4 \times \sqrt{3} \times \sqrt{3}$

$= 4 \times 3 - 4 \times 3$

$= 12 - 12$

$= 0$

$\therefore$ వర్గసమీకరణము యొక్క మూలాలు వాస్తవ సంఖ్యలు మరియు సమానంగా ఉంటాయి.

తెలుసుకుందాం.

వర్గసమీకరణము యొక్క మూలాలకు మరియు గుణకాలకు మధ్యగల సంబంధం
(Relation between roots and coefficients of a quadratic equation)

ఒకవేళ $ax^2 + bx + c = 0$ వర్గసమీకరణముకు α మరియు β లు మూలాలు అయిన

$$\alpha + \beta = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} + \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$= -\frac{2b}{2a}$$

$$\therefore \alpha + \beta = -\frac{b}{a}$$

అదే విధంగా

$$\alpha \times \beta = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \times \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$= \frac{\left(-b+\sqrt{b^2-4ac}\right)\times\left(-b-\sqrt{b^2-4ac}\right)}{4a^2}$$

$$= \frac{b^2-\left(b^2-4ac\right)}{4a^2}$$

$$= \frac{4ac}{4a^2}$$

$$= \frac{c}{a}$$

$$\therefore \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

కృత్యం: క్రింద ఇచ్చిన గడులలో సరియైన సంఖ్యలను నింపండి.

$10x^2 + 10x + 1 = 0$లో $\alpha + \beta$ = ☐ మరియు $\alpha \times \beta$ = ☐

సాధించిన ఉదాహరణలు

ఉదా. (1) α మరియు β అనేవి $2x^2 + 6x - 5 = 0$ వర్గసమీకరణము యొక్క మూలాలు, అయినచో $\alpha + \beta$ మరియు $\alpha \times \beta$ విలువలను కనుగొనండి.

సాధన : $2x^2 + 6x - 5 = 0$ ను $ax^2 + bx + c = 0$ తో పోల్చగా,

$\therefore\ a = 2,\ b = 6,\ c = -5$

$\therefore\ \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -\frac{6}{2} = -3$

మరియు $\alpha \times \beta = \frac{c}{a} = \frac{-5}{2}$

ఉదా. (2) $x^2 - 13x + k = 0$ వర్గసమీకరణము యొక్క మూలాల మధ్య భేదము 7 అయినచో k విలువను కనుగొనుము.

సాధన : $x^2 - 13x + k = 0$ ను $ax^2 + bx + c = 0$ తో పోల్చగా

$a = 1,\ b = -13\ ,\ c = k$

α మరియు βలు ఇచ్చిన వర్గసమీకరణము యొక్క మూలాలు మరియు $\alpha > \beta$ అనుకోండి.

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -\frac{(-13)}{1} = 13 \ldots \text{(I)}$$

కాని $\alpha - \beta = 7$ . . . . (దత్తాంశం) (II)

$2\alpha = 20$ . . . . (సమీకరణం (I) మరియు (II) లను కూడగా)

$\therefore\ \alpha = 10$

$\therefore\ 10 + \beta = 13$ . . . . . . ((I) నుండి)

$\therefore\ \beta = 13 - 10$

$\therefore\ \beta = 3$

కాని $\alpha \times \beta = \dfrac{c}{a}$

$\therefore\ 10 \times 3 = \dfrac{k}{1}$

$\therefore\ k = 30$

ఉదా. (3) α మరియు β లు $x^2 + 5x - 1 = 0$ వర్గసమీకరణము యొక్క మూలాలు, అయినచో

(i) $\alpha^3 + \beta^3$ (ii) $\alpha^2 + \beta^2$ల విలువలను కనుగొనండి.

సాధన : $x^2 + 5x - 1 = 0$

ఇక్కడ $a = 1,\ b = 5\ ,\ c = -1$

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a} = \frac{-5}{1} = -5$$

$$\alpha \times \beta = \frac{c}{a} = \frac{-1}{1} = -1$$

(i) $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta)$

$= (-5)^3 - 3 \times (-1) \times (-5)$

$= -125 - 15$

$\alpha^3 + \beta^3 = -140$

(ii) $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$

$= (-5)^2 - 2 \times (-1)$

$= 25 + 2$

$\alpha^2 + \beta^2 = 27$

తెలుసుకుందాం.

మూలాలు ఇచ్చినపుడు వర్గసమీకరణమును కనుగొనుట.

(To obtain a quadratic equation having given roots)

x చరరాశి గల వర్గసమీకరణము యొక్క మూలాలు α మరియు βలు అనుకోండి.

$\therefore x = \alpha$ లేదా $x = \beta$

$\therefore x - \alpha = 0$ లేదా $x - \beta = 0$

$\therefore (x - \alpha)(x - \beta) = 0$

$\therefore x^2 - \alpha x - \beta x + \alpha\beta = 0$

$\therefore x^2 - (\alpha + \beta) x + \alpha\beta = 0$

అనగా α మరియు β లు మూలాలు గల వర్గసమీకరణము

x^2 – (మూలాల మొత్తము) x + మూలాల లబ్ధం = 0 ఈ సూత్రము ద్వారా కనుగొనవచ్చు.

కృత్యం (I) : మూలాల మొత్తం 10 మరియు లబ్ధం 9 గల వర్గసమీకరణమును రాయండి.

వర్గసమీకరణం $x^2 - \square x + \square = \square$

కృత్యం (II) : $\alpha = 2$ మరియు $\beta = 5$ మూలాలుగల వర్గసమీకరణము ఏది ?

$x^2 + (\square + \square) x + \square \times \square = 0$

$x^2 + \square x + \square = 0$

ఈ సమీకరణమును ఏదేని శూన్యేతర సంఖ్యతో గుణించగా లభించే సమీకరణ మూలాలు ఇవే α మరియు βలు అవుతాయని గుర్తుంచుకోండి.

సాధించిన ఉదాహరణలు

ఉదా. వర్గసమీకరణము యొక్క మూలాలు -3 మరియు -7 అయినచో వర్గసమీకరణమును తయారు చేయండి.

సాధన : $\alpha = -3$ మరియు $\beta = -7$ అనుకోండి

$\therefore \alpha + \beta = (-3) + (-7) = -10$ మరియు $\alpha \times \beta = (-3) \times (-7) = 21$

$\therefore$ లభించే వర్గసమీకరణము, $x^2 - (\alpha + \beta) x + \alpha\beta = 0$

$\therefore x^2 - (-10) x + 21 = 0$

$\therefore x^2 + 10x + 21 = 0$

ఇవి గుర్తుంచుకుందాం

(1) $ax^2 + bx + c = 0$ వర్గసమీకరణము యొక్క మూలాలు α మరియు β లు అయినచో,

(i) $\alpha = \dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ మరియు $\beta = \dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

(ii) $\alpha + \beta = -\dfrac{b}{a}$ మరియు $\alpha \times \beta = \dfrac{c}{a}$

(2) $ax^2 + bx + c = 0$ వర్గసమీకరణము యొక్క మూలాల స్వభావం $b^2 - 4ac$ యొక్క విలువపై ఆధారపడి ఉంటుంది. కావున ఈ సమాసమును విచక్షణి (discriminant) అంటారు. విచక్షణిని Δ అనే గ్రీకు అక్షరముచే సూచిస్తారు.

(3) ఒకవేళ $\Delta = 0$ అయిన, వర్గసమీకరణము యొక్క రెండు మూలాలు సమాన వాస్తవ సంఖ్యలు అవుతాయి.

ఒకవేళ $\Delta > 0$ అయిన, వర్గసమీకరణము యొక్క రెండు మూలాలు అసమాన వాస్తవ సంఖ్యలు అవుతాయి.

ఒకవేళ $\Delta < 0$ అయిన, వర్గసమీకరణము యొక్క రెండు మూలాలు వాస్తవ సంఖ్యలు కావు.

(4) α మరియు β వర్గసమీకరణము యొక్క మూలాలు అయిన $x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$ వర్గసమీకరణం అవుతుంది.

అభ్యాసమాలిక 2.5

1. కింది ఖాళీలను పూరించండి.

(1) వర్గసమీకరణము $ax^2 + bx + c = 0$ → $b^2 - 4ac = 5$ / $b^2 - 4ac = -5$ → మూలాల స్వభావం

(2) మూలాల మొత్తం $= -7$ → వర్గసమీకరణము . . . . ← మూలాల లబ్ధం $= 5$

(3) ఒకవేళ α మరియు β లు కింది వర్గసమీకరణం యొక్క మూలాలు అయిన,

$2x^2 - 4x - 3 = 0$ → $\alpha + \beta = ...$; $\alpha \times \beta = ...$

2. కింది వర్గసమీకరణముల విచక్షణి విలువను కనుగొనండి.

(1) $x^2 + 7x - 1 = 0$ (2) $2y^2 - 5y + 10 = 0$ (3) $\sqrt{2}\,x^2 + 4x + 2\sqrt{2} = 0$

3. విచక్షణి విలువ ఆధారంగా కింది వర్గసమీకరణముల మూలాల స్వభావంను నిర్ణయించండి.

(1) $x^2 - 4x + 4 = 0$ (2) $2y^2 - 7y + 2 = 0$ (3) $m^2 + 2m + 9 = 0$

4. ఏ వర్గసమీకరణము యొక్క మూలాలు కింది విధంగా ఉన్నాయో వాటి వర్గసమీకరణములను తయారుచేయండి.

(1) 0 మరియు 4 (2) 3 మరియు −10 (3) $\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$ (4) $2-\sqrt{5}$, $2+\sqrt{5}$

★ 5. $x^2 - 4kx + k + 3 = 0$ వర్గసమీకరణము యొక్క మూలాల మొత్తము వాటి లబ్దానికి రెట్టింపు గలదు, అయిన k యొక్క విలువను కనుగొనండి.

★ 6. ఒకవేళ α మరియు β లు $y^2 - 2y - 7 = 0$ వర్గసమీకరణం యొక్క మూలాలు అయినచో

(1) $\alpha^2 + \beta^2$ (2) $\alpha^3 + \beta^3$ ల విలువలను కనుగొనండి.

7. కింది ప్రతి వర్గసమీకరణము యొక్క మూలాలు వాస్తవ సంఖ్యలు మరియు సమానంగా ఉన్నచో k విలువను కనుగొనండి.

(1) $3y^2 + ky + 12 = 0$ (2) $kx(x - 2) + 6 = 0$

తెలుసుకుందాం.

వర్గసమీకరణముల అనువర్తనములు(Application of quadratic equation)

మన నిత్యజీవితంలో అనేక విషయాలను సాధించుటకు వర్గసమీకరణాలు ఉపయోగపడతాయి. ఇదే విషయం మనం ఈ భాగంలో నేర్చుకోబోతున్నాం.

ఉదా. (1) తివ్‌సాలోని శ్రీ. రత్నాకరరావుగారి పొలంలో లంబ చతుర్భుజాకారంలో ఉల్లిగడ్డ దొంతరల వరసల యొక్క తలము పొడువు, వెడల్పుకంటే 7 మీటర్లు ఎక్కువగా, మరియు కర్ణము పొడవు కంటే 1మీటరు ఎక్కువగా ఉంది. అయిన ఆ ఉల్లిగడ్డదొంతరల వరుస తలము యొక్క పొడవు మరియు వెడల్పులను కనుగొనండి.

సాధన : లంబచతుర్భుజాకారపు ఉల్లిగడ్డ దొంతరల తలము యొక్క వెడల్పు x మీటర్లు గలదు అని అనుకుందాం.

$\therefore$ పొడవు = $(x + 7)$ మీటర్లు, కర్ణము = $x + 7 + 1 = (x + 8)$ మీటర్లు

పైథాగరస్ సిద్ధాంతం ప్రకారం,

$x^2 + (x + 7)^2 = (x + 8)^2$

$x^2 + x^2 + 14x + 49 = x^2 + 16x + 64$

$\therefore x^2 + 14x - 16x + 49 - 64 = 0$

$\therefore x^2 - 2x - 15 = 0$

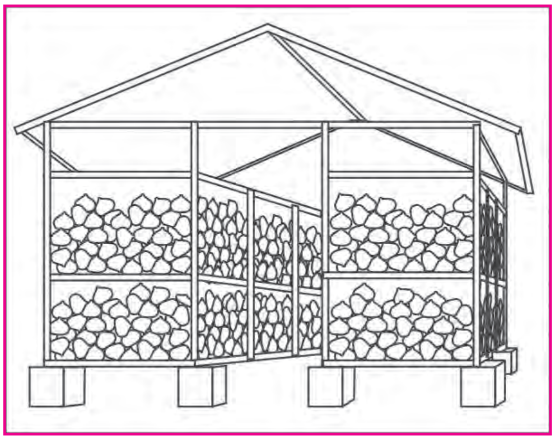
$\therefore x^2 - 5x + 3x - 15 = 0$

$\therefore \underline{x(x - 5)} + 3\underline{(x - 5)} = 0$

$\therefore (x - 5)(x + 3) = 0$

$\therefore x - 5 = 0$ లేదా $x + 3 = 0$

$\therefore x = 5$ లేదా $x = -3$


ఉల్లిగడ్డ దొంతర

కాని వెడల్పు ఋణాత్మకము ఉండదు. $\therefore x \neq -3$

$\therefore x = 5$ మరియు $x + 7 = 5 + 7 = 12$

$\therefore$ ఉల్లిగడ్డ దొంతరల తలము యొక్క పొడవు 12 మీటర్లు మరియు వెడల్పు 5 మీటర్లు.

ఉదా. (2) ఒక అగ్నిమాపక వాహనం సమవేగముతో (చలనం) 360 కి.మీ దూరం ప్రయాణిస్తుంది. కాని దాని వేగము గంటకు 5 కి.మీ పెరిగినచో అంతే దూరమును ప్రయాణించుటకు దానికి 48 నిమిషాల సమయం, తగ్గుతుంది. అయిన వాహనము యొక్క ప్రారంభ వేగమును కనుగొనండి.

సాధన : అగ్నిమాపక వాహనం యొక్క ప్రారంభ వేగమును గంటకు x కి.మీ అనుకుందాం.

$\therefore$ వేగము పెంచిన తరువాత వాహన వేగము గంటకు $(x+5)$ కి.మీ ఉంటుంది.

360 కి.మీ దూరము ప్రయాణించుటకు పట్టే తొలి కాలం = $\frac{\text{దూరము}}{\text{వేగము}} = \frac{360}{x}$ గంటలు.

వేగము పెంచిన తర్వాత అంతే దూరము వెళ్ళుటకు పట్టే కాలం = $\frac{360}{x+5}$

ఇచ్చిన షరతు ప్రకారం,

$\frac{360}{x+5} = \frac{360}{x} - \frac{48}{60}$ - - - - - ($\because$ 48 నిమిషాలు = $\frac{48}{60}$ గంటలు)

$\therefore \frac{360}{x} - \frac{360}{x+5} = \frac{48}{60}$

$\therefore \frac{1}{x} - \frac{1}{x+5} = \frac{48}{60\times 360}$ - - - - - (ఇరువైపులా 360చే భాగించగా)

$\therefore \frac{x+5-x}{x(x+5)} = \frac{4}{5\times 360}$

$\therefore \frac{5}{x^2+5x} = \frac{1}{5\times 90}$

$\therefore \frac{5}{x^2+5x} = \frac{1}{450}$

$\therefore x^2 + 5x = 2250$

$\therefore x^2 + 5x - 2250 = 0$

$\therefore \underline{x^2 + 50x} - \underline{45x - 2250} = 0$

$\therefore x\underline{(x+50)} - 45\,\underline{(x+50)} = 0$

-2250 → +50, -45

$\therefore (x+50)(x-45) = 0$

$\therefore x + 50 = 0$ లేదా $x - 45 = 0$

$\therefore x = -50$ లేదా $x = 45$

కాని వేగము ఋణాత్మకముగా ఉండదు. $\therefore x \neq -50$

$\therefore x = 45$

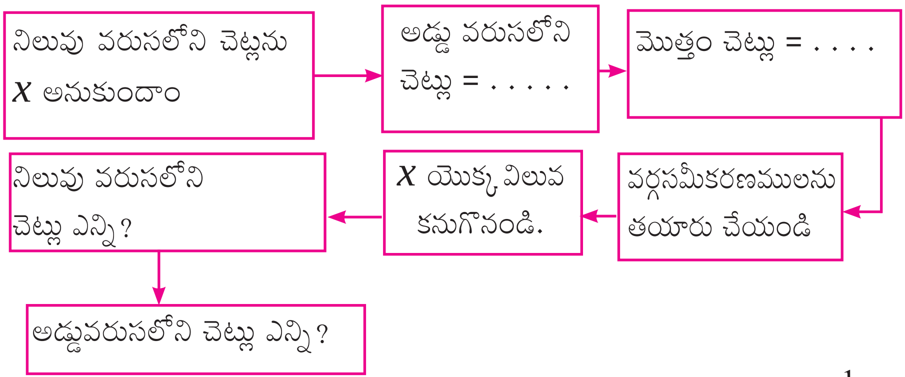
$\therefore$ అగ్నిమాపక వాహనం యొక్క ప్రారంభ వేగము గంటకు 45 కి.మీ.

అభ్యాసమాలిక 2.6

1. 2 సంవత్సరాల పూర్వము మరియు 3 సంవత్సరాల తరువాత ప్రగతి యొక్క వయస్సుల లబ్ధం 84 , అయిన తన ప్రస్తుత వయస్సును కనుగొనండి.

2. రెండు వరుస సరి సహజ సంఖ్యల వర్గాల మొత్తము 244 , అయినచో ఆ సంఖ్యలను కనుగొనండి.

3. శ్రీ మధుసూదన్ గారి కమలాపండ్ల తోటలో అడ్డువరుసలోని చెట్ల సంఖ్య నిలువు వరుసలోని చెట్ల సంఖ్య కన్నా 5 ఎక్కువ. ఒకవేళ కమలాపండ్ల తోటలో మొత్తం 150 చెట్లు ఉన్నచో అడ్డ వరసలో అదే విధంగా నిలువు వరుసలో గల చెట్ల సంఖ్య ఎంత? కింది ప్రవాహ ఆకృతి ఆధారంగా ఉదాహరణను సాధించండి.



4. వివేక్, కిషోర్ కంటే 5 సంవత్సరాలు పెద్ద అయి వారి వయస్సుల గుణకార విలోమాల మొత్తం $\frac{1}{6}$ అయిన వారి ప్రస్తుత వయస్సులను కనుగొనుము.

5. సుయష్‌కు గణితములో మొదటి యూనిట్ పరీక్షలో లభించిన మార్కుల కంటే రెండవ యూనిట్ పరీక్షలో 10 మార్కులు ఎక్కువగా లభించెను. రెండవ యూనిట్ పరీక్షలోని మార్కుల యొక్క 5 రెట్లు అనేది మొదటి యూనిట్ పరీక్షలోని మార్కుల వర్గానికి సమానం అయినట్లయితే అతని మొదటి యూనిట్ పరీక్షలోని మార్కులు ఎన్ని?

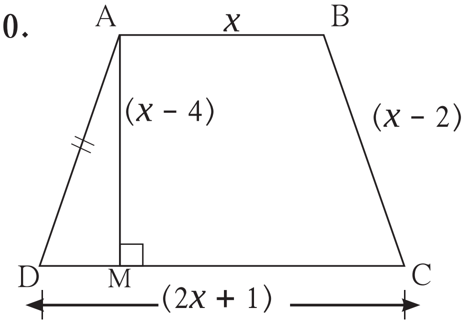
6.★ శ్రీ కాసమ్ గారికి మట్టిపాత్రలు తయారు చేసే కుటీర పరిశ్రమ గలదు. అతను ప్రతిరోజు నిర్ణయించుకున్నా సంఖ్యలో పాత్రలను తయారు చేస్తారు. ప్రతిపాత్ర తయారీకి అయ్యే ఖర్చు, తయారు చేసిన పాత్రల సంఖ్య 10 రెట్ల కంటే 40 రూ।। ఎక్కువ గలదు. ఒకవేళ ఒక రోజులో పాత్రల తయారికి 600 రూ।। లు ఖర్చు అయినచో ప్రతి పాత్ర తయారీకయ్యే ఖర్చు మరియు ఒకరోజులో తయారు చేసిన పాత్రల సంఖ్యను కనుగొనండి.

7.★ ఒక నదిలో ప్రవాహదిశకు వ్యతిరేకదిశలో 36 కి.మీ. వెళ్ళి తిరిగి అదే ప్రదేశముకు వచ్చుటకు పట్టు సమయం 8 గంటలు. పడవ , నిలకడ నీటిలోని వేగము గంటకు 12 కి.మీ. అయిన నది యొక్క ప్రవాహ వేగమును కనుగొనండి.

8.★ పింటూకు ఒక పనిని పూర్తి చేయడానికి నిశు కంటే 6 రోజులు ఎక్కువ పడుతుంది. ఇద్దరు కలిసి అ పనిని పూర్తిచేయుటకు వారికి 4 రోజులు పడుతుంది. అయితే ఆ పనిని ఒక్కరే పూర్తిచేయుటకు ప్రతి ఒక్కరికి ఎన్ని రోజుల సమయం పడుతుంది?

9. 460 ఈ సంఖ్యను ఒక సహజ సంఖ్యచే భాగించినచో భాగఫలము, విభాజకము కంటే 5 రెట్ల కంటే 6 ఎక్కువగా లభించి శేషం 1 వస్తుంది. అయిన భాగఫలము మరియు విభాజకము ఎంత?

10.



పక్క నున్న సమలంబ □ABCD లో AB || CD అయి దాని వైశాల్యము 33 చ.సెం.మీ. అయిన పటములో ఇచ్చిన వివరాల ఆధారంగా చతుర్భుజము యొక్క నాలుగు పాడవులను కింది కృత్యమును పూర్తి చేయుట ద్వారా కనుగొనండి.

సాధన : □ABCD ట్రపీజియం AB || CD

A (□ABCD) = $\frac{1}{2}$ (AB + CD) × [ ]

∴ 33 = $\frac{1}{2}$ (x + 2x + 1) × [ ]

∴ [ ] = (3x + 1) × [ ]

∴ 3x^2 + [ ] − [ ] = 0

∴ 3x (. . . .) +10(. . . .) = 0

∴ (3x +10)(----) = 0

∴ (3x +10) = 0 లేదా [ ] = 0

∴ $x = -\frac{10}{3}$ లేదా x = [ ]

కాని పొడవు ఋణాత్మకము ఉండదు.

∴ $x \neq -\frac{10}{3}$ ∴ x = [ ]

AB = ---, CD = ---, AD = --- BC = ---

సంకీర్ణ ప్రశ్న సంగ్రహము 2

1. కింది ప్రశ్నలకు సరియైన ఐచ్ఛికమును ఎంచుకోండి.

(1) కింది వాటిలో వర్గసమీకరణము ఏదీ?

(A) $\frac{5}{x} - 3 = x^2$ (B) $x(x + 5) = 2$ (C) $n - 1 = 2n$ (D) $\frac{1}{x^2}(x + 2) = x$

(2) కింది వాటిలో ఏది వర్గసమీకరణము కాదు?

(A) $x^2 + 4x = 11 + x^2$ (B) $x^2 = 4x$ (C) $5x^2 = 90$ (D) $2x - x^2 = x^2 + 5$

(3) $x^2 + kx + k = 0$ యొక్క మూలాలు వాస్తవ సంఖ్యలు మరియు సమానములు అయినచో k యొక్క విలువ కింది వాటిలో ఏది?

(A) 0 (B) 4 (C) 0 లేదా 4 (D) 2

(4) $\sqrt{2}x^2 - 5x + \sqrt{2} = 0$ యొక్క విచక్షణి విలువ కింది వాటిలో ఏదీ?

(A) −5 (B) 17 (C) $\sqrt{2}$ (D) $2\sqrt{2} - 5$

(5) కింది వాటిలో ఏ సమీకరణము యొక్క మూలాలు 3 మరియు 5గా గలవు?

(A) $x^2 - 15x + 8 = 0$ (B) $x^2 - 8x + 15 = 0$

(C) $x^2 + 3x + 5 = 0$ (D) $x^2 + 8x - 15 = 0$

(6) కింది వాటిలో ఏ సమీకరణము యొక్క మూలాల మొత్తం −5 ?

(A) $3x^2 - 15x + 3 = 0$ (B) $x^2 - 5x + 3 = 0$

(C) $x^2 + 3x - 5 = 0$ (D) $3x^2 + 15x + 3 = 0$

(7) $\sqrt{5}m^2 - \sqrt{5}m + \sqrt{5} = 0$కు కింది వాటిలో ఏ వాక్యము సరిపోతుంది?

(A) వాస్తవ మరియు అసమానముగల మూలాలు (B) వాస్తవ సమాన మూలాలు

(C) మూలాలు వాస్తవ సంఖ్యలు కావు. (D) మూడు మూలాలు.

(8) $x^2 + mx - 5 = 0$ వర్గసమీకరణము యొక్క ఒక మూలము 2 అయిన m విలువ కింది వాటిలో ఏది?

(A) −2 (B) $-\frac{1}{2}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) 2

2. కింది వాటిలో ఏది వర్గసమీకరణము అగును?

(1) $m^2 + 2m + 11 = 0$ (2) $x^2 - 2x + 5 = x^2$ (3) $(x + 2)^2 = 2x^2$

3. కింది వాటిలో ప్రతీ సమీకరణము యొక్క విచక్షణి విలువను కనుగొనండి.

(1) $2y^2 - y + 2 = 0$ (2) $5m^2 - m = 0$ (3) $\sqrt{5}x^2 - x - \sqrt{5} = 0$

4. $2x^2 + kx - 2 = 0$ వర్గసమీకరణము యొక్క ఒక మూలము -2 అయిన k విలువ ఎంత?

5. కింది మూలాలు గల వర్గసమీకరణమును తయారుచేయండి.

(1) 10 మరియు -10 (2) $1-3\sqrt{5}$ మరియు $1+3\sqrt{5}$ (3) 0 మరియు 7

6. కింది వర్గసమీకరణముల మూలాల స్వభావమును నిర్ణయించండి.

(1) $3x^2 - 5x + 7 = 0$ (2) $\sqrt{3}x^2 + \sqrt{2}x - 2\sqrt{3} = 0$ (3) $m^2 - 2m + 1 = 0$

7. కింది వర్గసమీకరణములను సాధించండి.

(1) $\frac{1}{x+5} = \frac{1}{x^2}$ $(x \neq 0, x + 5 \neq 0)$ (2) $x^2 - \frac{3x}{10} - \frac{1}{10} = 0$ (3) $(2x + 3)^2 = 25$

(4) $m^2 + 5m + 5 = 0$ (5) $5m^2 + 2m + 1 = 0$ (6) $x^2 - 4x - 3 = 0$

8*. $(m - 12)x^2 + 2(m - 12)x + 2 = 0$ వర్గసమీకరణము యొక్క మూలాలు వాస్తవ మరియు సమానములు అయిన m విలువను కనుగొనండి.

9*. ఒక వర్గసమీకరణము యొక్క రెండు మూలాల మొత్తం 5 మరియు వాటి ఘనాల మొత్తము 35 అయినచో ఆ వర్గసమీకరణమును కనుగొనండి?

10*. $2x^2 + 2(p + q)x + p^2 + q^2 = 0$ ఈ వర్గసమీకరణము యొక్క మూలాల మొత్తం యొక్క వర్గము మరియు భేదం యొక్క వర్గమునకు సమానం గల వర్గసమీకరణమును తయారు చేయండి.

11*. ముకుంద్ దగ్గర సాగర్ కంటే 50 రూపాయలు ఎక్కువగా ఉన్నాయి. వారి వద్ద ఉన్న రూపాయల లబ్దం 15000 అయిన ప్రతి ఒక్కరి దగ్గర ఎంత సొమ్ము కలదు?

12*. రెండు సంఖ్యల వర్గాల భేదము 120. చిన్న సంఖ్య యొక్క వర్గము పెద్ద సంఖ్య యొక్క రెట్టింపునకు సమానము. అయిన ఆ సంఖ్యలను కనుగొనండి.

13*. రంజన తన పుట్టిన రోజు సందర్భంగా 540 కమలాపండ్లను కొంత మంది విద్యార్థులకు సమానముగా పంచవలిసి ఉంది. ఒకవేళ 30 మంది విద్యార్థులు అధికంగా ఉన్నచో ప్రతి ఒక్కరికి 3 కమలాపండ్లు తక్కువగా లభించును, అయిన విద్యార్థుల సంఖ్యను కనుగొనండి.

14*. తళ్‌వేల్ వద్ద శ్రీ దినేష్ అనే రైతు దగ్గర దీర్ఘ చతురస్రాకారపు పొలం పొడవు వెడల్పు రెట్టింపు కంటే 10 మీటర్లు ఎక్కువగా ఉంది. అతను ఆ పొలంలో వర్షపునీటిని పునరుపయోగము కొరకు పొలము వెడల్పు యొక్క $\frac{1}{3}$ రెట్లు భుజముగల చతురస్రాకారపు కుంటను నిర్మించాడు. అప్పుడు ఆరంభపొలము యొక్క వైశాల్యం ఈ కుంటయొక్క వైశాల్యము కంటే 20 రెట్లు ఉంది. అయిన ఆ పొలము యొక్క పొడవు మరియు వెడల్పు అదే విధంగా కుంట భుజము యొక్క పొడువును కనుగొనండి.

15*. ఒక టాకీ రెండు నల్లాల (కుళాయి) సహాయముతో 2 గంటలలో పూర్తిగా నిండుతుంది. కేవలం చిన్న నల్లాతో (కుళాయి) టాకీ నింపుటకు పట్టు సమయం కేవలం పెద్ద నల్లాతో (కుళాయి) టాకీ నింపుటకు పట్టు సమయం కంటే 3 గంటలు ఎక్కువగాపడుతుంది. అయితే ప్రతీ ఒక్క నల్లాతో (కుళాయి) టాకీని నింపుటకు ఎంత సమయం పడుతుంది?

NZLGIJ

3 అంకశ్రేఢి

పదండి, నేర్చుకుందాం.

- క్రమము
- అంకశ్రేఢి
- అంకశ్రేఢి n వ పదం
- అంకశ్రేఢిలోని n పదాల మొత్తం

తెలుసుకుందాం.

క్రమము (Sequence)

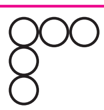
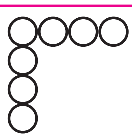
మనం 1, 2, 3, 4, . . . సంఖ్యలను వరసగా రాస్తాము. ఇది సంఖ్యల ఫోరము(మాలిక). ఈ సంఖ్యలలో ఏ సంఖ్య ఎన్నవ స్థానంలో ఉన్నదో చెప్పవచ్చును. ఎలాగంటే 13 అనే సంఖ్య 13వ స్థానంలో ఉంది. సంఖ్యల యొక్క మరొక సంఖ్య మాలికను చూడండి. ఇచ్చట 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, . . . ఈ సంఖ్యలు ప్రత్యేకమైన వరసలో వ్రాయబడ్డాయి. ఇచ్చట $16 = 4^2$ అనే సంఖ్య 4వ స్థానంలో $25 = 5^2$ అనే సంఖ్య 5వ స్థానంలో ఉన్నాయి. $49 = 7^2$ అనే సంఖ్య ఏడవ స్థానంలో ఉంది. అనగా ఈ సంఖ్య మాలికలో కూడా సంఖ్యలు ఎన్నవ స్థానంలో ఉన్నదో చెప్పవచ్చు.

ఏ సమితిలోని అన్ని సంఖ్యలు వరసగా చెప్పబడతాయో మరియు ప్రతి స్థానంలో ప్రత్యేకమైన సంఖ్యలు ఉంటాయో అలాంటి వరసలలో చెప్పబడిన సంఖ్యా సమూహాలను **క్రమము** అంటారు.

క్రమములో ప్రత్యేక స్థానాలలో ప్రత్యేక సంఖ్యలు వ్రాయబడతాయి. ఆ సంఖ్యలు $a_1, a_2, a_3, a_4 ..., a_n$ ఇలాంటి వరసలో రాస్తే a_1 అనేది మొదటి, a_2 అనేది రెండవ, ... ఈ విధంగా a_n అనేది n వ సంఖ్య అని స్పష్టమవుతుంది. సంఖ్యల క్రమము $f_1, f_2, f_3, . . .$ లాంటి అక్షరాలతో కూడా చూపించబడతాయి. దీనిలో కచ్చితమైన వరుసలో సంఖ్యలు రాయబడ్డాయని అర్థమవుతుంది.

ఏదేని ఒక తరగతిలోని పిల్లలు కవాతు కొరకు మైదానంలోకి వెళ్ళగానే ఒక వరుసలో నిలబడతారు. వారి యొక్క వరసలు నిర్ణయించబడి ఉంటాయి, అప్పుడు వారి క్రమములు తయారువుతాయి. కొన్ని క్రమములలో ప్రత్యేకమైన ఆకృతులతో ఉంటాయి అని మనకు తెలుసు.

కృత్యం : కింది ఆకృతులను పూర్తి చేయండి.

చిత్రాకృతి									
వృత్తముల సంఖ్య	1	3	5	7					

చిత్రాకృతి	$\Delta\Delta$ Δ $\Delta\Delta$	$\Delta\Delta\Delta$ Δ Δ $\Delta\Delta\Delta$	$\Delta\Delta\Delta\Delta$ Δ Δ Δ $\Delta\Delta\Delta\Delta$				
త్రిభుజాల సంఖ్య	5	8	11				

సంఖ్యల యొక్క ఆకృతులను చూడండి. ముందు సంఖ్యపై ఏ గణిత ప్రక్రియ చేయడం వలన తరువాతి సంఖ్య లభిస్తుంది? ఈ నియమము ద్వారా తర్వాతి సంఖ్యలను రాయవచ్చు.

ఈ సంఖ్య మాలికను చూడండి. 2, 11, −6, 0, 5, −37, 8, 2, 61

ఇచ్చట $a_1 = 2$, $a_2 = 11$, $a_3 = -6, \ldots$ ఈ సంఖ్యలు కూడా క్రమము అవుతుంది, కాని ప్రత్యేక పదాలు ఆ స్థానంలో ఎందుకు ఉన్నాయో చెప్పలేము. అదే విధంగా ఈ వివిధ సంఖ్యలలో ఏ సంబంధం ఉందో కచ్చితంగా చెప్పలేము.

సాధారణంగా ఏ క్రమములో తర్వాత పదమును (సంఖ్యను) చెప్పగలిగే నియమము ఉంటుందో అలాంటి వరసలను క్రమములుగా పరిగణలోకి తీసుకుంటారు.

ఉదా. (1) 4, 8, 12, 16, . . . (2) 2, 4, 8, 16, 32, . . .

(3) $\frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \frac{1}{15}, \frac{1}{20}, \ldots$

క్రమములోని పదములు (Terms in a sequence)

క్రమములోని వరుస పదాలను $t_1, t_2, t_3, \ldots t_n \ldots$ ఇలా రాస్తారు. సాధారణంగా క్రమమును $\{t_n\}$ అని రాస్తారు. ఇచ్చట ప్రతి ధన పూర్ణసంఖ్య n, అని దానికి సంబంధించిన ఒక సంఖ్య ఉంటుందని అనుకొనబడుతుంది.

కృత్యం I : కింది క్రమములను చూడండి వీటిలోని పదముల వరసను $t_1, t_2, t_3 \ldots$ చే చూపండి.

(1) 9, 15, 21, 27, . . . ఇచ్చట $t_1 = 9$, $t_2 = 15$, $t_3 = 21, \ldots$

(2) 7, 7, 7, 7, . . . ఇచ్చట $t_1 = 7$, $t_2 = \square$, $t_3 = \square, \ldots$

(3) −2, −6, −10, −14, . . . ఇచ్చట $t_1 = -2$, $t_2 = \square$, $t_3 = \square, \ldots$

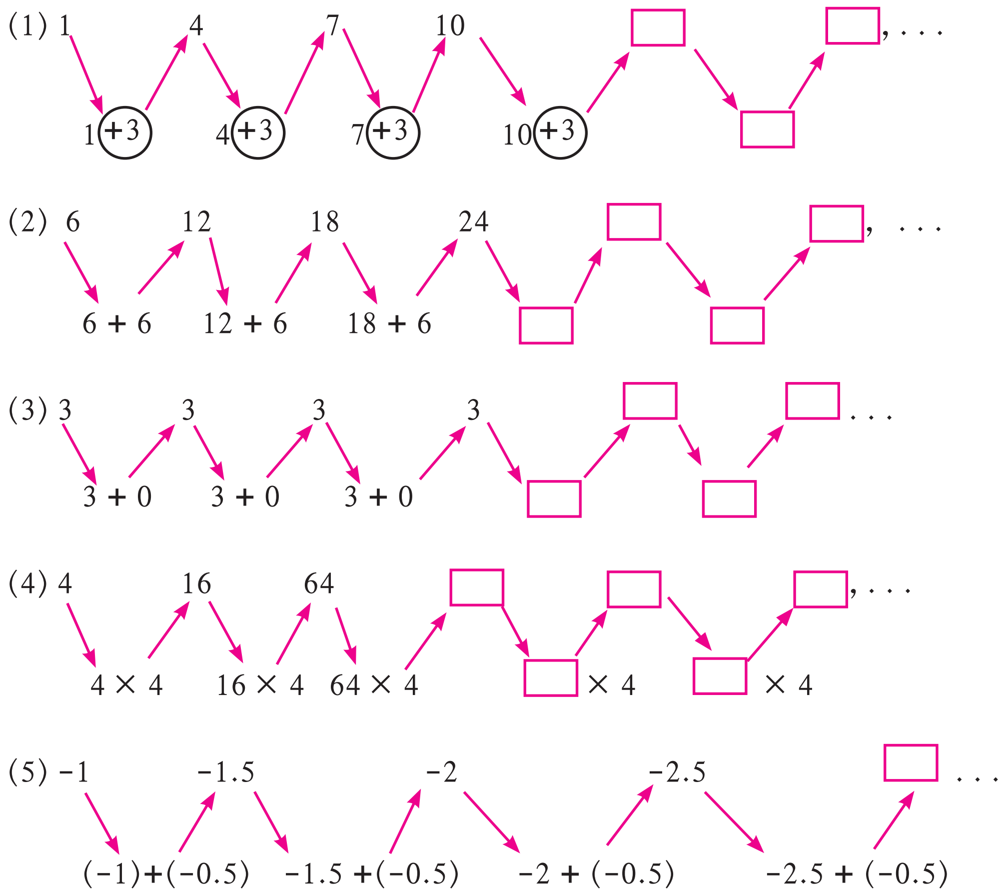
కృత్యం II : కింద కొన్ని క్రమములు ఇవ్వబడినవి. వాటి పదాలలో కొన్ని నియమాలు కనిపిస్తున్నాయా చూడండి. రెండు క్రమములలోని సారూప్యమును గమనించండి.

ఆ క్రమముల పదాలలోని ఏమైనా నియమాలు కనిపిస్తాయా అని చూడడం కొరకు కింద ఇవ్వబడిన అమరికను చూడండి మరియు ఖాళీలను నింపండి.

(1) 1, 4, 7, 10, 13, . . . (2) 6, 12, 18, 24, . . . (3) 3, 3, 3, 3, . . .

(4) 4, 16, 64, . . . (5) −1, −1.5, −2, −2.5, . . . (6) $1^3, 2^3, 3^3, 4^3, \ldots$

ఈ క్రమముల మధ్య సంబంధమును కనుగొందాం. దానికై చేసిన ఆలోచన చూద్దాం.



(6) 1^3, 2^3, 3^3, . . .

పైన చూపబడిన సంఖ్యల ప్రతి జాబిత క్రమము అవుతుంది. ఇచ్చట క్రమము (1), (2), (3), (5) వీటిలో ముందు ఒక పదానికి స్థిర సంఖ్యను కలిపిన తరువాతి పదము లభిస్తుంది. ఇది సారూప్యం అవుతుంది. ఇలాంటి క్రమములను అంకశ్రేఢి అంటారు.

పై (4)వ క్రమము అంకశ్రేఢి కాదు. ఈ క్రమములో ముందు పదమును స్థిరసంఖ్యచే గుణించిన తరువాత పదం లభిస్తుంది. ఇలాంటి క్రమములను గుణశ్రేఢి (Geometric Progression) అంటారు.

పై (6)వ క్రమము అంకశ్రేఢి కాదు, అదే విధంగా గుణశ్రేఢి కూడా కాదు.

ఈ సంవత్సరము మనము అంకశ్రేఢిని గూర్చి నేర్చుకోబోతున్నాము.

అంకశ్రేఢి (Arithmetic Progression)

కింద కొన్ని క్రమములు ఇవ్వబడ్డాయి. ప్రతి క్రమములోని తరువాతి మూడు పదాలను రాయండి.

(1) 100, 70, 40, 10, . . . (2) −7, −4, −1, 2, . . . (3) 4, 4, 4, . . .

ఇచ్చిన క్రమములోని తరువాతి పదములను కనుగొనుటకు ఏం చేశారో చూడండి.

మొదటి పదం　రెండవ పదం　మూడవ పదం

(1) 100　70　40　10　-20　-50 . . .

100+(-30)　70+(-30)　40+(-30)　10+(-30)　(-20)+(-30)

(2) -7　-4　-1　2　5　8 . . .

-7+3　-4+3　-1+3　2+3　5+3

(3) 4　4　4　4　4 . . .

4 + 0　4 + 0　4 + 0　4 + 0

పై సంఖ్యల ప్రతి జాబితాలో ప్రతి పదము ముందు పదానికి స్థిర సంఖ్యలను కలిపినప్పుడు ఏర్పడినవి. రెండు వరస పదాల భేదము స్థిరముగా ఉంది.

ఉదా. (1)లోని పదాంతరము ఋణ సంఖ్య, (2)లోని పదాంతరము ధనసంఖ్య (3)లోని పదాంతరము 0

వరుస సంఖ్యల భేదము స్థిర సంఖ్య అయిన దానిని **పదాంతరము అంటారు. (Common difference)** ఈ భేదమును d అను అక్షరముచే సూచిస్తారు.

ఇచ్చిన క్రమములో ఏదైనా రెండు వరుస పదముల భేదము $(t_{n+1} - t_n)$ స్థిరంగా ఉన్నట్లయితే ఆ క్రమమును అంకశ్రేఢి అంటారు. $t_{n+1} - t_n = d$ అనేది పదాంతరము అవుతుంది.

అంకశ్రేఢి లోని మొదటి పదమును a మరియు పదాంతరము d,

అయిన $t_1 = a$,　$t_2 = a + d$　, $t_3 = (a + d) + d = a + 2d$

మొదటి పదము a, పదాంతరము d గల అంకశ్రేఢి

$a, (a + d), (a + 2d), (a + 3d), \ldots\ldots$ అవుతుంది.

అంకశ్రేఢికి సంబంధించిన కొన్ని ఉదాహరణలు చూద్దాం.

ఉదా. (1) ఆరిఫ్ ప్రతి నెల 100 రూ॥ల పొదుపు చేశాడు. ఒక సంవత్సరంలోని ప్రతి నెలాఖరున మొత్తము పొదుపు కింది విధంగా ఉండును.

నెల	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
పొదుపు (₹)	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000	1100	1200

ప్రతి నెలలోని పొదుపును సూచించే సంఖ్యలు అంకశ్రేఢిలో గలవు.

(2) ప్రణవ్ అతని మిత్రుని వద్ద 10000 రూ॥లు అప్పుగా తీసుకొని తిరిగి ప్రతి నెల 1000 రూ॥ల చొప్పున చెల్లించ నిర్ణయించుకున్నాడు, అయిన ప్రతి నెల చెల్లించగా మిగిలిన మొత్తము కింది విధంగా ఉంటుంది.

నెల సంఖ్య	1	2	3	4	5	...	...	...	...
చెల్లించ వలసిన మొత్తం ₹	10,000	9,000	8,000	7,000	...	...	2,000	1,000	0

(3) 5 యొక్క గుణింతము, అనగా 5 చే భాగింపబడే సంఖ్యలను చూడండి.

5, 10, 15, 20, . . . 50, 55, 60, ... ఇది అంకశ్రేఢి అవుతుంది.

పై ఉదాహరణలు (1) మరియు (2) అంకశ్రేఢులు పరిమితములు. ఉదా (3) అనేది అపరిమిత శ్రేఢి అవుతుంది.

ఇవి గుర్తుంచుకుందాం

(1) ఒక వేళ క్రమములో $(t_{n+1} - t_n)$ అనే భేదము స్థిరసంఖ్య అయినట్లయితే ఆ క్రమమును అంకశ్రేఢి అంటారు.

(2) అంకశ్రేఢి యొక్క రెండు వరుస పదాల స్థిర భేదమును d అనే అక్షరంచే సూచిస్తారు.

(3) d అనేది ధన, ఋణ సంఖ్యలు లేదా సున్నా కూడా కావచ్చును.

(4) అంకశ్రేఢిలో మొదటి పదము a, పదాంతరము d అయిన ఆ శ్రేఢిలోని పదాలు $a, (a + d), (a + 2d),$ . . . గా ఉంటాయి.

కృత్యం : పరిమిత అంకశ్రేఢి మరియు అపరిమిత అంకశ్రేఢి యొక్క ఒక్కొక్క ఉదాహరణను రాయండి.

సాధించిన ఉదాహరణలు

ఉదా. (1) కింది వానిలో ఏ క్రమములు అంకశ్రేఢిలో ఉన్నాయో గుర్తించండి. ఒకవేళ అంకశ్రేఢి అయినట్లయితే దాని తరువాతి రెండు పదములను కనుగొనండి.

(1) 5, 12, 19, 26, . . . (2) 2, −2, −6, −10, . . .

(3) 1, 1, 2, 2, 3, 3, . . . (4) $\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, \ldots$

సాధన : (I) 5, 12, 19, 26, . . . ఈ క్రమములో,

మొదటి పదం = $t_1 = 5$, $t_2 = 12$, $t_3 = 19, \ldots$

$t_2 - t_1 = 12 - 5 = 7$

$t_3 - t_2 = 19 - 12 = 7$

ఇచ్చుట మొదటి పదం = 5, పదాంతరము = $d = 7$ ఇది స్థిరము.

∴ ఈ క్రమము అంకశ్రేఢి అవుతుంది. ఈ శ్రేఢిలోని తరువాతి రెండు పదములు.

$26 + 7 = 33, \quad 33 + 7 = 40.$

ఇక్కడ 33 , 40 ఇచ్చిన శ్రేఢిలోని తరువాతి పదములు.

(2) 2, −2, −6, −10, . . . ఈ క్రమములో,

$t_1 = 2, \quad t_2 = -2, \quad t_3 = -6, \quad t_4 = -10 \ldots$

$t_2 - t_1 = -2 - 2 = -4$

$t_3 - t_2 = -6 - (-2) = -6 + 2 = -4$

$t_4 - t_3 = -10 - (-6) = -10 + 6 = -4$

దీనినుండి ప్రతి రెండు వరుస పదాలలోని భేదము అనగా $t_{n+1} - t_n = -4 \therefore d = -4$ అనేది పదాంతరము. ఇది స్థిరము $\therefore$ ఇది అంకశ్రేఢి అవుతుంది.

ఈ శ్రేఢిలోని తరువాతి రెండు పదాలు $(-10) + (-4) = -14$ మరియు $(-14) + (-4) = -18$.

(3) 1, 1, 2, 2, 3, 3, . . . ఈ క్రమములో,

$t_1 = 1, \quad t_2 = 1, \quad t_3 = 2, \quad t_4 = 2, \quad t_5 = 3, \quad t_6 = 3 \ldots$

$t_2 - t_1 = 1 - 1 = 0, \qquad t_3 - t_2 = 2 - 1 = 1$

$t_4 - t_3 = 2 - 2 = 0, \qquad t_3 - t_2 \neq t_2 - t_1$

ఈ క్రమములో వరుస రెండు పదాల భేదము స్థిరము కాదు. $\therefore$ ఇచ్చిన క్రమము అంకశ్రేఢి కాదు.

(4) $\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, \ldots$ ఈ క్రమములో,

$t_1 = \frac{3}{2}, \quad t_2 = \frac{1}{2}, \quad t_3 = -\frac{1}{2}, \quad t_4 = -\frac{3}{2}$

$t_2 - t_1 = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -\frac{2}{2} = -1$

$t_3 - t_2 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -\frac{2}{2} = -1$

$t_4 - t_3 = -\frac{3}{2} - (-\frac{1}{2}) = -\frac{3}{2} + \frac{1}{2} = -\frac{2}{2} = -1$

ఇక్కడ పదాంతరము $d = -1$ ఇది స్థిరము.

$\therefore$ ఇచ్చిన క్రమము అంకశ్రేఢి అవుతుంది.

దీనిలో తరువాతి రెండు పదాలను కనుగొందాం.

$-\frac{3}{2} - 1 = -\frac{5}{2}, \qquad -\frac{5}{2} - 1 = -\frac{7}{2}$

$\therefore$ తరువాతి రెండు పదాలు $-\frac{5}{2}, -\frac{7}{2}$.

ఉదా. **(2)** మొదటి పదం a, పదాంతరము d కింద ఇవ్వబడినవి. వాటిని బట్టి మొదటి నాలుగు పదాలను కనుగొని అంకశ్రేఢిని రాయండి.

(1) $a = -3, \quad d = 4$ (2) $a = 200, \quad d = 7$

(3) $a = -1, \quad d = -\frac{1}{2}$ (4) $a = 8, \quad d = -5$

సాధన : (1) $a = -3, d = 4$ వీటి నుండి

$a = t_1 = -3$

$t_2 = t_1 + d = -3 + 4 = 1$

$t_3 = t_2 + d = 1 + 4 = 5$

$t_4 = t_3 + d = 5 + 4 = 9$

$\therefore$ అంకశ్రేఢి $-3, 1, 5, 9, \ldots$

(3) $a = -1, d = -\frac{1}{2}$

$a = t_1 = -1$

$t_2 = t_1 + d = -1 + (-\frac{1}{2}) = -\frac{3}{2}$

$t_3 = t_2 + d = -\frac{3}{2} + (-\frac{1}{2}) = -\frac{4}{2} = -2$

$t_4 = t_3 + d = -2 + (-\frac{1}{2})$

$= -2 - \frac{1}{2} = -\frac{5}{2}$

$\therefore$ అంకశ్రేఢి $-1, -\frac{3}{2}, -2, -\frac{5}{2}, \ldots$

(2) $a = 200, d = 7$

$a = t_1 = 200$

$t_2 = t_1 + d = 200 + 7 = 207$

$t_3 = t_2 + d = 207 + 7 = 214$

$t_4 = t_3 + d = 214 + 7 = 221$

$\therefore$ అంకశ్రేఢి $200, 207, 214, 221, \ldots$

(4) $a = 8, d = -5$

$a = t_1 = 8$

$t_2 = t_1 + d = 8 + (-5) = 3$

$t_3 = t_2 + d = 3 + (-5) = -2$

$t_4 = t_3 + d = -2 + (-5) = -7$

$\therefore$ అంకశ్రేఢి $8, 3, -2, -7, \ldots$

అభ్యాసమాలిక 3.1

1. కింది వాటిలో ఏ క్రమము అంకశ్రేఢి అవుతుంది? ఏవైతే అంకశ్రేఢి అవుతాయో వాటి యొక్క పదాంతరము కనుగొనండి.

(1) $2, 4, 6, 8, \ldots$ (2) $2, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}, \ldots$ (3) $-10, -6, -2, 2, \ldots$

(4) $0.3, 0.33, .0333, \ldots$ (5) $0, -4, -8, -12, \ldots$ (6) $-\frac{1}{5}, -\frac{1}{5}, -\frac{1}{5}, \ldots$

(7) $3, 3 + \sqrt{2}, 3 + 2\sqrt{2}, 3 + 3\sqrt{2}, \ldots$ (8) $127, 132, 137, \ldots$

2. అంకశ్రేఢిలోని మొదటి పదము a, పదాంతరము d అయిన అంకశ్రేఢిని రాయండి.

(1) $a = 10, d = 5$ (2) $a = -3, d = 0$ (3) $a = -7, d = \frac{1}{2}$

(4) $a = -1.25, d = 3$ (5) $a = 6, d = -3$ (6) $a = -19, d = -4$

3. కింది ప్రతి అంకశ్రేఢి యొక్క మొదటి పదము, పదాంతరములను కనుగొనండి.

(1) 5, 1, −3, −7, . . . (2) 0.6, 0.9, 1.2, 1.5, . . .

(3) 127, 135, 143, 151, . . . (4) $\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{5}{4}, \frac{7}{4}, \ldots$

ఆలోచిద్దాం

- 5, 8, 11, 14, . . . అనేది అంకశ్రేఢి అవుతుందా? ఒక వేళ అయినట్లయితే దాని 100 వ పదం ఎంత ఉంటుంది? ఈ శ్రేఢిలో 92 అనే సంఖ్య ఉంటుందా? 61 అనే సంఖ్య ఉంటుందా?

తెలుసుకుందాం.

అంకశ్రేఢి యొక్క nవ పదము (n^{th} term of an A. P.)

5, 8, 11, 14, . . . ఈ క్రమములో రెండు వరుస పదాల భేదము 3 కావున ఇది అంకశ్రేఢి అవుతుంది.

దీనిలో 5 మొదటి పదము. 5కు 3 కలిపిన 8 అనే తరువాతి పదం లభిస్తుంది. ఈ విధంగా 100వ పదము లభించుటకు ఏమి చేయవలెను?

	మొదటి పదము	రెండవ పదము	మూడవ పదము	. . .
సంఖ్య	5,	5 + 3 = 8,	8 + 3 = 11,	. . .

ఈ పద్ధతిలో 100వ పదము వరకు చేరడానికి చాలా సమయం పడుతుంది. దీని కొరకు ఏదైనా సూత్రము లభిస్తుందా? చూద్దాం.

5	8	11	14	. . .	. . .	. . .	. . .
5	5 + 1 × 3	5 + 2 × 3	5 + 3 × 3	. . .	5 + (n − 1) × 3	5 + n × 3	. . .
మొదటి పదం t_1	రెండవ పదం t_2	మూడవ పదం t_3	నాల్గవ పదం t_4	. . .	n వ పదం t_n	n + 1 వ పదం t_{n+1}	. . .

సాధారణంగా; $t_1, t_2, t_3, \ldots$ ఈ అంకశ్రేఢిలోని మొదటి పదము a మరియు పదాంతరము d అయిన

$$t_1 = a$$

$$t_2 = t_1 + d = a + d = a + (2 - 1)\,d$$

$$t_3 = t_2 + d = a + d + d = a + 2d = a + (3 - 1)d$$

$$t_4 = t_3 + d = a + 2d + d = a + 3d = a + (4 - 1)d$$

$t_n = a + (n - 1)\,d$ అనే సూత్రము లభిస్తుంది.

ఇప్పుడు ఈ సూత్రమును ఉపయోగించి 5, 8, 11, 14, . . . ఈ అంకశ్రేఢిలోని 100వ పదమును కనుగొందాం. ఇచ్చట $a = 5$ మరియు $d = 3$ అవుతుంది.

$$t_n = a + (n - 1)d$$

$$\therefore \quad t_{100} = 5 + (100 - 1) \times 3$$

$$= 5 + 99 \times 3$$

$$= 5 + 297$$

$$= 302$$

ఈ అంకశ్రేఢి యొక్క 100వ పదము 302 అవుతుంది.

ఇప్పుడు 61 అనే సంఖ్య ఈ శ్రేఢిలో ఉందా? దీని సమాధానం కొరకు ఇదే సూత్రాన్ని ఉపయోగించుదాం.

$$t_n = a + (n - 1)d$$

$$t_n = 5 + (n - 1) \times 3$$

ఒకవేళ 61 అనేది nవ పదము అనగా t_n అయిన

$$61 = 5 + 3n - 3$$

$$= 3n + 2$$

$$\therefore \quad 3n = 59$$

$$\therefore \quad n = \frac{59}{3}$$

కాని n అనేది సహజ సంఖ్య కాదు.

$\therefore$ 61 అనే సంఖ్య ఈ శ్రేఢిలో లేదు.

ఆలోచిద్దాం

కబీరు యొక్క తల్లి, అతని పుట్టిన రోజున అతని యొక్క ఎత్తును నమోదు చేసింది. అతను సంవత్సరం వాడయినప్పుడవు ఎత్తు 70 సెం. మీ. ఉండెను. 2వ సంవత్సరాలప్పుడు 80 సెం.మీ. 3 సంవత్సరాలప్పుడు ఎత్తు 90 సెం.మీ. అయ్యింది. అతడి పిన్ని మీరా పదవ తరగతి చదువుచుండెను.అమె కబీరు యొక్క ఎత్తు ప్రతి సంవత్సరము అంకశ్రేఢిలో పెరుగుతున్నట్లు కనిపిస్తున్నది అని అన్నది. దానిని పరిగణనలోని తీసుకుని ఆమె కబీరు 15 సంవత్సరాలు అయి పదవ తరగతిలో ప్రవేశించిన అతడి ఎత్తు ఎంత ఉండునో కనుగొన్నది. ఆమెకు ఆశ్చర్యమనిపించింది. మీరు కూడా కబీరు ఎత్తును అంకశ్రేణిలో పెరుగుతుందని పరిగణించి అతని 15 సంవత్సరాల వయస్సులోని ఎత్తు ఎంత ఉండునో కనుగొనండి.

సాధించిన ఉదాహరణలు

ఉదా. (1) కింది అంకశ్రేఢి యొక్క t_n కనుగొనండి. దాని నుండి ఆ శ్రేఢి యొక్క 30వ పదమును కనుగొనండి.

3, 8, 13, 18, . . .

సాధన : ఇచ్చిన అంకశ్రేఢి 3, 8, 13, 18, . . .

ఇచ్చుట $t_1 = 3,\ t_2 = 8,\ t_3 = 13,\ t_4 = 18, \ldots$

$d = t_2 - t_1 = 8 - 3 = 5,\quad n = 30$

$t_n = a + (n - 1)d$ అని మనకు తెలుసు

$\therefore t_n = 3 + (n - 1) \times 5 \because (a = 3,\ d = 5)$

$\therefore t_n = 3 + 5n - 5$

$\therefore t_n = 5n - 2$

$\therefore$ 30 వ పదము $= t_{30} = 5 \times 30 - 2$

$= 150 - 2 = 148$

ఉదా. (2) కింది అంకశ్రేఢిలో 560 ఎన్నో పదము?

2, 11, 20, 29, . . .

సాధన : ఇచ్చిన అంకశ్రేఢి 2, 11, 20, 29, . .

ఇక్కడ $a = 2,\ d = 11 - 2 = 9$

ఈ శ్రేఢి యొక్క n వ పదము 560, $t_n = 560$

$t_n = a + (n - 1)d$

$\therefore 560 = 2 + (n - 1) \times 9$

$= 2 + 9n - 9$

$\therefore 9n = 567$

$\therefore n = \frac{567}{9} = 63$

$\therefore$ ఇచ్చిన అంకశ్రేఢి యొక్క 63వ పదము 560 అవుతుంది.

ఉదా. (3) ఇచ్చిన క్రమము 5, 11, 17, 23, . . . లో 301 అనే సంఖ్య ఉంటుందా?

సాధన : 5, 11, 17, 23, . . . ఈ క్రమములో

$t_1 = 5,\ t_2 = 11,\ t_3 = 17,\ t_4 = 23, \ldots$

$t_2 - t_1 = 11 - 5 = 6$

$t_3 - t_2 = 17 - 11 = 6$

$\therefore$ ఈ క్రమము అంకశ్రేఢి అవుతుంది.

ఈ అంకశ్రేఢి $a = 5$ మరియు $d = 6$

301 nవ పదము అనుకొనిన

$t_n = a + (n - 1)d = 301$

$\therefore 301 = 5 + (n - 1) \times 6$

$= 5 + 6n - 6$

$\therefore 6n = 301 + 1 = 302$

$\therefore n = \frac{302}{6}$, అనేది ధన పూర్ణ సంఖ్య కాదు.

దీని నుండి ఇచ్చిన క్రమములో 301 అనే సంఖ్య ఉండదు.

ఉదా. (4) 4 చే భాగించబడే రెండంకెల సంఖ్యలు ఎన్ని ఉంటాయి?

సాధన : 4 చే భాగింపబడే రెండంకెల సంఖ్యల జాబితా

12, 16, 20, 24, . . . 96.

ఇలాంటి సంఖ్యలు ఎన్నో కనుగొందాం.

$t_n = 96,\ a = 12,\ d = 4,\ n = ?$

$\therefore$ సూత్రము నుండి,

$96 = 12 + (n - 1) \times 4$

$= 12 + 4n - 4$

$\therefore 4n = 88$

$\therefore n = 22$

$\therefore$ 4 చే భాగించబడే రెండంకెల సంఖ్యలు 22 కలవు.

ఉదా. (5) ఒక అంకశ్రేఢి యొక్క 10వ పదము 25 మరియు 18వ పదము 41 అయిన ఆ శ్రేఢి యొక్క 38వ పదమును కనుగొనుము. అదే విధంగా n పదము 99 అయినట్లయితే nవ విలువను కనుగొనండి.

సాధన : ఇచ్చిన అంకశ్రేఢి లో $t_{10} = 25$ మరియు $t_{18} = 41$.

$t_n = a + (n - 1)d$ అని మనకు తెలుసు

$\therefore \quad t_{10} = a + (10 - 1)\, d$

$\therefore \quad 25 = a + 9d \quad \ldots\ldots\ldots \text{(I)}$

అదే విధంగా $t_{18} = a + (18 - 1)\, d$

$\therefore \quad 41 = a + 17d \ldots\ldots\ldots \text{(II)}$

$25 = a + 9d \ldots\ldots\ldots$ (I) నుండి.

$a = 25 - 9d.$

ఈ విలువను సమీకరణము II లో ప్రతిక్షేపించగా.

సమీకరణము (II) $a + 17d = 41$.

$\therefore \quad 25 - 9d + 17d = 41$

$\therefore \quad 8d = 41 - 25 = 16$

$\therefore \quad d = 2$

$d = 2$ విలువను సమీకరణము Iలో ప్రతిక్షేపించగా

$a + 9d = 25$

$\therefore a + 9 \times 2 = 25$

$\therefore a + 18 = 25$

$\therefore a = 7$

ఇప్పుడు, $t_n = a + (n - 1)d$

$\therefore \quad t_{38} = 7 + (38 - 1) \times 2$

$t_{38} = 7 + 37 \times 2$

$t_{38} = 7 + 74$

$t_{38} = 81$

nవ పదము 99 అయినట్లయితే n విలువను కనుగొనవలెను.

$t_n = a + (n - 1)d$

$99 = 7 + (n - 1) \times 2$

$99 = 7 + 2n - 2$

$99 = 5 + 2n$

$\therefore \quad 2n = 94$

$\therefore \quad n = 47$

$\therefore$ ఇచ్చిన శ్రేఢి యొక్క 38వ పదము 81, మరియు 99 అనేది 47 వ పదము అవుతుంది.

అభ్యాసమాలిక 3.2

1. కింద ఇవ్వబడిన అంకశ్రేఢి నుండి గడులను సరియైన సంఖ్యలతో పూరించుము.

(1) 1, 8, 15, 22, . . .

ఇచ్చట $a = \square$, $t_1 = \square$, $t_2 = \square$, $t_3 = \square$, . . .

$t_2 - t_1 = \square - \square = \square$

$t_3 - t_2 = \square - \square = \square \quad \therefore d = \square$

(2) 3, 6, 9, 12, . . .

ఇచ్చట $t_1 = \square$, $t_2 = \square$, $t_3 = \square$, $t_4 = \square$, . . .

$t_2 - t_1 = \square$, $t_3 - t_2 = \square \quad \therefore d = \square$

(3) −3, −8, −13, −18, . . .

ఇచ్చట $t_1 = \square$, $t_2 = \square$, $t_3 = \square$, $t_4 = \square$, . . .

$t_2 - t_1 = \square$, $t_3 - t_2 = \square \quad \therefore a = \square$, $d = \square$

(4) 70, 60, 50, 40, . . .

ఇచ్చట $t_1 = \square$, $t_2 = \square$, $t_3 = \square$, . . .

$\therefore a = \square$, $d = \square$

2. కింది క్రమము అంకశ్రేఢి అవుతుందా? అయినట్లయితే ఆ శ్రేఢి యొక్క ఇరవైయ్యవ పదమును కనుగొనండి.

−12, −5, 2, 9, 16, 23, 30, . . .

3. ఇచ్చిన అంకశ్రేఢి 12, 16, 20, 24, . . . ఈ శ్రేఢి యొక్క 24వ పదమును కనుగొనండి.

4. కింది అంక శ్రేఢి యొక్క 19వ పదమును కనుగొనండి.

7, 13, 19, 25, . . .

5. కింది అంక శ్రేఢి యొక్క 27వ పదమును కనుగొనండి.

9, 4, −1, −6, −11, . . .

6. మూడంకెల సహజ సంఖ్యల సమూహంలో 5 చే నిశ్శేషంగా భాగించబడే సంఖ్యలు ఎన్నో కనుగొనండి.

7. ఒక అంకశ్రేఢి యొక్క 11వ పదము 16 మరియు 21వ పదము 29 అయిన ఆశ్రేఢి యొక్క 41వ పదమును కనుగొనండి.

8. 11, 8, 5, 2, . . . ఈ అంకశ్రేఢిలో −151 అనేది ఎన్నవ పదము అవుతుంది?

9. 10 నుండి 250 వరకు గల సహజ సంఖ్యలలో ఎన్ని సంఖ్యలు 4 చే నిశ్శేషంగా భాగించబడతాయి?

10. ఒక అంకశ్రేఢి యొక్క 17వ పదము 10వ పదము కంటే 7 ఎక్కువ అయిన పదాంతరమును కనుగొనండి.

వివేకవంతురాలైన ఉపాధ్యాయురాలు

అనగనగా ఒక రాజు ఉండేవాడు. అతడు తన పిల్లలైన యశ్వంతరాజు మరియు గీతాదేవిలకు గుర్రపు స్వారీ నేర్పించుటకు వరుసగా తార మరియు మీరా అనే ఉపాధ్యాయినులను నియమించిరి. వారిద్దరిని సంవత్సరానికి ఎంత జీతము ఇవ్వవలేనని అడిగెను.

''నాకు మొదటి నెల జీతం 100 వరహాలు ఇవ్వండి తరువాతి ప్రతినెలలో 100 వరహాలను పెంచి ఇవ్వండి.'' అని తార అన్నది. ''నాకు మొదటి నెల 10 వరహాల జీతము ఇవ్వండి తర్వాత ప్రతి నెల దాని ముందు నెల జీతం కంటే రెట్టింపు ఇవ్వండి'' అని మీరా అంది.

మహారాజు వాటిని ఒప్పుకున్నాడు. మూడునెలల తర్వాత యశ్వంత్‌రాజు తన చెల్లితో '' నా ఉపాధ్యాయురాలు నీ ఉపాధ్యాయురాలు కంటే ఎక్కువ తెలివైందని అనిపిస్తుంది. ఎందుకంటే ఆమె ఎక్కువ జీతం అడిగింది'' అని అన్నాడు. అప్పుడు గీతాదేవి ''నాకు మొదట అలాగే అనిపించిది. అందుకే నేను మీరా గారిని అడిగాను మీరు తక్కువ జీతము ఎందుకు అడిగారు అని'' అప్పుడు ఆమె నవ్వి 8 నెలల తర్వాత మీకు గమ్మత్తు తెలుస్తుంది అన్నది. '' నేను ఎనిమిదవ నెల జీతము కనుగొని చూశాను నీవు కూడా చేసి చూడు''. అని అన్నది.

నెల	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
తార యొక్క జీతము	100	200	300	400	500	600	700	800	900	–	–	–
మీరా యొక్క జీతము	10	20	40	80	160	320	640	1280	2560	–	–	–

మీరు ఈ పట్టికను పూర్తి చేయండి.

తార యొక్క జీతము 100, 200, 300, 400, . . . ఇది అంకశ్రేఢి. తెలిసిందా?

$t_1 = 100, \ t_2 = 200, t_3 = 300, . . . \quad t_2 - t_1 = 100 = d$

పదాంతరము 100.

మీరా యొక్క జీతము 10, 20, 40, 80, . . . అంకశ్రేఢి కాదు. కారణము 20 – 10 = 10, 40 – 20 = 20, 80 – 40 = 40 అనగా పదాంతరము d స్థిర సంఖ్య కాదు.

ఈ శ్రేఢిలోని ప్రతి పదము మాత్రము ముందు పదానికి రెట్టింపు అవుతూ వెలుతుంది.

ఇచ్చట $\frac{t_2}{t_1} = \frac{20}{10} = 2, \ \frac{t_3}{t_2} = \frac{40}{20} = 2, \quad \frac{t_4}{t_3} = \frac{80}{40} = 2$

$\therefore \ \frac{t_{n+1}}{t_n}$, అనగా ఒక పదము మరియు దాని ముందు పదముల నిష్పత్తి సమానం ఇలా పెరిగే శ్రేఢిని గుణశ్రేఢి అంటారు. $\frac{t_{n+1}}{t_n}$ నిష్పత్తి 1 కంటే ఎక్కువ అయిన ఈ గుణశ్రేఢి, అంకశ్రేఢి కంటే వేగంగా పెరుగుతుందని తెలుసుకోండి. ఒకవేళ ఈ నిష్పత్తి 1కంటే తక్కువయిన ఆ శ్రేఢి ఏ విధంగా మారుతుందో తెలుసుకోండి.

ఈ సంవత్సరము మనం అంకశ్రేఢిని నేర్చుకోబోతున్నాం. అంకశ్రేఢిలో nవ పదమును ఏ విధంగా కనుగొనవచ్చునో మనం చూశాం ఇప్పుడు మొదటి n పదముల మొత్తంను ఏ విధంగా కనుగొనవచ్చునో మనం చూడబోతున్నాం.

చిటికెలో కూడిక

300 సం॥ల పూర్వపు కథ. జర్మనిలో బ్యుటనర్ (Buttner) అనే పేరుగల గురువుయొక్క ఏకోపాధ్యాయ పాఠశాల కలదు. ఈ గురువును జోహాన్ మార్టిన్ బోర్టేలస్ అనే ఒకే ఒక సహాయకుడు ఉండేవాడు. పిల్లలకు అక్షరాలను నేర్పడం రాయించడం అతని పని. బ్యుటనర్ మాత్రం అత్యంత క్రమశిక్షణ కలవాడు. బ్యుటనర్ ఒక పనిని పూర్తి చేయవలసి ఉండగా తరగతిలోని పిల్లలు అల్లరి చేయకుండా వారిని పనిలో నిమగ్నం చేయటకు అతడు పిల్లలకు అంకెల గారడి (ఆట) చేయించాలని అనుకున్నాడు.1 నుండి 100 వరకు సంఖ్యలను పలకపై రాసి, వాటిని కూడమని పిల్లలకు చెప్పాడు. గురువుగారు తన పనిని ప్రారంభించాడు. పిల్లలు సంఖ్యలు రాయడం ప్రారంభించారు. ఐదు నిమిషాలలో ఒక పలక తిరగ వేసినట్లు శబ్దం వినిపించింది. తను కార్ల్ గాస్ వైపు చూసి "ఏంటి? నేను నిన్ను 1 నుండి 100వరకు సంఖ్యలను రాసి వాటిని కూడమని చెప్పాను పలక ఎందుకు తిరగవేసావు? నీకు ఏమి చేయాలనిలేదా"? అని అడిగాడు.

నేను కూడిక చేశాను అని కార్ల్ గాస్ చెప్పాడు.

ఏంటీ? ఇంత తక్కువ సమయంలో కూడటం ఎలా అయ్యింది? సంఖ్యలు గూడా రాయలేదుగావచ్చు సమాధానం ఎంత వచ్చింది? అని గురువుగారు అడిగారు.

ఐదువేల యాభై అని కార్ల్ గాస్ చెప్పాడు.

గురువు గారు ఆశ్చర్యంతో "సమాధానం ఎలా కనుగొన్నావు?" అని అడిగాడు.

కార్ల్ గాస్ యొక్క చిటికెలో కూడిక చేసే పద్ధతి:

వరుస క్రమంలో సంఖ్యలు	1	2	3	4	. . . .	100
	+	+	+	+		+
తిరగవేసిన క్రమంలో సంఖ్యలు	100	99	98	97	. . . .	1
మొత్తం	101	101	101	101		101

ప్రతి జంటలోని సంఖ్యలు మొత్తము 101 వస్తుంది. ఈ మొత్తం 100 సార్లు వచ్చింది. 100×101 గుణించగా 10100 వచ్చింది. ఇచ్చట 1 నుండి 100 వరకు సంఖ్యలు రెండుసార్లు తీసుకోవడం జరిగింది. కావున 10100 యొక్క సగం 5050 వచ్చింది. కావున 1, 2, 3, . . . , 100 సంఖ్యల మొత్తం 5050 అవుతుంది. గురువుగారు అతడిని చాలా మెచ్చుకొన్నాడు.

ఇప్పుడు గాస్ గారి మొత్తమును కనుగొనే చిట్కాను ఉపయోగించి అంకశ్రేఢి యొక్క n పదముల మొత్తమును కనుగొనే సూత్రమును తయారు చేద్దాం.

జోహాన్ ఫ్రెడరిక్ కార్ల్ గాస్

ఎప్రిల్ 30, 1777 – ఫిబ్రవరి 23, 1855.

కార్ల్ గాస్ ఇతడు ప్రసిద్ధమైన జర్మన్ గణితజ్ఞుడు. అతని జననం బ్రాడన్ స్వాయిక్‌లో ఒక నిరక్షరాస్యులైన కుటుంబంలో జరిగింది. బ్యుటనర్ పాఠశాలలో అతడు తన బుద్ధి చాతుర్యంను చూపాడు తరువాత బ్యుటనర్ గారి సహాయకుడు జోహన్ మార్టెన్ బార్టెలస్ తో స్నేహం ఏర్పడింది. ఇద్దరు కలిసి బీజగణితముపై ఒక పుస్తకము రాశారు. బార్టెలస్, గాస్ యొక్క అసాధారణ బుద్దిని చాలా మంది దృష్టిలోకి తీసుకువచ్చాడు.

తెలుసుకుందాం.

అంకశ్రేఢి మొదటి n పదముల మొత్తం (Sum of first n terms of an A. P.)

అంకశ్రేఢి $a, a + d, a + 2d, a + 3d, \ldots a + (n - 1)d$

ఈ శ్రేఢిలో a అనేది మొదటి పదము d అనేది పదాంతరము. ఈ శ్రేఢీలోని మొదటి n పదముల మొత్తమును S_n చే సూచిద్దాం.

$$S_n = [a] + [a + d] + \ldots + [a+(n-2)d] + [a+(n-1)d]$$

ఇవే పదాలను తిరగ వేసిన క్రమంలో వ్రాయగా,

$$S_n = [a+(n-1)d] + [a+(n-2)d] + \ldots + [a + d] + [a]$$

కూడగా,

$$2S_n = [a+a+(n-1)d] + [a + d+a+(n-2)d]+ \ldots + [a+(n-2)d+ a + d]+ [a+(n-1)d+a]$$

$$2S_n = [2a+(n-1)d] + [2a+(n-1)d] + \ldots + [2a+(n-1)d] \ldots n \text{ సార్లు.}$$

$$2S_n = n\,[2a+(n-1)d]$$

$$S_n = \frac{n}{2}[2a+(n-1)d] \quad \text{లేదా} \quad S_n = na+\frac{n(n-1)}{2}d$$

ఉదాహరణకు, 14, 16, 18, . . . ఈ అంకశ్రేఢి యొక్క మొదటి 100 పదాల మొత్తమును కనుగొందాం.

ఇక్కడ $a = 14,\ d = 2,\ n = 100$

$$S_n = \frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$$

$$\therefore S_{100} = \frac{100}{2}[2 \times 14+(100-1) \times 2]$$

$$= 50\,[28 + 198]$$

$$= 50 \times 226 = 11,300$$

$\therefore$ ఇచ్చిన శ్రేఢి యొక్క మొదటి 100 పదాల మొత్తం 11,300

ఇవి గుర్తుంచుకుందాం

ఇచ్చిన అంకశ్రేఢి మొదటి పదము a, పదాంతరము d అయిన

$$t_n = a+(n-1)d$$

$$S_n = \frac{n}{2}[2a+(n-1)d] = na+\frac{n(n-1)}{2}d$$

అంకశ్రేఢి మొదటి n పదముల మొత్తము యొక్క మరొక సూత్రమును కనుగొందాం.

$a, a+d, a+2d, a+3d, \ldots [a+(n-1)d]$ ఈ అంకశ్రేఢిలో

మొదటి పదము = $t_1 = a$ మరియు nవ పదము $[a+(n-1)d]$.

ఇప్పుడు $S_n = \frac{n}{2}[\underline{a}+\underline{a+(n-1)d}]$

$\therefore \quad S_n = \frac{n}{2}[t_1 + t_n] = \frac{n}{2}$ [మొదటి పదము + చివరి పదము]

సాధించిన ఉదాహరణలు

ఉదా. (1) మొదటి n సహజసంఖ్యల మొత్తమును కనుగొనండి.

సాధన : మొదటి n సహజ సంఖ్యలు $1, 2, 3, \ldots, n$.

ఇచ్చట $a = 1$, $d = 1$, nవ పదము $= n$

$S_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + n$

$S_n = \frac{n}{2}$ [మొదటి పదము + చివరి పదము]

$= \frac{n}{2}[1+n] \quad = \frac{n(n+1)}{2}$

$\therefore$ మొదటి n సహజసంఖ్యల మొత్తం $\frac{n(n+1)}{2}$ అవుతుంది.

ఉదా. (2) మొదటి n సరి సహజ సంఖ్యల మొత్తమును కనుగొనండి.

సాధన : మొదటి n సరి సహజ సంఖ్యలు $2, 4, 6, 8, \ldots, 2n$.

t_1 = మొదటి పదము = 2 , t_n = చివరి పదము = $2n$

పద్ధతి I

$S_n = \frac{n}{2}[t_1 + t_n]$

$= \frac{n}{2}[2+2n]$

$= \frac{n}{2} \times 2(1+n)$

$= n(1+n)$

$= n(n+1)$

పద్ధతి II

$S_n = 2 + 4 + 6 \ldots + 2n$

$= 2(1 + 2 + 3 + \ldots + n)$

$= \frac{2[n(n+1)]}{2}$

$= n(1+n)$

$= n(n+1)$

పద్ధతి III

$S_n = \frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$

$= \frac{n}{2}[2 \times 2+(n-1)2]$

$= \frac{n}{2}[4+2n-2]$

$= \frac{n}{2}[2+2n]$

$= \frac{n}{2} \times 2(1+n)$

$= n(1+n) = n(n+1)$

$\therefore$ మొదటి n సరి సహజ సంఖ్యల మొత్తము $n(n+1)$ అవుతుంది.

ఉదా. (3) మొదటి n బేసి సహజసంఖ్యల మొత్తమును కనుగొనండి.

సాధన : మొదటి n బేసి సంఖ్యలు.

$1, 3, 5, 7, \ldots, (2n - 1)$.

$a = t_1 = 1$ మరియు $t_n = (2n - 1)$, $d = 2$

పద్ధతి I

$$S_n = \frac{n}{2}[t_1 + t_n]$$
$$= \frac{n}{2}[1 + (2n - 1)]$$
$$= \frac{n}{2}[1 + 2n - 1]$$
$$= \frac{n}{2} \times 2n$$
$$= n^2$$

పద్ధతి II

$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$$
$$= \frac{n}{2}[2 \times 1 + (n-1) \times 2]$$
$$= \frac{n}{2}[2 + 2n - 2]$$
$$= \frac{n}{2} \times 2n$$
$$= n^2$$

పద్ధతి III

$$S_n = 1 + 3 + \ldots + (2n-1)$$
$$= (1 + 2 + 3 + \ldots + 2n)$$
$$- (2 + 4 + 6 + \ldots + 2n)$$
$$= \frac{2n(2n+1)}{2} - \frac{2n(n+1)}{2}$$
$$= (2n^2 + n) - (n^2 + n)$$
$$= n^2$$

$\therefore$ మొదటి n బేసి సంఖ్యల మొత్తం n^2 అవుతుంది.

కృత్యము: 1 నుండి 150 వరకు గల అన్ని బేసి సంఖ్యల మొత్తమును కనుగొనండి.

సాధన : 1 నుండి 150 వరకు గల అన్ని బేసి సంఖ్యలు $1, 3, 5, 7, \ldots, 149$.

ఇది అంకశ్రేఢి.

ఇక్కడ $a = 1$ మరియు $d = 2$, ముందుగా 1 నుండి 150 వరకు ఎన్ని బేసి సంఖ్యలో కనుగొందాం. అనగా n యొక్క విలువను కనుగొందాం.

$$t_n = a + (n - 1)d$$

$149 = 1 + (n - 1)2$ $\qquad \therefore 149 = 1 + 2n - 2$

$$\therefore n = 75$$

ఇప్పుడు $1 + 3 + 5 + \ldots + 149$ ఈ 75 సంఖ్యల మొత్తమును కనుగొందాం.

$a = 1$, $d = 2$, $n = 75$

పద్ధతి I $S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$

$S_{75} = \square$

$S_{75} = \square \times \square$

$S_{75} = \square$

పద్ధతి II $S_n = \frac{n}{2}[t_1 + t_n]$

$S_{75} = \frac{75}{2}[1 + 149]$

$S_{75} = \square \times \square$

$S_{75} = \square$

అభ్యాసమాలిక 3.3

1. ఒక అంకశ్రేఢిలో మొదటి పదము 6 పదాంతరము 3 అయిన S_{27} ను కనుగొనండి.

$a = 6,\ d = 3,\ S_{27} = ?$

$S_n = \frac{n}{2}[\square + (n-1)d]$

$S_{27} = \frac{27}{2}[12 + (27-1)\square]$

$= \frac{27}{2} \times \square$

$= 27 \times 45 \quad = \square$

2. మొదటి 123 సరి సహజసంఖ్యల మొత్తమును కనుగొనండి.

3. 1 మరియు 350 ల మధ్యగల సరి సంఖ్యలన్నింటి మొత్తమును కనుగొనండి.

4. ఒక అంకశ్రేఢి యొక్క 19వ పదము 52 మరియు 38వ పదము 128 అయిన దాని మొదటి 56 పదాల మొత్తం ఎంత?

5. 1 మరియు 140 మధ్యగల, 4 చే నిశ్శేషంగా భాగింపబడే సహజ సంఖ్యలు ఎన్ని కలవో కనుగొనండి. ఆ సంఖ్యల మొత్తమును కనుగొనండి.

1 మరియు 140ల మధ్యగల 4 చే నిశ్శేషంగా భాగించబడే సంఖ్యలు

↓

4, 8, ... , 136

↓

ఇవి మొత్తం ఎన్ని సంఖ్యలు? $\therefore n = \square$

↓

$a = \square,\ d = \square,\ t_n = \square$

↓

$t_n = a + (n-1)d$

↓

$136 = \square + (n-1) \times \square$

→ $n = \square$ → $S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$

$S_{\square} = \frac{\square}{2}[\qquad\qquad] \quad = \square$

1 మరియు 140 మధ్యగల 4 చే నిశ్శేషంగా భాగించబడే సంఖ్యల మొత్తం = $\square$

★ **6.** ఒక అంక శ్రేఢిలో మొదటి 55 పదాల మొత్తం 3300 అయిన దాని 28వ పదమును కనుగొనండి.

7.★ ఒక అంకశ్రేఢిలో మూడు వరుస సంఖ్యల మొత్తం 27 వాటి లబ్ధం 504 అయిన ఆ పదాలను కనుగొనండి.

(మూడు వరస పదాలను $a - d, a, a + d$ అనుకోండి.)

8.★ ఒక అంకశ్రేఢిలోని నాలుగు వరస పదాల మొత్తం 12 అదే విధంగా ఆ నాలుగు వరుస పదాలలో మూడవ నాల్గవ పదాల మొత్తం 14 అయిన ఆ నాలుగు పదాలను కనుగొనుము.

(నాలుగు వరుస పదాలను $a - d, a, a + d, a + 2d$ అనుకోండి.)

9.★ ఒక అంకశ్రేఢి తొమ్మిదవ పదము సున్న అయిన 29వ పదము 19వ పదానికి రెట్టింపుగా ఉంటుందని చూపుము.

తెలుసుకుందాం.

అంకశ్రేఢి యొక్క అనువర్తనములు (Application of A.P.)

ఉదా. (1) మిక్సర్ గ్రైండర్ తయారు చేసే ఒక కంపెని మూడవ సంవత్సరంలో 600 మిక్సర్ గ్రైండర్లను, ఏడవ సంవత్సరము 700 మిక్సర్ గ్రైండర్లను తయారు చేసింది. ప్రతి సంవత్సరము తయారయ్యే మిక్సర్ గ్రైండర్ల సంఖ్యలో పెరుగుదల స్థిరంగా ఉన్నట్లయితే కింది సంఖ్యలను కనుగొనండి. (i) మొదటి సంవత్సర ఉత్పత్తి (ii) 10 వ సంవత్సర ఉత్పత్తి (iii) మొదటి ఏడు సంవత్సరాల మొత్తం ఉత్పత్తి.

సాధన : కంపెని తయారు చేసే మిక్సర్ గ్రైండర్ల సంఖ్యలో పెరుగుదల ప్రతి సంవత్సరము స్థిరంగా ఉంటుంది. దీని నుండి వరుస సంవత్సరాల ఉత్పత్తి సంఖ్యలు అంకశ్రేఢిలో ఉంటాయి. కంపెని

(i) nవ సంవత్సరంలో t_n మిక్సర్ గ్రైండర్లు తయారుచేసినది అనుకొనిన ఇచ్చిన సమాచారం నుండి,

$t_3 = 600,\ t_7 = 700$

$t_n = a+(n-1)d$ అని మనకు తెలుసు

$t_3 = a+(3-1)d$

$= 600 = a+2d$ .... (I)

$t_7 = a+(7-1)d$

$= a+6d = 700$ .... (II)

$a+2d = 600 \therefore a = 600 - 2d$ను సమీకరణం (II)లో ప్రతిక్షేపించగా,

$600 - 2d + 6d = 700$

$4d = 100 \quad \therefore \quad d = 25$

$a+2d = 600 \quad \therefore a + 2 \times 25 = 600$

$a + 50 = 600 \quad \therefore a = 550$

$\therefore$ మొదటి సంవత్సరంలోని ఉత్పత్తి 550 అవుతుంది.

(ii) $t_n = a+(n-1)d$

$t_{10} = 550+(10-1) \times 25$

$= 550 + 225 = 775$

$\therefore$ 10వ సంవత్సరంలోని ఉత్పత్తి 775.

(iii) మొదటి 7 సంవత్సరాలలోని మొత్తం ఉత్పత్తిని కనుగొనుటకు S_n యొక్క సూత్రమును ఉపయోగించుదాం.

$$S_n = \frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$$

$$\therefore S_7 = \frac{7}{2}[1100 + 150] = \frac{7}{2}[1250] = 7 \times 625 = 4375$$

∴ మొదటి 7 సంవత్సరాలలో 4375 మిక్సర్ గ్రైండర్‌లను ఉత్పత్తి చేసింది.

ఉదా. (2) అజయ్ శర్మ అప్పుగా తీసుకొన్న 3,25,000 రూపాయలను చెల్లించడానికి మొదటి నెల 30500 రూపాయలు చెల్లిస్తాడు. తర్వాత ప్రతినెల ముందు నెలలో చెల్లించిన సొమ్ము కంటే 1500 రూపాయలు తక్కువ చెల్లించవలసి వస్తుంది. అయిన అప్పుగా తీసుకున్న సొమ్మును పూర్తిగా చెల్లించుటకు అతనికి ఎన్ని నెలల సమయం పడుతుంది?

సాధన : అప్పు సొమ్మును చెల్లించుటకు n నెలల కాలం పడుతుందని అనుకుందాం. 30,500 నుండి ప్రతినెల 1500 రూ.లు తక్కువ ఇవ్వవలసి ఉంటుంది.

∴ 30,500; 30,500 − 1500; 30,500 − 2 × 1500, . . . చెల్లించవలిసిన సొమ్ము క్రమము అంకశ్రేఢి అవుతుంది.

మొదటి పదము= a = 30500, d = −1500 అప్పుగా తీసుకున్న సొమ్ము = S_n = 3,25,000

$$S_n = \frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$$

$$3,25,000 = \frac{n}{2}[2 \times 30500+(n-1) \times(-1500)]$$

$$= \frac{n}{2}[2 \times 30500 - 1500n + 1500]$$

$$3,25,000 = 30500n - 750n^2 + 750n$$

$$\therefore 750n^2 - 31250n + 325000 = 0$$

$$\therefore 3n^2 - 125n + 1300 = 0 \quad .....$$ (రెండు వైపులా 250 చే భాగించగా)

$$\therefore 3n^2 - 60n - 65n + 1300 = 0$$

$$\therefore 3n(n-20) - 65(n-20) = 0$$

$$\therefore (n - 20)(3n - 65) = 0$$

∴ $n - 20 = 0$, లేదా $3n - 65 = 0$

$n = 20$ లేదా $n = \frac{65}{3} = 21\frac{2}{3}$

n అనేది అంకశ్రేఢిలో పదాల క్రమసంఖ్య కావున n అనేది సహజ సంఖ్య.

$\therefore n \neq \frac{65}{3} \quad \therefore n = 20$

(లేదా, 20 నెలల తర్వాత S_{20} = 3,25,000 అనగా అప్పుడు సొమ్ము మొత్తం చెల్లించబడును.తర్వాత కాలం గురించి ఆలోచించవలసిన అవసరంలేదు.)

∴ అప్పుగా తీసుకున్న సొమ్మును పూర్తిగా చెల్లించుటకు అతనికి 20 నెలల సమయం పడుతుంది.

ఉదా. (3) అన్వర్ ప్రతినెల కొంత సొమ్మును పొదుపు చేస్తాడు. మొదటినెలలో 200 రూ।।లు. రెండవ నెలలో 250 రూ।।లు. మూడవ నెలలో 300 రూ।।లు పొదుపు చేశాడు. అయిన 1000 రూ।।ల పొదుపు ఎన్నవ నెలలో అవుతుంది? ఆ నెలలో అతడి మొత్తం పొదుపు ఎంత అవుతుంది?

సాధన : మొదటి నెలలోని పొదుపు 200 రూ।।లు.; రెండవ నెలలోని పొదుపు 250 రూ।।లు.; . . .

ఇదే విధంగా ప్రతినెల పొదుపు 200, 250, 300, . . . ఇది అంకశ్రేఢి అవుతుంది.

ఇచ్చట $a = 200$, $d = 50$, t_n యొక్క సూత్రమును ఉపయోగించి మొదట nను కనుగొందాం దాని నుండి S_n ను కనుగొందాం.

$$t_n = a+(n-1)d$$
$$= 200 + (n-1)50$$
$$= 200 + 50n - 50$$
$$\therefore\ 1000 = 150 + 50n$$
$$150 + 50n = 1000$$
$$50n = 1000 - 150$$
$$50n = 850$$
$$\therefore\ n = 17$$

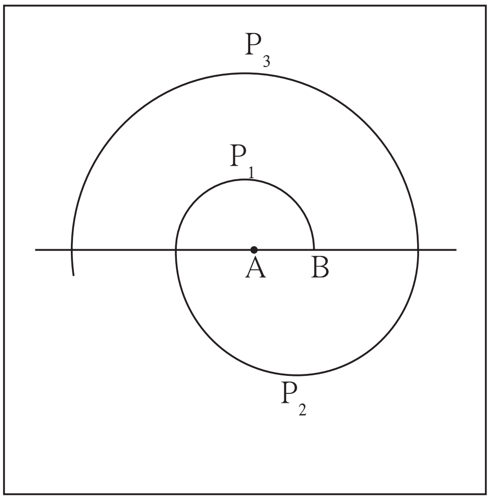
17వ నెలలో 1000 రూ।।ల పొదుపు అవుతుంది.

17 నెలలలో మొత్తం పొదుపు ఎంతో కనుగొందాం.

$$S_n = \frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$$
$$= \frac{17}{2}[2 \times 200+(17-1) \times 50]$$
$$= \frac{17}{2}[400 + 800]$$
$$= \frac{17}{2}[1200]$$
$$= 17 \times 600$$
$$= 10200$$

17 నెలలలో మొత్తం పొదుపు 10,200 రూ।।లు.

ఉదా. **(4)** పటంలో చూపిన విధంగా ఒక రేఖ పై Aను కేంద్ర బిందువుగా తీసుకొని 0.5 సెం.మీ. వ్యాసార్థముతో P_1 అనే అర్ధ వృత్తమునుగీసాము. అది ఆ రేఖను B వద్ద ఖండిస్తుంది. ఇప్పుడు Bను కేంద్ర బిందువుగా తీసుకొని 1 సెం.మీ. వ్యాసార్థంతో P_2 అనే అర్ధ వృత్తమును రేఖ యొక్క రెండవ వైపు గీసాము.



ఇప్పుడు మళ్ళీ A కేంద్రంగా 1.5 సెం.మీ. వ్యాసార్థముతో అర్ధ వృత్తము P_3 ని గీసాము. ఇలాంటి A మరియు B కేంద్రాలను తీసుకుని వరసగా 0.5 సెం.మీ. 1 సెంమీ., 1.5 సెం.మీ., 2 సెం.మీ, వ్యాసార్థాలు గల అర్థవృత్తాలను గీయడం వలన ఒక వర్తులాకృతి ఏర్పడింది. అయితే ఇలాంటి 13 అర్ధ వృత్తాలచే ఏర్పడిన వర్తులాకారం యొక్క పొడువు ఎంత ఉండవచ్చు? ($\pi = \frac{22}{7}$ తీసుకోండి.)

సాధన : A, B, A, B, . . . ఈ క్రమంలో కేంద్రాలను తీసుకొని గీసిన అర్ధ వృత్తముల పొడవులు వరుసగా $P_1, P_2, P_3, \ldots$ అనుకుందాం. మొదటి అర్ధ వృత్త వ్యాసార్థము 0.5 సెం.మీ. రెండవ అర్ధ వృత్త వ్యాసార్థము 1.0 సెం.మీ. . . . ఈ విధంగా ఇవ్వబడింది. దీని నుండి $P_1, P_2, P_3, \ldots P_{13}$ కనుగొందాం.

మొదటి అర్ధ వృత్తపరిధి $= P_1 = \pi r_1 = \pi \times \frac{1}{2} = \frac{\pi}{2}$

$$P_2 = \pi r_2 = \pi \times 1 = \pi$$

$$P_3 = \pi r_3 = \pi \times 1.5 = \frac{3}{2}\pi$$

$P_1, P_2, P_3, \ldots$ వీటి అర్ధ వృత్త పరిధులు అనగా $\frac{1}{2}\pi, 1\pi, \frac{3}{2}\pi, \ldots$ ఈ సంఖ్యలు అంకశ్రేఢిలో అన్నవి.

ఇచ్చట $a = \frac{1}{2}\pi, d = \frac{1}{2}\pi,$ వీటి నుండి S_{13} కనుగొందాం.

$$S_n = \frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$$

$$S_{13} = \frac{13}{2}\left[2 \times \frac{\pi}{2} + (13-1) \times \frac{\pi}{2}\right]$$

$$= \frac{13}{2}[\pi + 6\pi]$$

$$= \frac{13}{2} \times 7\pi$$

$$= \frac{13}{2} \times 7 \times \frac{22}{7}$$

= 143 సెం.మీ.

$\therefore$ 13 అర్ధ వృత్తాలతో ఏర్పడిన వర్తులం యొక్క మొత్తం పొడవు 143 సెం.మీ.

ఉదా. **(5)** ఒక ఊరిలో 2010 వ సంవత్సరంలో 4000 మంది అక్షరాస్యులు గలరు. ఈ సంఖ్య ప్రతి సంవత్సరము 400 చొప్పున పెరుగుతుంది. అయిన 2020 సంవత్సరములో ఎంత మంది అక్షరాస్యులు ఉంటారు?

సాధన :

సంవత్సరము	2010	2011	2012	...	2020
అక్షరాస్యులు	4000	4400	4800	...	☐

$a = 4000,\ \ d = 400\ \ n = 11$

$$t_n = a+(n-1)d$$
$$= 4000 + (11-1)400$$
$$= 4000 + 4000$$
$$= 8000$$

2020వ సంవత్సరము 8000 మంది అక్షరాస్యులు ఉంటారు.

ఉదా. **(6)** శ్రీమతి శేఖ్‌కు 2015 సంవత్సరంలో వార్షిక జీతము 1,80,000 రూ॥లు గల ఉద్యోగం లభించింది. ఆఫీసు వారు ఆమెకు ప్రతి సంవత్సరము 10,000 రూ॥లు పెంచి ఇస్తామని ఒప్పుకున్నారు. అయిన ఎన్నవ సంవత్సరము ఆమె వార్షిక జీతము 2,50,000 రూ॥లు అవుతుంది?

సాధన :

సంవత్సరము	మొదటి సంవత్సరం (2015)	రెండవ సంవత్సరం (2016)	మూడవ సంవత్సరం (2017)	...
జీతము (రూ॥లలో)	[1,80,000]	[1,80,000 + 10,000]	...	...

$a = 1,80,000,\qquad d = 10,000\qquad n = ?\qquad t_n = 2,50,000$ రూపాయలు.

$t_n = a+(n-1)d$

$2,50,000 = 1,80,000 + (n-1) \times 10,000$

$(n-1) \times 10000 = 70,000$

$n-1 = 7$

$n = 8$

$\therefore$ 8వ సంవత్సరము ఆమె వార్షిక జీతము 2,50,000 రూపాయలు అగును.

అభ్యాసమాలిక 3.4

1. సానిక జనవరి1, 2016 నాడు ఆరోజు 10 రూ||లు, రెండవ రోజున 11 రూ||లు మూడవ రోజున 12 రూ||లు ఈ రకంగా పొదుపు చేయవలనని నిర్ణయించుకున్నది. అయిన డిసెంబర్ 31, 2016 వరకు ఆమె యొక్క మొత్తం పొదుపు ఎంత అయ్యింది?

2. ఒక గృహస్తుడు 8000రూ||లు అప్పుగా తీసుకొని దానిపై 1360 రూ||లు వడ్డీ చెల్లిస్తానని ఒప్పుకొనెను. ఒక కిస్తీ దాని ముందు కిస్తీ కంటే 40 రూ||లు తగ్గించి 12 నెలలలో కిస్తీలు చెల్లించింది. అయిన అతడు చెల్లించిన మొదటి, చివరి కిస్తీలు ఎంత?

3. సచిన్ జాతీయ పొదుపు పత్రములో మొదటి సంవత్సరము 5000రూ||లు, రెండవ సంవత్సరము 7000రూ||లు, మూడవ సంవత్సరము 9000రూ||లు ఈ విధంగా పొదుపు చేసెను, అయిన 12 సంవత్సరములో అతని మొత్తం పొదుపు ఎంత?

4. ఒక సభా భవనం (ఆడిటోరియం)లో కుర్చీలు మొత్తం 27 వరుసలలో కలవు. మొదటి వరుసలో 20 కుర్చీలు, రెండవ వరుసలో 22 కుర్చీలు, మూడవ వరుసలో 24 కుర్చీలు గలవు, అయిన 15వ వరుసలో ఎన్ని కుర్చీలు ఉంటాయి మరియు సభాభవనంలో మొత్తం ఎన్ని కుర్చీలు ఉంటాయి?

5. కార్గిల్‌లో ఒక వారంలోని సోమవారం నుండి శనివారం వరకు ఉష్ణోగ్రతలను నమోదు చేశారు. అవి అంక శ్రేఢిలో ఉన్నాయని తెలిసింది సోమవారం మరియు శనివారము ఉష్ణోగ్రతల మొత్తం మంగళవారము మరియు శని వారముల మొత్తం కంటే 5° సెల్సియస్‌లు ఎక్కువ ఉంది. ఒక వేళ బుధవారం ఉష్ణోగ్రత -30° సెల్సియస్‌లు అయిన ప్రతి రోజు ఉష్ణోగ్రతలను కనుగొనండి.

6. ప్రపంచ పర్యావరణ దినోత్సవము సందర్భంగా త్రిభుజాకృతిలో ఉన్న ప్రాంతంలో మొక్కలను నాటే కార్యక్రమమును చేపట్టటం జరిగింది. మొదటి వరసలోఒక మొక్క , రెండవ వరుసలో రెండు మొక్కలు, మూడవ వరుసలో మూడు మొక్కలు ఈ విధంగా 25 వరుసలలో మొక్కలను నాటిరి. అయిన మొత్తం ఎన్ని మొక్కలను నాటిరి?

సంకీర్ణ ప్రశ్న సంగ్రహము 3

1. కింద ఇవ్వబడిన ఐచ్చికములలో సరియైన సమాధానమును గుర్తించండి.

(1) $-10, -6, -2, 2, \ldots$ ఈ క్రమము ....

(A) అంకశ్రేఢి, కారణం $d = -16$ (B) అంకశ్రేఢి, కారణం $d = 4$

(C) అంకశ్రేఢి, కారణం $d = -4$ (D) అంకశ్రేఢి, కాదు.

(2) మొదటి పదము -2 , పదాంతరము -2 గల అంకశ్రేఢిలోని మొదటి నాలుగు పదాలు .....

(A) $-2, 0, 2, 4$ (B) $-2, 4, -8, 16$

(C) $-2, -4, -6, -8$ (D) $-2, -4, -8, -16$

(3) మొదటి 30 సహజ సంఖ్యల మొత్తం క్రింది వాటిలో ఏది?

(A) 464 (B) 465 (C) 462 (D) 461

(4) ఇచ్చిన అంకశ్రేఢి యొక్క $t_n = 4$, $n = 7$, $d = -4$ $a = ...$

(A) 6 (B) 7 (C) 20 (D) 28

(5) ఒక అంకశ్రేఢి లో $a = 3.5$, $d = 0$, $n = 101$, అయిన $t_n = ...$

(A) 0 (B) 3.5 (C) 103.5 (D) 104.5

(6) ఒక అంకశ్రేఢి మొదటి రెండు పదాలు −3, 4. అయిన 21వ పదము . . .

(A) −143 (B) 143 (C) 137 (D) 17

(7) ఒక అంకశ్రేఢిలో $d = 5$ అయిన $t_{18} - t_{13} = ...$

(A) 5 (B) 20 (C) 25 (D) 30

(8) 3 యొక్క మొదటి ఐదు గుణిజాల మొత్తం . . .

(A) 45 (B) 55 (C) 15 (D) 75

(9) 15, 10, 5, . . . ఈ అంకశ్రేఢిలో మొదటి 10 పదాల మొత్తం . . .

(A) −75 (B) −125 (C) 75 (D) 125

(10) ఒక అంకశ్రేఢి యొక్క మొదటి పదము 1, nవ పదము 20. ఒక వేళ $S_n = 399$, అయిన $n = ...$

(A) 42 (B) 38 (C) 21 (D) 19

2. −11, −8, −5, . . . , −49 ఈ అంకశ్రేఢిలో చివరి నుండి నాలుగవ పదమును కనుగొనండి.

3. ఒక అంక శ్రేఢిలో 10వ పదము 46. 5వ మరియు 7వ పదాల మొత్తం 52. అయిన ఆ శ్రేఢిని కనుగొనండి.

4. అంకశ్రేఢి యొక్క 4వ పదము −15, 9వ పదము −30, అయిన ఆ శ్రేఢిలోని మొదటి 10 పదాల మొత్తంను కనుగొనండి.

5. రెండు అంకశ్రేఢులు 9, 7, 5, . . . మరియు 24, 21, 18, ... గా ఇవ్వబడినవి. ఈ రెండు అంకశ్రేఢిల nవ పదములు సమానం అయిన n యొక్క విలువను కనుగొనుము మరియు nవ పదమును కనుగొనండి.

6. ఒక అంకశ్రేఢి యొక్క మూడవ మరియు ఎనిమిదవ పదాల మొత్తం 7 అయిన ఏడవ మరియు 14వ పదాల మొత్తం −3 అయినట్లయితే 10వ పదమును కనుగొనండి.

7. ఒక అంకశ్రేఢి యొక్క మొదటి పదము −5 చివరి పదము 45. ఒకవేళ ఆ పదాలన్నింటి మొత్తం 120 అయిన ఆ పదాలెన్ని? మరియు వాటి పదాంతరము ఎంత?

8. 1 నుండి n సహజ సంఖ్యల మొత్తం 36. అయిన n విలువను కనుగొనండి.

9. 207 అనే సంఖ్య యొక్క మూడు భాగాలు అంకశ్రేఢిలో ఉండి, చిన్న రెండు భాగాల లబ్ధం 4623 అయ్యేట్లు దానిని మూడు భాగాలుగా చేయండి.

10. ఒక అంకశ్రేఢిలో 37 పదాలు గలవు. అన్నింటికి మధ్యలో గల మూడు పదాల మొత్తం 225 మరియు చివరి మూడుపదాల మొత్తం 429 అయిన ఆ అంకశ్రేఢిని రాయండి.

11.★ అంకశ్రేఢిలో మొదటి పదం a , రెండవ పదము b , మరియు చివరి పదం c. అయిన ఆ అంకశ్రేఢిలో ఆ పదాలన్నింటి మొత్తం $\frac{(a+c)(b+c-2a)}{2(b-a)}$ కి సమానం అని చూపండి.

12.★ ఒక అంకశ్రేఢిలోని మొదటి p పదాల మొత్తం అనేది మొదటి q పదాల మొత్తానికి సమానం అయిన వాటి మొదటి (p + q) పదాల మొత్తము సున్న అవుతుందని చూపండి. $(p \neq q)$

13.★ అంకశ్రేఢిలో m వ పదంయొక్క m రెట్లు nవ పదం యొక్క n రెట్లకు సమానం అయిన దాని $(m + n)$వ పదము సున్న అవుతుందని చూపండి.

14. 1000 రూ॥ల సొమ్ము 10% బారు వడ్డీ ప్రకారం పెట్టుబడి పెట్టారు, అయిన ప్రతి సంవత్సరము చివర లభించే వడ్డీ సొమ్ము అంకశ్రేఢి అవుతుందా సరి చూడండి. అది అంకశ్రేఢి అయినట్లయితే, 20 సంవత్సరాల తర్వాత లభించే వడ్డీ సొమ్మును కనుగొనండి. దానికై కింది కృత్యమును పూర్తి చేయండి.

బారు వడ్డీ = $\frac{P \times R \times N}{100}$

1 సంవత్సరం తర్వాత లభించే బారు వడ్డీ = $\frac{1000 \times 10 \times 1}{100}$ = □

2 సంవత్సరాల తర్వాత లభించే బారు వడ్డీ = $\frac{1000 \times 10 \times 2}{100}$ = □

3 సంవత్సరాల తర్వాత లభించే బారు వడ్డీ = $\frac{\square \times \square \times \square}{100}$ = 300

ఇలాగే 4, 5, 6 సంవత్సరాల తర్వాత లభించే వడ్డీలు వరుసగా 400, □, □

ఈ సంఖ్యల ద్వారా d = □, మరియు a = □

20 సంవత్సరాల తర్వాత లభించే బారు వడ్డీ,

$t_n = a+(n-1)d$

t_{20} = □ +(20−1) □

t_{20} = □

20 సంవత్సరాల తర్వాత లభించే బారు వడ్డీ = □

NZVCK7

4 ఆర్థిక ప్రణాళిక

పదండి నేర్చుకుందాం

- జి.ఎస్.టి పరిచయం
- జి.ఎస్.టి.లెక్కింపు, ఇన్‌పుట్ టాక్స్ క్రెడిట్
- పన్ను రశీదు (టాక్స్ ఇన్‌వాయిస్)
- షేర్స్, మ్యూచ్‌వల్ ఫండ్ మరియు SIP

పదండి చర్చిద్దాం

టీచరు : విద్యార్థి మిత్రులారా, మన దేశంలో వ్యాపారం కొరకు ఎలాంటి పన్ను విధానం ఉంది?

ఆయుష్ : మన దేశంలో జి.ఎస్.టి అనగా వస్తు మరియు సేవల పన్ను అనే పన్ను విధానం కలదు.

టీచరు : గుడ్! దాని గురించి మీకు ఏమేమి తెలుసు?

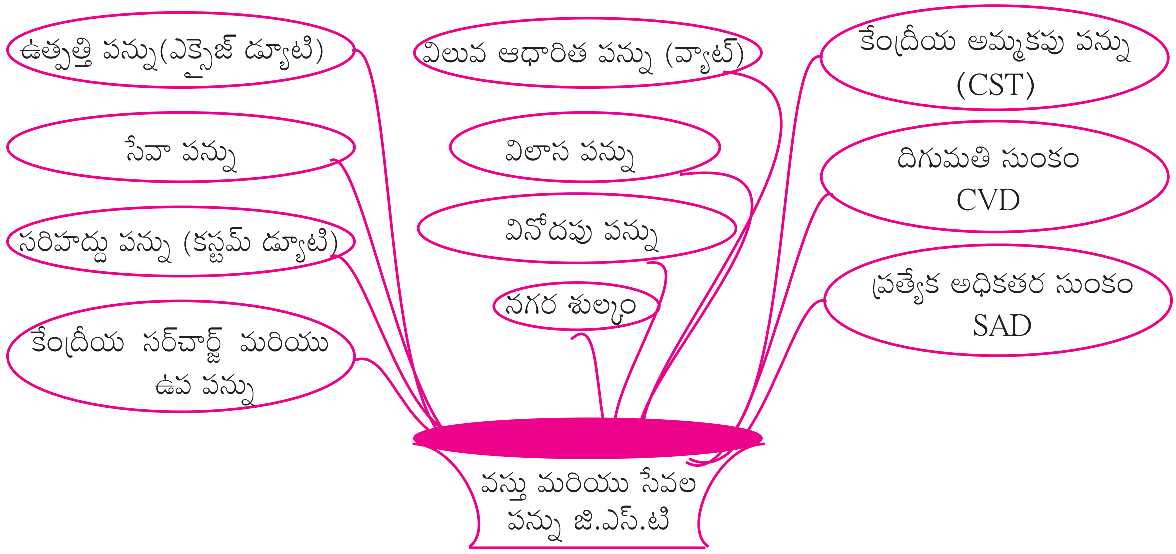
అయాన్: GST అనగా **G**oods and **S**ervice **T**ax.

ఆయుష్: దేశం మొత్తం ఒకే పన్ను విధానం అమలులోకి వచ్చింది.

టీచరు : నిజము. దీనికి ముందు వివిధ రాష్ట్రాలలో రకరకాల పన్నులు వేరువేరు సందర్భాలలో చెల్లించవలసి వచ్చేది. ఇంతకు ముందున్న పన్నులలో ఏ వస్తువులు వస్తు సేవా పన్నులలో అంతర్భాగము(విలీనం) చేయడం జరిగిందో, వాటిని కింది పటంను చూసి చెప్పండి.

షఫిక్ : ఉత్పత్తి పన్ను, సరిహద్దు పన్ను, వ్యాట్, వినోదపు పన్ను, కేంద్రీయ అమ్మకపు పన్ను, సేవా పన్ను, నగర శుల్కము మొదలగునవి

టీచరు : ఈ అన్ని పన్నులను రద్దు చేసి ఇప్పుడు కేవలం వస్తుసేవల పన్ను అనే ఒకే పన్ను వస్తువులపై, సేవలపై, కొనుగోలు అమ్మకాలపై విధించడం జరుగుతుంది. ఈ పన్ను విధానం జూలై 1, 2017 నుండి అమలులోకి వచ్చింది అందుకే 'ఒకే దేశం ఒకే పన్ను ఒకే అంగడి' అని అంటారు.



తెలుసుకుందాం

పన్ను రశీదు (Tax Invoice)

వస్తువుల కొనుగోలు పన్ను రశీదు (నమూన)

SUPPLIER : A to Z SWEET MART **GSTIN :27ABCDE1234H1Z5**
143, Shivaji Rasta, Mumbai : 400001 Maharashtra
Mob. No. 92636 92111 email : atoz@gmail.com
Invoice No. GST/110 **Invoice Date: 31–Jul–2017**

S. No.	HSN code	Name of Product	Rate	Quantity	Taxable Amount	CGST		SGST		Total
						Rate	Tax	Rate	Tax	Rs.
1	210690	మిఠాయి	రూ॥ 400 ప్ర.కిలో	500 గ్రా	200.00	2.5%	5.00	2.5%	5.00	210.00
2	210691	చాక్లెట్లు	రూ॥ 80	1 బార్	80.00	14%	11.20	14%	11.20	102.40
3	2105	ఐస్ క్రీమ్	రూ॥ 200	1 ప్యాక్ (500 గ్రా)	200.00	9%	18.00	9%	18.00	236.00
4	1905	బ్రెడ్	రూ॥ 35	1 ప్యాక్	35.00	0%	0.00	0%	0.00	35.00
5	210690	వెన్న	రూ॥ 500 ప్ర.కిలో	250 గ్రా	125.00	6%	7.50	6%	7.50	140.00
					మొత్తం రూ॥లు		**41.70**		**41.70**	**723.40**

వేద్ : మాకు బిల్లులో కొన్ని కొత్త పదాలు కనిపిస్తున్నాయి. వాటి అర్థమును చెప్పండి

టీచరు : **CGST** మరియు **SGST** అనేవి GST యొక్క రెండు భాగాలు. **CGST** అనగా (Central Goods and Services Tax) **కేంద్రీయ వస్తు, సేవల పన్ను** ఇది కేంద్ర ప్రభుత్వంనకు చెందుతుంది. **SGST** అనగా (State Goods & Services Tax) **రాష్ట్ర వస్తు, సేవల పన్ను** ఇది రాష్ట్ర ప్రభుత్వానికి చెందుతుంది.

రియా : పై పట్టికలో పైన కుడివైపు మూలలో అంకెలు మరియు అక్షరాల పెద్ద వరుస కనిపిస్తుంది అదేమిటి?

టీచరు : ఇది జిఎస్‌టిన్ అనగా వ్యాపారి యొక్క గుర్తింపు సంఖ్య (GSTIN - GST Identification Number). ఏ వ్యాపారి యొక్క గత సంవత్సరము వార్షిక అమ్మకాల మొత్తం 20 లక్షల కంటే ఎక్కువ ఉంటుందో వారు ఈ సంఖ్యను తీసుకోవడం తప్పనిసరి. PANలో ఏరకంగా 10 అక్షరలు ఉంటాయో అలాగే ప్రతి వ్యాపారికి 15 అంకెలు అక్షరాలు గల GSTIN ఇవ్వబడుతుంది. ఈ 15 అంకెల అక్షరాలలోనే 10 అంకె అక్షరాలు ఆ వ్యాపారి యొక్క PAN చేర్చబడి ఉంటుంది.

ఉదాహరణకు. : 27 A B C D E 1 2 3 4 H 1 Z 5 (చివర అంకె లేదా అక్షరము వీటిలో ఒకటి ఉంటుంది)

- 27 → రాష్ట్రం కోడ్ రెండంకెలు
- A B C D E 1 2 3 4 H → 10 అక్షరములు PAN
- 1 → ఒక నమోదు కొరకు 1 అంకె
- Z → అందరికి సమానం (బై డిఫాల్ట్)
- 5 → చెక్ సమ్ డిజిట్

(చెక్ సమ్ డిజిట్ అనగా GST యొక్క వెబ్‌సైట్‌లో GSTIN వేసిన ఈ నంబర్ సరిఅయినదా లేదా తెలుస్తుంది.)

‘27’ అనేది మహారాష్ట్ర రాష్ట్రకోడ్ (State Code). 27 అనే కోడ్ నుబట్టి ఈ వ్యాపారి నమోదు మహారాష్ట్రలో అయ్యిందని తెలుస్తుంది.

జెని : రశీదులో HSN కోడ్ అనే పదం కూడా ఉంది.

టీచరు: HSN కోడ్ అనగా ఆ వస్తువు యొక్క వర్గీకరణములో ప్రత్యేకమైన సంఖ్య ఉంటుంది. HSN అనగా **H**armonized **S**ystem of **N**omenclature.

జోసఫ్ : పన్ను రశీదులో దుకాణం పేరు చిరునామా, తేది, రశీదు నంబరు మొబైల్ నంబర్ మరియు ఇ-మెయిల్ ఐడి కూడా గలవు.

టీచరు : ఇప్పుడు ఈ రశీదులోని వస్తువు పన్నును ఎలా లెక్కిస్తారో చూద్దాం. దాని కొరకు కింది వాక్యాలలోని గడులను పూరించండి. రశీదులో మిఠాయి యొక్క ధర 400 రూ॥లు గలదు. అరకిలో మిఠాయి తీసుకున్నాము కావున దాని విలువ 200 రూ॥లు అవుతుంది.

- ✦ మిఠాయిపై కేంద్ర పన్ను 2.5% చొప్పున ____ రూ॥లు అదే విధంగా రాష్ట్ర పన్ను ____ చొప్పున 5 రూ॥లు.
- ✦ దీని నుండి మిఠాయిపై వస్తు సేవల పన్ను రేటు 2.5%+2.5% = 5% మరియు మొత్తం పన్ను 10 రూ॥లు.
- ✦ ఇదే విధంగా చాక్లెట్లపై వస్తు సేవల పన్ను రేటు ____ % కావున దానిపైన పన్ను ____ రూ॥లు.
- ✦ ఐస్‌క్రీమ్ పై వస్తు సేవల పన్ను రేటు ____ % కావున ఐస్‌క్రీమ్‌ల ధర ____ రూ॥లు
- ✦ వెన్న పై కేంద్రం రేటు ____ % రాష్ట్రం రేటు ____ % లు కలిపి వస్తుసేవల పన్ను రేటు ____ %

ఆదిత్య : బ్రెడ్ పన్నురేటు 0% కలదు. అదే విధంగా కేంద్రం మరియు రాష్ట్ర పన్ను రేట్లు సమానంగా ఉన్నాయి.

నినాద్ : వస్తువుల రకాన్ని బట్టి పన్నురేటు వేర్వేరుగా కలవు. అవి 0%, 5%, 12%, 18% మరియు 28%.

టీచరు : ప్రతి వస్తువుపై పన్ను రేటు ప్రభుత్వం నిర్ణయిస్తుంది. ఇప్పుడు ఒక సేవ రశీదు నమూనాను చూద్దాం. ఇచ్చిన సమాచారము నుండి ఖాళీలను పూరించి సేవా రశీదును పూర్తి చేయండి.

సేవలందించిన టాక్స్ ఇన్‌వాయిస్ (నమునా)

ఆహార్ సోనేరి, ఖేడ్ శివాపూర్, పూణె **Invoice No. 58**

Mob. No. 7588580000 email - ahar.khed@yahoo.com

GSTIN : 27 AAAAA5555B1ZA **Invoice Date : 25-Dec-2017**

S A Code (SAC)	Food items	Qty	Rate (in Rs.)	Taxable amount	CGST		SGST	
9963	Coffee	1	20	20.00	2.5%	0.50 రూ.	2.5%	. . .
9963	Masala Tea	1	10	10.00	. . . .	. . .	2.5%	. . .
9963	Masala Dosa	2	60	. . . .	2.5%	. . .	. . .	. . .
			Total	. . .		. . .		. . .
				Grand Total = -------- రూ॥లు				

టీచరు : వస్తువులు మరియు సేవలు ఈ రెండు రశీదులను నిశితంగా పరిశీలించి రెండింటిలోని కోడ్‌లలో గల తేడాలను వెతకండి చూద్దాం.

ప్యాట్రిక్ : వస్తు బిల్లుపై HSN అనే కోడ్ ఇవ్వబడింది. అల్పాహారశాల యొక్క బిల్లుపై SAC అనే కోడ్ కనిపిస్తుంది.

టీచరు : SAC అనగా సేవల వర్గీకరణములోని ప్రత్యేక సంఖ్యలు ఉంటాయి. వాటినే SAC - **S**ervice **A**ccounting **C**ode అని అంటారు.

కింది పట్టికలోని కొన్ని వస్తు, సేవలు మరియు వాటిపై గల పన్నుల రేటు నమూనాకై ఇవ్వబడినవి.

క్ర.సం	రకము	పన్నురేటు	వస్తు-సేవల రకాలు
I	శూన్యరేటు (Nil rated)	0%	**వస్తువులు** - ఆహారంతో పాటు జీవనాధార వస్తువులు, ఆకుకూరలు, పండ్లు, పాలు, ఉప్పు, మట్టి పాత్రలు మొదలగునవి. **సేవలు** - ధర్మాధాయ సంస్థల పనులు, నీటి రవాణా, రోడ్ల, మరియు వంతెనెల వినియోగం, విద్య మరియు ఆరోగ్య సేవలు, ప్రజాగ్రంథాలయాలు, వ్యవసాయ సంబంధ సేవలు మొదలగునవి.
II	తక్కువ రేటు	5%	**వస్తువులు** - సాధారణంగా ఉపయోగించే వస్తువులు - LPG సిలిండర్. తేనీరు, నూనె, తేనె, నిల్వ చేసిన కూరగాయలు, లవంగాలు, మిరియాలు, మసాలలు, మిఠాయిలు మొదలగునవి. **సేవలు** - రైలు రవాణా, బస్‌రవాణా, టాక్సీసేవలు విమాన సర్వీసులు (ఎకానమి క్లాస్), హోటళ్ళలోని తినుభండారాలు మరియు పండ్ల రసాలు మొదలగునవి.
III	మధ్యస్త రేటు (స్థాయి I)	12%	**వస్తువులు** - నిత్యావసర వస్తువులు వెన్న, నెయ్యి, ఎండు ఫలాలు, కూరగాయలు మరియు పండ్ల నుండి తయారు చేసిన పచ్చళ్ళు, తాండ్ర, జామ్, చెట్నీలు,మొబైల్లు మొదలగునవి. **సేవలు** - ముద్రిత పనులు, అతిథి గృహాలు, నిర్మాణ సంబంధ సేవలు మొదలగునవి.
IV	మధ్యస్త రేటు (స్థాయి II)	18%(పెద్ద సంఖ్యలో వస్తువులు, సేవలను చేర్చడం జరిగింది)	**వస్తువులు** - మార్బల్, గ్రానైట్, పర్‌ఫ్యూమ్స్, లోహపు వస్తువులు, కంప్యూటర్లు, ప్రింటర్లు, మానిటర్లు, CCTV మొదలగునవి. **సేవలు** -కొరియర్ సర్వీసెస్, అవ్‌ట్ డోర్ కాటరింగ్, సర్కస్, నాటిక ప్రదర్శనలు, సినిమాలు, ద్రవ్యవినిమయ సేవలు, షేర్ ట్రేడింగ్‌ల బ్రోకరేజ్ సేవలు మొదలగినవి.
V	అధిక రేటు	28%	**వస్తువులు** - విలాస వస్తువులు - మోటారు సైకిల్ పార్ట్స్, లగ్జరీ కార్లు, పాన్ మసాలా, వ్యాక్యూమ్ క్లీనర్, డిష్‌వాషర్, AC యూనిట్, వాషింగ్ మషిన్, పొగాకు ఉత్పత్తులు, శీతల ద్రావణాలు మొదలగునవి. **సేవలు** - ఐదు నక్షత్రాల హోటల్‌లో నివాస సదుపాయము, అమ్యూజ్‌మెంట్ పార్క్ , వాటర్ పార్క్, థీమ్ పార్క్, క్యాసినో, రేస్‌కోర్స్, IPL లాంటి ఆటలు, విమాన సర్వీసులు (బిజినెస్ క్లాస్) మొదలగున్నవి.

సందర్భము : www.cbec.gov.in (Central Board of Excise & Customs) యొక్క వెబ్‌సైట్.
ఇవి కాకుండా 0% నుండి 5% మధ్య ఏయే వస్తువులపై జి.ఎస్.టి కలదో వెతకండి.

సూచన : - ఈ పట్టిక రాస్తున్నపుడు ప్రభుత్వం నిర్ణయించిన జి.ఎస్.టి రకాలు మరియు రేట్లు తీసుకోబడినవి. వాటిలో మార్పు జరగవచ్చు. విద్యుత్, పెట్రోలు, డీజిల్ మొదలగునవి జిఎస్‌టి పరిధిలో లేవు.

కృత్యము I : మీకు అవసరమైన కనీసం పది వస్తువుల జాబితా తయారు చేయండి మరియు వాటి పై జిఎస్‌టి రేటు ఎంత అనేది ఇవ్వబడిన జాబితా వార్త పత్రికలు, ఇంటర్‌నెట్, జిఎస్‌టి పై పుస్తకాలు లేదా వస్తు కొనుగోలు బిల్లుల ద్వారా వెతికి రాయండి. మిత్రుల ద్వారా ఈ సమాచారమును సరి చూసుకోండి.

వస్తువులు	జిఎస్‌టి రేటు	వస్తువులు	జిఎస్‌టి రేటు
1.స్కెచ్ బుక్		6. - - - - --	
2.కంపాస్ పెట్టె		7.- - - - -	
3.- - - - --		8. - - - - - -	
4.- - - - - -		9. - - - - - -	
5.- - - - - -		10. - - - - - -	

కృత్యము II : కృత్యము I మాదిరిగా కనీసం పది వివిధ సేవలు (రైల్వే, ఎస్.టి, బస్ బుకింగ్ సేవ మొదలైనవి) పొందుట కొరకు జిఎస్‌టి యొక్క రేటును వెతకండి లేదా సేవా బిల్లులను సేకరించండి. వాటి నుండి కింది విధంగా పట్టికను పూర్తి చేయండి.

సేవలు	జిఎస్‌టి రేటు	సేవలు	జిఎస్‌టి రేటు
1. రైల్వే బుకింగ్		6. - - - - --	
2. కొరియర్ సర్వీస్		7. - - - - - -	
3. - - - - --		8. - - - - - -	
4. - - - - - -		9. - - - - - -	
5. - - - - - -		10. &- - - - - -	

కృత్యము III : కింది పట్టికను చూడండి మరిన్ని వస్తువుల మరియు సేవల కోడ్‌లను వెతికి రాయండి.

సేవలు	SAC	GST రేటు	వస్తువులు	HSN Code	GST రేటు
రైల్వే రవాణా సేవలు	996511	--	డ్యూలెక్స్ పెయింట్	3208	28%
విమాన సర్వీసులు (ఎకానమి)	996411	--	బాల్ బేరింగ్	84821011	28%
ద్రవ్య వినిమయ సేవలు	997157	--	స్పీడోమీటర్	8714	28%
బ్రోకర్ సేవలు	997152	--	బంగాళదుంపలు	0701	0%
ట్యాక్సి సర్వీస్	996423	--	--	--	--
5-నక్షత్రాల హోటల్ సేవలు	--	--	--	--	--
--	--	--	--	--	--

కృత్యము IV: ఏవేని 5 వస్తువులు, 5 సేవల HSN మరియు SAC పట్టికను తయారు చేయండి. ఆ పట్టికలో వస్తువులు మరియు సేవల చిత్రములను అతికించండి. ఆ వస్తువుల మరియు సేవలకై GST యొక్క రేటును వెతికి రాయండి.

సూచన : వస్తు-సేవలపై గల రేటు అదే విధంగా HSN మరియు SAC కోడ్‌లపై గల కృత్యములు మొదలగునవి వివరాలకు మాత్రమే. వీటిని కంఠస్థం చేయవలసిన అవసరం లేదు.

ప్రాజెక్ట్: మీరు వివిధ రకాలైన బిల్లులను సేకరించండి. వస్తుసరఫరా సేవలందించిన బిల్లులు మొదలైనవి. ఆ బిల్లుల జిఎస్‌టిని దృష్టిలో ఉంచుకొని పరిశీలించండి మరియు తరగతిలో చర్చించండి.

సాధించిన ఉదాహరణలు

ఉదా. (1) ఆరతి గ్యాస్ ఏజెన్సి ₹545 పన్ను వేయదగ్గ విలువగల LPG సిలిండర్‌ను వినియోగదారునికి అమ్మెను. జిఎస్‌టి రేటు 5% చొప్పున ఉన్నట్లయింతే వినియోగదారునికి ఇవ్వబడిన రశీదులో కేంద్ర మరియు రాష్ట్రాల పన్ను ఎన్ని రూపాయలు అవుతుంది? వినియోగదారుడు మొత్తం ఎంత చెల్లించవలెను? ఆరతి గ్యాస్ ఏజెన్సీ మొత్తం ఎంత వస్తు-సేవ పన్ను చెల్లించవలసివస్తుంది?

సాధన : జిఎస్‌టి పన్ను రేటు = 5% ∴ సిజిఎస్‌టి రేటు 2.5%, మరియు ఎస్‌జిఎస్‌టి రేటు = 2.5%.

జిఎస్‌టి = $\frac{2.5}{100} \times 545 = 13.625 = 13.63$ రూపాయలు

∴ జిఎస్‌టి = సిజిఎస్‌టి = 13.63 రూపాయలు

వినియోగదారుడు చెల్లించవలసిన మొత్తం = పన్ను వేయదగ్గ మొత్తం + కేంద్ర పన్ను + రాష్ట్ర పన్ను

= 545 + 13.63 + 13.63 = 572.26 రూపాయలు

ఆరతి గ్యాస్ ఎజెన్సీ కేంద్ర పన్ను = 13.63 రూ॥లు రాష్ట్ర పన్ను = 13.63 చెల్లించవలెను. అనగా మొత్తం వస్తు-సేవల పన్ను 27.26 రూ॥లు చెల్లించవలెను.

ఉదా. (2) కొరియర్ సర్వీస్ ఎజెంట్ ఒక పార్సిల్‌ను నాసిక్ నుండి నాగ్‌పూర్‌కు పంపుటకు వినియోగదారుని వద్ద నుండి 590 రూపాయలు తీసుకున్నాడు. అందులో 500 రూపాయల పన్ను విధించ దగ్గ మొత్తంపై కేంద్రం పన్ను 45 రూపాయలు రాష్ట్ర పన్ను 45 రూపాయలు అయిన దీనిలో వసూలు చేసిన వస్తుసేవల పన్ను రేటును కనుగొనండి.

సాధన : మొత్తం వస్తు సేవల పన్ను = కేంద్ర పన్ను + రాష్ట్ర పన్ను = 45 + 45 = 90 రూ॥లు.

∴ వస్తుసేవల పన్నురేటు = $\frac{90}{500} \times 100 = 18\%$

కొరియర్ సర్వీసు ఏజెంట్ వస్తు-సేవ పన్ను 18% రేటు చొప్పున వసూలు చేశాడు.

ఉదా. (3) శ్రీకర్ 50,000 రూ॥లు ముద్రిత వెల లాప్‌టాప్‌ను కొనుటకు నిర్ణయించుకొనెను. దుకాణ దారుడు ఈ వెలపై 10% డిస్కౌంట్ ఇచ్చాడు లాప్‌టాప్ పై వస్తు-సేవ పన్ను రేటు 18% అయిన దుకాణదారుడు వసూలు చేసిన కేంద్ర, రాష్ట్ర పన్నులను కనుగొనండి. శ్రీకర్‌కు ఆ లాప్‌టాప్ ఎన్ని రూపాయలకు లభించింది?

సాధన : ఇక్కడ మొదట డిస్కౌంట్‌ను కనుగొందాం. దానిని ఇచ్చిన ధర నుండి తీసివేసి మిగిలిన సొమ్ముపై 18% రేటు చొప్పున వస్తు సేవల పన్ను విధింపు చేద్దాం.

డిస్కౌంట్ = 50,000 రూ॥లపై 10% = 5,000 రూ॥లు

∴ లాప్‌టాప్ పన్ను విధించ దగ్గ ధర = 50,000 − 5,000 = 45,000 రూ॥లు.

∴ 18% జిఎస్‌టి రేటు చొప్పున కేంద్ర పన్ను = 9%

45,000 రూ॥లు పై 9% కేంద్ర పన్ను = $\frac{9}{100} \times 45000 = 4050$ రూ॥లు.

∴ SGST = 4050 రూ॥లు.

∴ లాప్‌టాప్ మొత్తం విలువ = 45000 + 4050 + 4050 = 53,100 రూ॥లు.

జవాబు : శ్రీకర్‌కు లాప్‌టాప్ 53,100 రూపాయలలో లభించింది.

> **సూచన :** పన్ను విధించే మొత్తం అనగా ఏ మొత్తంపై పన్ను విధించబడుతుందో ఆ మొత్తం. రశీదు విలువ అనగా పన్నుతో సహా ఇవ్వబడిన మొత్తం. ఉదాహరణలో నమోదు చేయబడనట్లయితే అమ్మినవెల పన్ను విధించే మొత్తం అవుతుందని అర్థం చేసుకోండి. ఎంతైతే కేంద్ర పన్ను ఉంటుందో అంతే రాష్ట్ర పన్ను ఉంటుంది.

అభ్యాస మాలిక 4.1

1. 'పావన్ మెడికల్స్' మందుల సరఫరా చేస్తారు. వారి దుకాణంలో కొన్ని మందులపై GST రేటు 12% అయిన CGST మరియు SGST ల రేట్లు ఎంత ఉంటాయి?

2. ఒక వస్తువుపై CGST రేటు 9% అయిన SGST రేటు ఎంత? అదే విధంగా GST రేటు ఎంత?

3. 'మేసర్స్ రియల్ పేయింట్' వారు ప్రతీది ₹ 2800 పన్ను విధంచే విలువ గల లస్టర్ పెయింట్ రెండు డబ్బాలు అమ్మిరి. GST రేటు 28% ఉన్నచో పన్ను రశీదులో CGST , SGST ఎన్ని రూపాయలు అయి ఉంటుంది?

4. ఒక రిస్ట్‌వాచ్ బెల్ట్ యొక్క పన్ను విధంచే వెల 586 రూ॥లు. GST రేటు 18% అయిన ఆ బెల్ట్ వినియోగదారునికి ఎన్ని రూపాయలలో లభిస్తుంది?

5. ఆట వస్తువులలోని ఒక రిమోటు కంట్రోల్ కారు యొక్క వెల జిఎస్‌టితో కలిపి 1770 రూ॥లు. జిఎస్‌టి రేటు 18% అయిన ఆ కారుపై పన్ను విధించగల వెల దానిపై CGST, SGST లను లెక్కించండి.

6. 'టిప్ టాప్ ఎలక్ట్రానిక్స్' ఒక కంపెనీకి ఒకటిన్నర టన్నుల సామర్థ్యం గలది పన్నుతో కలిపి 51,200 రూ॥ల వెల గల ఎయిర్ కండీషనర్‌ను సరఫరా చేసింది. ఎయిర్ కండీషనర్‌పై CGST రేటు 14% అయిన పన్ను రశీదులో కింది అంశాల విలువలు ఎంత చూపించి ఉంటారో కనుగొనండి.

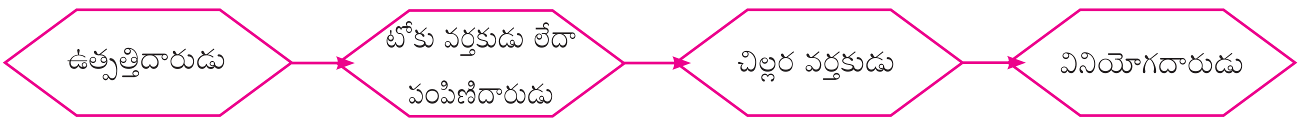
   (1) SGST రేటు (2) AC పై రేటు GST (3) ఎసి యొక్క పన్ను విధించగల వెల

   (4) GST మొత్తం సొమ్ము (5) CGST సొమ్ము (6) SGST సొమ్ము

7. ప్రసాదు 'మహారాష్ట్ర ఎలక్ట్రానిక్స్ గూడ్స్' నుండి 40,000 రూ॥ల ముద్రిత వెల గల వాషింగ్ మషీన్ కొనుగోలు చేశాడు. దానిపై దుకాణదారుడు 5% డిస్కౌంట్ ఇచ్చాడు. జిఎస్‌టి రేటు 28% అయిన ప్రసాద్‌కు ఆ వాషింగ్ మషీన్ ఎన్ని రూపాయలకు లభిస్తుంది? పన్ను రశీదులో సిజిఎస్‌టి, ఎస్‌జిఎస్‌టి ఎన్ని రూపాయలు ఉంటాయో కనుగొనండి.

తెలుసుకుందాం.

వ్యాపార గొలుసు (శృఖలం)లోని జి.ఎస్.టి. (G. S. T. in Trading Chain)



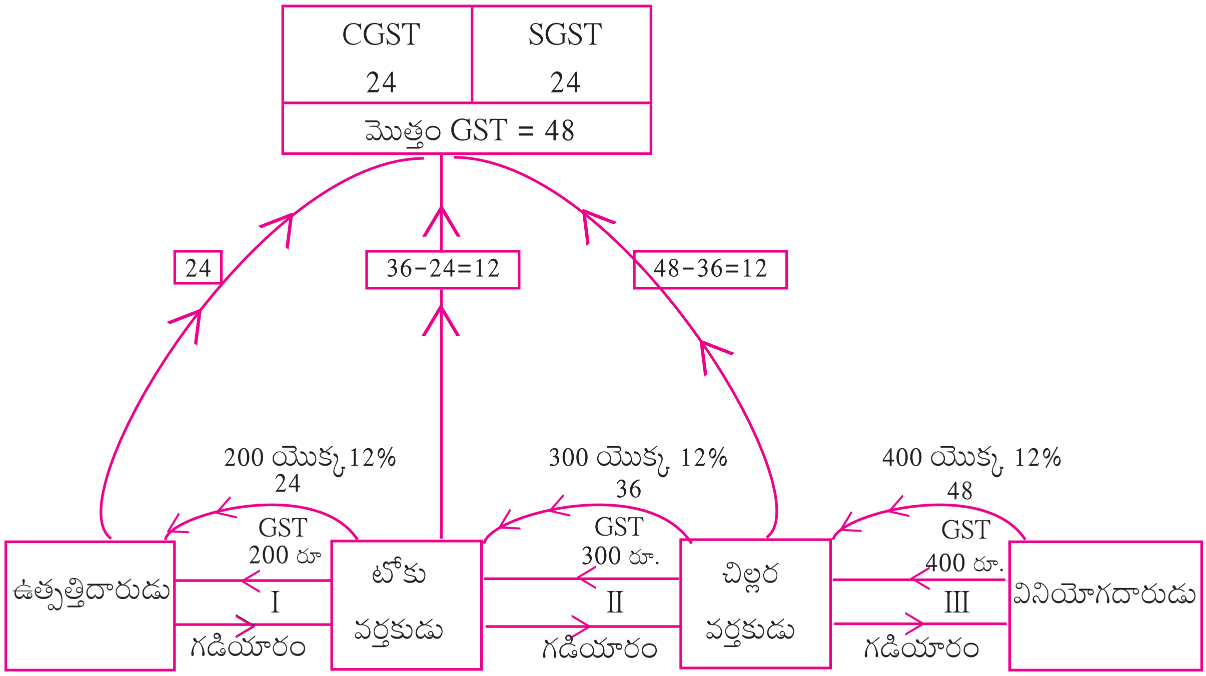
వ్యాపార గొలుసు (Trading Chain)

వ్యాపార గొలుసులోని జిఎస్‌టిని ఏవిధంగా లెక్కిస్తారో మరియు ప్రభుత్వమునకు ఎలా చెల్లిస్తారో ఒక ఉదాహరణ ద్వారా చూద్దాం.

ఉదాహరణ: ఒక ఉత్పత్తి దారుడు టోకు వర్తకునికి ఒక గడియారమును లాభముతో సహా 200రూ॥లకు అమ్మెను అనుకోండి టోకు వర్తకుడు చిల్లర వర్తకునికి 300 రూ॥లకు మరియు చిల్లర వర్తకుడు వినియోగదారునికి ఆ గడియారమును 400రూ॥లకు అమ్మెను. GST రేటు 12% అయిన ఉత్పత్తిదారుడు, టోకు మరియు చిల్లరవ ర్తకులు కింది విధంగా ఇన్‌పుట్ టాక్స్ క్రెడిట్ తీసుకుని మిగిలిన టాక్స్ ఎలా చెల్లిస్తారో దానిని కింది ప్రవాహ పట్టికల ద్వారా నేర్చుకుందాం.

వివరణ:

ఉత్పత్తిదారుని నుండి గడియారము వినియోగదారునికి చేరుటకు మూడు లావాదేవీ జరిగినవి. ప్రతి లావాదేవిలో అయిన పన్ను లెక్కింపు, పోగు అయిన పన్ను రాష్ట్రప్రభుత్వానికి, కేంద్ర ప్రభుత్వానికి ఎలా చేరవేస్తారో. ఈ కింది ప్రవాహ పట్టికలలో చూపబడింది. దాని సంపూర్ణ పట్టికలు కింద ఇవ్వబడినవి.



పై లావాదేవిలలో మూడు వేర్వేరు ఆర్థిక వ్యవహారాలు ఒకే రాష్ట్రంలో జరిగినవి. వాటి ప్రతీ పన్ను రశీదులో GST యొక్క లెక్కింపును అర్థం చేసుకోవడానికై క్లుప్తంగా కింద ఇవ్వబడింది.

పన్ను రశీదు I లోని GST లెక్కింపు	
గడియారము వెల	= ₹ 200
CGST 6%	= ₹ 12
SGST 6%	= ₹ 12
మొత్తం	= ₹ 224

ఉత్పత్తిదారుని పన్ను రశీదు

(B2B)

పన్ను రశీదు II లోని GST లెక్కింపు	
గడియారము వెల	= ₹ 300
CGST 6%	= ₹ 18
SGST 6%	= ₹ 18
మొత్తం	= ₹ 336

టోకువర్తకుని పన్ను రశీదు

(B2B)

పన్ను రశీదు III లోని GST లెక్కింపు	
గడియారము వెల	= ₹ 400
CGST 6%	= ₹ 24
SGST 6%	= ₹ 24
మొత్తం	= ₹ 448

చిల్లర వర్తకుని పన్ను రశీదు

(B2C)

ఇవి గుర్తుంచుకుందాం.

ఇద్దరు GSTIN వ్యాపారస్తుల మధ్య జరిగిన లావాదేవిని Business to Business క్లుప్తంగా **B2B** అంటారు.

వస్తువు ఉత్పత్తి అయిన దగ్గర నుండి వినియోగదారుని వద్దకు చేరుకునే వరకు ఆ గొలుసులోని చివరి గడిలోని లావాదేవిని Business to Consumer క్లుప్తంగా **B2C** అంటారు.

ఈ వ్యాపార గొలుసులోని ప్రతీ వ్యాపారి చెల్లించిన GST యొక్క వివరణ కింది విధంగా ఉంది.

	CGST		SGST		మొత్తం GST
• ఉత్పత్తిదారుడు	₹ 12	+	₹ 12	=	₹ 24 రూ॥లు చెల్లించెను.
• టోకు వర్తకుడు	₹ 6	+	₹ 6	=	₹ 12 రూ॥లు చెల్లించెను.
• చిల్లర వర్తకుడు	₹ 6	+	₹ 6	=	₹ 12 రూ॥లు చెల్లించెను.
మొత్తం చెల్లింపు	₹ 24	+	₹ 24	=	₹ 48

సూచన : ప్రతి వ్యాపారి వారివారి స్థాయిలలో సేకరించిన పన్ను నుండి ఇన్‌పుట్ టాక్స్ క్రెడిట్ అనగా కొనుగోలు సమయంలో వారు చెల్లించిన పన్నును తీసివేసి GST ని చెల్లించారు. చివరకి వినియోగదారునికి ఆ గడియారము 448రూ॥లకు లభించింది. అందులోని 48రూపాయలు నికర పన్ను పైన చూపిన విధంగా పరోక్షంగా వినియోగదారుడు చెల్లించాడు. కావున GST అనేది పరోక్ష పన్ను (Indirect Tax)అంతకు ముందు టోకు మరియు చిల్లర వ్యాపారస్తుల కొనుగోలుపై చెల్లించిన పన్ను వారికి తిరిగి లభిస్తుంది.

కొనుగోలు సమయంలో చెల్లించిన పన్ను యొక్క తీసివేత (ITC – ఇన్‌పుట్ టాక్స్ క్రెడిట్)

వస్తువును తయారు చేసిన దగ్గరి నుండి దానిని ఉపయోగించే వినియోగదారునికి చేరేంత వరకు మధ్యలో ప్రతి లావాదేవిలో GST లెక్కించబడుతుంది. వస్తువును అమ్మేటపుడు వ్యాపారి సేకరించిన (వసూలుచేసిన) పన్ను అనగా అవుట్‌పుట్ టాక్స్. అదే వ్యాపారి వస్తువును కొనుగోలు చేసేటపుడు ఇచ్చిన పన్ను అనగా ఇన్‌పుట్ టాక్స్. ఆ వ్యాపారి వసూలు చేసిన పన్ను నుండి చెల్లించిన పన్నును తీసుకొనిన దానిని ఇన్‌పుట్ టాక్స్ క్రెడిట్ అంటారు.

∴ నికర GST = అవుట్‌పుట్ టాక్స్ – ఇన్‌పుట్ టాక్స్ క్రెడిట్ (ITC)

క్లుప్తంగా ప్రభుత్వానికి పన్నును చెల్లించేపుడు గొలుసులోని ప్రతి వ్యాపారి వారు కొనుగోలు చేస్తున్నపుడు చెల్లించిన పన్నులను, అమ్మే సమయంలో వసూలు చేసిన పన్ను నుండి తీసివేసి మిగిలిన పన్నును చెల్లిస్తాడు.

సాధించిన ఉదాహరణలు

ఉదా. (1) శ్రీ రోహిత్ ఒక చిల్లర వర్తకుడు. ఆయన వస్తువుల కొనుగోలు సమయంలో 6500 రూపాయల జిఎస్‌టి చెల్లించాడు మరియు వాటిని అమ్మి 8000 రూపాయల జిఎస్‌టి వసూలు చేశాడు. అయిన (i) ఇన్‌పుట్ టాక్స్ మరియు అవుట్‌పుట్ టాక్స్‌లు ఎంత? (ii) శ్రీ రోహిత్ కు ఎంత ఇన్‌పుట్ టాక్స్ క్రెడిట్ లభిస్తుంది? (iii) అతడు చెల్లించవలసిన జిఎస్‌టిని కనుగొనండి. (iv) కేంద్ర మరియు రాష్ట్రాలకు చెల్లించ వలసిన పన్నులను కనుగొనండి.

సాధన : శ్రీ రోహిత్ యొక్క చెల్లించవలసిన పన్ను అనగా ప్రభుత్వానికి చెల్లించవలసిన పన్ను.

(i) అమ్మే సమయంలో వసూలు చేసినవి (అవుట్ పుట్ టాక్స్) = 8000 రూ॥లు

(ii) కొనుగోలు సమయంలో చెల్లించినవి (ఇన్‌పుట్ టాక్స్) = 6500 రూ॥లు

అనగా ఇన్‌పుట్ టాక్స్ క్రెడిట్ (ITC) = 6500రూ॥లు

(iii) నికర పన్ను = అమ్మే సమయంలో వసూలు చేసిన పన్ను – ఇన్‌పుట్ టాక్స్ క్రెడిట్ (ITC)

= 8000 – 6500 = 1500రూ॥లు

(iv) ∴ కేంద్రానికి చెల్లించవలసిన నికర పన్ను = $\frac{1500}{2}$ = 750రూ॥లు మరియు రాష్ట్రానికి చెల్లించవలసిన నికర పన్ను = 750 రూ॥లు.

ఉదా. (2) మేసర్స్ జయ్ కెమికల్స్ 8000రూ॥ల పన్ను విధించే విలువగల లిక్విడ్ సోప్‌ను కొనుగోలు చేసింది మరియు వినియోగదారునికి 10000రూ॥లు పన్ను విధించే విలువకు అమ్మెను. GST రేటు 18% అయిన మేసర్స్ జయ్ కెమికల్స్ కేంద్ర ప్రభుత్వానికి రాష్ట్ర ప్రభుత్వానికి చెల్లించవలసిన పన్నులను కనుగొనండి.

సాధన : కొనుగోలు సమయంలో చెల్లించిన పన్ను (ఇన్‌పుట్ టాక్స్) = 8000 రూపాయల కొనుగోలుపై 18% రేటు చొప్పున చెల్లించిన పన్ను

$= \frac{18}{100} \times 8000$

= 1440 రూపాయలు

∴ ITC = 1440 రూపాయలు

అవుట్ పుట్ టాక్స్ = అమ్మే సమయంలో వినియోగదారుని వద్ద వసులు చేసిన పన్ను

$= \frac{18}{100} \times 10000$

= 1800 రూపాయలు

నికర పన్ను = అవుట్ పుట్ టాక్స్ – ITC

= 1800 – 1440 = 360 రూపాయలు

మేసర్స్ జయ్ కెమికల్స్ కేంద్రానికి చెల్లించవలసిన పన్ను = 180రూ॥లు మరియు రాష్ట్రానికి చెల్లించవలనిన పన్ను = 180రూ॥లు

ఉదా. (3) మేసర్స్ జయ్ కెమికల్స్ 8000 రూ॥ల (పన్నుతో సహా) లిక్విడ్ సోప్‌ను కొనుగోలు చేశారు మరియు వినియోగదారునికి 10,000 రూ॥ల (పన్నుతో సహా) అమ్మారు. అయిన జయ్ కెమికల్స్ కేంద్రానికి రాష్ట్రనికి చెల్లించే నికర పన్నులను కనుగొనండి. ఇక్కడ పన్ను రేటు18%

సాధన : ఇక్కడ వస్తువుల వెల పన్నుతో కలిపి ఇవ్వబడినవి అని గమనించండి.

పన్నుతో కలిపి వస్తువు వెల = పన్ను విధించే వెల + పన్ను

లిక్విడ్ సోప్ యొక్క పన్ను విధించే వెల 100రూ॥లు అయినట్లయితే పన్నుతో సహా వెల 118 రూ॥లు అవుతుంది.

$$\frac{\text{పన్నుతో సహా వెల}}{\text{పన్ను విధించే వెల}}$$ ఈ నిష్పత్తి స్థిరాంకం అవుతుంది.

118రూ॥ల మొత్తం వెలకు 100రూ॥ల పన్ను విధించే వెల అయిన 8000రూ॥ల మొత్తం వెలకు, x రూ॥ల పన్ను విధించే వెల అనుకుందాం.

$$\therefore \frac{x}{8000} = \frac{100}{118}$$

$$\therefore x = \frac{8000}{118} \times 100 = 6779.66$$ రూ॥లు

$\therefore$ కొనుగోలు సమయంలో చెల్లించిన GST = 8000 – 6779.66

$\therefore$ ఇన్‌పుట్ టాక్స్ = 1220.34రూ॥లు. $\therefore$ ITC = 1220.34రూ॥లు.

అదే విధంగా 10,000రూ॥లు. మొత్తం వెలకు, y రూపాయలు పన్ను విధించే వెల అనుకొందాం.

$$\therefore \frac{y}{10000} = \frac{100}{118}$$

$$\therefore y = \frac{10,00,000}{118} = 8474.58$$ రూపాయలు

$\therefore$ అమ్మకపు సమయంలో వసూలు చేసిన పన్ను (అవుట్‌పుట్ టాక్స్) = 10000.00 – 8474.58

= 1525.42రూ॥లు

$\therefore$ నికర పన్ను = వసూలు చేసిన పన్ను – తీసివేయ వలసిన సొమ్ము = 1525.42 – 1220.34

= 305.08రూ॥లు

$\therefore$ కేంద్రానికి చెల్లించే నికర పన్ను రాష్ట్రానికి చెల్లించేనికర పన్ను= 305.08 ÷ 2 = 152.54రూ॥లు

జవాబు : జయ్ కెమికల్స్ కేంద్రానికి, రాష్ట్రానికి చెల్లించవలసిన నికర పన్నులు ప్రతిదానికి 152.54రూ॥లు.

సూచన : ఉదా. 2 మరియు 3 లను జాగ్రత్తగా నేర్చుకోండి. లావాదేవీలలో మీరు ఈ రెండింటిలోని పన్ను రశీదులను చూడవచ్చు. కావున దుకాణదారుడు వస్తువుల ముద్రిత వెల పన్నుతో సహా ఇవ్వబడిందా లేదా ముద్రిత వెలపై పన్నును లెకిస్తారా? అనేది అర్థం చేసుకుని తర్వాత కొనుగోలు చేయండి.

ICT Tools or Links

సూచించిన తేదిలో పన్ను చెల్లింపులు చేసి, తర్వాత ఇవ్వబడిన తేదిలలో పన్ను వివరణ పత్రము (GST Returns)ను దాఖలు చేయుట తప్పనిసరి. ఈ అన్ని విషయాలు ఇప్పుడు ఆన్‌లైన్‌లో చేయవచ్చును. www.gst.gov.in ఈ వెబ్‌సైట్ లో అన్ని వివరణ పత్రములను కూడా చూడవచ్చు. (జి.ఎస్.టి వివరణ పత్రములను తయారు చేయుటకు ఆఫ్‌లైన్ యుటిలిటి కూడా ఉపయోగించవచ్చు)

ఉదా. (4) ఒక సైకిళ్ళ ఉత్పత్తిదారుడు 4000 రూపాయల పన్ను విధించే వెలతో సైకిలును అమ్మెను. టోకు వర్తకుడు ఆ సైకిలును 4800 రూపాయల పన్ను విధంచే వెలతో దుకాణదారునికి అమ్మెను మరియు దుకాణదారుడు ఆ సైకిలును 5200 రూపాయల పన్ను విధించే వెలకు వినియోగదారునికి అమ్మెను. GST రేటు 12% అయిన అమ్మకపు ప్రతి దశలో చెల్లించే CGST మరియు SGST లను కనుగొనండి దాని కొరకు కింది కృత్యమును పూర్తి చేయండి.

సాధన : వ్యాపార గొలుసు

□ —₹ 4000, 12%→ □ —₹ 4800, 12%→ □ —₹ 5200, 12%→ □

ఉత్పత్తిదారుడు అమ్మేసమయంలో వసూలు చేసిన పన్ను = 4000లో 12%= $\ldots \times \frac{\ldots}{\ldots}$ = □

ఉత్పత్తిదారుని నికర పన్ను = 480 రూపాయలు.

టోకు వర్తకుడు అమ్మేసమయంలో వసూలు చేసిన పన్ను = 4800 లో 12% = 576 రూ॥లు

∴ టోకు వర్తకుడు చెల్లించు పన్ను = టోకు వర్తకుని అవుట్ పుట్ టాక్స్ – అతని ఇన్‌పూట్ టాక్స్ క్రెడిట్

= 576 – 480

= 96 రూ॥లు

దుకాణదారుడు లెక్కించిన GST = 5200 లో 12% = □

∴ దుకాణదారుడు చెల్లించే GST = దుకాణదారుని అవుట్ పుట్ టాక్స్ – దుకాణదారుని ఇన్‌పుట్ టాక్స్

= □ – □

= □

వ్యాపార గొలుసులో GST యొక్క చెల్లింపు వివరణ :

వ్యక్తి	నికర GST	నికర CGST	నికర SGST
ఉత్పత్తిదారుడు	480	240	□
టోకు వర్తకుడు	96	□	□
దుకాణదారుడు	□	□	□
మొత్తం	□	□	□

ఆలోచిద్దాం

- ఒక వ్యాపారస్తుడు వసూలు చేసిన జూలై నెలలోని అవుట్‌పుట్ టాక్స్ అతని ఇన్‌పుట్ టాక్స్ కంటే తక్కువ అనుకోండి. ఇలాంటపుడు పన్ను లెక్కింపు ఎలా ఉంటుంది?
- ఒక వ్యాపారి యొక్క జూలై నెలలోని అవుట్‌పుట్ టాక్స్ మరియు ఇన్‌పుట్ టాక్స్ సమానం అనుకోండి. ఇలాంటి సమయంలో పన్న లెక్కింపు ఎలా చేస్తారో

అభ్యాస మాలిక 4.2

(1) చేతన స్పోర్ట్స్ వారు జూలై 01, 2017 నుండి జూలై 31, 2017 ఈ కాలంలో చేసిన కొనుగోలుపై 1,00,500 రూపాయల జిఎస్‌టి చెల్లించి మరియు అమ్మకముపై 1,22,500 రూపాయల జిఎస్‌టి వసూలు చేసింది అయిన ఈ కాలవ్యవధిలో చేతన స్పోర్ట్స్ చెల్లించవలసిన నికర జిఎస్‌టి కనుగొనండి.

(2) నజ్మా జిఎస్‌టి చట్టం కింద నమోదు చేయబడిన దుకాణ యజమానురాలు. ఆమె కొనుగోలుపై మొత్తం జిఎస్‌టి 12,500 రూ॥లు చెల్లించింది. మరియు అమ్మకంపై మొత్తం జిఎస్‌టి 14,750రూ॥ల వసూలు చేసింది అయిన ఆమెకు ఎన్ని రూపాయల ఇన్‌పుట్ టాక్స్ క్రెడిట్ లభిస్తుంది? మరియు ఆమె చెల్లించవలసిన నికర జిఎస్‌టిని కనుగొనండి.

(3) అమీర్ ఎంటర్‌ప్రైజెస్ చాక్లెట్ సాస్ బాటిళ్ళను కొనుగోలు చేస్తున్నపుడు 3800రూ॥ల జిఎస్‌టి చెల్లించెను. వాటిని అక్బర్ బ్రదర్స్‌కు అమ్ముతున్నపుడు 4100 రూ॥లు జిఎస్‌టి వసూలు చేశారు. మయంక్ ఫుడ్ కార్నర్ వారు అక్బర్ బ్రదర్స్ వద్ద నుండి ఆ బాటిళ్ళను 4500 రూ॥ల జిఎస్‌టి చెల్లించి కొనుగోలు చేసిన ప్రతి లావాదేవిలో చెల్లించవలసిన జిఎస్‌టిని కనుగొనండి. దాని నుండి కేంద్రముకు చెల్లించవలసిన పన్ను (CGST) రాష్ట్రముకు చెల్లించవలసిన పన్ను (SGST)లను కనుగొనండి.

(4) చండీఘర్ ఒక కేంద్రపాలిత ప్రాంతం. ఇక్కడ మాలిక్ గ్యాస్ ఎజెన్సీ వ్యాపార సంబంధమైన ఉపయోగం కొరకు గ్యాస్ సిలిండర్లు 24,500 రూ॥లలో కొనుగోలు చేసి అక్కడి వినియోగదారులకు 26,500 రూ॥లకు అమ్మెను. ఈ లావాదేవిలో 5% రేటు చొప్పున చెల్లించ వలసిన మొత్తం జిఎస్‌టి కనుగొనండి మరియు దాని నుండి కేంద్రానికి చెల్లించవలసిన పన్ను (CGST) కేంద్రపాలిత ప్రాంతానికి చెల్లించవలసి పన్ను (UTGST) లను కనుగొనండి. (కేంద్రపాలిత ప్రాంతములో SGST కి బదులు UTGST ఉంటుంది.)

(5) మె.బ్యూటి ప్రాడక్ట్స్ 6000 రూపాయలపై 18% రేటు చొప్పున జిఎస్‌టి చెల్లించి సౌందర్య సాధనాల కొనుగోలు చేసింది మరియు ఒకే వినియోగదారునికి వాటిన్నింటిని 10,000 రూ॥లకు అమ్మెను అయిన ఈ లావాదేవికై మె.బ్యూటి ప్రాడక్ట్స్ తయారు చేసిన పన్ను రశీదులో కేంద్రానికి మరియు రాష్ట్రానికి (CGST, SGST) చెల్లించవలసిన వస్తుసేవల పన్ను సొమ్ము ఎంత చూపబడిందో కనుగొనండి.

(6) కింద ఇవ్వబడిన సమాచారము నుండి దుకాణాదారుని నుండి వినియోగదారుని (B2C) కొరకు పన్ను రశీదు (Tax Invoice) ను తయారు చేయండి.

పేరు, చిరునామా, తేది, మొదలైనవి మీ ఇష్టప్రకారము తీసుకోండి.

సరఫరా దారుడు : మె. - - - - - చిరునామా - - - - - రాష్ట్రం - - - - - తేది

ఇన్‌వాయిస్ క్రమసంఖ్య - - - - - GSTIN - - - - - - -

వస్తువుల వివకాలు : మొబైల్ బాటరీ ధర - ₹ 200 1 వస్తువు GST రేటు 12% HSN 8507,

హెడ్‌ఫోన్ ధర - ₹ 750 1 వస్తువు GST రేటు 18% HSN 8518,

(7) కింద ఇవ్వబడిన సమాచారము నుండి ఒక వ్యాపారి మరొక వ్యాపారి కి (B2B) టాక్స్ ఇన్‌వాయిస్ తయారుచేయండి. పేరు, చిరునామా, తేది లాంటివి మీ ఇష్టప్రకారముగా తీసుకోండి.

సరఫరాదారుడు – పేరు, చిరునామా, రాష్ట్రము, GSTIN, బిల్లు క్రమ సంఖ్య మరియు తేది.

తీసుకునేవారు – పేరు, చిరునామా, రాష్ట్రము, GSTIN.

వస్తువుల వివరాలు : (1) పెన్సిల్ బాక్స్ 100, HSN 3924, వెల20రూ||, GST 12%,

(2) జిగ్ సా ఫజల్స్ 50, HSN 9503, వెల100రూ||, GST 12%

అధిక వివరాలకై

కాంపోసిషన్ పథకం **(Composition Scheme)**

ఏ వ్యక్తి యొక్క వ్యాపార లావాదేవిలు గత ఆర్థిక సంవత్సరములో 1.5 కోట్ల రూ|| కంటే తక్కువ ఉన్న వారికి కాంపోసిషన్ పథకం (Composition Scheme) వర్తిస్తుంది ఈ పథకంలో పన్ను చెల్లించే వారు ప్రభుత్వం నిర్ణయించిన రేటుతో పన్ను చెల్లిస్తారు.

కాంపోసిషన్ పథకములోని పన్ను చెల్లింపు రేటు (GST rates for composition Scheme)

క్ర.సం.	పంపిణిదారుడు	జిఎస్‌టి రేటు	(CGST + SGST)
1.	అల్పాహార శాలలు	5%	2.5% + 2.5%
2.	ఉత్పత్తిదారుడు మరియు అమ్మేవారు	1%	0.5% + 0.5%

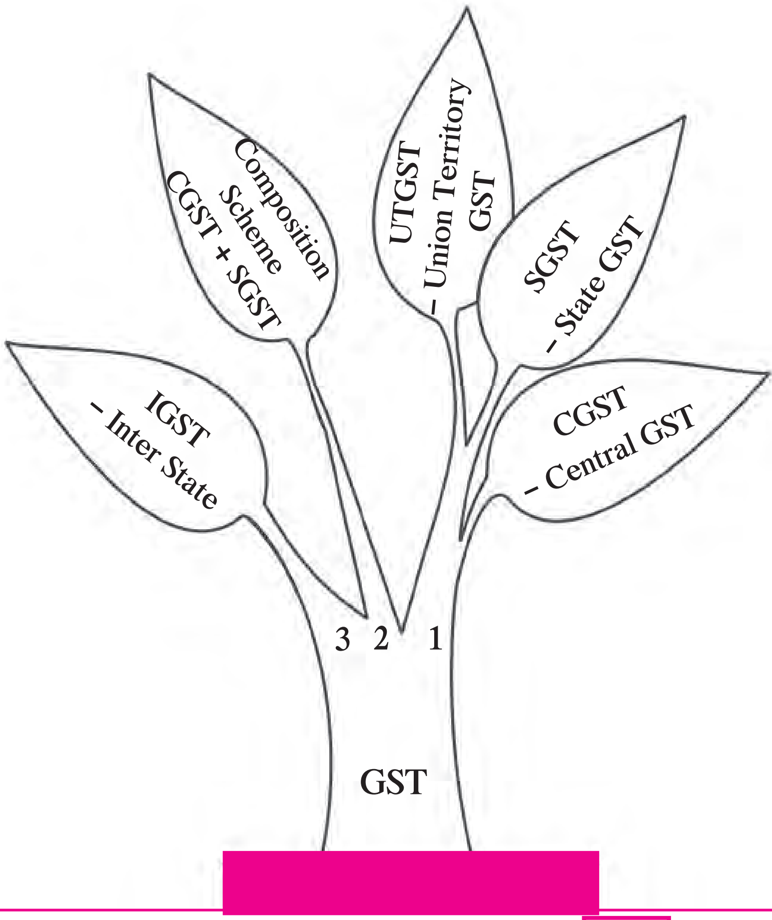
వ్యాపారులకు కాంపోసిషన్ పథకం యొక్క నియమములు :

- కాంపోసిషన్ పథకంలోని వర్తకులు వినియోగదారుని నుండి ఎలాంటి పన్ను వసూలు చేయరాదు కావున పథకం లోని వ్యాపారులు పన్ను రశీదు ఇవ్వలేరు. వారు సరఫరా బిల్లు (Bill of supply)ను ఇవ్వవలెను.
- వర్తకులు ప్రతి 3 నెలలకు పైన ఇవ్వబడిన పట్టిక ప్రకారం ప్రభుత్వంనకు అమ్మకాలపై పన్ను చెల్లించవలెను.
- ఈ పథకంలోని వ్యాపారస్తులు మరొక రాష్ట్రంలో అమ్మకాలు చేయలేరు కాని వారు మరొక రాష్ట్రం నుండి కొనుగోలు చేయవచ్చు.
- ఈ పథకంలోని వర్తకులకు పన్నును తిరిగిపొందే (ITC) అవకాశం లేదు.
- ఈ పథకంలోని వ్యాపారస్తులు తమ దుకాణం యొక్క బోర్డుపై కాంపోసిషిన్ పథకంలోని వ్యాపారి (Composition taxable person) అని రాయవలసి ఉంటుంది.
- ఈ పథకంలోని వర్తకులు సరఫరా బిల్లు (Bill of supply) లో పెద్ద అక్షరాలతో కాంపోసిషన్ పథకంలోని వ్యాపారి అమ్మకం పై పన్ను విధించడానికి అనర్హుడు (Composition taxable person not eligible to collect tax on supplies) అని ముద్రించవలెను.

GST యొక్క ముఖ్యమైన ప్రత్యేకతలు (Features of GST)

- వివిధ పరోక్ష పన్నులు సమసిపోతాయి.
- వస్తువులు మరియు సేవల యొక్క వాదనలు మాసిపోతాయి.
- వ్యాపారస్థులకై రాష్ట్రాల వారిగా నమోదు.
- GSTIN గల వర్తకుల లావాదేవీల సరియైన నమోదు ఉంచి సమయానికి GST చెల్లింపు చేయవలసి ఉంటుంది.
- లావాదేవిలలో పారదర్శకత.
- సరళమైన మరియు అర్థం చేసుకోవడాని వీలుగా గల పన్ను విధానం.
- పన్నుపై పన్ను చెల్లించనవసరంలేదు. అందువల్ల వస్తు మరియు సేవల రుసుం అదుపులో ఉంటుంది.
- వస్తు మరియు సేవలను అంతర్జాతీయ అంగడి (మార్కెట్)తో పోల్చడం వలన గుణాత్మకతలో వృద్ధి జరుగుతుంది.
- 'మేక్ ఇన్ ఇండియా' కు పురోగతి.
- సాంకేతిక పరిజ్ఞాన ఆధారిత పన్నువిధానం వలన త్వరగా నిర్ణయాలు తీసుకునే సౌకర్యం.
- వస్తు సేవల పన్ను ఇది ద్వంద్వ తరహా (Dual model) అనగా కేంద్ర మరియు రాష్ట్రాలకు ఒకేసారి సమాన పన్ను చెల్లించబడుతుంది.

వస్తు–సేవల పన్ను యొక్క అంతర్గత పన్నులు



1. CGST–SGST (UTGST):

ఒకే రాష్ట్రంలో కొనుగోలు–అమ్మకాల లావాదేవిలు జరిపే వ్యాపారుల కొరకు.

2. కాంపొసిషన్ పథకం (composition Scheme) :

ఎవరి వార్షిక అమ్మకాలు 20 లక్షల నుండి 1.5 కోట్ల రూపాయల వరకు ఉంటుందో అలాంటి వ్యాపారులకు ఈ పథకము యొక్క లాభాలు చేకూరుతాయి. వారికి SGST, CGST, వేర్వేరు రేట్లతో చెల్లించవలసి వస్తుంది.

3. ఐజిఎస్టి (IGST) :

అంతరాష్ట్రీయ (Inter State) లావాదేవీలు చేసే వర్తకుల కొరకు.

అధిక వివరాలకై

ఏకీకృత వస్తు, సేవల పన్ను – IGST (Integrated GST)

ఎప్పుడైతే అమ్మకపు లావాదేవీలు రెండు రాష్ట్రల మధ్య జరుగుతుందో (Inter state) అప్పుడు విధించే జీఎస్‌టిని ఏకీకృత వస్తుసేవల పన్ను (IGST) అని అంటారు మరియు అది మొత్తం కేంద్ర ప్రభుత్వంనకు చెల్లించబడుతుంది.

ఒక రాష్ట్రంలోని వ్యాపారి మరొక రాష్ట్రంలోని వ్యాపారి నుండి వస్తువులను కొనుగోలు చేసి తమ రాష్ట్రంలో అమ్మినట్లయితే వారు IGST గా చెల్లించిన పన్ను యొక్క తగ్గింపు (ITC) ఎలా లభిస్తుందో చూద్దాం.

ఉదాహరణకు : వ్యాపారి M (మహరాష్ట్ర లోని) 20,000 రూ॥ల స్కూటరు యొక్క విడి భాగాలు P అనే వ్యాపారి (పంజాబ్‌లోని) వద్ద నుండి కొనుగోలు చేశాడు. అప్పుడు 28% రేటు చొప్పున 5600రూ॥లకు ఏకీకృత వస్తు సేవల పన్ను (IGST)ను P వ్యాపారికి చెల్లించెను.

M ఈ మొత్తం విడిభాగాలను తన స్థానిక వినియోగదారులకు 25,000రూ॥లకు అమ్మెను. అప్పుడు 28% రేటు చొప్పున 7000రూ॥ల జీఎస్‌టి వసూలు చేసెను..

GST 7000 రూ॥లు = CGST 3500రూ॥లు + SGST 3500రూ॥లు వినియోగదారుల నుండి వసూ చేసెను.

ఇప్పుడు ప్రభుత్వంనకు పన్ను చెల్లించునపుడు 5600రూ॥ల తగ్గింపు ITC ఎలా పొందవచ్చునో చూద్దాం.

సూచన : IGST యొక్క క్రెడిట్ తీసుకొనేటప్పుడు మొదట వారు IGST కొరకు, తర్వాత CGST కొరకు మరియు మిగిలిన క్రెడిట్ SGST తీసుకుంటారు. ఇక్కడ M యొక్క అమ్మకపు లావాదేవిలో IGST లేదు కాబట్టి ముందుగా CGST కొరకు క్రెడిట్ తీసుకోవాలి మరియు మిగిలినది SGST కొరకు క్రెడిట్ తీసుకోవలెను.

∴ నికర **CGST = 3500 – 3500 = 0**రూ॥లు

అనగా 5600రూ॥లకు 3500రూ॥ల క్రెడిట్ తీసుకోబడింది. మిగిలిన 5600 – 3500 = 2100రూ॥ల క్రెడిట్ SGST కొరకు తీసుకొవచ్చును.

∴ నికర **SGST = 3500 – 2100 = 1400**రూ॥లు

'M' 1400 రూ॥ల **SGST** చెల్లించవలెను.

వ్యాపారి Mకు కొనుగోలు సమయంలో చెల్లించిన 5600రూ॥ల పూర్తి తగ్గింపు (ITC) లభించింది అని గమనించండి. (అనగా ఇన్‌పుట్ టాక్స్ యొక్క మొత్తం క్రెడిట్ లభించింది)

ITC ఇలా తీసుకుంటారు

కొనుగోలు సమయంలో చెల్లించిన పన్ను (ITC) — వసూలు చేసిన పన్ను (Output Liability)

IGST యొక్క క్రెడిట్ తీసుకొనేటప్పుడు (₹ 5600)
- మొదట (₹ 0) → IGST కొరకు ఉపయోగించవలసి ఉంటుంది.
- తర్వాత (₹ 3500) → CGSTకొరకు ఉపయోగించవలసి ఉంటుంది.
- చివరిగా మిగిలిన (₹ 2100) → SGST కొరకు ఉపయోగించవలసి ఉంటుంది.

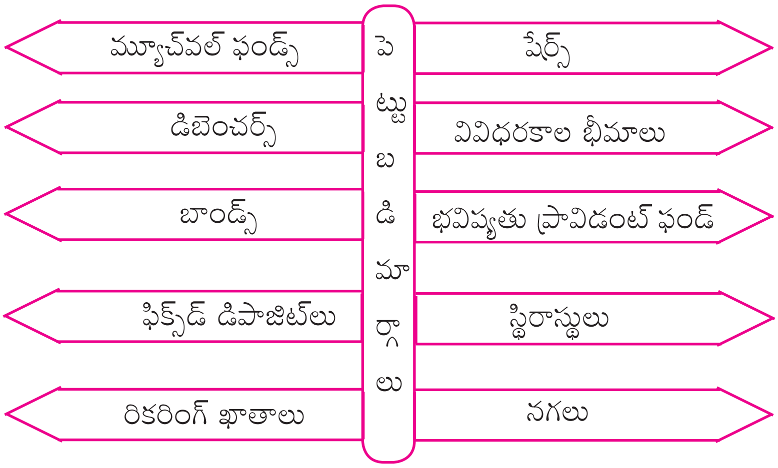
(కావున ₹ 1400 SGST చెల్లించవలెను.)

కొంచెం గుర్తుతెచ్చుకుందాం.

మనం కిందటి సంవత్సరము పొదుపు మరియు పెట్టుబడుల ప్రాముఖ్యతను తెలుసుకున్నాం వాటిననుసరించి ఏవి వీలైతే వాటిని మీరు అమలు చేయడం ప్రారంభించి ఉంటారు. ఎందుకనగా ఎల్లప్పుడు ఆరోగ్యంగా ఉండుటకు ఎలాగైతే ఆరోగ్య నియమములను పాటించవలెనో అదే విధంగా ఆర్థిక ఆరోగ్యం కొరకు పొదుపు మరియు పెట్టుబడులు అలవాటు చేసుకోవలసివస్తుంది. ప్రస్తుతం పెట్టుబడుల రకాలలో ఎన్ని వైవిధ్యాలున్నాయో వాటిని నేర్చుకోవడం మరియు అనుభవం కలిగి ఉండటం రెండు ముఖ్యమైనవే.

పదండి చర్చిద్దాం.

శ్వేత ఒక కంపెనిలో ఉద్యోగం చేస్తుంది. ఈ నెల నుండి ఆమె జీతము 5% పెరిగింది మరియు వచ్చేనెలలో బోనస్ కూడ లభిస్తుంది కావున ఆమె జీతము నుండి ఈ పెరిగిన సొమ్మును సరియైన దానిలో పెట్టుబడి పెట్టాలని ఆలోచి స్తుంది. ఆమె స్నేహితురాలు నేహా ఆర్థిక సలహదారు వద్ద ఉద్యోగం చేస్తుంది. కావున ఆమె పెట్టుబడి గురించి తన మిత్రురాలికి సముచితమైన సలహ ఇవ్వగలదు. ''మన పెట్టుబడులలో వైవిధ్యం ఉండటం చాలా అవసరం జీవిత భీమా, ఆరోగ్యభీమా, స్వంత ఇల్లు, బ్యాంకు ఎఫ్.డి మరియు రికరింగ్ ఖాతా లాంటిది ఉండేట్లు వీటన్నింటి గురుంచి అలోచించు'' అని నేహ అన్నది. ''నాకు భీమా మరియు బ్యాంకు ఎఫ్.డిలు ఉన్నాయి. అవే కాకుండా నా జీతము నుండి ప్రావిడెంట్ ఫండ్ కటింగ్ (కోత) అవుతుంది. అయిన ఇంకా ఏఏ మార్గాలు కలవు?'' అని శ్వేత అంది. అప్పుడు నేహ ''ప్రస్తుతము, షేర్స్, మ్యూచవల్ ఫండ్ (MF), డిబెంచర్స్, బాండ్స్ మొదలైన వాటిలో పెట్టుబడి పెట్టే వారి సంఖ్య పెరిగింది. అదేవిధంగా ఎస్.ఐ.పి. చేసేవైపు కూడా ప్రజలు మొగ్గ చూపుతున్నారు. ఇప్పుడు ప్రతి నెల కొంత సొమ్ము ఎక్కువ లభించబోతుంది. కావున కొంత కాలానికి పెట్టుబడి పథకాలలో (SIP – Systematic Investment Plan) ప్రతినెల కొంత సొమ్మును డిపాజిట్ చేయవచ్చును'' అని అంది.



ఇలాంటి సంభాషణలు మనం ప్రతిచోట వింటుంటాం. మరియు వాటి గురించిన సరియైన సమాచారము తెలిసి ఉండుట ''బహుజనహితము, బహుజన ఆనందము'' అవుతుంది.

ఈ అద్యాయంలో మనం షేర్స్, మ్యూచ్వల్ ఫండ్, SIP లను గురించిన సమాచారమును పొందబోతున్నాము.

తెలుసుకుందాం.

షేర్స్ (Shares)

వ్యక్తి యొక్క సొంత దుకాణం ఉండుట, అనగా దుకాణ యాజమాన్యం ప్రొప్రయిటర్‌షిప్ కలిగి ఉండుట. ఇద్దరు–నలుగురు వ్యక్తులు కలిసి వ్యాపారం చేయుట అనగా భాగస్వాములు (పార్ట్‌నర్ షిప్), దానికొరకు పెట్టుబడి తక్కువ అవసరము అవుతుంది. కాని ఏదేని ఒక కంపెని, పరిశ్రమలు లేదా ఖార్ఖానాలను ప్రారంభించుటకు పెద్ద మొత్తంలో పెట్టుబడి అవసరం అవుతుంది. ఆ పెట్టుబడిని సమాజం నుండి పోగు చేయవలసి ఉంటుంది.

ఖార్ఖానా లేదా కంపెని ప్రారంభించగోరు వ్యక్తులు ఒకటిగా కలిసి, సమాజం నుండి పెట్టుబడిని పోగు చేసి కంపేనిని స్థాపిస్తారు. భారతీయ కంపెనీల చట్టం 1956 ప్రకారం కంపెని యొక్క నమోదు జరుగుతుంది. కంపెనీని స్థాపించు వ్యక్తులు కంపెనీయొక్క ప్రమోటర్స్ అంటారు మరియు ఇలాంటి కంపెనీని లిమిటెడ్ **(పబ్లిక్ లిమిటెడ్)** కంపెని అంటారు.

కంపెనిని ప్రారంభించుటకు ఎంతైతే డబ్బు అవసరమో దానిని **మూలధనం** అంటారు. ఈ మూలధనంను చిన్న చిన్న సమాన భాగాలుగా చేస్తారు. ఈ భాగాలు సాధారణంగా ₹ 1, ₹ 2, ₹ 5, ₹ 10 లేదా ₹ 100 మొదలైన విలువగలవిగా ఉంటాయి. ఈ ప్రతీ భాగమును షేర్ అంటారు ఈ 'షేర్'లను అమ్మి కంపెనీకి మూలధనంను పోగుచేస్తారు.

షేర్ (Share) : కంపెని యొక్క భాగము మూలధనంలోని ఒక భాగము అనగా ఒక షేర్ సర్టిఫికెట్ (share certificate)పై ఒక షేర్ యొక్క విలువ, షేర్ల సంఖ్య, క్రమసంఖ్య మొదలగునవి ముద్రించబడి ఉంటాయి.

భాగస్వామి లేదా వాటాదారుడు –(Share holder) : కంపెనీ యొక్క షేర్ కొనుగోలు చేసే వ్యక్తులు ఆ కంపెని యొక్క భాగస్వాములు అనగా వాటాదారులు అవుతారు. వాటాదారుడు తన వద్ద ఉండే షేర్ల నిష్పత్తిలో ఆ కంపెని యొక్క యజమాని అవుతారు.

స్టాక్ ఎక్స్‌చేంజ్ (Stock Exchange) : ఎక్కడైతే షేర్లు కొనుగోలు అమ్మకాలు జరుగుతాయో దానిని షేర్ మార్కెట్ (స్టాక్ ఎక్స్‌చేంజ్ లేదా స్టాక్ మార్కెట్ లేదా ఈక్విటీ మార్కెట్, క్యాపిటల్ మార్కెట్ లేదా షేర్ మార్కెట్) అంటారు. సమాజం నుండి మూలధనంను పోగు చేసి ప్రారంభించిన అనగా పబ్లిక్ లిమిటడ్ కంపెని షేర్ మార్కెట్‌లో నమోదై (listed company) ఉండడం అనివార్యం.

ముఖవిలువ (Face Value – FV) : కంపెని యొక్క షేర్ సర్టిఫికేట్‌పై ఒక షేర్ విలువ అనగా షేర్ ముఖవిలువ (FV) ముద్రించబడి ఉంటుంది.

మార్కెట్ విలువ (Market Value – MV) : ఏ విలువతో షేర్ మార్కెట్‌లో షేర్ల క్రయ-విక్రయాలు జరుగుతాయో ఆ విలువను షేర్ల మార్కెట్ విలువ (MV) అంటారు.

కంపెనిని స్థాపించిన తర్వాత దాని పనితనం ఊహించిన దాని కంటే ఎక్కువ ఉన్నట్లయితే ఆ షేర్ల యొక్క **డిమాండ్** మార్కెట్‌లో పెరుగుతుంది. షేర్ల సంఖ్యపరిమితంగా ఉంటుంది. అనగా వాటి **పంపిణీ** సంఖ్య పెంచలేరు. కావున ఆ కంపెని యొక్క షేర్ల వెల పెరుగుతు పోతుంది. దీనికి విరుద్ధంగా ఒకవేళ కంపెని యొక్క పనితనం పడిపోయినట్లయితే షేర్స్ యొక్క వెల తగ్గుతుంది. ఈ హెచ్చు-తగ్గులు వరుసగా ▲, ▼ ఈ గుర్తులతో సూచిస్తారు. ఈ హెచ్చు-తగ్గుల పరిణామము వలన మార్కెట్ సూచి పెరగడం లేదా తగ్గడం జరుగుతుంది.

షేర్ మార్కెట్‌లో షేర్స్ యొక్క వెల క్షణ క్షణం మారుతూ ఉంటుంది.

లాభాంశము (Dividend): కంపెనికి ఆర్థిక సంవత్సరములో లభించిన లాభాలు షేర్స్ సంఖ్యల ప్రకారం భాగస్వాములకు పంపిణి చేయడం జరుగుతుంది. భాగస్వాములకు లభించే లాభంలో భాగం అనగా లాభాం శము అవుతుంది.

కంపెని యొక్క పనితీరు మంచిగా ఉంటే దాని ఆస్తులు కూడా పెరుగుతూ ఉంటాయి కావున షేర్స్‌లపై లాభాంశాలు కూడ చాలా ఎక్కువగా లభిస్తాయి.

వాటాదారులకు లభించిన లాభాంశాలపై ఆదాయపు పన్ను చెల్లించవలసిన అవసరం లేదు.

దీనిని గుర్తుంచుకోండి

షేర్ల యొక్క మార్కెట్ విలువ ఎంత హెచ్చు-తగ్గులు అయినా సంవత్సరం చివరలో ప్రకటించిన లాభాంశము అనేది ఎల్లప్పుడు షేర్స్ సంఖ్యల నిష్పత్తిలో (ముఖవిలువ ప్రకారం) లభిస్తుంది.

అధిక వివరాలకై :

ముంబయిలోని **ముంబయి షేర్ మార్కెట్ (బాంబె స్టాక్ ఎక్స్‌చేంజ్ BSE)** మరియు **జాతీయ షేర్ మార్కెట్ (నేషనల్ స్టాక్ ఎక్స్‌చేంజ్ NSE)** అనే రెండు ముఖ్యమైన షేర్ మార్కెట్లు భారత దేశంలో కలవు. ముంబయి షేర్ మార్కెట్ అనేది ఆసియాలోని అన్నింటికంటే పురాతనమైనది మరియు జాతీయ షేర్ మార్కెట్ అనేది భారతదేశంలోని అన్నింటి కంటే పెద్దదైన షేర్ మార్కెట్.

షేర్ మార్కెట్‌లో హెచ్చు-తగ్గులను అర్థంచేసుకొనుటకు SENSEX (సెన్సెక్స్) మరియుNIFTY (నిఫ్టి) అనే రెండు ముఖ్యమైన సూచికలు (Index) కలవు. SENSEX = SENSitive + indEX అనే రెండు పదాల ద్వారా ఏర్పడింది. BSE 1-1-1986 లో SENSEX ఇవ్వడం ప్రారంభించింది. అన్నింటి కంటే ఎక్కువ పెట్టుబడి గల పేరుపొందిన ఇలాంటి 30 కంపెనిలయొక్క ధరలోని హెచ్చు-తగ్గులు SENSEX ను నిర్ణయిస్తాయి.

'నిఫ్టి' అనే పదం దాని పేరు మాదిరిగానే రెండు పదాలతో ఏర్పడింది. **NIFTY** = NSE + FIFTY. నిఫ్టి అనేది NSE లోని అన్నింటి కంటే అత్యుత్తమ పని తీరు కనబర్చిన 50 కంపెనీలను బట్టి నిర్ణయించబడుతుంది.

ICT Tools or Links

SEBI యొక్క వెబ్‌సైట్‌ను సందర్శించండి, అదే విధంగా ముంబయి షేర్ మార్కెట్, జాతీయ షేర్ మార్కెట్ మరియు దూరదర్శినిలోని ఛానల్స్ లేదా నెట్ నుండి షేర్ మార్కెట్ యొక్క సమాచారమును చూపే విడియోను చూడండి మరియు షేర్ మార్కెట్‌ను అర్థం చేసుకోండి. షేర్లలోని విలువల హెచ్చు-తగ్గులు దూరదర్శినిలో ఎల్లప్పుడు చూపించబడతాయి. వాటిని చూడండి. సాధారణంగా పై పట్టిక ముంబయి షేర్ మార్కెట్‌లోని మరియు కింది పట్టి జాతీయ షేర్ మార్కెట్‌లోని షేర్స్ యొక్క మార్కెట్ విలువలను సూచిస్తాయి. షేర్స్ బుక్ వ్యాల్యు (Book Value) అనగా ఏమిటో దాని సమాచారమును తెలుసుకోండి.

ముఖ విలువ మరియు మార్కెట్ విలువలను పోల్చడం (Comparison of FV and MV):

(1) ఒకవేళ మార్కెట్ విలువ > ముఖవిలువ అయిన అది షేర్ ప్రీమియమ్‌పై (share is at premium) ఉన్నది అని అంటారు.

(2) ఒకవేళ మార్కెట్ విలువ = ముఖవిలువ అయిన ఆ షేర్ సమవిలువపై (share is at par) ఉంది అని అంటారు.

(3) ఒకవేళ మార్కెట్ విలువ< ముఖవిలువ అయిన ఆ షేర్ తరుగుదల విలువలో (share is at discount) ఉంది అని అంటారు.

ఉదాహరణకు (1) షేర్ యొక్క ముఖవిలువ = 10 రూ॥లు మరియు మార్కెట్ విలువ = 15 రూ॥లు ఉన్నదని అనుకోండి.

ఆ షేర్15 – 10 = 5 రూ॥లు షేర్ ప్రీమియమ్ పై ఉంది.

(2) షేర్ ముఖవిలువ = 10 రూ॥లు మరియు మార్కెట్ విలువ = 10 రూ॥లు అని అనుకొనినట్లయితే ఆ షేర్ 10 – 10 = 0. అనగా ఆ షేర్ సమవిలువపై ఉంది.

(3) షేర్ ముఖవిలువ = 10 రూ॥లు మరియు మార్కెట్ విలువ = 7 రూ॥లు అని అనుకొనినట్లయితే ఆ షేర్ 10 – 7 = 3 రూ॥లు అయిన షేర్ తరుగుదల విలువలో అనగా డిస్కౌంట్‌లో ఉంది.

మొత్తం పెట్టుబడి (Sum invested) : షేర్ల కొనుగోలుకై అయ్యే మొత్తం సొమ్ము అనగా మొత్తం పెట్టుబడి.

మొత్తం పెట్టుబడి = షర్స్ సంఖ్య × ఒక షేర్ యొక్క మార్కెట్ విలువ

ఉదా. 100రూ॥లు ముఖవిలువ గల ఒక షేర్ 120 రూ॥లు మార్కెట్ విలువ చొప్పున కొనుగోలు చేశారు. అయిన ఇలాంటి 50 షేర్లను తీసుకొనుటకు ఎన్ని రూపాయల పెట్టుబడి పెట్టవలసి వస్తుంది?

సాధన : మొత్తం పెట్టుబడి = షేర్ల సంఖ్య × ఒక షేర్ యొక్క మార్కెట్ విలువ

= 50 × 120 = 6000 రూ॥లు

షేర్స్ పై రాబడి యొక్క రేటు (Rate of Return):

మనం షేర్స్‌లలో పెట్టిన పెట్టుబడి కొంత కాలం తర్వాత తిరిగి ఎంత రాబడి వస్తుందో. దీనిని అర్థం చేసుకోవడం చాలా అవసరం.

ఉదా. (1) శ్రీయస్ 100 రూ॥ల ముఖ విలువ గల ఒక షేర్ మార్కెట్ వెల 120 రూ॥లు ఉన్నప్పుడు కొనుగోలు చేశాడు. దానిపై కంపెని 15% లాభాంశమును ఇచ్చింది. అయిన పెట్టుబడిపై లభించిన రాబడిపై రేటును కనుగొనండి.

సాధన : ముఖ విలువ = 100 రూ॥ల మార్కెట్ విలువ = 120 రూ॥ల లాభాంశము = 15% ప్రతిషేరు రాబడి రేటును x% అనుకుందాం.

ఇక్కడ 120 రూ॥ల పెట్టుబడి పెడితే 15రూ॥లు లభిస్తాయి అని తెలుసుకోండి.

ఒకవేళ, 120	: 15
ఒకవేళ, 100	: x

$$\therefore \frac{15}{120} = \frac{x}{100}$$

$$\therefore x = \frac{15 \times 100}{120} = \frac{25}{2} = 12.5\%$$

జవాబు : శ్రీయస్‌కు రాబడి యొక్క రేటు 12.5% లభించింది.

ఉదా.(2) ముఖవిలువ =100 రూ॥లు షేర్ ప్రీమియమ్=65 రూ॥లు అయిన ఆ షేర్ యొక్క మార్కెట్ విలువను కొనుకొనండి

సాధన: మార్కెట్ విలువ = ముఖవిలువ + ప్రీమియమ్ = 100 + 65 = 165 రూ॥లు

∴ షేర్ యొక్క మార్కెట్ విలువ 165 రూ॥లు ప్రతి షేర్‌కు.

ఉదా.(3) కింది పట్టికలో సముచితమైన సంఖ్య రాసి పూర్తి చేయండి.

ఉదా. సంఖ్య.	ముఖవిలువ	విలువ రకము	మార్కెట్ విలువ
(i)	₹ 10	ప్రీమియమ్ ₹ 7	
(ii)	₹ 25		₹ 16
(iii)		సమవిలువ	₹ 5

సాధన: (i) 10 + 7 = 17రూ॥లు, (ii) తరుగుదల విలువ 25−16 = 9 రూ॥లు, (iii) 5 రూ॥లు.

ఉదా.(4) నీలాభాయి పెట్టుబడి కింది విధంగా షేర్స్‌లలో చేశారు. అయిన ఆమె మొత్తం ఎంత పెట్టుబడి పెట్టింది?

కంపెని A : 350 షేర్స్, ముఖవిలువ = 10 రూ॥లు ప్రతిషేర్ ప్రీమియమ్ = 7 రూ॥లు

కంపెని B : 2750 షేర్స్, ముఖవిలువ = 5 రూ॥లు మార్కెట్ విలువ = 4రూ॥లు

కంపెని C : 50 షేర్స్, ముఖవిలువ = 100 రూ॥లు మార్కెట్ విలువ = 150రూ॥లు

సాధన: కంపెని A : ప్రీమియమ్ = 7రూ॥లు కావున మార్కెట్ విలువ = ముఖవిలువ + ప్రీమియమ్

= 10 + 7 = 17 రూ॥లు

∴ కంపెని A లోని పెట్టుబడి = షేర్స్ సంఖ్య × మార్కెట్ విలువ = 350 × 17 = 5950 రూ॥లు

కంపెని B : ముఖవిలువ = 5రూ॥లు, మార్కెట్ విలువ = 4రూ॥లు

∴ కంపెని B లోని పెట్టుబడి = షేర్స్ సంఖ్య × మార్కెట్ విలువ = 2750 × 4 = 11,000 రూ॥లు

కంపెని C : ముఖవిలువ = 100 రూ॥లు, మార్కెట్ విలువ = 150రూ॥లు

∴ కంపెని C లోని పెట్టుబడి = షేర్స్ సంఖ్య × మార్కెట్ విలువ = 50 × 150 = 7500 రూ॥లు

జవాబు: నీలాభాయి మూడు కంపెనిలలో చేసిన మొత్తం పెట్టుబడి = 5950 + 11000 + 7500

= 24,450 రూ॥లు

ఉదా.(5) స్మితా 12,000 రూ॥ల పెట్టుబడి పెట్టి 10 రూ॥ల ముఖవిలువ గల ప్రతి షేర్‌కు 2రూ॥ల ప్రీమియమ్‌తో తీసుకుంది. అయిన ఆమెకు ఎన్ని షేర్స్ లభించును. దీనిని కనుగొనుటకు కింది కృత్యమును పూర్తి చేయండి.

సాధన : ముఖవిలువ = 10 రూ॥లు, ప్రీమియమ్ = 2 రూ॥లు.

∴ మార్కెట్ విలువ = ముఖవిలువ + ☐ = ☐ + ☐ = ☐

∴ షేర్స్ సంఖ్య = $\frac{\text{మొత్తం పెట్టుబడి}}{\text{మార్కెట్ విలువ}}$ = $\frac{12000}{☐}$ = ☐ షేర్లు

జవాబు: స్మితాకు ☐ షేర్స్ లభించును.

ఉదా.(6) 10రూ॥ల ముఖ విలువ గల 50 షేర్స్ 25రూ॥ల మార్కెట్ విలువ చొప్పున కొనుగోలు చేశారు. వాటి పై కంపెని 30% లాభాంశమును ప్రకటించింది. అయిన (1) మొత్తం పెట్టుబడి (2) లభించిన లాభాంశము (3) పెట్టుబడిపై రాబడి రేటును కనుగొనండి.

సాధన : షేర్ ముఖ విలువ = 10రూ॥లు మార్కెట్ విలువ = 25రూ॥లు, షేర్స్ సంఖ్య = 50.

∴ మొత్తం పెట్టుబడి 25 × 50 =1250రూ॥లు

లాభాంశము = $10 \times \frac{30}{100} =$ 3రూ॥లు ప్రతి షేర్‌కు

∴ 50 షేర్లపై మొత్తం లాభాంశము = 50 × 3 =150రూ॥లు

∴ రాబడి యొక్క రేటు = $\frac{\text{లభించిన మొత్తం లాభాంశము}}{\text{మొత్తం పెట్టుబడి}} \times 100$

$= \frac{150}{1250} \times 100 = 12\%$

జవాబు : (1) మొత్తం పెట్టుబడి 1250రూ॥లు (2) 50 షేర్స్ పై లభించిన లాభాంశము 150రూ॥లు

(3) పెట్టుబడి రాబడిపై రేటు 12%.

అభ్యాస మాలిక 4.3

1. కింది పట్టికలో సముచితమైన సంఖ్యలు రాసి పూర్తి చేయండి.

ఉదా. సంఖ్య.	ముఖవిలువ	విలువ రకము	మార్కెట్ విలువ
(1)	100రూ॥లు	సమవిలువ	. . .
(2)	. . .	ప్రీమియమ్ = 500రూ॥లు	575రూ॥లు
(3)	10రూ॥లు	. . .	5రూ॥లు

2. మార్కెట్ విలువ 80రూ॥లు ఉన్నప్పుడు అమోల్ 100రూ॥ల ముఖ విలువ గల 50 షేర్స్ కొనుగోలు చేశారు. ఆ సంవత్సరము కంపెని 20% లాభాంశమును ఇచ్చింది. అయిన పెట్టుబడిపై లభించిన రాబడి రేటును కనుగొనండి.

3. జోసెఫ్ కింది విధంగా షేర్స్‌లలో పెట్టుబడి పెట్టాడు అయిన అతను చేసిన మొత్తం పెట్టుబడిని కనుగొనండి.

కంపెని A : ముఖవిలువ 2రూ॥లు మరియు ప్రీమియమ్18రూ॥లు గల 200 షేర్స్.

కంపెని B : మార్కెట్ విలువ 500రూ॥లు గల 45 షేర్స్.

కంపెని C : మార్కెట్ విలువ 10,540రూ॥లు గల 1 షేర్.

4. శ్రీమతి దేశ్‌పాండె 20,000రూ॥ల పెట్టుబడిలో 5రూ॥ల ముఖ విలువ గల షేర్స్‌ను 20రూ॥ల ప్రీమియమ్ ఇచ్చికొన్నది. అయిన ఆమెకు ఎన్ని షేర్స్ లభించును?

5. శ్రీ. శాంతిలాల్ 100రూ॥ల ముఖవిలువగల 150 షేర్స్‌ను 120 రూపాయల మార్కెట్ విలువ చొప్పున కొనుగోలు చేశారు. కంపెని 7% లాభాంశము ప్రకటించిన పెట్టుబడిపై రాబడి యొక్క రేటు ఎంత?

6. కింది వాటిలో ఏ పెట్టుబడి లాభదాయకము? రెండు కంపెనిల షేర్స్‌యొక్క ముఖవిలువలు సమానం. కంపెని A యొక్క మార్కెట్ విలువ 80రూ॥లు అయి లాభాంశము 16% మరియు కంపెని B యొక్క మార్కెట్ విలువ 120రూ॥లు అయి లాభాంశము 20%.

ICT Tools or Links

ఏవేని ఐదు కంపెనీల షేర్స్ యొక్క ముఖ విలువ మరియు మార్కెట్ విలువలను ఇంటర్‌నెట్ నుండి లేదా ఇతర సోర్స్‌ల నుండి వెతకండి మరియు వాటి సంయుక్త కమ్మీ రేఖా చిత్రమును గీయండి మరియు పోల్చండి. (వీలైతే ▲, ▼ ఇలా రెండురకాల షేర్స్‌ను చూడండి.)

తెలుసుకుందాం.

షేర్స్ యొక్క కొనుగోలు-అమ్మకాలపై అడితి(దలాలి)మరియు పన్ను (Brokerage and taxes on share trading)

అడితి (Brokerage–దలారి): షేర్స్ యొక్క క్రయ-విక్రయాలు ప్రైవేటు పద్ధతిలో చేయరాదు. అది షేర్ మార్కెట్ లోని అధికృత వ్యక్తి లేదా సంస్థ వద్ద నుండి చేయబడుతుంది. వారిని **'షేర్ దలారి' (Share Broker)** అంటారు. దలారి ద్వారా షేర్స్ కొనుగోలు చేస్తున్నప్పుడు మరియు అమ్ముతున్నప్పుడు ఏ రేటు చొప్పున సొమ్మును దలారి తీసుకుంటారో దానిని **'దలాలి' (అడితి)** అంటారు.

ఉదా (1) 100 రూ॥లు ముఖవిలువ గల షేర్స్ యొక్క మార్కెట్ విలువ 150రూ॥లు అనుకోండి. దలాలి రేటు 0.5% ఇలాంటి 100 షేర్స్ కొనుగోలు చేస్తున్నప్పుడు ఎంత సొమ్ము చెల్లించ వలసి ఉంటుంది? ఇలాంటి 100 షేర్స్ అమ్మినట్లయితే ఎంతసొమ్ము లభించును?

ఈ షేర్లను కొనుగోలు చేస్తున్నపుడు –

ఒక షేర్ కొనుగోలు వెల = మార్కెట్ విలువ + దలాలి.

= 150రూ॥లు + 150రూ॥లలో 0.5% = 150 + 0.75

∴ ఒక షేర్ కొనుగోలు విలువ = 150.75రూ॥లు

ఇలాంటి 100 షేర్స్ కొనుగోలు చేసినట్లయితే మొత్తం పెట్టుబడి 100 × 150.75 = 15075రూ॥లు

ఇందులో 15000రూ॥లు షేర్స్ + 75రూ॥ల దలాలి కలదు.

ఈ షేర్స్‌ను అమ్ముతున్నప్పుడు –

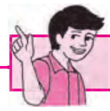
ఒక షేర్ యొక్క అమ్మకపు విలువ = మార్కెట్ విలువ – దలాలి

= 150రూ॥లు – 150రూ॥లలో 0.5% = 150 – 0.75

∴ ఒక షేర్ అమ్మకపు విలువ = 149.25రూ॥లు

∴ 100 షేర్స్ యొక్క అమ్మకపు వెల = 149.25 × 100 = 14925రూ॥లు

∴ 100 షేర్స్ అమ్మిన 14925 రూపాయలు లభించును.



ఇవి గుర్తుంచుకోండి.

- దలాలి ఎల్లప్పుడు షేర్స్ యొక్క మార్కెట్ విలువపై వసూలు చేయబడుతుంది.
- షేర్ క్రయ-విక్రయాల వివరణలో దలాలిని కలిపి ఒక షేర్ యొక్క విలువ నిర్ణయించబడుతుంది.

మీ ప్రాంతంలో షేర్ దలాలి సేవలను అందించే వ్యక్తి లేదా సంస్థ యొక్క సమాచారామును సేకరించండి. వారు తీసుకునే దలాలి రేటు యొక్క సమాచారమును తెలుసుకుని పోల్చండి.

డి-మ్యాట్ (Demat A/c) మరియు ట్రేడింగ్ ఖాతా యొక్క వివిరణ పత్రము (స్టేట్‌మెంట్)ను సేకరించండి. దానిలో ఏ అంశాల కూర్పు ఉంటుంది దాని సమాచారమును నెట్ నుండి/దలారీలను కలిసి/ పెద్దలనుండి తెలుసుకోండి. మిత్రులతో చర్చించండి.

అధిక వివరాలకై : ప్రతి షేర్ దలారులు సెబి (SEBI – Securities and Exchange Board of India) చట్టం 1992 ప్రకారం నమోదు చేసుకుని ఉంటారు మరియు వారిపై సెబి యొక్క నియంత్రణ ఉంటుంది.

షేర్స్, బాండ్స్, మ్యూచ్‌వల్ ఫండ్ మొదలైన వాటి యొక్క నమోదు చేయునప్పుడు డి-మ్యాట్ ఖాతా మరియు క్రయ-విక్రయాలు జరపడానికి ట్రేడింగ్ ఖాతా (Dematerialized Account, Trading Account) తెరవడం తప్పని సరి. ఈ ఖాతాలు బ్యాంక్‌లో లేదా షేర్ దలారీల వద్ద తెరవవచ్చు. DP అనగా Depository Participants అంటారు. ఈ DPs NSDL మరియు CDSL ఈ రెండు Depositaries యొక్క ఆదీనంలో ఉంటాయి. డి-మ్యాట్ ఖాతాలలో షేర్స్ యొక్క క్రయ-విక్రయాల లెక్కలు ఉంచబడతాయి. ఇవి బ్యాంకు యొక్క ఖాతాల మాదిరిగానే ఉంటాయి. అమ్మబడిన షేర్స్ ఖర్చుల వైపు (Debit) నమోదు చేస్తారు. కొనుగోలు చేసిన షేర్స్ జమ వైపు (Credit) నమోదు చేస్తారు. వాటి వివరణ పత్రము (statement) అడిగినప్పుడు లభిస్తుంది. దీనికై కొంత సొమ్మును చెల్లించవలెను. ఈ ఖాతాలలో మీ షేర్స్ ఎలక్ట్రానిక్ ఫార్మ్ రూపంలో జమ చేయ వలసి ఉంటుంది. ఈ రెండు ఖాతాలకు బ్యాంకు సేవింగ్ ఖాత జత చేయవలసి ఉంటుంది. షేర్స్ యొక్క కొనుగోలు సమయంలో అవసరమయ్యే డబ్బు అవసరాన్ని బట్టి దాని నుండి చెల్లించవచ్చును. అదే విధంగా అమ్మిన తర్వాత లభించిన డబ్బు దానిలో జమ అవుతుంది. షేర్ దలారి మరియు బ్యాంకులు ఈ అన్ని విషయాలలో ఔత్సాహితులకు సలహాలు ఇస్తాయి.

తెలుసుకుందాం.

దలారిపై వస్తు, సేవల పన్ను (GST on brokerage services)

షేర్ దలాలి వారి ఖాతాదారుల తరపున క్రయ-విక్రయాలు చేసే సేవలను అందిస్తాయి. దలాలి సేవపై పన్ను రేటు 18% దాని SAC సంఖ్యను వెతకండి.

సూచన :- వస్తు, సేవల పన్ను కాకుండా వినియోగదారుల సంరక్షణ కొరకు షేర్స్ యొక్క క్రయ-విక్రయంపై ఇంకా కొన్ని తక్కువ రేటు గల పన్నులు కలవు. ఉదా. సెక్యూరిటి ట్రాన్‌సాక్షన్ టాక్స్ (STT), SEBI సుంకం, స్టాంప్ డ్యుటి, మొదలగునవి. వాటిని మనం ఇక్కడ నేర్చుకోము కేవలం దలాలి పై వస్తు సేవల పన్ను గురించి నేర్చుకోబోతున్నాం.

ఉదా. (2) ఉదహరణ 1 ప్రకారం ఒక వ్యక్తి 15075రూ॥లు షేర్స్‌ల కొనుగోలుకు చెల్లించాడు. ఈ డబ్బులో 75రూ॥లు దలాలి. అయిన వారు 75రూ॥ల పై 18% రేటు చొప్పున ఎంత పన్ను చెల్లించవలెను దానిని కనుగొనండి మరియు వాటి వివరణ పత్రమును తయారు చేయండి.

సాధన : 18% రేటు చొప్పున 75రూ॥లు పై GST $= \frac{18}{100} \times 75$

$= 13.50$రూ॥లు

షేర్ కొనుగోలు యొక్క వివరణ పత్రము (B ఖరీదు చేసిన.)

షేర్స్‌ల సంఖ్య	మార్కెట్ విలువ	షేర్స్‌ల ముఖవిలువ	దలాలి 0.5%	దలాలిపై 9% CGST	దలాలిపై 9% SGST	షేర్స్ యొక్క మొత్తం విలువ
100(B)	150 రూ॥లు	15000 రూ॥లు	75 రూ॥లు	6.75 రూ॥లు	6.75 రూ॥లు	15088.50రూ॥లు

ఉదా. (3) బషీర్‌ఖాన్ 40 రూ॥ల మార్కెట్ విలువ గల 100 షేర్స్‌ను కొనుగోలు చేశాడు. దలాలి రేటు 0.5% మరియు దలాలిపై వస్తు, సేవల పన్ను యొక్క రేటు 18% అయిన అతనికి 100 షేర్స్‌కై మొత్తం ఎంత ఖర్చు అయ్యింది?

సాధన: 100 షేర్స్ యొక్క మార్కెట్ విలువను బట్టి ధర $= 40 \times 100 = 4000$ రూ॥లు

ఒక షేర్‌పై దలాలి $= \frac{0.5}{100} \times 40 = 0.20$రూ॥లు

$\therefore$ ఒక షేర్ యొక్క కొనుగోలు విలువ = మార్కెట్ విలువ + దలాలి

$= 40 + 0.20 = 40.20$రూ॥లు

$\therefore$ 100 షేర్స్ యొక్క కొనుగోలు విలువ $= 40.20 \times 100 = 4020$రూ॥లు

100 షేర్స్‌పై దలాలి $0.20 \times 100 = 20$రూ॥లు

$\therefore$ వస్తు, సేవల పన్ను $= \frac{18}{100} \times 20$

$= 3.60$రూ॥లు

జవాబు : బషీర్‌ఖాన్ 100 షేర్స్ కొనుటకు అయిన ఖర్చు మొత్తం

$= 4020 + 3.60 = 4023.60$రూ॥లు

ఉదా. (4) పంకజ్‌రావ్ 1,25,295 రూపాయల పెట్టుబడిలో 10 రూ॥ల ముఖవిలువ గల, మార్కెట్ విలువ 125 రూపాయలు ఉన్నప్పుడు 100 షేర్లు కొనుగోలు చేసెను, ఈ లావాదేవిలో దలాలి యొక్క రేటు 0.2% మరియు దలాలీపై 18% GST చెల్లించిన (1) ఎన్నిషేర్స్ కొనుగోలు చేస్తాడు? (2) మొత్తం ఎంత దలాలీ చెల్లించాలి? (3) ఈ లావాదేవీలో వస్తు సేవల పన్ను ఎంత చెల్లించెను?

సాధన : పెట్టుబడి = 1,25,295రూ॥లు, మార్కెట్ విలువ = 125రూ॥లు, దలాలి = 0.2%, పన్ను రేటు= 18%.

ఒక షేర్‌పై దలాలీ $= 125 \times \frac{0.2}{100} = 0.25$రూ॥లు

ఒక షేర్ యొక్క దలాలీపై పన్ను = 0.25 యొక్క 18% = 0.045రూ॥లు

∴ ఒకషేర్ యొక్క కొనుగోలు ధర = మార్కెట్ విలువ + దలాలి + పన్ను

= 125 + 0.25 + 0.045 = 125.295రూ॥లు

∴ షేర్స్ సంఖ్య = $\frac{125295}{125.295}$ = 1000

మొత్తం దలాలీ = ప్రతి షేర్ యొక్క దలాలీ × షేర్స్ సంఖ్య

∴ = 0.25 × 1000 = 250రూ॥లు

మరియు మొత్తం పన్ను = 1000 × 0.045 = 45రూ॥లు

జవాబు (1) 1000 షేర్స్ కొనుగోలు చేసెను. (2) దలాలీ 250రూ॥ల చెల్లించెను. (3) దలాలీపై పన్ను 45రూ॥ల చెల్లించెను.

ఉదా.(5) నళినితాయి 10రూ॥ల ముఖ విలువ గల షేర్ యొక్క మార్కెట్ విలువ 60రూ॥లు ఉన్నప్పుడు 6024రూ॥లను పెట్టుబడి పెట్టింది. దానిపై 60% లాభాంశము లభించిన తర్వాత 50రూ॥ల మార్కెట్ విలువ చొప్పున అన్ని షేర్లను అమ్మివేసెను. ప్రతి లావాదేవిలో 0.4% దలాలీ చెల్లించింది. అయిన ఆ లావాదేవిలలో ఆమెకు కలిగిన నష్టం లేదా లాభం ఎంత? కింది గడులను పూరించి కనుగొనండి.

సాధన : ఇక్కడ పన్ను రేటు ఇవ్వలేదు కావున షేర్స్ యొక్క క్రమ-విక్రయాల సమయంలో నికర పన్ను గురించి అడగలేదు.

10రూ॥ల ముఖవిలువ గల షేర్‌ను 60రూ॥లలో కొనుగోలు చేసింది.

ప్రతి షేర్ యొక్క దలాలి = $\frac{0.4}{100}$ × 60 = ☐ రూ॥లు

∴ ఒక షేర్ యొక్క విలువ = 60 + 0.24 = ☐ రూ॥లు

∴ 6024 రూ॥లలో $\frac{6024}{60.24}$ = 100 షేర్స్ కొనుగోలు చేసింది.

10 రూ॥ల ముఖవిలువ యొక్క షేర్స్ 50 రూ॥ల చొప్పున అమ్మింది.

∴ ప్రతి షేర్ దలాలి = $\frac{0.4}{100}$ × 50 = 0.20 రూ॥లు

∴ ఒక షేర్ యొక్క అమ్మకపు విలువ = 50 − 0.20 = ☐ రూ॥లు

∴ 100 షేర్స్ యొక్క అమ్మకపు విలువ = 100 × 49.80 = ☐ రూ॥లు

లాభాంశం 60% లభించింది.

∴ 1 షేర్‌పై లాభాంశము = $\frac{60}{100}$ × 10 = 6 రూ॥లు

∴ 100 షేర్లపై లాభాంశము = 6 × 100 = ☐ రూ॥లు

∴ నళినితాయి షేర్ల అమ్మకము మరియు లాభాంశం యొక్క మొత్తం = ☐ + ☐ = 5580 రూ॥లు

కాని నళినితాయి చేసిన పెట్టుబడి = 6024 రూ॥లు.

∴ నళినితాయికి కలిగిన నష్టం = ☐ − ☐ = ☐ రూ॥లు

జవాబు : నళినితాయికి ఈ క్రమ-విక్రయాలలో 444 రూ॥ల నష్టం కలిగింది.

కృత్యం: ఉదాహరణ 5 లోని క్రయ-విక్రయాల సమయంలో దలాలిపై పన్ను 18% రేటు చొప్పున చెల్లించినట్లయితే ఎంత నష్టం వస్తుందో కనుగొనండి. మీ జవాబు 451.92 రూ॥లు వచ్చిందా లేదా సరిచూడండి.

తెలుసుకుందాం.

మ్యూచ్‌వల్ ఫండ్ (Mutual Fund – MF)

షేర్స్‌ను అభ్యసిస్తున్నప్పుడు కంపెనిని స్థాపించుటకు ఔత్సాహిక వ్యక్తులు కలిసి సమాజం యొక్క భాగస్వామ్యమును తీసుకొని పెద్ద మొత్తంలో మూలధనంను పొగు చేస్తారు అని మనం చూశాం. కంపెని యొక్క పనితీరు చక్కగా ఉన్నట్లయితే అందరికి ఆ లాభం చేకూరుతుంది. వారికి లాభాంశము లభిస్తుంది షేర్స్ యొక్క మార్కెట్ విలువ పెరుగుతుంది. లాభం కలుగుతుంది. కంపెని యొక్క మూలధనం పెరుగుతుంది. ఫలితంగా దేశం యొక్క అభివృద్ధికి తోడ్పడుతుంది క్లుప్తంగా ఇది సాంఘిక శాస్త్రము యొక్క తత్వము. 'Together we can progress', కాని ప్రతి నాణేనికి రెండు వైపులు ఉంటాయి. షేర్స్‌లలో లాభానికి బదులు అప్పుడప్పుడు నష్టం కూడా జరగవచ్చు. ఈ నష్టంను తగ్గించవచ్చా? పెట్టుబడిదారునికి నష్టం సంభవించే అవకాశమును తక్కువ చేయవచ్చునా? అవును. ఈ రోజుల్లో చాలా నుంది మ్యూచ్‌వల్ ఫండ్‌లలో పెట్టుబడిపెడుతున్నారు.

మ్యూచ్‌నల్ ఫండ్ అనగా అనేక మంది పెట్టుబడిదారుల డబ్బును జమచేసి పోగైన సొమ్మును ఒకే రకమైన షేర్స్‌లలో పెట్టకుండా పట్టుబడుల యొక్క వివిధ రకాలైన షేర్స్‌లలో పెట్టుబడి పెడతారు. అనగా నష్టం జరిగే అవకాశం తక్కువవుతుంది మరియు మొత్తం లాభాంశం అందరి పెట్టుబడిదారులకు పంచడం జరుగుతుంది. మ్యూచ్‌వల్ ఫండ్‌లలో పెట్టుబడి ఎలా పెడతారు? వాటి నుండి రాబడి ఎలా లభిస్తుంది? ఎంత కాలం కొరకు పెట్టుబడి పెట్టవలెను? దానిలో వివిధరకాలు ఏవి? ఇలాంటి అనేక ప్రశ్నలకు వివరంగా సమాధానాలు ఆర్థిక సలహదారుడు ఇవ్వగలడు.

> Investments in Mutual Funds are subject to Market risks. Read all scheme related documents carefully. అనే వాక్యమును మీరు అనేకసార్లు విని ఉంటారు లేదా చదివి ఉంటారు. దాని అర్థమును బాగా గ్రహించండి. కొన్ని సందర్భాలలో మ్యూచ్‌వల్ ఫండ్‌లలో చేసిన పెట్టుబడిపై లాభాలకు బదులు నష్టం వస్తుంది దానిని పెట్టుబడిదారులే భరించవలసి వస్తుంది.

మ్యూచ్‌వల్‌ఫండ్ అనగా వృత్తి సంబంధ నిపుణుల ద్వారా నిర్మించబడిన ఫండ్ పథకము. ఆ నిపుణులను AMC అనగా 'అసెట్ మెనెజ్‌మెంట్ కంపెని' అంటారు. వారు మార్కెట్ యొక్క అంచనా ప్రకారం ఔత్సాహికులైన వారి నుండి డబ్బును వివిధ పథకాలలో అనగా ఈక్విటీ, షేర్స్, డెబ్ట్ ఫండ్, డిబెంచర్స్, బాండ్స్ లేదా రెండింటి బాలన్స్‌డ్ ఫండ్ లాంటి వాటిలో పెట్టుబడి దారుల సూచన ప్రకారం పెట్టుబడి పెడతారు.

మీరు షేర్ మార్కెట్‌లో పెట్టుబడి పెట్టినట్లయితే షేర్స్ లభిస్తాయి. అదే విధంగా మ్యూచ్‌వల్ ఫండ్‌లో పెట్టుబడి పెట్టినట్టయితే '**యూనిట్స్**' లభిస్తాయి.

ప్రతి యూనిట్ ఏ మార్కెట్ విలువ గలదో దానిని ఆ యూనిట్ యొక్క నికర ఆస్తి విలువ **(Net asset value – NAV)** అంటారు.

ఒక యూనిట్ యొక్క నికర ఆస్తి విలువ × యూనిట్ల సంఖ్య = మ్యూచవల్ ఫండ్ కంపెని మొత్తం పెట్టుబడి సొమ్ము.

సూచన : షేర్స్‌ల యొక్క ధర ప్రకారంగానే మ్యూచ్‌వల్ ఫండ్‌లలో యూనిట్స్‌ల నికర ఆస్తి విలువ కూడ ఎల్లప్పుడూ మారుతూ ఉంటుంది అవసరం ఉన్నప్పుడు ఈ యూనిట్స్‌ను అమ్ముకొనవచ్చును.

బ్యాంకు కాని, భారతీయ తపాల సేవ కాని, వీటిలోని పెట్టుబడి ఎక్కువ సురక్షితంగా ఉంటుంది. కానీ ఈ పెట్టుబడి ద్వారా లభించే రాబడి ద్రవ్యోల్బణంను తగిన రీతిలో ఎదుర్కొనుటకు తక్కువ పడుతుంది. సరైన పద్ధతిలో పెట్టుబడి పెట్టిన డబ్బు కూడా డబ్బును తయారు చేస్తుంది అని గుర్తుపెట్టుకొనవలేను. దీనికై డబ్బు యొక్క ప్రణాళిక అనగా ఆర్థిక ప్రణాళిక అవసరమవుతుంది. (Financial Planning)

జాగ్రత్తగా ఆలోచించి చేసే పెట్టుబడి సరైన నిర్ణయం తీసుకోవడం చాలా ముఖ్యమైంది. దాని నియతమైన అభ్యాస అలవాటు ఉండవలసి ఉంటుంది.

నియమిత ఆవృత్త పెట్టుబడి పథకము (SIP –Systematic Investment Plan)

మ్యూచ్‌వల్ ఫండ్‌లో ఒకేసారి పెద్ద మొత్తంలో పెట్టుబడి పెట్టే అవకాశం లేదు అనుకోండి, అప్పుడు మనం చిన్న చిన్న కిస్తీలలో ప్రతి నెల పెట్టుబడి పెట్టవచ్చు. కనీసం 500 రూ॥లు ప్రతినెల మ్యూచ్‌వల్ ఫండ్‌లో పెట్టవచ్చు. ఇలాంటి నియమిత పద్ధతిలో నెల లేదా త్రైమాసిక పెట్టుబడి పెట్టవచ్చు. ఈ పథకం ద్వారా పొదుపు క్రమశిక్షణ అలవరుతుంది మరియు భవిష్యత్తులోని ఆర్థిక లక్ష్యాలను సులభంగా అధిగమించవచ్చు, ఈ పథకము కూడా ధీర్ఘకాలానికి లాభదాయకమైనదిగా చెప్పవచ్చును ఎందుకనగా షేర్ మార్కెట్‌లో హెచ్చు-తగ్గులు ఈ పథకాలలోని పెట్టుబడులపై తక్కువ పరిణామము ఉంటుంది. తక్కువలో తక్కువ 3 నుండి 5 వీలైతే 10-15 సంవత్సరాలు ఈ పథకంలో పెట్టుబడి పెడితే చాలా ఉత్తమం.

మ్యూచ్‌వల్ ఫండ్ యొక్క లాభాలు

- నైపుణ్యం, అనుభవం గల ఫండ్ మేనేజర్స్
- పెట్టుబడులలో వైవిధ్యం (diversifications of funds)
- పారదర్శకత-పెట్టుబడికి తగిన సంరక్షణ.
- నగదు రూపంలోని ఆస్తులు- అవసరమైనపుడు అమ్మే సౌకర్యము.
- పరిమిత నష్టం
- అల్ప-ధీర్ఘకాల వ్యవధి లాభాలు లభిస్తాయి.
- కొన్ని ఫండ్‌లలో (ELSS) పెట్టుబడిపై ఆదాయ పన్ను సెక్షను 80C ప్రకారం తగ్గింపు లభిస్తుంది.

సాధించిన ఉదాహరణలు

ఉదా. 1) మ్యూచ్‌వల్ ఫండ్ పథకం యొక్క మార్కెట్ విలువ 200 కోట్ల రూ॥లు అయి కంపెనీ 8 కోట్ల యూనిట్లు చేసినట్లయితే ఒక యూనిట్ యొక్క నికర ఆస్తి విలువను కనుగొనండి.

సాధన: ఒక యూనిట్ యొక్క నికర ఆస్తి విలువ = 200 కోట్లు రూ॥లు / 8 కోట్ల యూనిట్లు = 25 రూ॥లు ప్రతి యూనిట్‌కు.

ఉదా.(2) ఉదా.1లోని కంపెనిలో మీరు 10,000రూ॥లు పెట్టుబడి పెట్టారనుకోండి. అయితే మీకు ఎన్ని యూనిట్లు లభిస్తాయి?

సాధన: యూనిట్ల సంఖ్య = పెట్టిన పెట్టుబడి / ఒక యూనిట్ యొక్క నికర ఆస్తి విలువ

= 10,000/25 = 400 యూనిట్లు లభిస్తాయి.

అభ్యాస మాలిక 4.4

1. ఒక షేర్ యొక్క మార్కెట్ వెల 200 రూపాయలు. వాటి కొనుగోలు 0.3% దలాలిని చెల్లించినట్లయితే ఆ షేర్ యొక్క కొనుగోలు ధర ఎంత?
2. ఒక షేర్ యొక్క మార్కెట్ ధర 1000 రూపాయలు ఉన్నప్పుడు దానిని అమ్మెను. మరియు దానిపై 0.1% దలాలి చెల్లించిన విక్రయానంతరం లభించే సొమ్ము ఎంత?
3. కింది షేర్ కొనుగోలు యొక్క వివరణ పత్రములోని ఖాళీలను పూరించండి. (B – కొనుగోలు చేసెను, S – అమ్మెను)

షేర్ల సంఖ్య	షేర్ల మార్కెట్ ధర	షేర్ల విలువ	దలాలీ రేటు 0.2%	దలాలీపై CGST 9%	దలాలీపై SGST 9%	షేర్ల మొత్తం విలువ
100 B	45 రూ॥లు					
75 S	200 రూ॥లు					

4. శ్రీమతి దేశాయి 100 రూపాయల ముఖ విలువ గల షేర్లను 50 రూపాయల మార్కెట్ విలువ ఉన్నపుడు అమ్మెను. అప్పుడు ఆమెకు 4988.20 రూ.లు లభించెను. దలాలీ రేటు 0.2% మరియు దలాలీపై జిఎస్‌టి రేటు 18% అయిన అమె ఎన్ని షేర్లు అమ్మినదో కనుగొనండి.
5. మిస్టర్ డిసోజా 50 రూ. ల ముఖవిలువగల 200 షేర్లను 100రూల ప్రీమియమ్‌తో కొనుగోలు చేసెను. దానిపై కంపెనీ 50% లాభాంశంను ప్రకటించింది. లాభాంశం లభించిన పిదప 100 షేర్లను 10రూ.ల తరుగుదల విలువతో అమ్మెను మరియు మిగిలిన షేర్లను 75 రూ.ల ప్రీమియం విలువతో అమ్మెను. ప్రతి లావాదేవీలో 20 రూ.ల దలాలీని చెల్లించెను. అయిన అతనికి ఈ లావాదేవీలలో లాభమా లేదా నష్టం జరిగిందా? ఎన్ని రూపాయలు?

సంకీర్ణ ప్రశ్న సంగ్రహము 4 A

1. కింది ప్రశ్నలకు జవాబు యొక్క సరియైన ఐచ్ఛికమును ఎంచుకోండి.

(1) నిత్యావసర వస్తువులపై వస్తు సేవల పన్ను రేటు ....

(A) 5% (B) 12% (C) 0% (D) 18%

(2) ఒకే రాష్ట్రంలోని వ్యాపారంలో కేంద్రప్రభుత్వం .... వసూలు చేస్తుంది.

(A) IGST (B) CGST (C) SGST (D) UTGST

(3) మనదేశంలో................ తేది నుండి వస్తు సేవల పన్ను అనే పన్ను విధానం అమలులోకి వచ్చింది.

(A) మార్చి 31, 2017 (B) ఏప్రిల్ 1, 2017

(C) జనవరి 1, 2017 (D) జూలై 1, 2017

(4) స్టీలు పాత్రలపై వస్తు సేవల పన్ను రేటు 18% అయిన దానిపై రాష్ట్ర వస్తు సేవల పన్ను యొక్క రేటు................ విధించబడుతుంది.

(A) 18% (B) 9% (C) 36% (D) 0.9%

(5) GSTIN లో మొత్తం... అంకెఅక్షరములు ఉంటాయి.

(A) 15 (B) 10 (C) 16 (D) 9

(6) ఒక గుర్తింపు పొందిన వ్యాపారి రెండవ గుర్తింపుపొందిన వ్యాపారికి వస్తువులను అమ్మిన దానిని GST లోని .... లావాదేవి అంటారు.

(A) BB (B) B2B (C) BC (D) B2C

2. 25,000 రూ॥ల ఒక వస్తువుపై వ్యాపారి 10% డిస్కౌంట్ ఇచ్చి మిగిలిన సొమ్ముపై 28% GSTను వేస్తారు. అయిన మొత్తం బిల్లు ఎన్ని రూపాయలు ఉంటుంది? దానిలోని CGST, SGSTల ఎంత మొత్తం ఉండవలెను?

3. ఒక రెడీమేడ్ బట్టల దుకాణంలో 1000 రూపాయల విలువ గల డ్రెస్ పై 5% డిస్కౌంట్ ఇచ్చిన మిగిలిన దానిపై 5% GST వేసి దానిని అమ్మెను. అయిన అది ఎన్ని రూపాయలకు దొరుకును?

4. సూరత్, గుజరాత్‌లోని ఒక వ్యాపారి 2.5 లక్షల పన్ను విధించే విలువ గల ముతక బట్టను గుజరాత్‌లోని రాజ్‌కోట్ వ్యాపారికి అమ్మెను అయిన ఈ లావాదేవిలో రెండవ వ్యాపారి 5% రేటు చొప్పున ఎంత వస్తు, సేవల పన్ను చెల్లించవలెను?

5. శ్రీమతి మల్హోత్ర 85,000 రూ॥ల పన్ను విధించే విలువ గల సోలార్ శక్తి యూనిట్ కొనుగోలు చేసెను మరియు 90,000 రూ॥లకు అమ్మెను. వస్తు, సేవల పన్ను రేటు 5% అయిన ఈ లావాదేవిలో ఎంత పన్ను తిరిగి లభిస్తుంది? (ITC)

6. Z-సెక్యూరిటి సర్వీసెస్ ఇచ్చే కంపెని 64,500 రూ॥ల పన్ను చెల్లించే విలువ గల మొత్తం సేవలందించారు. వస్తు సేవ ల పన్ను రేటు 18% ఈ సెక్యూరిటీ సర్వీసెస్‌ను నడుపుట కొరకు కంపెని లాండ్రీ సర్వీసెస్ మరియు యూనిఫామ్ సర్వీసెస్ మొదలైన అంశాలపై మొత్తం 1550 రూ॥లు వస్తు, సేవల పన్నును చెల్లించింది. అయిన ఆ కంపెని యొక్క ITC ఎంత ? దాని నుండి వస్తు, సేవల పన్నులో కేంద్ర మరియు రాష్ట్ర ప్రభుత్వాల వాటా ఎంత?

7. ఒక వ్యాపారి పోలీసు నియంత్రణ గది కొరకు వస్తు, సేవల పన్నుతో కలిపి 84,000 రూ॥లు విలువగల వాకీటాకీలు సరఫరా చేశాడు. వస్తు సేవల పన్ను రేటు 12% అయిన అతడు వసూలు చేసిన పన్నులో కేంద్ర మరియు రాష్ట్ర ప్రభుత్వాల వాటాలను కనుగొనండి. వాకీటాకీల పన్ను విధించబడే విలువను కనుగొనండి.

8.★ ఒక టోకు వర్తకుడు 1,50,000 రూ॥లు పన్ను విధించే విలువ గల విద్యుత్ పరికరాలను కొనుగోలు చేశాడు. ఆ పరికరాలన్నింటిని చిల్లర వర్తకునికి 1,80,000 రూ॥ల పన్ను విధించే విలువతో అమ్మెను చిల్లర వర్తకుడు ఆ పరికరాలన్నింటిని వినియోగదారులకు 2,20,000 రూ॥ల పన్ను విధించే విలువతో అమ్మెను. అయిన 18% రేటు చొప్పున ప్రతి లావాదేవిలోని పన్ను రశీదులో కేంద్ర మరియు రాష్ట్ర పన్నుల వాటాలను లెక్కించండి. అదేవిధంగా ప్రతి వ్యాపారి చెల్లించవలసిన నికర కేంద్రం వాటా, నికర రాష్ట్ర వాటాలను కనుగొనండి.

9.★ అన్నా పాటిల్ (ఠాణె, మహరాష్ట్ర) 14,000 రూ॥ల పన్ను విధించే విలువ గల వ్యాక్యుమ్ క్లీనర్‌ను వసయి (ముంబయి) లోని ఒక వ్యాపారికి 28% GST రేటు చొప్పున అమ్మెను వసయిలోని వ్యాపారి, వినియోగదారునికి ఆ వ్యాక్యూమ్ క్లీనర్ 16,800 రూ॥ల పన్ను విధించే విలువకు అమ్మెను. అయిన ఈ లావాదేవిలో కింది విలువలను కనుగొనండి.

(1) అన్నా పాటిల్ ఇచ్చిన పన్ను రశీదులో కేంద్ర మరియు రాష్ట్రాల యొక్క పన్నులు ఎంత చూపబడ్డాయి?

(2) వసయి వ్యాపారి వినియోగదారుని వద్ద నుండి ఎంత కేంద్ర, రాష్ట్ర ప్రభుత్వాల పన్ను వసూలు చేశాడు?

(3) వసయి వ్యాపారి ప్రభుత్వానికి పన్ను చెల్లించేటప్పుడు కేంద్ర రాష్ట్రాలకు చెల్లించవలసిన నికర పన్నులను కనుగొనండి.

10.★ కింది ఒక వస్తువుల పంపిణి వ్యాపార గొలుసులోని పన్ను రశీదు A, B, C ల మధ్య వస్తు సేవల పన్ను వసూలును లెక్కించండి. GST రేటు 12%

ఉత్పత్తిదారుడు → (పన్ను రశీదు II) → పంపిణిదారుడు → (పన్ను రశీదు II) → చిల్లర వర్తకుడు → (పన్ను రశీదు III) → వినియోగదారుడు

ఉత్పత్తిదారుడు	పంపిణిదారుడు	చిల్లర వర్తకుడు	వినియోగదారుడు
పన్ను విధించే విలువ 5000 రూ॥లు	పన్ను విధించే విలువ 6000 రూ॥లు	పన్ను విధించే విలువ 6500 రూ॥లు	?

(1) ఉత్పత్తిదారుడు, పంపిణిదారుడు మరియు చిల్లర వర్తకులు ప్రభుత్వాలకు ఎన్ని రూపాయల వస్తు సేవలపన్ను ఏఏ శీర్షికల కింది చెల్లించారు దీనిని సూచించే వివరణ పత్రమును తయారు చేయండి.

(2) చివరికి వినియొగదారునికి ఆ వస్తువు ఎన్ని రూపాయలకు లభిస్తుంది?

(3) ఈ గొలుసులో ఆ2ఆ, ఆ2ఇ రశీదులు ఏవో వాటిని రాయండి.

సంకీర్ణ ప్రశ్న సంగ్రహము 4 B

1. కింది ప్రతి ప్రశ్నకు సరియైన ఐచ్ఛికమును ఎంచుకోండి.

(1) ముఖ విలువ 100 రూ॥లు గల షేర్స్ యొక్క మార్కెట్ ధర 75 రూ॥లు అయిన కింది వాటిలో ఏ వాక్యము సరియైనది.?

(A) ఈ షేర్ 175 రూ॥ల ప్రీమియమ్‌పై కలదు. (B) ఈ షేర్ 25 రూ॥ల తరుగుదలపై విలువ కలదు.

(C) ఈ షేర్ 25 రూ॥ల ప్రీమియమ్‌పై కలదు. (D) ఈ షేర్ 75 రూ॥ల తరుగుదలపై విలువ కలదు.

(2) 50% లాభాంశము ప్రకటించిన కంపెని యొక్క 10 రూ॥ల ముఖ విలువ గల ఒక షేర్‌పై ఎంత లాభాంశము లభిస్తుంది?

(A) 50 రూ॥లు (B) 5 రూ॥లు (C) 500 రూ॥లు (D) 100 రూ॥లు

(3) ఒక మ్యూచ్వల్ ఫండ్ యొక్క ఒక యునిట్ నికర ఆస్తి విలువ 10.65 రూ॥లు అయిన 500 యూనిట్ల కొనుగోలకై అవసరమయ్యే సొమ్ము ఎంత?

(A) 5325 (B) 5235 (C) 532500 (D) 53250

(4) దలాలీపై వస్తుసేవల పన్ను రేటు .... కలదు.

(A) 5% (B) 12% (C) 18% (D) 28%

(5) షేర్స్ అమ్మేటప్పుడు ఒక షేర్ యొక్క విలువ కనుగొనుటకు మార్కెట్ ధర దలాలి మరియు GSTల ....

(A) కూడిక చేయవలెను. (B) తీసివేత చేయవలెను.

(C) గుణకారం చేయవలెను. (D) భాగాహారం చేయవలెను.

2. 100 రూ॥ల ముఖవిలువ గల షేర్ 30 రూ॥లు ప్రీమియమ్ పై కొనుగోలు చేసిరి. దలాలీ రేటు 0.3% అయిన ఒక షేర్ యొక్క వెలను కనుగొనండి.

3. ప్రశాంత్ 100 రూ॥ల ముఖ విలువ గల 50 షేర్లు 180 రూ॥ల మార్కెట్ ధరతో కొనుగోలు చేసెను. వాటిపై కంపెని 40% లాభాంశమును ఇచ్చింది. అయిన ప్రశాంత్ యొక్క పెట్టుబడిపై రాబడి యొక్క రేటును కనుగొనండి.

4. ఒకవేళ 100 రూ॥ల ముఖ విలువ గల 300 షేర్లు 30 రూ॥ల తరుగుదల విలువపై అమ్మినచో ఎన్ని రూపాయలు లభించును?

5. 100 రూ॥ల ముఖిలువ గల 120 రూ॥ల మార్కెట్ ధరతో షేర్లలో 60,000 రూ॥లు పెట్టుబడి పెట్టెను. అయిన ఎన్ని షేర్స్ లభించును?

6. శ్రీమతి మీతా అగర్వాల్ 100 రూ॥ల మార్కెట్ ధరతో 10,200 రూ॥ల షేర్లు కొనుగోలు చేసింది. వాటిలో 60 షేర్లు 125 రూ॥లు మార్కెట్ వెలకు అమ్మెను మరియు మిగిలిన షేర్లు 90 రూ॥ల మార్కెట్ వెలకు అమ్మెను అయిన ఈ లావాదేవిలో ఆమెకు లాభం వచ్చిందా లేదా నష్టమా? ఎన్ని రూపాయలు?

7. షేర్ మార్కెట్‌లో 100 రూ॥ల ముఖ విలువతో రెండు కంపెనీల షేర్లు కింది విధంగా మార్కెట్ ధర మరియు లాభాంశాల రేటు చొప్పున కలవు. అయిన ఏ కంపెనిలోని పెట్టుబడి లాభకరమైనది?

(1) కంపెని A – 132 రూ॥లు 12%   (2) కంపెని B – 144 రూ॥లు 16%

8.★ శ్రీ ఆదిత్య 100 రూ॥ల ముఖ విలువ గల షేర్లు 50 రూ॥ల మార్కెట్ ధర ఉన్నప్పుడు 50118 రూ॥లతో పెట్టి కొనుగోలు చేసెను. ఈ లావాదేవీలో అతడు 0.2% దలాలీ ఇచ్చాడు దలాలీ పై 18% రేటు చొప్పున GST చెల్లించినట్లయితే 50118 రూపాయలలో ఎన్ని షేర్లు లభిస్తాయి?

9.★ శ్రీ బాటిలీవాలా ఒక రోజులో మొత్తం 30,350 రూ॥ల విలువగల షేర్స్ అమ్మెను మరియు 69,650 రూ॥ల విలువగల షేర్స్ కొనుగోలు చేసెను. ఆ రోజు యొక్క మొత్తం క్రయ-విక్రయములపై 0.1% రైటు చొప్పున దలాలీ మరియు దలాలీ పై 18% వస్తు సేవల మరియు అమ్మకపు పన్ను చెల్లించెను. అయిన ఈ లావాదేవీలలో దలాలీ మరియు వస్తు సేవల మరియు అమ్మకపు పన్నులపై ఖర్చును కనుగొనండి.

10.★ శ్రీమతి అరుణ ఠక్కర్ ఒక కంపెని యొక్క 100 షేర్స్ 1200 రూపాయల మార్కెట్ ధరతో కొనుగోలు చేసెను. ప్రతి షేర్ 0.3% దలాలీ మరియు దలాలీపై 18% GST చెల్లించినట్లయితే

(1) మొత్తం ఎన్ని రూపాయల పెట్టుబడి పెట్టింది?   (2) పెట్టుబడిపై దలాలీ ఎంత?

(3) దలాలీపై వస్తు సేవల మరియు అమ్మకపు పన్నును కనుగొనండి.

(4) 100 షేర్స్ కొరకు ఎంత మొత్తం ఖర్చు అయ్యింది?

11.★ శ్రీమతి అనఘా దోషి 660 రూ॥ల మార్కెట్ ధర గల 22 షేర్స్ తీసుకుంది. అయిన ఆమె మొత్తం ఎన్ని రూపాయల పెట్టుబడి పెట్టింది? ఆ షేర్స్ పై 20% లాభాంశం తీసుకున్న తర్వాత 650 రూ॥లు మార్కెట్ ధరకు అమ్మింది. ప్రతి లావాదేవిలో 0.1% దలాలీ చెల్లించింది. అయిన ఈ లావాదేవిలలో ఆమెకు ఎంత శాతం లాభం లేదా నష్టం వచ్చింది దానిని కనుగొనండి.

P158LU

5 సంభావ్యత

పదండి, నేర్చుకుందాం.

- సంభావ్యత : పరిచయం
- యాదృచ్ఛిక ప్రయోగం మరియు ఫలితం
- నమూనా ప్రదేశం మరియు ఘటన
- ఘటనల సంభావ్యత

పదండి, చర్చిద్దాం.

టీచర్: విద్యార్థి మిత్రులారా, మీ తరగతిలోని విద్యార్థుల సంఖ్యకు సమానమైన చిట్టీలను ఈ డబ్బాలో ఉంచాను. ప్రతి ఒక్కరు ఒక్క చీటిని తీయండి. చీటిలపై వేరువేరు మొక్కల పేర్లు రాయబడినవి. ఏ రెండు చీటిలపై ఒకే మొక్క పేరు కనిపించదు. తులసి అనే పేరు గల చిట్టి ఎవరికి లభిస్తుందో చూద్దాం. అందరు కూడా హాజరు క్రమంలో వరుసగా నిలబడండి. చివరి చీటి తీసే వరకు ఎవ్వరు కూడా చీటిని తెరిచి చూడకూడదు.

అరుణ: సర్, వరుసలో నేను ముందున్నాను, కాని నేను మొదటగా చిట్టిని తీయను ఎందుకనగా అన్ని చీట్టిలలో నుండి ఆ చీట్టి నాకు వచ్చే అవకాశం చాలా తక్కువ.

జరీన: సర్, వరుసలో నేను అందరి కంటే చివర ఉన్నాను, నేను చివరి చిట్టిని తీయను ఎందుకనగా 'తులసీ' పేరు గల చిట్టి బహుశా నేను తీసేలోపే ఎవరైన తీసి ఉండవచ్చు.

క్లుప్తంగా మొదటి మరియు చివరి విద్యార్థులకు తులసీ పేరుగల చిట్టి వచ్చే అవకాశం చాలా తక్కువగా ఉందనిపిస్తుంది.

పై సంభాషణలో అవకాశం తక్కువ లేదా ఎక్కువగా ఉండ వచ్చును అనే ఆలోచన వచ్చింది.

మనం ప్రతీరోజు మాట్లడే మాటలలో కింది పదాలను వాడుతుంటాం.

- సంభావ్యత
- చాలావరకు
- అవకాశం
- కచ్చితంగా
- దాదాపు
- 50 – 50

భవిష్యత్తులో శక్యతల విషయముపై కింది వాక్యాలను చూడండి.

- బహుశా ఈరోజు నుండి వర్షం పడవచ్చు.
- ధరలు పెరిగే అవకాశము ఎక్కువ ఉంది.
- భారత జట్టు వచ్చే క్రికెట్ పోటిలో ప్రపంచకప్పు గెలిచే అవకాశం ఉంది.
- నాకు కచ్చితంగా ప్రథమ శ్రేణి లభిస్తుంది.
- పిల్లలకు సక్రమంగా పోలియో డోస్ వేయించినచో వారికి పోలియో సంభవించే అవకాశం ఉండదు.

పక్క పటములో క్రికెట్ ఆటగాడు టాస్ వేస్తున్నాడు.

దానిలో ఏ ఏ అవకాశములు గలవు?

☐ లేదా ☐

అనగా, నాణెమును ఎగురవేసిన ☐ అవకాశాలు ఉంటాయి.

కృత్యం 1: ఒక నాణెమును తరగతిలోని అందరు-ఒకేసారి ఎగురవేసి చూడండి. మీరు ఏమి గమనించారు?

(టీచర్ బోర్డుపై కింది పట్టికను తయారు చేసి మరియు దానిని నింపుతాడు)

అవకాశం	బొమ్మ (H)	బొరుసు (T)
విద్యార్థుల సంఖ్య	. . .	. . .

కృత్యం 2: ఇప్పుడు, అందరు ఆ నాణెమును రెండు సార్లు ఎగురవేసి చూడండి. ఏఏ అవకాశాలు కలవు?

అవకాశం	H H	HT	TH	TT
విద్యార్థుల సంఖ్య				

కృత్యం 3: మీ దగ్గర ఉన్న పాచికను ఒకసారి విసిరినచో ఉపరితల భాగముపై ఏఏ అవకాశాలు గలవు.

ఇక్కడ పాచిక ఉపరితలభాగము పై వచ్చు చిత్రములను చూపించారు.

తెలుసుకుందాం.

యాదృచ్ఛిక ప్రయోగం (Random Experiment)

ఏ ప్రయోగంలో సంభవించే అన్ని ఫలితాలు ముందుగానే తెలిసిన, కాని వాటిలో ఏ ఫలితాన్ని గూర్చి కచ్చితంగా ఊహించి చెప్పలేము, అన్ని ఫలితాలు కూడా సత్యము అయ్యే అవకాశం సమానంగా ఉంటుంది. ఇలాంటి ప్రయోగమును ''యాదృచ్ఛిక ప్రయోగం'' అని అంటారు. ఉదా. నాణెమును ఎగురవేయడం, పాచికను విసరడం, 1 నుండి 50 సంఖ్యలు రాసిన కార్డుల నుండి ఒక కార్డును తీయడం, చీట్లపేక నందలి పేక ముక్కలను బాగా కలిపి అందులోంచి ఒక పేకముక్కను తీయడం మొదలగునవి.

ఫలితము/ఫలము (Outcome)

యాదృచ్ఛిక ప్రయోగము యొక్క ఫలితమును 'ఫలము' అంటారు.

ఉదా, (1) ఒక నాణెమును ఎగురవేయుట ఈ యాదృచ్ఛిక ప్రయోగములో రెండు ఫలితములు కలవు.

బొమ్మ (H) లేదా బొరుసు (T)

(2) ఒక పాచికను విసిరే ఈ యాదృచ్ఛిక ప్రయోగములో దాని 6 తలముల పై గల బిందువుల సంఖ్యల ఆధారంగా 6 ఫలముల అవకాశములు కలవు.

1 లేదా 2 లేదా 3 లేదా 4 లేదా 5 లేదా 6

(3) 1 నుండి 50 వరకు సంఖ్యలు రాసిన కార్డుల కట్ట నుండి ఒక కార్డును తీసే ప్రయోగంలో 50 సంభావ్యత ఫలములు ఉంటాయి.

(4) చీట్లపేక నందలి పేకముక్కలను బాగా కలిపి అందులోంచి ఒక పేక ముక్కను బయటకు తీసే యాదృచ్ఛిక ప్రయోగంలో 52 పేక ముక్కలుంటాయి, వానిని కింది విధంగా చూపించారు.

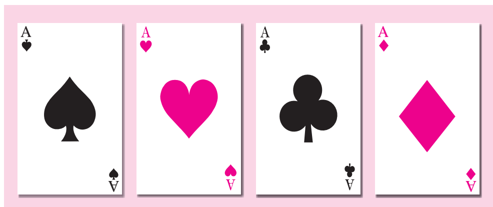
మొత్తం పేకముక్కలు 52

26 ఎరుపు పేక ముక్కలు | 26 నలుపు పేక ముక్కలు

13 బాదం ముక్కలు | 13 డైమండ్ ముక్కలు | 13 క్లబ్ ముక్కలు | 13 స్పేడ్ ముక్కలు

ఒక్కొక్క చీట్లపేకలో డైమండ్, బాదాం, క్లబ్ మరియు స్పేడ్ అను నాలుగు రకాల పేక ముక్కలుంటాయి. ఒక్కొక్క రకము నందు రాజు,రాణి, జాకి, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2 మరియు ఎక్కా అనే 13 ముక్కలు ఉంటాయి.

రాజా,రాణి, జాకిలను చిత్రయుక్త పేకలంటాం చిట్లపేకలో రాజు చిత్రం గలవి నాలుగు, రాణి బొమ్మ గలవి నాలుగు మరియు జాకి బొమ్మ గలవి నాలుగు ఇలా 12 పేక ముక్కలుంటాయి.



స్పేడ్ ఎక్కా బాదం ఎక్కా క్లబ్ ఎక్కా డైమండ్ ఎక్కా

సమాన సంభావ్యతా ఫలితములు (Equally Likely Outcomes)

ఒకవేళ మీరు ఒక పాచికను విసిరిన, పాచిక ఉపరిభాగముపై 1, 2, 3, 4, 5, 6ల నుండి ఒక సంఖ్య వచ్చు అవకాశాలు సమానంగా ఉంటాయి. అనగా 1 నుండి 6లలో ఏదేని ఒక సంఖ్య ఉపరితలంపై రావచ్చు ఒకవేళ ఎప్పుడైన ఒకే నిర్దిష్ట అంకె పదే పదే వచ్చినట్లయితే ఆ పాచిక ప్రత్యేకంగా తయారు చేయబడ్డ పాచిక (biased) అవుతుంది, ఇలాంటి విషయాలలో ఫలితములు సమాన సంభావ్యతలో ఉండవు.

ఇక ముందు మనం యాదృచ్ఛిక ప్రయోగములో ఉపయోగించేవి సమతుల్యం (fair లేదా unbiased) గలవని దృష్టిలో ఉంచుకొంటాం.

ఇచ్చిన ఫలితములో నుండి ఏ ఫలితములు ప్రాధాన్యత క్రమంలో ఉండనట్లయితే లేదా అన్ని ఫలితములకు సమాన అవకాశములు ఉండునో, వాటిని సమ సంభావ్య ఫలితము అని అంటారు. ఉదా. ఒకవేళ ఒక నాణెమును ఎగురవేసినచో బొమ్మ లేదా బొరుసు వచ్చు అవకాశం సమానంగా ఉంటుంది. అదే విధంగా 1 నుండి 6 అంకెలు వివిధ తలాలపై గల పాచికను ఎగురవేసినట్లయితే ఏదేని ఒక అంకె ఉపరితలం పై వచ్చే అవకాశమును పరిక్షించండి. ఇక్కడ అన్ని ఫలితములు సమాన సంభావ్యతలను కల్గి ఉన్నాయి.

అభ్యాస మాలిక 5.1

1. కింది ప్రయోగాలలో ఎన్ని అవకాశములు కలవు ?

(1) వనితకు మహారాష్ట్రలోని కింది సందర్శనా ప్రదేశాల గురించి తెలుసు. వాటిలో నుండి ఒక ప్రదేశమునకు మే నెల సెలవుల్లో తను వెళుతుంది.

అజంత, మహాబళేశ్వరం, లోణార్ సరోవరం, తడోబా అభయారణ్యం, అంబోలి, రాయ్‌గడ్, మాతేరాన్, ఆనందవనం.

(2) యాదృచ్ఛికముగా ఒక వారములోని ఒక రోజును ఎన్నుకొనుట.

(3) చీట్ల పేక నుండి ఒక ముక్కను యాదృచ్ఛికంగా తీయుట.

(4) ప్రతి కార్డుపై ఒక సంఖ్య చొప్పున 10 నుండి 20 వరకు సంఖ్యలు రాయబడినవి. వాటి నుండి యాదృచ్ఛికంగా ఒక కార్డును ఎన్నుకోవాలి.

ఆలోచిద్దాం.

కింది ప్రయోగాలలో ఏ ప్రయోగములో కావలసిన ఫలితము ఎక్కువగా లభించే అవకాశం కలదు ?

(i) ఒక పాచికను విసిరిన 1 లభించుట.

(ii) ఒక నాణెమును ఎగురవేసిన బొమ్మ లభించుట.

తెలుసుకుందాం.

నమూన ప్రదేశం (Sample Space)

యాదృచ్ఛిక ప్రయోగంలో, సాధ్యమైన ఫలితముల సమితిని నమూన ప్రదేశము అంటారు.
నమూన ప్రదేశంను 'S' లేక 'Ω' (ఈ గ్రీకు అక్షరమును ఒమెగా అంటారు) ఈ గుర్తుచే సమితి రూపములో సూచిస్తారు. నమూన ప్రదేశమునందలి ప్రతి మూలకమును 'నమూనబిందువు' అంటారు. నమూన ప్రదేశం 'S' నందలి మొత్తం బిందువుల సంఖ్యను n(S) గా సూచిస్తారు. ఒకవేళ n(S) పరిమితము అయితే దానిని పరిమిత నమూన ప్రదేశము అంటారు. పరిమిత నమూన ప్రదేశమునకు కింద కొన్ని ఉదహరణలు ఇవ్వబడినవి.

క్ర. సం.	యాదృచ్ఛిక ప్రయోగం	నమూనా ప్రదేశం	నమూనా బిందువుల సంఖ్య
1	ఒక నాణెము ఎగురవేసిన	S = {H, T}	n(S) = 2
2	రెండు నాణెములు ఎగురవేసిన	S = { HH, HT, TH, TT}	n(S) =
3	మూడు నాణెములు ఎగురవేసిన	S = {HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT}	n(S) = 8
4	ఒక పాచిక వేసిన	S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}	n(S) =
5	రెండు పాచికల వేసిన	S = {(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)}	n(S) = 36
6	1 నుండి 25 వరకు సంఖ్యలు రాసిన కార్డుల కట్టనుండి ఒక కార్డు బయటకు తీసిన.	S = {1, 2, 3, 4, ..., 25}	n(S) =
7	52 ముక్కలు గల బాగా కలిపిన చిట్లపేక నుండి ఒక ముక్కను తీసిన	డైమండ్: ఎక్క 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, జాకి, రాణి, రాజు స్పేడ్: ఎక్క, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, జాకి, రాణి, రాజు బాదం: ఎక్క, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, జాకి, రాణి, రాజు క్లబ్: ఎక్క, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, జాకి, రాణి, రాజు	n(S) = 52

ఇది గుర్తుంచుకుందాం.

(i) ఒక నాణెమును రెండుసార్లు ఎగురవేసినా లేదా రెండు నాణెములు ఏకకాలంలో ఎగుర వేసినా ఒకే విధమైన నమూనా ప్రదేశము వచ్చును. ఇది మూడు నాణెములకు కూడా వర్తించును.

(ii) ఒక పాచికను రెండుసార్లు వేసినా, రెండు పాచికలను ఏకకాలంలో వేసినా ఒకే విధమైన నమూనా ప్రదేశము వచ్చును.

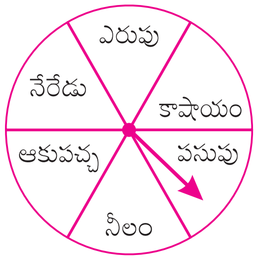
అభ్యాస మాలిక 5.2

1. కింది ప్రతి ప్రయోగములలో నమూనా ప్రదేశము 'S' మరియు నమూనా బిందువుల సంఖ్య n(S)లను రాయండి.

(1) ఒక పాచిక మరియు ఒక నాణెమును ఏకకాలములో విసిరినప్పుడు

(2) 2, 3, 5 అంకెలలో అంకెలు పునరావృతం కాకుండా రెండు అంకెలుగల సంఖ్యను తయారుచేయుట.

2. ఆరు రంగులు గల చక్రంపై బాణమును తిప్పినచో అది ఏ రంగు పై ఆగుతుందో చూడటం.



3. 2019 సం॥లోని మార్చి నెలలో 5 యొక్క గుణిజాలలో వచ్చు తేదీల యొక్క వారములు తెలుసుకొనుట (పక్క క్యాలేండర్ పేజిని చూడండి)

MARCH - 2019

M	T	W	T	F	S	S
				1	2	3
4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17
18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31

4. ఇద్దరు బాలురు (B_1, B_2) మరియు ఇద్దరు బాలికలు (G_1, G_2) నుండి ఇద్దరు సభ్యులు గల రహదారి సురక్ష సమితిని తయారుచేయాలి దీనికి నమూన ప్రదేశమును రాయుటకు కింది కృత్యము పూర్తి చేయండి.

(1) ఇద్దరు బాలురు గల సమితి = [ ] (2) ఇద్దరు బాలికలు గల సమితి = [ ]

(3) ఒక బాలుడు మరియు ఒక బాలికను కలిపి ఏర్పడు సమితి = [B_1, G_1] [ ] [ ] [ ]

$\therefore$ నమూన ప్రదేశము = {..., ..., ..., ..., ..., ..., ...}

తెలుసుకుందాం.

ఘటన (Event)

ప్రత్యేకమైన నియమాలను తృప్తిపరిచే ఫలితమును అనుకూల ఫలితము అంటారు (favourable outcome)

నమూన ప్రదేశంలోని కావలసిన ఫలితముల సమితిని **'ఘటన'** అంటారు. ఘటన నమూన ప్రదేశంనకు ఉపసమితి అవుతుంది.

ఈ ఘటనలను A, B, C, D లాంటి పెద్ద అక్షరములచే సూచిస్తారు.

ఉదా. రెండు నాణెములు ఎగురవేసిన కనీసం ఒక బొరుసు లభించే ఘటనను A అనుకొండి.

ఇక్కడ కావల్సిన ఫలితము కింది విధంగా,

A = {TT, TH, HT}

ఘటన A నందిలి మూలకముల సంఖ్యను n(A) తో సూచిస్తారు. ఇక్కడ n(A) = 3

అధిక వివరాలకై ఘటనల రకములు

(i) కచ్చిత ఘటన (Certain event)
(ii) అసాధ్య ఘటన (Impossible event)
(iii) ఏకమూలక ఘటక (Simple event)
(iv) పూరక ఘటన (Complement of an event)
(v) పరస్పర వియుక్త ఘటన (Mutually exclusive event)
(vi) సంపూర్ణ ఘటన (Exhaustive event)

సాధించిన ఉదాహరణలు

ఉదా. (1) రెండు నాణెములు ఏక కాలంలో ఎగురవేయబడినవి. ఈ ప్రయోగం కొరకు నమూన ప్రదేశము 'S' రాయండి. అందులోని నమూన బిందువుల సంఖ్య n(S) రాయండి. ఈ ప్రయోగం కొరకు కింది ఘటనలను సమితుల రూపంలో రాయండి మరియు దాని నుండి నమూన ఘటనలను రాయండి.

(i) తక్కువలో తక్కువ ఒక బొమ్మపడు ఘటన A

(ii) కచ్చితంగా ఒక బొమ్మపడు ఘటన B

(iii) ఎక్కువలో ఎక్కువ ఒక బొరుసుపడు ఘటన C

(iv) ఒక్క బొమ్మ కూడ పడని ఘటన D

సాధన : రెండు నాణెములను ఏకకాలంలో ఎగురవేసినపుడు,

S = {HH, HT, TH, TT}   n(S) = 4

(i) తక్కువలో తక్కువ ఒక బొమ్మపడు ఘటన A

A = {HH, HT, TH}   n(A) = 3

(ii) కచ్చితంగా ఒక బొమ్మపడు ఘటన B

B = { HT, TH}   n(B) = 2

(iii) ఎక్కువలో ఎక్కువ ఒక బొరుసుపడు ఘటన C

C = {HH, HT, TH}   n(C) = 3

(iv) ఒక్క బొమ్మ కూడ పడని ఘటన D

D = {TT}   n(D) = 1

ఉదా. (2) ఒక సంచిలో 50 కార్డులుగలవు. ప్రతి కార్డుపై 1 నుండి 50 లో ఒక సంఖ్య రాయబడి ఉన్నది వాటి నుండి యాదృచ్ఛికంగా ఒక ముక్క తీయబడినది అయిన నమూన ప్రదేశము 'S' రాయుము.

వాటినుండి ఘటన A, B మరియు వాటిలోని నమూన మూలకముల సంఖ్యను రాయండి.

(i) కార్డుపై గల 6 చే భాగించబడు సంఖ్యతో ఏర్పడు ఘటన A.

(ii) కార్డుపై గల కచ్చిత వర్గమూలం వచ్చే సంఖ్య గల కార్డు యొక్క ఘటన B.

సాధన : నమూన ప్రదేశం, S = {1, 2, 3, . . ., 49, 50}   n(S) = 50

(1) కార్డుపై గల 6 చే భాగించబడు సంఖ్యతో ఏర్పడు ఘటన A.

A = {6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48}, n(A) = 8

(2) కార్డుపై గల కచ్చిత వర్గమూలం వచ్చు సంఖ్యతో ఏర్పడు ఘటన B.

B = {1, 4, 9, 16, 25, 36, 49},   n(B) = 7

ఉదా. (3) 3 బాలురు మరియు 2 బాలికలలో నుండి ఇద్దరు సభ్యులుగా గల స్వచ్ఛతా కమిటీలు తయారు చేయవలెను. నమూన ప్రదేశము 'S' మరియు నమూన బిందువుల సంఖ్యలను రాయండి అదే విధంగా కింది ఘటనలను సమితుల రూపంలో రాయుము మరియు ఘటనల యందలి మొత్తం నమూన బిందువుల సంఖ్యను రాయుండి.

(i) తక్కువలో తక్కువ ఒక బాలిక ఉండు ఘటన A.

(ii) ఒక బాలుడు మరియు ఒక బాలిక ఉండు ఘటన B.

(iii) కేవలం బాలురే గల ఘటన C.

(iv) ఎక్కువలో ఎక్కువ ఒక బాలిక ఉండు ఘటన D.

సాధన : ముగ్గురు బాలురు, B_1, B_2, B_3 మరియు ఇద్దరు బాలికలు G_1, G_2 అనుకొనుము.

వారిచే ఇద్దరు సభ్యులుగల పర్యావరణ కమిటీలు తయారు చేసిన నమూన ప్రదేశం.

$S = \{B_1B_2, B_1B_3, B_2B_3, B_1G_1, B_1G_2, B_2G_1, B_2G_2, B_3G_1, B_3G_2, G_1G_2\}$ $\quad n(S) = 10$

(i) కమిటీలో తక్కువలో తక్కువ ఒక బాలిక ఉండు ఘటన A.

$A = \{B_1G_1, B_1G_2, B_2G_1, B_2G_2, B_3G_1, B_3G_2, G_1G_2\}$ $\quad n(A) = 7$

(ii) కమిటీలో ఒక బాలుడు మరియు ఒక బాలిక ఉండు ఘటన B.

$B = \{B_1G_1, B_1G_2, B_2G_1, B_2G_2, B_3G_1, B_3G_2\}$ $\quad n(B) = 6$

(iii) కమిటీలో కేవలం బాలురే గల ఘటన C

$C = \{B_1B_2, B_1B_3, B_2B_3\}$ $\quad n(C) = 3$

(iv) కమిటీలో ఎక్కువలో ఎక్కువ ఒక బాలిక ఉండు ఘటన D

$D = \{B_1B_2, B_1B_3, B_2B_3, B_1G_1, B_1G_2, B_2G_1, B_2G_2, B_3G_1, B_3G_2\}$ $\quad n(D) = 9$

ఉదా. (4) రెండు పాచికలు వేయ బడినవి, నమూన ప్రదేశము 'S' మరియు నమూన బిందువుల సంఖ్య n(S) లను రాయండి.

సమితి రూపములో కింది ఘటనలను రాయండి. మరియు ఘటనల యందలి మొత్తం నమూన బిందువుల సంఖ్యను రాటండి.

(i) పాచికపై పడు సంఖ్యల మొత్తం ప్రధాన సంఖ్య అగును.

(ii) పాచికపై పడు సంఖ్యల మొత్తం 5 యొక్క గుణిజం అగును.

(iii) పాచికపై పడు సంఖ్యల మొత్తం 25 అగును.

(iv) మొదటి పాచికపై పడిన సంఖ్య రెండవ పాచికపై పడిన సంఖ్య కంటె చిన్నది అగును.

సాధన : నమూన ప్రదేశం,

$$S = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6),$$
$$(2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6),$$
$$(3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6),$$
$$(4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6),$$
$$(5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6),$$
$$(6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\} \quad n(S) = 36$$

(i) పాచికపై పడు సంఖ్యల మొత్తం ప్రధాన సంఖ్య అగు ఘటనను E అనుకొనుము.

$$E = \{(1, 1), (1, 2), (1, 4), (1, 6), (2, 1), (2, 3), (2, 5), (3, 2), (3, 4), (4, 1), (4, 3), (5, 2), (5, 6), (6, 1), (6, 5)\} \quad n(E) = 15$$

(ii) పాచికపై పడు సంఖ్యల మొత్తం 5 యొక్క గుణిజం అగు ఘటనను F అనుకొనుము.

$$F = \{ (1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1), (4, 6), (5, 5), (6, 4) \} \quad n(F) = 7$$

(iii) పాచికపై పడు సంఖ్యల మొత్తం 25 అగు ఘటనను G అనుకొనుము.

$$G = \{ \ \} = \phi \quad n(G) = 0$$

(iv) మొదటి పాచికపై పడిన సంఖ్య రెండవ పాచికపై పడిన సంఖ్య కంటె చిన్నది అగు ఘటనను H అనుకొనుము.

$$H = \{(1, 2) (1, 3) (1, 4) (1, 5) (1, 6) (2, 3) (2, 4) (2, 5) (2, 6)$$
$$(3, 4) (3, 5) (3, 6) (4, 5) (4, 6) (5, 6)\} \quad n(H) = 15$$

అభ్యాస మాలిక 5.3

1. కింది ప్రయోగములలో నమూన ప్రదేశము 'S' నమూన బిందువుల సంఖ్య n(S) అదే విధంగా ఘటనలు A, B, C లను సమితి రూపంలో రాయండి మరియు n(A), n(B) మరియు n(C) లను రాయండి.

(1) ఒక పాచికను వేసినపుడు,

పాచికపై సరి సంఖ్య పడు ఘటన A.

పాచికపై బేసి సంఖ్య పడు ఘటన B.

పాచికపై ప్రధాన సంఖ్య పడు ఘటన C.

(2) రెండు పాచికలను ఏకకాలంలో వేసినప్పుడు,

పాచికపై పడు అంకెల మొత్తం 6 యొక్క గుణిజం అగు ఘటన A.

పాచికపై పడు అంకెల మొత్తం తక్కువలో తక్కువ 10 అగు ఘటన B.

పాచికపై పడు అంకెలు సమానంగా ఉండు ఘటన C.

(3) మూడు నాణెములను ఏకకాలంలో వేసినప్పుడు,

తక్కువలో తక్కువ రెండు బొమ్మలు పడు ఘటన A.

ఒక బొమ్మ కూడా పడని ఘటన B.

రెండవ నాణెముపై బొమ్మపడు ఘటన C.

(4) అంకెలు పునరావృతం కాకుండా 0, 1, 2, 3, 4, 5 అనే అంకెలతో రెండంకెల సంఖ్యలను తయారు చేశారు.

ఏర్పడిన సంఖ్య సరి సంఖ్య అయ్యే ఘటన A.

ఏర్పడిన సంఖ్య 3 చే భాగింపబడు సంఖ్య అయ్యే ఘటన B

ఏర్పడిన సంఖ్య 50 కంటే పెద్ద సంఖ్య అయ్యే ఘటన C.

(5) ముగ్గురు పురుషులు మరియు ఇద్దరు స్త్రీల నుండి ఇద్దరు సభ్యులుగల పర్యావరణ సమితిని తయారు చేయవలెను.

సమితిలో తక్కువలో తక్కువ ఒక స్త్రీ ఉండు ఘటన A.

సమితిలో ఒక పురుషుడు మరియు ఒక స్త్రీ ఉండు ఘటన B.

సమితిలో ఒక స్త్రీ కూడా లేని ఘటన C.

(6) ఏక కాలంలో ఒక నాణెము మరియు ఒక పాచిక వేయబడినచో.

బొమ్మ మరియు బేసి సంఖ్యపడు ఘటన A.

H లేదా T మరియు సరిసంఖ్య పడు ఘటన B

7 కన్న పెద్ద సంఖ్య మరియు బొరుసుపడు ఘటన C.

తెలుసుకుందాం.

ఘటన యొక్క సంభావ్యత (Probability of an event)

ఒక సులభ ప్రయోగంను ఆలోచిద్దాం. ఒక సంచిలో సమాన ఆకారంలో గల నాలుగు బంతులు కలవు. అందులో మూడు బంతులు తెలుపు రంగు మరియు నాలుగవ బంతి నలుపు రంగులో ఉన్నాయి. కళ్ళు మూసుకొని సంచిలోని ఒక బంతిని తీయాలి.

తీయబడిన బంతి తెలుపు బంతి అయ్యే అవకాశము ఎక్కువగా ఉంది అని సహజంగానే తెలుస్తుంది.

గణిత భాషలో ఏదేని కావలసిన ఘటన యొక్క అవకాశమును సూచించే సంఖ్యను సంభావ్యత అంటారు. దీనిని కింది సూత్రం ద్వారా సంఖ్యలో లేదా శాతములో తెలుపుతారు.

ఏదేని ఒక యాదృచ్ఛిక ప్రయోగం యొక్క నమూనా ప్రదేశము S మరియు A అనేది ప్రయోగం యొక్క కావలసిన ఘటన అయిన ఆ ఘటన యొక్క సంభావ్యతను 'P(A)' చే సూచిస్తారు. మరియు కింది సూత్రము ద్వారా నిర్ణయిస్తారు.

$$P(A) = \frac{\text{'A' లోని నమూన బిందువుల సంఖ్య}}{\text{నమూనా ప్రదేశంలోని నమూన బిందువులన్నింటి సంఖ్య}} = \frac{n(A)}{n(S)}$$

పై ప్రయోగంలో 'తీసిన బంతి తెలుపు బంతి అయ్యే' ఘటన A అయిన n(A) = 3, ఎందుకనగా తెలుపు బంతులు మూడు కలవు మరియు మొత్తం నాలుగు బంతులు ఉన్నందున n(S) = 4

$\therefore$ తీసిన బంతి తెలుపు బంతి అయ్యే సంభావ్యత $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(S)} = \dfrac{3}{4}$

అదే విధంగా తీసిన బంతి నలుపు బంతి అయ్యే ఘటన B అయిన n(B) = 1 $\therefore P(B) = \dfrac{n(B)}{n(S)} = \dfrac{1}{4}$

సాధించిన ఉదాహరణలు

ఉదా. (1) ఒక నాణెము ఎగురవేసినప్పుడు, కింది ఘటనల సంభావ్యతలను కనుగొనండి.

(i) బొమ్మ పడుట. (ii) బొరుసు పడుట.

సాధన : నమూనా ప్రదేశమును 'S' అనుకొనండి.

$S = \{H, T\}$ $n(S) = 2$

(i) బొమ్మపడు ఘటన A అనుకొనండి.

$A = \{H\}$ $n(A) = 1$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{1}{2}$$

(ii) బొరుసుపడు ఘటన B అనుకొనండి.

$B = \{T\}$ $n(B) = 1$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{1}{2}$$

ఉదా. (2) ఒక పాచికను వేసినచో కింది ఘటనల సంభావ్యతలను కనుగొనండి.

(i)పాచికపై ప్రధాన సంఖ్యపడుట. (ii) పాచికపై 2చే భాగించపడు సంఖ్య ఉండుట.

సాధన : నమూనా ప్రదేశంను 'S' అనుకుందాం.

$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ $n(S) = 6$

(i) పాచికపై ప్రధాన సంఖ్యపడు ఘటన A.

$A = \{2, 3, 5\}$ $n(A) = 3$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

(ii) ఘటన B : పాచికపై సరిసంఖ్య పడుట

$B = \{2, 4, 6\}$ $\qquad n(B) = 3$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)}$$

$$P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

ఉదా. (3) బాగా కలిపిన 52 ముక్కలు గల చీట్ల పేక నుండి ఒక ముక్కను తీసినచో కింది ఘటనల సంభావ్యతలను కనుగొనండి.

(i) ఎరుపు పేక ముక్క వచ్చు (ii) చిత్రయుక్త పేక ముక్క వచ్చు.

సాధన : నమూన ప్రదేశం 'S' అనుకుందాం. $\therefore n(S) = 52$

(i) ఘటన A : ఎరుపు పేక ముక్క ఉండే.

మొత్తం ఎరుపు పేక ముక్కలు = 13 డైమండ్ ముక్కలు + 13 బాదాం ముక్కలు

$n(A) = 26$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{26}{52} = \frac{1}{2}$$

(ii) ఘటన B : చిత్రయుక్త పేక ముక్క వచ్చు ఘటన.

చిట్లపేకలో రాజు, రాణి మరియు జాకి బొమ్మ ముక్కలు ఉంటాయి మొత్తం బొమ్మ పేక ముక్కలు 12.

$\therefore n(B) = 12$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{12}{52} = \frac{3}{13}$$

ఉదా. (4) ఒక డబ్బాలో 5 స్ట్రాబెరి, 6 కాఫీ మరియు 2 పిప్పరమింట్ చాక్లేట్లు గలవు.ఆ డబ్బాలో నుండి ఒక చాక్లెటును తీసినచో,

(i) తీసిన చాక్లెటు కాఫీ చాక్లెటు అయ్యే

(ii) తీసిన చాక్లెటు పిప్పర్‌మింట్ చాక్లెటు అయ్యే సంభావ్యతలను కనుగొనండి.

సాధన : నమూన ప్రదేశమును 'S' అనుకుందాం. $\therefore n(S) = 5 + 6 + 2 = 13$

ఘటన A : తీసిన చాక్లెటు కాఫీ చాక్లెటు అయ్యే సంభావ్యత

$n(A) = 6$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

$$P(A) = \frac{6}{13}$$

ఘటన B : తీసిన చాక్లెటు పిప్పర్‌మింట్ చాక్లెటు అయ్యే సంభావ్యత

$n(B) = 2$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)}$$

$$P(B) = \frac{2}{13}$$

ఇవి గుర్తుంచుకోండి.

- సంభావ్యతను చెప్పేటప్పుడు లేదా రాసేటప్పుడు భిన్నాలు లేదా శాతములు ఉపయోగించబడతాయి.
- ఏదేని ఘటన యొక్క సంభావ్యత 0 నుండి 1 లేదా 0% నుండి 100% గా ఉంటుంది.

అనగా ఘటన E అయిన $0 \leq P(E) \leq 1$ లేదా $0\ \% \leq P(E) \leq 100\ \%$

ఉదా. $\frac{1}{4}$ అను సంభావ్యతను 25% గా రాయవచ్చు.

- అధ్యాయం మొదట్లో తరగతిలోని విద్యార్థులను మొక్కల పేర్లుగల చిట్టీలను తీయమని చెప్పాం. అప్పుడు తులసి పేరుగల చిట్టీ విద్యార్థులకు లభించే సంభావ్యత గురించి ఆలోచించారు. ఒకే చిట్టీపైన తులసి అనే పేరు ఉంది. ఒకవేళ 40 మంది విద్యార్థులలో ప్రతి ఒక్కరు ఒక చిట్టీ తీసినప్పుడు ప్రతి ఒక్కరిలో తులసి పేరు రాయబడిన చిట్టీ వచ్చు సంభావ్యత $\frac{1}{40}$. ప్రారంభంలో అదే విధంగా మధ్యలో లేదా చివరిగా చిట్టీ తీసేవారికి ఆ చిట్టీ లభించు సంభావ్యత అంతే (సమానం) అవుతుంది.

అభ్యాస మాలిక 5.4

1. రెండు నాణెములను ఎగురవేసినపుడు కింది ఘటనల సంభావ్యతలను కనుగొనండి.

(1) తక్కువలో తక్కువ ఒక బొమ్మపడుట. (2) ఒక్క బొమ్మ కూడా పడని.

2. రెండు పాచికలను వేసినప్పుడు కింది ఘటనల సంభావ్యతలను కనుగొనండి.

(1) పాచిక పై పడు అంకెల మొత్తము తక్కువలో తక్కువ 10 ఉండే.

(2) పాచిక పై పడు అంకెల మొత్తము 33 ఉండే (అయ్యే).

(3) మొదటి పాచికపై పడు సంఖ్య రెండవ పాచికపై పడిన సంఖ్య కన్న పెద్దదిగా ఉండుట.

3. ఒక పెట్టెలో 15 టిక్కెట్లు గలవు. ప్రతీ టిక్కెటు పై 1 నుండి 15 వరకు వీటిలో సంఖ్యలు రాయబడినవి. పెట్టె నుండి ఒక టిక్కెటు యాదృచ్ఛికంగా తీయబడినచో టిక్కెటు పై సంఖ్యలు.

(1) సరి సంఖ్య వచ్చు. (2) 5 యొక్క గణిజము వచ్చు ఘటనల సంభావ్యతను కనుగొనుము.

4. 2, 3, 5, 7, 9 అంకెలతో అంకెలు పునరావృతం కాకుండా రెండంకెల సంఖ్యలు తయారుచేసినచో కింది ఘటనల సంభావ్యతలను కనుగొనండి.

(1) బేసి సంఖ్యగా వచ్చుట. (2) 5 యొక్క గుణిజముగా వచ్చు.

5. బాగా కలిపిన 52 ముక్కలుగల చీట్లపేక నుండి ఒక ముక్క తీసిన చో కింది ఘటనల సంభావ్యతలను కనుగొనండి.

(1) ఎక్కా పేక ముక్క వచ్చుట. (2) స్పేడ్ పేక ముక్క వచ్చుట.

సంకీర్ణ ప్రశ్న సంగ్రహము – 5

1. కింది ప్రశ్నలకు సముచితమైన ఐచ్ఛికమును ఎంచుకొండి

(1) కింది ఐచ్ఛికములలో ఏది సంభావ్యత అయ్యే అవకాశము లేదు?

(A) $\frac{2}{3}$ (B) 1.5 (C) 15 % D) 0.7

(2) ఒక పాచికను వేసినచో దానిపై 3 కంటే తక్కువ సంఖ్య వచ్చు సంభావ్యత ..... అవుతుంది.

(A) $\frac{1}{6}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{2}$ D) 0

(3) 1 నుండి 100 వీటి నుండి ఎన్నుకొనబడిన సంఖ్య ప్రధాన సంఖ్య అయ్యే సంభావ్యత . . . . . అవుతుంది.

(A) $\frac{1}{5}$ (B) $\frac{6}{25}$ (C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{13}{50}$

(4) ఒక సంచిలో విడివిడిగా గుర్తించిన కార్డులపై 1 నుండి 40 వరకు సంఖ్యలు గలవు. వాటి నుండి ఒక కార్డును తీసిన కార్డు పై సంఖ్య 5 యొక్క గుణిజము అయ్యే సంఖ్యగల సంభావ్యత ..... అవుతుంది.

(A) $\frac{1}{5}$ (B) $\frac{3}{5}$ (C) $\frac{4}{5}$ D) $\frac{1}{3}$

(5) ఒకవేళ $n(A) = 2$, $P(A) = \frac{1}{5}$, అయిన $n(S) = ?$

(A) 10 (B) $\frac{5}{2}$ (C) $\frac{2}{5}$ D) $\frac{1}{3}$

2. బాస్కెట్‌బాల్ ఆటగాడు జాన్, వసిమ్ మరియు ఆకాష్‌లు ఒక నిర్దిష్ట ప్రదేశం నుండి బాస్కెట్‌లో బాల్ వేసే ప్రయత్నం చేయుచున్నారు. బాస్కెట్‌లో బాల్‌ను వేసే జాన్ యొక్క సంభావ్యత $\frac{4}{5}$, వసిమ్ యొక్క సంభావ్యత 0.83 మరియు ఆకాష్ యొక్క సంభావ్యత 58% గలదు ఎవరి సంభావ్యత అందరి కంటే ఎక్కువ గలదు?

3. ఒక హాకీ జట్టులో 6 గురు ఎదురుదాడిని ఎదుర్కొనే వారు, 4 గురు ఎదురిదాడి చేసేవారు మరియు ఒక గోల్ కీపర్‌లు గలరు. యాదృచ్ఛికంగా వారి నుండి ఒక ఆటగాడిని జట్టు నాయకుడిగా ఎన్నుకోవాలి. అయిన కింది ఘటనల సంభావ్యతలను కనుగొనండి.

(1) గోల్‌కీపర్ జట్టు నాయకుడిగా అవుట.

(2) ఎదురిదాడిని ఎదుర్కొనే వారినుండి జట్టు నాయకుడిగా అవుట.

4. జోసెఫ్ ఒక టోపిలో 26 కార్డులు ఉంచాడు ప్రతీ కార్డుపై ఇంగ్లీషు అక్షరముల నుండి ఒక అక్షరమును ఒక కార్డుపై రాసాడు. ఆ అక్షరముల కార్డుల నుండి ఒక కార్డును యాదృచ్ఛికంగా తీయంచినట్లయితే తీసిన అక్షరం అచ్చు అయ్యే సంభావ్యతను కనుగొనండి.

5. బుడగలు అమ్మేవాడు 2 ఎర్రని, 3 నీలి మరియు 4 ఆకుపచ్చ రంగులు గల బుడగల నుండి ఒక యాదృచ్ఛిక పద్ధతిలో ప్రణాలికి ఇస్తున్నాడు అయిన కింది ఘటనల సంభావ్యతలను కనుగొనండి.

(1) ఎర్రని బుడగ వచ్చుట.

(2) నీలి బుడగ వచ్చుట.

(3) ఆకుపచ్చని బుడగ వచ్చుట.

6. ఒక పెట్టెలో 5 ఎర్రని పెన్నులు, 8 నీలి పెన్నులు మరియు 3 ఆకుపచ్చని పెన్నులు గలవు. యాదృచ్ఛిక పద్ధతిలో ఋతుజా ఒక పెన్నును తీయవలెను. అయిన తీయబడిన పెన్ను నీలి రంగులో వచ్చు సంభావ్యతను కనుగొనండి.

7. ఒక పాచిక యొక్క ఆరు తలములు కింది విధంగా గలవు.

A B C D E A

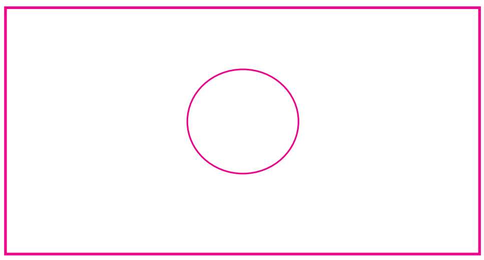
ఈ పాచికను ఒకసారి వేసినపుడు కింది ఘటనల సంభావ్యతలను కనుగొనండి.

(1) పాచికపై భాగం ‘A’ వచ్చు. (2) పాచికపై భాగం ‘D’ వచ్చు.

8. ఒక పెట్టెలో 30 టిక్కెట్లు గలవు. ప్రతీ టిక్కెట్టు పై 1 నుండి 30 వరుకు విడివిడిగా గుర్తించిన సంఖ్యలు గలవు. వాటినుండి ఏదేని ఒక టిక్కెట్టు యాదృచ్ఛికంగా తీయబడినది, అయిన కింది ఘటనల సంభావ్యతలను కనుగొనండి.

(1) టిక్కెట్టుపై గల సంఖ్య బేసిసంఖ్య అగుట. (2) టిక్కెటుపై గల సంఖ్య కచ్చితవర్గ సంఖ్య అగుట.

9. ఒక తోట యొక్క పొడవు మరియు వెడల్పులు వరుసగా 77మీ మరియు 50మీ గలవు. తోటలో 14 మీటర్ల వ్యాసంగల కొలను గలదు. తోట పక్కకు గల భవనం యొక్క టెరెస్ (గచ్చు) పైన ఆరవేసిన టావెల్ (తువ్వాలు) గాలి వలన ఎగిరి తోటలో పడింది. అయిన అది ఆ తోటలో ని కొలనులో పడే సంభావ్యతను కనుగొనండి.



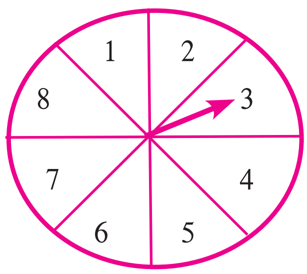
10. అదృష్ట చక్రం ఆటలో1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 వీటిలో ఒక అంకెపై బాణం ఆగుతుంది మరియు వాటికి సమ సంభావ్యత అవకాశములు గలవు. కింది ఘటనల సంభావ్యతలను కనుగొనండి.

(1) ఆ బాణం 8 అంకెపై ఆగిన.

(2) ఆ బాణం బేసి అంకెలపై ఆగిన.

(3) బాణంతో చూపబడిన సంఖ్య రెండు కంటె పెద్దగా ఉండిన.

(4) బాణంతో చూపబడిన సంఖ్య 9 కంటె చిన్నగా ఉండిన.



11. 0 నుండి 5 వరకు విడివిడిగా గుర్తించిన నంబర్లుగల ఆరు కార్డులు పెట్టెలో ఉంచారు అయిన కింది ప్రతీ ఘటన సంభావ్యతను కనుగొనండి.

(1) తీయబడిన కార్డులపై గల అంకె సహజ సంఖ్య ఉండే.

(2) తీయబడిన కార్డులపై అంకె 1 కంటే చిన్నగా ఉండే.

(3) తీయబడిన కార్డులపై అంకె పూర్ణాంకం ఉండే.

(4) తీయబడిన కార్డులపై అంకె 5 కంటే పెద్ద సంఖ్యగా ఉండే.

12. ఒక సంచిలో 3 ఎర్రని, 3 తెల్లని మరియు 3 ఆకుపచ్చని బంతులు గలవు. సంచి నుండి 1 బంతిని యాదృచ్ఛికంగా తీసిన కింది ఘటనల సంభావ్యతలను కనుగొనండి.

(1) ఎర్రని బంతి వచ్చుట. (2) ఎర్రని బంతి రాని.

(3) ఎర్రని లేదా తెలుపు బంతి వచ్చుట.

13. ప్రతికార్డు పై mathematics అనే పదములోని అక్షరాలు రాసి వాటిని బోర్లా పెట్టారు వాటి నుండి ఒక కార్డును తీసిన ఆ అక్షరం 'm' వచ్చు సంభావ్యతను కనుగొనండి.

14. ఒక పాఠశాలలోని 200 మంది విద్యార్థులలో 135 మంది విద్యార్థులకు కబడ్డీ ఆట అంటే ఇష్టము మరియు మిగతావారికి ఈ ఆట ఇష్టము లేదు. విద్యార్థులందరి నుండి 1 విద్యార్థిని ఎన్నుకొనిన అతనికి కబడ్డీ ఆట ఇష్టంలేని సంభావ్యతను కనుగొనండి.

15.★ 0, 1, 2, 3, 4 వీటిలోని అంకెలను తీసుకుని రెండంకెల సంఖ్యలను తయారు చేయవలెను. అంకెలు పునరావృతం అయ్యే అవకాశము ఉన్నట్లయితే కింది ఘటనల సంభావ్యతలను కనుగొనండి.

(1) ఆ సంఖ్య ప్రధాన సంఖ్య అవుట. (2) ఆ సంఖ్య 4 యొక్క గుణిజము అవుట.

(3) ఆ సంఖ్య 11 యొక్క గుణిజము అవుట.

16.★ ఒక పాచిక యొక్క ఉపరితలభాగంపై 0, 1, 2, 3, 4, 5, అనే అంకెలు గలవు. ఈ పాచికను రెండు సార్లు వేసినచో ఉపరితల భాగం పై వచ్చు అంకెల లబ్దం శూన్యము అయ్యే సంభావ్యతను కనుగొనండి.

17. కింది కృత్యములను చేయండి –

కృత్యం I: మీ తరగతిలోని మొత్తం విద్యార్థుల సంఖ్య n(S) = ☐

తరగతిలో కళ్ళ జోడును వాడే విద్యార్థుల సంఖ్య n(A) = ☐

విద్యార్థులందరిలో కళ్ళజోడు వాడే ఒక విద్యార్థిని యాదృచ్ఛికంగా ఎంచుకొనిన సంభావ్యత P(A) = ☐

విద్యార్థులందరిలో కళ్ళజోడు వాడని ఒక విద్యార్థిని యాదృచ్ఛికంగా ఎంచుకొనిన సంభావ్యత P(B) = ☐

కృత్యం II: మీరు స్వంతంగా నమూనా ప్రదేశంను నిర్ణయించి కింది గడులను నింపండి.

నమూనా ప్రదేశం → S = { } → n(S) = ☐

సరి సంఖ్యలచే లభించే ఘటన A → A = { } → n(A) = ☐

$P(A) = \frac{☐}{☐} = ☐$

6 సాంఖ్యక శాస్త్రము

పదండి, నేర్చుకుందాం

- **కేంద్రీయ స్థాన కొలతలు – వర్గీకృత పౌనః పున్యవిభాజన పట్టికలకై సగటు, మధ్యగతము, బహుళకము.**
- **సంఖ్యాత్మక దత్తాంశమును రేఖా చిత్ర రూపంలో చూపుట – సోపాన చిత్రము, పౌనఃపున్య బహుభుజి, వృత్త చిత్రము.**

మానవ జీవితములో సాంఖ్యక శాస్త్రము అనేక రంగాలలో ఉపయుక్తమైనది వ్యవసాయ, అర్థశాస్త్రం, వాణిజ్యం, ఔషధ శాస్త్రం, వృక్ష శాస్త్రం, జీవ సాంకేతిక విజ్ఞానం, భౌతిక శాస్త్రం, రసాయన శాస్త్రం, విద్యారంగం, సమాజశాస్త్రము, నిర్వహణ మొదలైన రంగాలలో చాలా ఉపయోగకరమైనది. ఏదైనా ప్రయోగం తర్వాత లభించిన ఫలితాలకు అనేక అవకాశాలు ఉంటాయి. ఎప్పుడైతే వాటి సాధ్యాసాధ్యాలను పరీక్షించవలసి వస్తుందో అప్పుడు పెద్ద ఎత్తున ప్రయోగం చేసి అన్ని విషయాలను చక్కగా పొందుపర్చడం జరుగుతుంది. ఈ పొందుపర్చిన విషయాల ద్వారా వివిధ ఫలితాల సంభావ్యత (సాధ్యా సాధ్యాలు)ను పరిక్షించవచ్చును. దీని కొరకు సంఖ్యా శాస్త్రములో అనగా సాంఖ్యక శాస్త్రములో నియమమును తయారు చేయడం జరిగింది.

ఫ్రాన్సిస్ గాల్టన్ (1822–1911) అనే బ్రిటిష్ శాస్త్రజ్ఞుడు సంఖ్యాశాస్త్రమునకు పునాది వేసెను. ఆయన ప్రశ్నావళి తయారు చేసి వాటిని అనేక మందికి పంచి, వాటిని నింపి ఇవ్వమని వినతి చేసేవాడు. ఈ పద్ధతిలో చాలా మంది నుండి సమాచారమును సేకరించి వాటి యొక్క ప్రస్తావన, ఆర్థిక స్థితి, ఇష్టాయిష్టాలు, ఆరోగ్యము మొదలైన వాటిని పెద్ద ఎత్తున పొందుపరచేవాడు. వివిధ వ్యక్తుల వేలి ముద్రలు వేర్వేరుగా ఉంటాయని తెలియడం జరిగింది. గాల్టన్ అనేక మంది వేలి ముద్రలను పరిక్షించి వాటి వర్గీకరణ చేసే పద్ధతిని నిర్ణయించారు. సంఖ్యాశాస్త్రమును ఉపయోగించి ఇద్దరు వేర్వేరు వ్యక్తుల వేలి ముద్రలు ఒకే రకంగా ఉండే అవకాశం దాదాపుగా శూన్యమని చూపించాడు. అందువలన వేలి ముద్రల ద్వారా ఏదేని వ్యక్తి యొక్క గుర్తింపు సాధ్యమైంది నేరస్తులను గాలించుటకు ఈ పద్ధతిని న్యాయస్థానము కూడా అంగీకరించింది. ప్రాణుల (జీవుల) మరియు మానవుల అనువంశికత శాస్త్రములో కూడా ఈయన ఎనలేని కృషి చేశారు.

ఫ్రాన్సిస్ గాల్టన్

కొంచెం గుర్తుతెచ్చుకుందాం.

సర్వేద్వారా లభించిన సంఖ్యాత్మక దత్తాంశములో సర్వసాధారణంగా ఒక లక్షణం కనిపిస్తుంది. అనగా అన్ని దత్తాంశ విలువలు ఒక ప్రత్యేకమైన దత్తాంశ విలువ చుట్టూ, లేదా దాని చుట్టు పక్కల కేంద్రితమయ్యే ప్రవృత్తి ఈ ప్రత్యేకమైన దత్తాంశ విలువను ఆ సమూహము యొక్క ప్రాతినిధ్య సంఖ్య అవుతుంది ఈ సంఖ్యను కేంద్రీయ స్థాన కొలత అంటారు.

అవర్గీకృత దత్తాంశ పట్టిక యొక్క సగటు మధ్యగతము మరియు బహుళకములను మనం ఇదివరకే నేర్చుకున్నాము.

ప్రయోగం 1 : మీ తరగతిలోని బాలురందరి ఎత్తులను కొలిచి సెం.మీలలో నమోదు చేయండి. చాలా మంది పిల్లల ఎత్తులు ఒక ప్రత్యేకమైన సంఖ్య చుట్టు లేదా ఆ సంఖ్యకు దగ్గర దగ్గరగా ఉంటాయని మనకి కనిపిస్తుంది.

ప్రయోగం 2 : రావి చెట్టు కింద పడిన ఆకులను సేకరించండి. ప్రతి విద్యార్థికి ఒక్కొక్క ఆకును ఇవ్వండి ఆ ఆకుల కాడ నుండి చివరి వరకు కొలిచి వాటిని నమోదు చేయండి! విలువలన్నింటిని నమోదు చేసిన తర్వాత ఒక ప్రత్యేకమైన సంఖ్య చుట్టు ఆ విలువలు ఉన్నట్లు మనకు తెలుస్తుంది.

ఇప్పుడు మనం సంఖ్యాత్మక సమాచారము యొక్క కేంద్రీయ స్థాన కొలతలు 'సగటు', 'మధ్యగతము', మరియు 'బహుళకము'లను మరింతగా నేర్చుకోబోతున్నాం. దాని కొరకు అందులో ఉండే పదములు మరియు చిహ్నముల గురించి తెలుసుకుందాం.

సంఖ్యాత్మక సమాచారము యొక్క సగటు = $\dfrac{\text{అన్ని విలువల మొత్తం}}{\text{మొత్తం విలువల సంఖ్య}} = \dfrac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N}$ (ఇచ్చట x_i అనేది i వ దత్తాంశ విలువ.)

సగటును $\overline{X}$ చే సూచిస్తారు మరియు ఇది ఇచ్చిన విలువల సగటు అవుతుంది.

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N}$$

తెలుసుకుందాం.

వర్గీకృత పౌనఃపున్య విభజన పట్టిక సగటు (Mean from classified frequency distribution)

ఎప్పుడైతే దత్తాంశ విలువల సంఖ్య ఎక్కువగా ఉన్నప్పుడు పై సూత్రములో అన్ని సంఖ్యలను రాసి మొత్తంను కనుగొనడం కొంచెం కఠినం అవుతుంది దాని కొరకు మనం మరొక పద్ధతిని ఉపయోగిస్తాం.

అప్పుడప్పుడు పెద్ద ఎత్తున చేసిన ప్రయోగం యొక్క విలువలు వర్గీకృత పట్టికలో ఇవ్వడం జరుగుతుంది. ఇలాంటి సమయాల్లో సంఖ్యాత్మక సమాచారమును పరీక్షించుటకు సంఖ్యల సగటును కచ్చితంగా కనుగొనడం వీలుకాదు. కావున దాని రమారమి (సమీప) సంఖ్యను కనుగొనుటకు లేదా ఉజ్జాయింపు సగటును కనుగొను పద్ధతిని నేర్చుకుందాం.

ప్రత్యక్ష పద్ధతి (Direct Method)

ఇప్పుడు మనం వర్గీకృత దత్తాంశము యొక్క సగటును కనుగొను పద్ధతిని ఉదాహరణ ద్వారా నేర్చుకుందాం.

ఉదా. : కింది పట్టికలో ఒక పనిని పూర్తి చేయడానికి ప్రతి పనివాడికి పట్టే సమయం యొక్క పౌనఃపున్య విభజన ఇవ్వబడింది. దీని నుండి ఆ పనిని పూర్తి చేయుటకు ఒక పనివాడికి పట్టె సమయము యొక్క సగటును కనుగొనండి.

ప్రతి ఒక్కరికి పని పూర్తి చేయడానికి పట్టు సమయం (గంటలు)	15-19	20-24	25-29	30-34	35-39
పని వారి సంఖ్య	10	15	12	8	5

సాధన :

(1) పట్టికలో చూపిన విధంగా నిలువు వరుసలలో తీసుకున్నాము.

(2) మొదటి వరుసలో తరగతులు రాశారు.

(3) రెండవ వరుసలో తరగతి మధ్య విలువ x_i ను రాసాము.

(4) మూడవ వరుసలో తరగతిలోని పనివారి పౌనఃపున్యం (f_i)ను రాసాము.

(5) నాల్గవ వరుసలో ప్రతి తరగతి యొక్క ($x_i \times f_i$) లబ్ధాన్ని రాసాము.

(6) తరువాత $\sum_{i=1}^{N} x_i f_i$ ని రాసాము.

(7) సూత్రమును ఉపయోగించి సగటును కనుగొన్నాము.

తరగతి (సమయం గంటలలో)	మధ్య విలువ x_i	పౌనః పున్యము (పనివారి సంఖ్య) f_i	మధ్యవిలువ × పౌనః పున్యము $x_i f_i$
15-19	17	10	170
20-24	22	15	330
25-29	27	12	324
30-34	32	8	256
35-39	37	5	185
మొత్తం		$\sum f_i = 50$	$\sum x_i f_i = 1265$

$$\text{సగటు} = \overline{X} = \frac{\sum x_i f_i}{N} = \frac{1265}{50} = 25.3 \quad \because \sum f_i = N$$

ఒక పని వాడికి పనిని పూర్తి చేయడానికి పట్టే సమయము యొక్క సగటు = 25.3 గంటలు (సుమారుగా)

సాధించిన ఉదాహరణలు

ఉదా. (1) కింది పట్టికలో 50 మంది విద్యార్థుల యొక్క యూనిట్ పరీక్ష మార్కుల శాతము ఇవ్వబడింది. దాని నుండి మార్కుల శాతము యొక్క సగటును కనుగొనండి.

మార్కుల శాతము	0-20	20-40	40-60	60-80	80-100
విద్యార్థుల సంఖ్య	3	7	15	20	5

సాధన : సోపానముల ఆధారంగా కింది పట్టిక తయారు చేయబడింది.

తరగతి (మార్కుల శాతము)	మధ్యవిలువ x_i	పౌనఃపున్యము (విద్యార్థుల సంఖ్య) f_i	మధ్యవిలువ × పౌనఃపున్యం $x_i f_i$
0-20	10	3	30
20-40	30	7	210
40-60	50	15	750
60-80	70	20	1400
80-100	90	5	450
మొత్తం		$N = \sum f_i = 50$	$\sum x_i f_i = 2840$

$$\overline{X} = \frac{\sum x_i f_i}{\sum f_i} = \frac{2840}{50} = 56.8$$

∴ మార్కుల శాతం యొక్క సగటు = 56.8

ఉదా. **(2)** మహారాష్ట్రలో గత వేసవి కాలంలో వివిధ 30 పట్టణాలలలో ఒక రోజు యొక్క గరిష్ఠ ఉష్ణోగ్రతలు °C లలో కింది పట్టికలో ఇవ్వబడ్డాయి. వాటి నుండి గరిష్ఠ ఉష్ణోగ్రతల యొక్క సగటును కనుగొనండి.

గరిష్ఠ ఉష్ణోగ్రత	24-28	28-32	32-36	36-40	40-44
గ్రామాల సంఖ్య	4	5	7	8	6

సాధన :

తరగతి (ఉష్ణోగ్రత °C)	మధ్యవిలువ x_i	పౌనః పున్యము (పట్టణాల సంఖ్య) f_i	మధ్యవిలువ × పౌనఃపున్యము $x_i f_i$
24-28	26	4	104
28-32	30	5	150
32-36	34	7	238
36-40	38	8	304
40-44	42	6	252
మొత్తం		$N = \sum f_i = 30$	$\sum x_i f_i = 1048$

$$\text{సగటు} = \overline{X} = \frac{\sum x_i f_i}{\sum f_i} = \frac{1048}{30} = 34.9\ ^\circ C$$

ప్రతిక్షేపణ సగటు పద్ధతి (Assumed Mean Method)

సాధించిన పై ఉదాహరణ నుండి అప్పుడప్పుడు $x_i f_i$ యొక్క లబ్ధం చాలా పెద్ద సంఖ్యలు వస్తాయని మనకు తెలుస్తుంది. అందువలన ప్రత్యక్ష పద్ధతిలో సగటును కనుగొనడం కొంచెం కఠినం అవుతుంది. అందుకొరకు మనం మరొక పద్ధతి 'ప్రతిక్షేపణ సగటు పద్ధతి' ని తెలుసుకుందాం. ఈ పద్ధతి ద్వారా సగటును కనుగొనేప్పుడు చిన్న సంఖ్యల మొత్తం మరియు భాగాహారం చేయడం వలన సులువవుతుంది.

ఉదాహరణకు, 40, 42, 43, 45, 47, 48 ఇది దత్తాంశము. దీని సగటును కనుగొనవలెను.

ఈ ఉదాహరణలో సంఖ్యలను పరిక్షించిన సమాచారములో సగటు 40 కంటే ఎక్కువ అని మనకు తెలుస్తుంది. కావున మనం 40 ను సగటు అనుకొందాం. ఇది ప్రతిక్షేపణ సగటు. 40-40 = 0, 42 - 40 = 2, 43-40 = 3, 45-40 = 5, 47 - 40 = 7, 48 - 40 = 8 ఈ వ్యత్యాసాలను చూడండి వాటిని విచలనాలు అంటారు. వాటి సగటును కనుగొందాం. దానికి అనుకొనిన ప్రతిక్షేపణ సగటుకు కలిపిన మనకు సమాచారము యొక్క సగటు లభిస్తుంది.

అనగా, సగటు = ప్రతిక్షేపణ సగటు **+** ప్రతిక్షేపణ సగటు యొక్క విచలనాల సగటు

$$\overline{X} = 40 + \left(\frac{0+2+3+5+7+8}{6}\right) = 40 + \frac{25}{6} = 40 + 4\frac{1}{6} = 44\frac{1}{6}$$

ప్రతిక్షేపన సగటు A, ప్రతిక్షేపన సగటు యొక్క విచలనముకై d విచలనాల సగటుకై $\overline{d}$ అని అనుకొనిన $\overline{X}$ = A + $\overline{d}$ అనే సూత్రము లభిస్తుంది.

ఇదే ఉదాహరణను మనము ప్రతిక్షేపన సగటు 43 ను తీసుకొని చేసి చూద్దాం. ప్రతి విలువ నుండి 43 ను తీసివేసిన భేదాలను అనగా ప్రతిక్షేపన సగటు నుండి విచలనములను పొందుదాం.

$40 - 43 = -3,\ 42 - 43 = -1,\ 43 - 43 = 0,\ 45 - 43 = 2,\ 47 - 43 = 4,\ 48 - 43 = 5$

ప్రతిక్షేపన సగటు యొక్క విచలనాల మొత్తం = $-3 - 1 + 0 + 2 + 4 + 5 = 7$

ఇప్పుడు $\overline{X} = A + \overline{d}$

$= 43 + \left(\frac{7}{6}\right)$ (ఇచ్చట మొత్తం విచలనాలు 6.)

$= 43 + 1\frac{1}{6}$

$= 44\frac{1}{6}$

ఇదే విధంగా ప్రతిక్షేపన సగటును ఉపయోగించి ఉదాహరణను సాధ్య సంఖ్యల గణన కొంచెం తగ్గుతుంది. అదేవిధంగా దత్తాంశములోని లేదా అనువైన ఏదేని ఇతర సంఖ్యలను ప్రతిక్షేపన సగటు అనుకొనినప్పటికి దత్తాంశము యొక్క సగటు మారదు. అని గుర్తుంచుకోండి.

ఇప్పుడు మనం ఇచ్చిన పౌనఃపున్య పట్టికకు ఈ పద్ధతిని ఎలా ఉపయోగించవచ్చునో ఒక ఉదాహరణ ద్వారా నేర్చుకుందాం.

ఉదా. : 100 మంది కూరగాయలు అమ్మేవారి రోజువారి అమ్మకాల పౌనఃపున్య పట్టిక కింద ఇవ్వబడింది. ప్రతిక్షేపన సగటు పద్ధతి ద్వారా రోజువారి అమ్మకాల సగటును కనుగొనండి.

రోజువారి అమ్మకాలు రూ॥లలో	1000-1500	1500-2000	2000-2500	2500-3000
అమ్మేవారి సంఖ్య	15	20	35	30

సాధన : ప్రతిక్షేపన సగటు A = 2250 ను తీసుకుందాం. $d_i = x_i - A$ అనేది విచలనం.

తరగతి రోజువారి అమ్మకం (రూ॥లలో)	మధ్యవిలువ x_i	$d_i = x_i - A$ $= x_i - 2250$	పౌనఃపున్యం (అమ్మేవారి సంఖ్య) f_i	పౌనఃపున్యం × విచలనం $f_i d_i$
1000-1500	1250	-1000	15	-15000
1500-2000	1750	-500	20	-10000
2000-2500	2250 → A	0	35	0
2500-3000	2750	500	30	15000
మొత్తం			$N = \sum f_i = 100$	$\sum f_i d_i = -10000$

సోపానాలను ఉపయోగించి పట్టికను తయారు చేసితిమి.

(1) ప్రతిక్షేపన సగటు A = 2250 ను తీసుకొన్నాం. (సాధారణంగా పట్టికలో ఎక్కువ పౌనఃపున్యము గల తరగతి మధ్యవిలువ ను ప్రతిక్షేపన సగటుగా తీసుకుంటారు)

(2) మొదటి నిలువు వరుసలో అమ్మకాల తరగతులను రాశాము.

(3) రెండవ నిలువు వరుసలో మధ్యవిలువలను రాశాము.

(4) మూడవ వరుసలో $d_i = x_i - A = x_i - 2250$ యొక్క విలువలు రాశాము.

(5) నాల్గవ వరుసలో ప్రతి తరగతిలో అమ్మేవారి సంఖ్య రాసి మరియు మొత్తం $\sum f_i$ ని రాశాము.

(6) ఐదవ వరుసలో $(f_i \times d_i)$ ల గుణించి వాటి మొత్తం $\sum f_i d_i$ ని చేశాము.

సూత్రమును ఉపయోగించి ఇప్పుడు $\overline{d}$ మరియు $\overline{X}$ లను కనుగొన్నాను.

$$\overline{d} = \frac{\sum f_i d_i}{\sum f_i} = -\frac{10000}{100} = -100 \qquad \therefore \text{ సగటు } \overline{X} = A + \overline{d} = 2250 - 100 = 2150$$

రోజు వారి అమ్మకపు సగటు = 2150 రూ॥లు.

కృత్యం :- ఇదే ఉదాహరణను ప్రత్యక్ష పద్ధతి ద్వారా సాధించండి.

సాధించిన ఉదాహరణలు

ఉదా. **(1)** కింది పట్టికలో ఒక వ్యాపారి వద్దనున్న 50 మంది కూలీల రోజు వారి వేతనం యొక్క పౌనఃపున్య విభజన ఇవ్వబడింది. దాని నుండి ఒక కూలి యొక్క రోజువారి వేతన సగటును ప్రతిక్షేపన సగటు పద్ధతిలో కనుగొనండి.

ప్రతి కూలీ రోజువారి వేతనం (రూ॥లలో)	200–240	240–280	280–320	320–360	360–400
కూలీల సంఖ్య (పౌనఃపున్యం)	5	10	15	12	8

సాధన : ప్రతిక్షేపన సగటు A = 300 అనుకొందాం.

తరగతి (వేతనం రూ॥లలో)	మధ్యవిలువ x_i	$d_i = x_i - A$ $d_i = x_i - 300$	పౌనఃపున్యం (కూలీల సంఖ్య) f_i	పౌనఃపున్యం × విచలనం $f_i d_i$
200–240	220	-80	5	-400
240–280	260	-40	10	-400
280–320	300 ⟶ A	0	15	0
320–360	340	40	12	480
360–400	380	80	8	640
మొత్తం			$\sum f_i = 50$	$\sum f_i d_i = 320$

$$\overline{d} = \frac{\sum f_i d_i}{\sum f_i} = \frac{320}{50} = 6.4$$

సగటు, $\overline{X} = A + \overline{d}$

$= 300 + 6.4$

$= 306.40$

కూలీల యొక్క రోజువారి వేతన సగటు = 306.40 రూ॥లు..

క్రమ విచలన పద్ధతి (Step deviation method)

మనం సగటును కనుగొనుటకు ప్రత్యక్ష పద్ధతి మరియు ప్రతిక్షేపన పద్ధతులను నేర్చుకున్నాము. అధిక సులభంగా సగటుకు కనుగొనుటకు మరొక పద్ధతిని ఉదాహరణ ద్వారా నేర్చుకుందాం.

- మొదట ప్రతిక్షేపన సగటు Aను తీసివేసి d_i యొక్క వరుసను తయారు చేద్దాం.
- d_i ల అన్నింటి గసాభా g అనేది సులభంగా లభించినట్లయితే $u_i = \frac{d_i}{g}$ యొక్క వరుస తయారు చేద్దాం..
- u_i సంఖ్యల యొక్క సగటు $\overline{u}$ ని కనుగొందాం
- $\overline{X} = A + \overline{u}\, g$ ఈ సూత్రముతో సగటును కనుగొందాం

ఉదాహరణ: 100 కుటుంబాల ఆరోగ్యభీమా కొరకు చెల్లించిన వార్షిక సొమ్ము సొనఃపున్య పట్టిక ఇవ్వబడింది. క్రమ విచలన పద్ధతి ద్వారా కుటుంబ వార్షిక మదుపు సగటును కనుగొనండి.

ప్రతి కుటుంబం భీమా సొమ్ము (రూ॥లు)	800−1200	1200−1600	1600−2000	2000−2400	2400−2800	2800−3200
కుటుంబాల సంఖ్య	3	15	20	25	30	7

సాధన : A = 2200 అనుకొందాం, అన్ని d_i లను చూసి g = 400 అవుతుంది.

తరగతి భీమా సొమ్ము (రూ॥లలో)	మధ్యవిలువ x_i	$d_i = x_i - A$ $= x_i - 2200$	$u_i = \frac{d_i}{g}$	పౌనఃపున్యం (కుటుంబాల సంఖ్య) f_i	$f_i u_i$
800−1200	1000	−1200	−3	3	−9
1200−1600	1400	−800	−2	15	−30
1600−2000	1800	−400	−1	20	−20
2000−2400	2200 → A	0	0	25	0
2400−2800	2600	400	1	30	30
2800−3200	3000	800	2	7	14
మొత్తం				$\sum f_i = 100$	$\sum f_i u_i = -15$

పై పట్టిక కింది సోపానాల ఆధారముగా చేశాము.

(1) పట్టిక యొక్క మొదటి నిలువు వరుసలో భీమా యొక్క మదుపు తరగతులను రాశాము.

(2) రెండవ వరుసలో మధ్య విలువ x_i ను రాశాము.

(3) మూడవ వరుసలో $d_i = x_i - A$ యొక్క విలువలను రాశాము.

(4) d_i విలువన్నింటి గ. సా. భా. 400 కావున $g = 400$ ను తీసుకున్నాము. నాలుగవ వరుసలో $u_i = \frac{d_i}{g} = \frac{d_i}{400}$ ఈ విలువలను రాశాము.

(5) ఐదవ వరుసలో ప్రతి తరగతి యొక్క పౌనఃపున్యము (కుటుంబాల సంఖ్య)ను రాశాము.

(6) ఆరవ వరుసలో ప్రతి తరగతికి చెందిన $f_i \times u_i$ ల లబ్దమును రాశాము.

u_i యొక్క సగటును కింది సూత్రం ద్వారా కనుగొన్నాము.

$$\overline{u} = \frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i} = \frac{-15}{100} = -0.15$$

$$\overline{X} = A + \overline{u}\, g$$

$$= 2200 + (-0.15)(400)$$

$$= 2200 + (-60.00)$$

$$= 2200 - 60 = 2140$$

∴ కుటుంబాల భీమా వార్షిక మదుపు సగటు 2140 రూ॥లు.

కృత్యం: ప్రత్యక్ష పద్ధతిలో ప్రతిక్షేపన సగటు పద్ధతిలో లేదా క్రమ విచలన పద్ధతిలో కనుగొనిన సగటు సమానంగా ఉంటాయని తెలుసుకోండి.

సాధించిన ఉదాహరణలు

ఉదా. (1) పాఠశాలలోని 50 మంది విద్యార్థులు వరదబాధితుల కొరకు సేకరించిన నిధి యొక్క పౌనఃపున్య పట్టిక ఇవ్వబడింది. దాని నుండి పోగు చేసిన నిధి యొక్క సగటును కనుగొనండి.

నిధి (రూ॥లు)	0-500	500-1000	1000-1500	1500-2000	2000-2500	2500-3000
విద్యార్థులు	2	4	24	18	1	1

ఆసన్న తరగతులు చాలా తక్కువ దత్తాంశ విలువలు ఉన్నట్లయితే వాటిని కలిపి ఒక తరగతి చేస్తే సౌలభ్యంగా ఉంటుంది. ఈ ఉదాహరణలో 0 – 500 మరియు 500-1000 వీటిని ఒక తరగతి, 2000 – 2500 మరియు 2500 – 3000 వీటిని ఒక తరగతిగా చేశాము.

నిధి (రూ॥లు)	0-1000	1000-1500	1500-2000	2000-3000
విద్యార్థుల సంఖ్య	6	24	18	2

సాధన : A = 1250 అనుకొందాం, అన్ని d_i లను పరిశీలించి g = 250 గా తీసుకొందాం.

తరగతి (నిధి రూ॥లలో)	మధ్యవిలువ x_i	$d_i = x_i - A$ $= x_i - 1250$	$u_i = \frac{d_i}{g}$	పౌనఃపున్యము f_i	$f_i u_i$
0-1000	500	-750	-3	6	-18
1000-1500	1250⟶A	0	0	24	0
1500 - 2000	1750	500	2	18	36
2000-3000	2500	1250	5	2	10
మొత్తం				$\sum f_i = 50$	$\sum f_i u_i = 28$

$$\overline{u} = \frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i} = \frac{28}{50} = 0.56,$$

$$\overline{u}\, g = 0.56 \times 250 = 140$$

$$\overline{X} = A + g\overline{u} = 1250 + 140 = 1390$$

∴ పోగుచేసిన నిధి యొక్క సగటు 1390 రూపాయలు.

కృత్యం: –

1. ఇదే ఉదాహరణను ప్రత్యక్ష పద్ధతిలో సాధించండి.

2. పై ఉదాహరణలో కనుగొన్న సగటును ప్రతిక్షేపన సగటు పద్ధతిలో కనుగొని సరిచూడండి.

3. A = 1750 తీసుకుని పై పద్ధతిలో ఉదాహరణను సాధించండి.

అభ్యాస మాలిక 6.1

1. 50 మంది పదవ తరగతి విద్యార్థులు అభ్యాసమునకై కేటాయించిన సమయం మరియు విద్యార్థుల సంఖ్య యొక్క పౌనః పున్య విభజన పట్టిక ఇవ్వబడింది. దాని నుండి విద్యార్థులు అభ్యాసానికి కేటాయించిన సమయం (గంటలలో) యొక్క సగటును ప్రత్యక్ష పద్ధతిలో కనుగొనండి.

సమయం (గంటలలో)	0–2	2–4	4–6	6–8	8–10
విద్యార్థుల సంఖ్య	7	18	12	10	3

2. ఒక జాతీయ రహదారి (హైవే)పై గల టోల్ గేట్ వద్ద ఉదయం 6 గంటల నుండి సాయంత్రం 6 గంటల వరకు వచ్చే వాహనాల నుండి వసూలు చేసిన పన్ను (రూ॥లలో) మరియు వాహనాల సంఖ్యల పౌనఃపున్య పట్టిక ఇవ్వబడింది. దాని నుండి వసూలు అయ్యే పన్ను యొక్క సగటును ప్రతిక్షేపన సగటు పద్ధతి ద్వారా కనుగొనండి.

పన్ను వసూలు(రూ॥లలో)	300–400	400–500	500–600	600–700	700–800
వాహనాల సంఖ్య	80	110	120	70	40

3. ఒక రోజు పాలకేంద్రం నుండి 50 మంది కొనుగోలుదారులకు పంపిణీ చేసిన పాల యొక్క పౌనఃపున్య విభజన పట్టిక ఇవ్వబడింది. దాని నుండి పంపిణీ చేసిన పాల యొక్క సగటును ప్రత్యక్ష పద్ధతిలో కనుగొనండి.

పాల పంపిణీ (లీటర్లలో)	1–2	2–3	3–4	4–5	5–6
కొనుగోలుదారుల సంఖ్య	17	13	10	7	3

4. కొందరి తోట యజమానుల యొక్క కమలా పండ్ల ఉత్పత్తి పౌనఃపున్య విభజన పట్టిక ఇవ్వబడింది. దాని నుండి ఉత్పత్తి యొక్క సగటును ప్రతిక్షేపన సగటు పద్ధతిలో కనుగొనండి.

ఉత్పత్తి (వేలలో)	25–30	30–35	35–40	40–45	45–50
తోట యజమానుల సంఖ్య	20	25	15	10	10

5. ఒక కంపెనిలోని 120 మంది కార్మికుల నుండి కరువు బాధితులకొరకై సేకరించిన నిధి యొక్క పౌనఃపున్య విభజన పట్టిక ఇవ్వబడింది. కార్మికుల నుండి సేకరించిన నిధి యొక్క సగటును క్రమవిచలన పద్ధతి ద్వారా కనుగొనండి.

నిధి (రు॥లలో)	0–500	500–1000	1000–1500	1500–2000	2000–2500
కార్మికుల సంఖ్య	35	28	32	15	10

6. ఒక పరిశ్రమలోని 150 మంది కార్మికుల వారము జీతాల యొక్క పౌనఃపున్య విభజన పట్టిక ఇవ్వబడింది. దాని నుండి కార్మికుల వారము జీతముల యొక్క సగటును క్రమవిచలన పద్ధతి ద్వారా కనుగొనండి.

వారము జీతము (రు॥లలో)	1000–2000	2000–3000	3000–4000	4000–5000
కార్మికుల సంఖ్య	25	45	50	30

కొంచెం గుర్తుతెచ్చుకుందాం.

విజ్ఞాన ప్రదర్శనలో పాల్గొనుటకు ఒక పాఠశాల నుండి ఇద్దరు విద్యార్థులు ఇద్దరు విద్యార్థినిలు రెండు రోజులకై వేరే పట్టణానికి వెళ్ళిరి. వారు తమ రాత్రి భోజనం ఎక్కడ చేయలో నిర్ణయించుకోవలసి ఉంది. పనిస్థలం నుండి ఒక కిలోమీటరు దూరంలో పది భోజన శాలలు (హోటళ్ళు) కలవు. వాటి భోజనాల ధరలు రూ॥లలో ఆరోహణ క్రమంలో కింది విధంగా ఉన్నాయి.

40, 45, 60, 65, 70, 80, 90, 100 మరియు 500

భోజనశాలలన్నింటిలోని భోజనం సరాసరి విలువ $\frac{1130}{10}$ = 113 రూ॥లు ఉండెను.

విద్యార్థులు ఏ హోటల్‌లో భోజనం చేయాలని నిర్ణయించుకోవాలి? 500 రూ॥ల ధర గల హోటల్ తప్ప ఇతర అన్ని హోటళ్ళ యొక్క ధర 113 రూ॥లు కంటే తక్కువ ఉన్నది. విద్యార్థులు మధ్యస్థ ధరగల హోటల్‌ను ఎంచుకోవాలని నిర్ణయించుకొనిరి. మొదటి రోజు 70 రూ॥ల రెండవ రోజు 80 రూ॥ల ధరగల భోజనం చేసిరి.

కొన్ని సార్లు దత్తాంశ విలువల సరాసరి కంటే వాటి మధ్యగతమును ఉపయోగిస్తారు. ఇది దీని యొక్క ఉదాహరణ.

కింది తరగతిలో అవర్గీకృత దత్తాంశము యొక్క 'మధ్యగతము'ను మనము నేర్చుకున్నాము.

- ఇచ్చిన సమాచారములోని సంఖ్యలను ఆరోహణ లేదా అవరోహణ క్రమంలో వ్రాసిన, దానిలో మధ్య భాగంలో వచ్చు సంఖ్యను సమాచారము యొక్క మధ్యగతము అంటారు.
- మధ్యగతము అనేది ఇచ్చిన దత్తాంశమును రెండు సమాన భాగాలుగా విభజిస్తుంది. అనగా ఇవ్వబడిన దత్తాంశ విలువలు మధ్యగతము పైన కింద రెండు వైపులా సమాన సంఖ్యలో విలువలు ఉంటాయి.
- ఇవ్వబడిన దత్తాంశ విలువలను $k_1 \le k_2 \le k_3 \ldots \ldots \le k_n$ ఈ రకంగా రాస్తారు.
- దత్తాంశ విలువల సంఖ్య బేసి సంఖ్య అయితే $\frac{n+1}{2}$ వ విలువ దత్తంశము యొక్క మధ్యగతము అవుతుంది. ఎందుకనగా, $k_{\frac{n+1}{2}}$ కు ముందు $\frac{n-1}{2}$ దత్తాంశ విలువలు ఆ తర్వాత కూడా $\frac{n-1}{2}$ దత్తాంశ విలువలుంటాయి. n = 2m + 1 తీసుకొని పరీక్షించుము.
- దత్తాంశ విలువల సంఖ్య n అనేది సరి సంఖ్య అయినప్పుడు మధ్యగతము అనేది మధ్యలోని రెండు సంఖ్యల సరాసరి అవుతుంది. ఎందుకనగా $k_{\frac{n}{2}}$ కు ముందు మరియు $k_{\frac{n+2}{2}}$ కు తరువాత $\frac{n-2}{2}$ అనే దత్తాంశవిలువ ఉంటుంది. n = 2m తీసుకొని పరీక్షించుము.
- అనగా $\frac{n}{2}$ వ సంఖ్య మరియు $\frac{n+2}{2}$ వ సంఖ్యల సరాసరి తీసుకొనిన లభించే సంఖ్య యొక్క స్థానంలో ఉండే సంఖ్య దాని మధ్యగతము అవుతుంది.

ఉదా. (1) 32, 33, 38, 40, 43, 48, 50 ఈ దత్తాంశ విలువలలో నాలుగవ సంఖ్య మధ్యలో వస్తుంది కావున ఇచ్చిన దత్త విలువల మధ్యగతము = 40

ఉదా. (2) 61, 62, 65, 66, 68, 70, 74, 75 ఇచ్చుట దత్తవిలువల సంఖ్య 8 అనగా సరి సంఖ్య. కావున నాలుగవ మరియు ఐదవ సంఖ్యలు రెండు మధ్యలో ఉంటాయి. అవియే 66 మరియు 68 కావున దత్త విలువల మధ్యగతము $= \frac{66+68}{2} = 67$

తెలుసుకుందాం.

వర్గీకృత పౌనఃపున్య విభజనం యొక్క మధ్యగతము (Median from classified frequency distribution)

దత్తవిలువల సంఖ్య ఎక్కువగా ఉన్నప్పుడు ఇలాంటి పద్ధతిలో రాసి మధ్యగతమును కనుగొనుట కఠినం అవుతుంది. కావున ఇప్పుడ మనం వర్గీకృత పౌనఃపున్య విభజనం యొక్క సుమారు మధ్యగతమును కనుగొనే పద్ధతి ఉదాహరణ ద్వారా నేర్చుకుందాం.

ఉదా. 6, 8, 10.4, 11, 15.5, 12, 18 ఈ విలువల యొక్క వర్గీకృత పట్టిక కింద ఇవ్వబడింది.

తరగతి	గణన చిహ్నాలు	పౌనఃపున్యం
6−10	II	2
11−15	II	2
16−20	I	1

తరగతి	గణన చిహ్నాలు	పౌనఃపున్యం
5.5−10.5	III	3
10.5−15.5	II	2
15.5−20.5	II	2

మొదటి పట్టికలో 10.4 మరియు 15.5 ఈ రెండు విలువలను చేర్చడం జరగడంలేదు. ఎందుకనగా ఈ సంఖ్యలు 6−10, 11−15, 16−20 వీటిలో ఏ తరగతిలో కూడా చేర్చుట వీలు కాలేదు.

ఇలాంటప్పుడు తరగతులను కలిపి తీసుకుంటామని మనకు తెలుసు!

ఈ పట్టికలో దిగువ హద్దు 0.5 తక్కువ మరియు ఎగువహద్దు 0.5 ఎక్కువ చేసిన లభించిన రెండవ విభజన పట్టిక తయారవుతుంది. ఇచ్చట 15.5 అనే దత్తవిలువ 15.5 - 20.5 అనే తరగతిలో చేరుతుంది.

తరగతులను కలిపే పద్ధతి మారితే వాటి పౌనఃపున్యాలు కూడా మారవచ్చునని పై పట్టిక నుండి తెలుస్తుంది.

ఇది గుర్తుంచుకోండి.

పై పట్టికలో 6−10 ఈ తరగతి మధ్యవిలువ $= \dfrac{6+10}{2} = \dfrac{16}{2} = 8$;

అదే విధంగా 5.5−10.5 ఈ తరగతి మధ్యవిలువ $= \dfrac{5.5+10.5}{2} = \dfrac{16}{2} = 8$.

అనగా తరగతి యొక్క నిర్మాణం వేరే పద్ధతిలో చేసినను మధ్యవిలువ మారదని తెలుసుకోండి.

సాధించిన ఉదాహరణ:

పూర్వ వార్షిక పరీక్షలో 10వ తరగతిలోని 100 మంది విద్యార్థులు పొందిన మార్కుల పౌనఃపున్య పట్టిక కింద ఇవ్వబడింది. విద్యార్థుల యొక్క మార్కుల మధ్యగతమును కనుగొనండి.

పరిక్షలోని మార్కులు	0−20	20−40	40−60	60−80	80−100
విద్యార్థుల సంఖ్య	4	20	30	40	6

సాధన : N = 100

$\frac{N}{2}$ = 50 కావున 50వ సంఖ్య అనేది సుమారు మధ్యగతము అయి ఉంటుంది. దీని కొరకు 50వ సంఖ్య ఏ తరగతిలో వస్తుంది, దీనిని మనం గుర్తించవలెను. 'ఆరోహణసంచిత పౌనఃపున్య' (పై తరగతి హద్దు కంటే తక్కువ) పట్టిక ద్వారా దీనిని గుర్తించవచ్చు. దాని కొరకు మనం పై పౌనఃపున్య పట్టిక నుండి ఆరోహణ సంచిత పౌనఃపున్య విభజన గల పట్టికను తయారు చేద్దాం.

(విద్యార్థుల మార్కులు) తరగతి	పౌనఃపున్య విద్యార్థుల సంఖ్య fi	సంచిత పౌనః పున్యం (ఆరోహణ) cf
0-20	4	4
20-40	20	24
40-60	30	54
60-80	40	94
80-100	6	100

ఈ పట్టికనుండి,

- $\frac{N}{2}$ = 50 యొక్క దత్తవిలువ 40-60 అనే తరగతిలో కలదు. ఏ తరగతిలో అయితే మధ్యగతము లభిస్తుందో ఆ తరగతిని **మధ్యగత తరగతి** అంటారు. ఇచ్చట 40 - 60 అనేది మధ్యగత తరగతి అవుతుంది.

- 40-60 ఈ తరగతి దిగువ హద్దు 40 దాని పౌనఃపున్యం 30.

- ఈ తరగతిలోని మొదటి 50 దత్త విలువలలోని మొదటి 24 దత్తాంశ విలువలు 40 కంటె తక్కువ గలవు మిగిలిన 50 - 24 = 26 దత్తాంశ విలువలు (40 - 60) తరగతిలో కలవు. దానిలోని 50వ దత్తాంశ విలువ యొక్క అంచన కింది విధంగా వేస్తారు.
- ఈ తరగతిలో మొత్తం 30లో 26 దత్తాంశ విలువలు 50 దత్తాంశ విలువల వరకు గలవు మరియు తరగతి పరిమాణము (అంతరము) 20 కావున 50వ దత్తాంశ విలువ, 40 కంటే $\frac{26}{30} \times 20$ ఎక్కువ ఉంటుందని భావిస్తాం.

అది సుమారు $40 + \frac{26}{30} \times 20 = 40 + \frac{52}{3} = 57\frac{1}{3}$ అని అంచనా.

$\therefore$ మధ్యగతము $= 57\frac{1}{3}$

• దీనిని మనం కింది విధంగా సూత్ర రూపంలో రాయవచ్చు.

$$\text{మధ్యగతము} = L + \left[\frac{\frac{N}{2} - cf}{f}\right] \times h$$

ఈ సూత్రంలో L = మధ్యగత తరగతి దిగువ హద్దు, N = మొత్తం పౌనఃపున్యం

h = మధ్యగత తరగతి పరిమాణము, f = మధ్యగత తరగతి పౌనఃపున్యం

cf = మధ్యగత తరగతి ముందు తరగతి యొక్క సంచిత పౌనఃపున్యం

పై ఉదాహరణలో; $\frac{N}{2} = 50$, $cf = 24$, $h = 20$, $f = 30$, $L = 40$,

$$\text{మధ్యగతము} = L + \left[\frac{\frac{N}{2} - cf}{f}\right] \times h \quad .... \text{(సూత్రము)}$$

$$= 40 + \left(\frac{50-24}{30}\right) \times 20$$

$$= 40 + \frac{26 \times 20}{30}$$

$$= 40 + 17\frac{1}{3}$$

$$= 57\frac{1}{3}$$

ఇవి గుర్తుంచుకుందాం.

✦ మధ్యగతమును కనుగొనుటకు ఇచ్చిన తరగతులు మినహాయింపు తరగతులు కానిచో వాటిని మినహాయింపు తరగతులుగా మార్చవలసి వస్తుంది.

✦ దత్తాంశ విలువలు చాలా పెద్ద సంఖ్యలో ఉన్నట్లయితే ప్రతి దత్తాంశ విలువను ఆరోహణ క్రమంలో రాయడం కష్టం అవుతుంది. కావున దత్తాంశము యొక్క వర్గీకృత పట్టికగా చేస్తారు. ఇలాంటి వర్గీకృత దత్తాంశము యొక్క సరియైన మధ్యగతమును కనుగొనుట సాధ్యం కాదు కాని రమారమి (సుమారు) మధ్యగతమును కనుగొనుటకు కింది సూత్రమును ఉపయోగిస్తారు.

$$\text{మధ్యగతము} = L + \left[\frac{\frac{N}{2} - cf}{f}\right] \times h$$

సాధించిన ఉదాహరణలు

ఉదా. (1) ప్రజా రవాణ సేవలయొక్క 60 బస్సులు ఒక రోజులో ప్రయాణించిన దూరముల పౌనఃపున్య పట్టిక ఇవ్వబడింది. బస్సులు ఒక రోజులో ప్రయాణించిన దూరము యొక్క మధ్యగతమును కనుగొనండి.

రోజు ప్రయాణించిన దూరము (కి.మీ)	200-209	210-219	220-229	230-239	240-249
బస్సుల సంఖ్య	4	14	26	10	6

సాధన: (1) పట్టికలో ఇచ్చిన తరగతులు మినహాయింపు తరగతులు కావు.

ఇక్కడ ఒక తరగతి యొక్క ఎగువ అవది మరియు తర్వాతి తరగతి యొక్క దిగువ అవధుల భేదం 1.

$\therefore$ $1 \div 2 = 0.5$ ఈ విలువను ప్రతి తరగతి యొక్క దిగువ అవధి నుండి తీసివేసి మరియు ఎగువ అవధికి కలిపి తరగతి హద్దులను నిర్ణయించుదాం. ఆ విధంగా మినహాయింపు తరగతులను తయారు చేసి కొత్త పట్టికను రాద్దాం.

తర్వాత వాటి ఆరోహణ సంచిత పౌనఃపున్యముల విలువు వరుసలను తయారు చేద్దాం.

ఇచ్చిన తరగతి	మినహాయింపు తరగతి	పౌనఃపున్యల f_i	ఆరోహణ సంచిత పౌనఃపున్యం
200-209	199.5-209.5	4	4
210-219	209.5-219.5	14	18 $\rightarrow$ cf
220-229	219.5-229.5	26 $\rightarrow$ f	44
230-239	229.5-239.5	10	54
240-249	239.5-249.5	6	60

ఇక్కడ మొత్తం పౌనఃపున్యము $= \Sigma f_i = N = 60 \therefore \frac{N}{2} = 30$. $\therefore$ మధ్యగతము 30వ దత్తాంశ విలువ అవుతుంది.

మొదటి 18 దత్తాంశ విలువలు 219.5 కంటే తక్కువ మరియు మిగిలినవి 30-18=12 దత్తాంశ విలువలు 219.5-229.5 అనే తరగతిలో కలవు. కావున ఇది మధ్యగత తరగతి అవుతుంది.

219.5-229.5 ఈ తరగతి యొక్క సంచిత పౌనఃపున్యము 44.

సూత్రములో,

L = మధ్యగత తరగతి యొక్క దిగువ హద్దు = 219.5, h = మధ్యగత తరగతి అంతరము = 10

cf = మధ్యగత తరగతి యొక్క ముందు తరగతి సంచిత పౌనఃపున్యం = 18,

f = మధ్యగత తరగతి పౌనఃపున్యము = 26

మధ్యగతము $= L + \left[\frac{\frac{N}{2} - cf}{f}\right] \times h$

$\therefore$ మధ్యగతము $= 219.5 + \left(\dfrac{30-18}{26}\right) \times 10$

$= 219.5 + \left(\dfrac{12 \times 10}{26}\right)$

$= 219.50 + 4.62$

$= 224.12$

బస్సుల యొక్క రోజు వారి ప్రయాణదూరం మధ్యగతము = 224.12 కి.మీ.

ఉదా.(2) కింది పట్టికలో ఒక రోజు ఒక వస్తు సంగ్రహాలయం (మ్యూజియం)ను సందర్శించే వ్యక్తుల వయస్సులు ఇవ్వబడినవి. వాటి నుండి వ్యక్తుల యొక్క వయస్సుల మధ్యగతమును కనుగొనండి.

వయస్సు (సంవత్సరములలో)	వ్యక్తుల సంఖ్య
10 కంటే తక్కువ	3
20 కంటే తక్కువ	10
30 కంటే తక్కువ	22
40 కంటే తక్కువ	40
50 కంటే తక్కువ	54
60 కంటే తక్కువ	71

సాధన : ఇక్కడ ఆరోహణ సంచిత పౌనఃపున్య విభజన పట్టిక ఇవ్వబడింది. మొదట ఈ అన్ని తరగతుల యొక్క యధార్థ తరగతులను తయారు చేయవలసి వస్తుంది. ఆరోహణ సంచిత పౌనఃపున్యం సంబంధిత తరగతి యొక్క ఎగువ అవధితో ముడిపడి ఉంటుందని మనకు తెలుసు. మొదటి తరగతి యొక్క ఎగువ అవధి 10. ఏ వ్యక్తి యొక్క వయస్సు అయిన ధన సంఖ్య అవుతుంది. కావున మొదిటి తరగతి 0−10 అగును. రెండవ తరగతి ఎగువ అవధి 20 కావున రెండవ తరగతి 10−20 అవుతుంది. ఈ విధంగా తరగతి అంతరము 10 తీసుకుని క్రమంగా తరగతులను తయారు చేశాం. ఈ విధంగా చివరి తరగతి 50−60 అయ్యింది ఈ ప్రకారంగా కింది విధంగా మనం తరగతులను రాయవచ్చును.

వయస్సు సంవత్సరాంలో	తరగతి	వ్యక్తుల సంఖ్య పౌనఃపున్యం	ఆరోహణ సంచిత పౌనఃపున్యం
10 కంటే తక్కువ	0−10	3	3
20 కంటే తక్కువ	10−20	10 − 3 = 7	10
30 కంటే తక్కువ	20−30	22 − 10 = 12	22 → cf
40 కంటే తక్కువ	30−40	40 − 22 = 18 → f	40
50 కంటే తక్కువ	40−50	54 − 40 = 14	54
60 కంటే తక్కువ	50−60	71 − 54 = 17	71

ఇక్కడ N = 71 $\therefore \dfrac{N}{2} = 35.5$ మరియు $h = 10$

35.5 అనే సంఖ్య 30–40 తరగతిలో కలదు. కావున అది మధ్యగత తరగతి అవుతుంది. దాని ముందు తరగతి యొక్క సంచిత పౌనఃపున్యం 22 కావున cf = 22, L = 30, f = 18.

$$\text{మధ్యగతము} = L + \left[\frac{\frac{N}{2} - cf}{f}\right] \times h$$

$$= 30 + (35.5-22)\ \frac{10}{18}$$

$$= 30 + (13.5)\ \frac{10}{18}$$

$$= 30 + 7.5$$

$$= 37.5$$

∴ సందర్శించే వ్యక్తుల వయస్సుల మధ్యగతము = 37.5 సం॥లు

అభ్యాస మాలిక 6.2

1. కింది పట్టికలో ఒక సాఫ్ట్‌వేర్ కంపెనిలోని దైనందిన పని గంటలు మరియు అన్ని గంటలు పనిచేసే ఉద్యోగుల సంఖ్య ఇవ్వబడినవి. వాటి నుండి కంపెనిలో ఉద్యోగుల దైనందిన పని గంటల మధ్యగతమును కనుగొనండి.

దైనందిన పని గంటలు	8–10	10–12	12–14	14–16
ఉద్యోగుల సంఖ్య	150	500	300	50

2. ఒక మామిడి తోటలోని మామిడి చెట్లు మరియు ప్రతి చెట్టు నుండి లభించిన మామిడి పండ్ల సంఖ్యల పౌనఃపున్య విభజన పట్టిక ఇవ్వబడింది. వాటి నుండి ఇచ్చిన సమాచారము యొక్క మధ్యగతమును కనుగొనండి.

మామిడి పండ్ల సంఖ్య	50–100	100–150	150–200	200–250	250–300
చెట్ల సంఖ్య	33	30	90	80	17

3. ముంబయి–పుణె జాతీయ రహదారిపై వాహనాలను నియంత్రించే పోలీసు వసారా (చౌకీ)లో చేసిన సర్వేలో కింది విధంగా పరిశీలన కనిపించింది. ఇవ్వబడిన నమోదు యొక్క మధ్యగతమును కనుగొనండి.

వాహనముల వేగం (కి.మీ./గంట)	60–64	64–69	70–74	75–79	79–84	84–89
వాహనముల సంఖ్య	10	34	55	85	10	6

4. వివిధ ఖార్ఖానాలలో ఉత్పత్తి అయ్యే లైట్ల(దీపాలు) సంఖ్య ఇవ్వబడినవి. వాటి నుండి లైట్ల ఉత్పత్తి యొక్క మధ్యగతమును కనుగొనండి.

లైట్ల సంఖ్య (వేలల్లో)	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90	90-100
ఖార్ఖానాల సంఖ్య	12	35	20	15	8	7	8

తెలుసుకుందాం.

వర్గీకృత పౌనఃపున్య విభజన నుండి బహుళకము (Mode from classified frequency distribution)

ఇచ్చిన దత్తాంశ విలువలలో అత్యధిక సార్లు వచ్చిన సంఖ్యను ఆ సమూహము యొక్క బహుళకము అంటారని మనకు తెలుసు.

ఉదాహరణకు, ఒక ద్విచక్రవాహన కంపెని వివిధ రంగులలో ద్విచక్ర వాహనాలను తయారు చేస్తుంది. ఏ రంగు గల వాహనాలు ఎక్కువ ఇష్టం దీనిని తెలుసుకొనుటకు ఆ కంపెనికి రంగుల బహుళకము తెలియుట తప్పనిసరి అవుతుంది! అదే విధంగా వివిధ ఉత్పత్తులు చేసే ఏదేని ఒక కంపెనికి అన్నింటి కంటే ఎక్కువ డిమాండు ఏ ఉత్పత్తికి ఉందో తెలుసుకోవడం తప్పనిసరి అని అనిపిస్తుంది. ఇలాంటి సమయంలో ఆ ఉత్పత్తి యొక్క బహుళకమును కనుగొనవలెను.

మనం అవర్గీకృత పౌనఃపున్య విభజన పట్టిక నుండి బహుళకమును ఏ విధంగా కనుగొనవచ్చునో చూశాం.

ఇప్పుడు మనం వర్గీకృత పౌనఃపున్య విభజన పట్టిక నుండి బహుళకమును ఎలా కనుగొనవచ్చునో నేర్చుకుందాం.

దానికై కింది సూత్రమును ఉపయోగిస్తాం.

$$\text{బహుళకము} = L + \left[\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right] \times h$$

పై సూత్రములో, L = బహుళక తరగతి దిగువ హద్దు

f_1 = బహుళక తరగతి పౌనఃపున్యం

f_0 = బహుళక తరగతి ముందు తరగతి పౌనఃపున్యం

f_2 = బహుళక తరగతి తర్వాతి తరగతి పౌనఃపున్యం

h = బహుళక తరగతి అంతరము

ఈ సూత్రమును ఉపయోగించి సుమారు బహుళకము ఎలా కనుగొనవచ్చునో ఈ ఉదాహరణ ద్వారా నేర్చుకుందాం.

సాధించిన ఉదాహరణలు

ఉదా.(1) కింది పౌనఃపున్య విభజన పట్టికలో మైదానంలో ఆడడానికి వచ్చే పిల్లల సంఖ్య మరియు వారి వయస్సులు ఇవ్వబడినవి వాటి నుండి మైదానంలో ఆడే పిల్లల వయస్సుల బహుళకమును కనుగొనండి.

పిల్లల వయస్సు (సం॥లో)	6-8	8-10	10-12	12-14	14-16
పిల్లల సంఖ్య	43	$58 \rightarrow f_0$	$70 \rightarrow f_1$	$42 \rightarrow f_2$	27

పై పట్టిక నుండి 10-12 వయోవర్గములోని విద్యార్థుల సంఖ్య అన్నింటి కంటే ఎక్కువగా ఉంది అని మనకు తెలుస్తుంది. అనగా 10-12 అనేది బహుళక తరగతి అవుతుంది.

సాధన : ఇక్కడ $f_1 = 70$, మరియు సంబంధిత తరగతి 10-12 అవుతుంది.

$\therefore$ ఇచ్చిన ఉదాహరణలో,

L = బహుళక తరగతి దిగువ హద్దు = 10

h = బహుళక తరగతి అంతరము = 2

f_1 = బహుళక తరగతి పౌనఃపున్యము = 70

f_0 = బహుళక తరగతికి ముందున్న తరగతి పౌనఃపన్యం = 58

f_2 = బహుళక తరగతికి తరువాత గల తరగతి పౌనఃపున్యం = 42

బహుళకము = $L + \left[\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right] \times h$

$= 10 + \left[\frac{70 - 58}{2(70) - 58 - 42}\right] \times 2$

$= 10 + \left[\frac{12}{140 - 100}\right] \times 2$

$= 10 + \left[\frac{12}{40}\right] \times 2$

$= 10 + \frac{24}{40}$

$= 10 + 0.6$

$= 10.6$

$\therefore$ మైదానములో ఆడుటకు వచ్చు పిల్లల వయస్సుల బహుళకము = 10.6 సం॥లు

ఉదా.(2) కింది పౌనఃపున్య విభజన పట్టికలో ఒక పెట్రోలు బంకులో పెట్రోలును నింపుకునే వాహనాల సంఖ్య మరియు వాహనాలలో నింపిన పెట్రోలు యొక్క సమాచారము ఇవ్వబడింది. వాటి నుండి వాహనాలలో నింపిన కొలత యొక్క బహుళకమును కనుగొనండి.

నింపిన పెట్రోలు (లీటర్లలో)	1-3	4-6	7-9	10-12	13-15
వాహనాల సంఖ్య	33	40	27	18	12

సాధన : ఇక్కడ ఇచ్చిన తరగతులు మినహాయింపు తరగతులు కావు. అందువలన వాటిని మనం మినహాయింపు తరగతులుగా చేద్దాం.

తరగతి	యధార్థ తరగతి హద్దులు	పౌనఃపున్యము
1-3	0.5-3.5	$33 \rightarrow f_0$
4-6	3.5-6.5	$40 \rightarrow f_1$
7-9	6.5-9.5	$27 \rightarrow f_2$
10-12	9.5-12.5	18
13-15	12.5-15.5	12

ఇక్కడ f_1 = బహుళక తరగతి పౌనఃపున్యం = 40, బహుళక తరగతి 3.5-6.5

బహుళకము $= L + \left[\dfrac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right] \times h$

బహుళకము $= 3.5 + \left[\dfrac{40-33}{2(40)-33-27}\right] \times h$

$= 3.5 + \left[\dfrac{7}{80-60}\right] \times 3$

$= 3.5 + \dfrac{21}{20}$

$= 3.5 + 1.05$

$= 4.55$

$\therefore$ వాహనములో నింపిన పెట్రోలు (పరిమాణ) కొలత బహుళకము = 4.55లీ

అభ్యాస మాలిక 6.3

1. ఒక పాల శీతలీకరణ కేంద్రంలో వ్యవసాయదారుల నుండి సేకరించిన ఆవు పాలు మరియు లాక్టో మీటరుతో కొలిచిన పాల ఫ్యాటు (కొవ్వు) ప్రమాణం ఇవ్వబడింది. వాటి నుండి పాలలోని ఫ్యాటు ప్రమాణము యొక్క బహుళకమును కనుగొనండి.

పాలలోని ఫ్యాటు (%)	2-3	3-4	4-5	5-6	6-7
సేకరించిన పాలు (లీటర్లలో)	30	70	80	60	20

2. 330 కుటుంబాల నెలసరి విద్యుత్తు వినియోగము కింది వర్గీకృత పౌనఃపున్య పట్టికలో ఇవ్వబడింది. దాని నుండి విద్యుత్తు వినియోగము యొక్క బహుళకమును కనుగొనండి.

విద్యుత్తు వినియోగం(యూనిట్లు)	0-20	20-40	40-60	60-80	80-100	100-120
కుటుంబాల సంఖ్య	13	50	70	100	80	17

3. 100 చాయ్ హోటళ్ళకు సప్లరాచేసిన పాలు మరియు హోటళ్ళ సంఖ్యల వర్గీకృత పౌనఃపున్య విభజన పట్టిక ఇవ్వబడింది. దాని నుండి సరఫరా చేసిన పాల బహుళకమును కనుగొనండి.

పాలు (లీటర్లు)	1-3	3-5	5-7	7-9	9-11	11-13
హోటళ్ళ సంఖ్య	7	5	15	20	35	18

4. కింది పౌనఃపున్య విభజన పట్టికలో 200 రోగుల వయస్సు మరియు ఒక వారంలో చికిత్స పొందే రోగుల సంఖ్యలు ఇవ్వబడ్డాయి. దాని నుండి రోగుల వయస్సుల బహుళకమును కనుగొనండి.

వయస్సు (సం॥లు)	5 కంటే తక్కువ	5-9	10-14	15-19	20-24	25-29
రోగుల సంఖ్య	38	32	50	36	24	20

కృత్యం :-

- మీ తరగతిలోని 20 మంది పిల్లల బరువుల సగటును కనుగొనండి.
- మీ తరగతిలోని పిల్లల చొక్కాల కొలతల బహుళకమును కనుగొనండి.
- తరగతిలోని ప్రతి విద్యార్థి తమ తమ నాడి ఒక నిమిషంలో కొట్టుకొనే సంఖ్యను లెక్కించి దానిని నమోదు చేయండి. ఈ నమోదు పట్టికను తయారు చేయండి. దీని నుండి నాడి కొట్టుకునే సంఖ్య బహుళకమును కనుగొనండి.
- తరగతిలోని ప్రతి విద్యార్థి యొక్క ఎత్తును నమోదు చేయండి. దానిని వర్గీకరించండి. ఎత్తుల యొక్క మధ్యగతమును కనుగొనండి.

ఇవి గుర్తుంచుకోండి.

కేంద్రీయ ప్రవృత్తి యొక్క సగటు, మధ్యగతము మరియు బహుళకములను మనం నేర్చుకున్నాం. కేంద్రీయ స్థాన కొలతలో దేనిని ఎన్నుకొనవలెనో నిర్ణయించుటకు గల కారణము మనకు స్పష్టంగా తెలియవలెను.

ఒక పాఠశాలలో10వ తరగతి యొక్క 5 డివిజన్‌లలోని ఏ డివిజన్ అంతర్గత పరీక్షలలో ఎక్కువ మెరుగుగా ఉందనేది నిర్ణయించేప్పుడు ఆ 5 డివిజన్‌ల అంతర్గత పరీక్షలోని మార్కుల 'సగటు' ను కనుగొనవలెను.

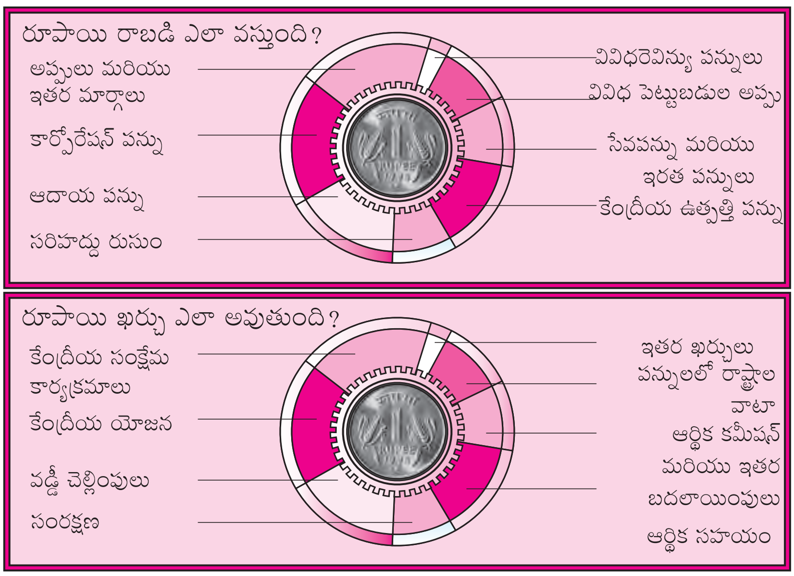
ఏదేని ఒక తరగతిలోని పిల్లలను వారి పరీక్షలలోని మార్కుల ఆధారంగా రెండు సమూహాలుగా చేయాలనన్నట్లయితే ఆ తరగతిలోని పిల్లల మార్కుల మధ్యగతమును కనుగొనవలెను.

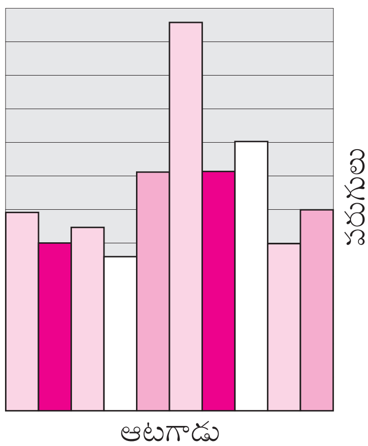
సుద్దముక్కలను తయారు చేసే ఒక పొదుపు సంఘం ఒకవేళ ఏ రంగు సుద్దముక్కలను ఎక్కువ డిమాండు ఉందో తెలుసుకొనుటకు కేంద్రీయ స్థాన కొలత బహుళకమును కనుగొవలెను.

సంఖ్యా శాస్త్ర దత్తాంశాల చిత్రరూప ప్రదర్శన (Pictorial representation of statistical data)

సంఖ్యాశాస్త్ర దత్తాంశము యొక్క సగటు, మధ్యగతము, బహుళకముల నుండి లేదా దత్తాంశ విశ్లేషణలు చేసి కొన్ని నిర్దిష్ట ఫలితాలను పొందుటకు ఉపయోగపడుతాయి.

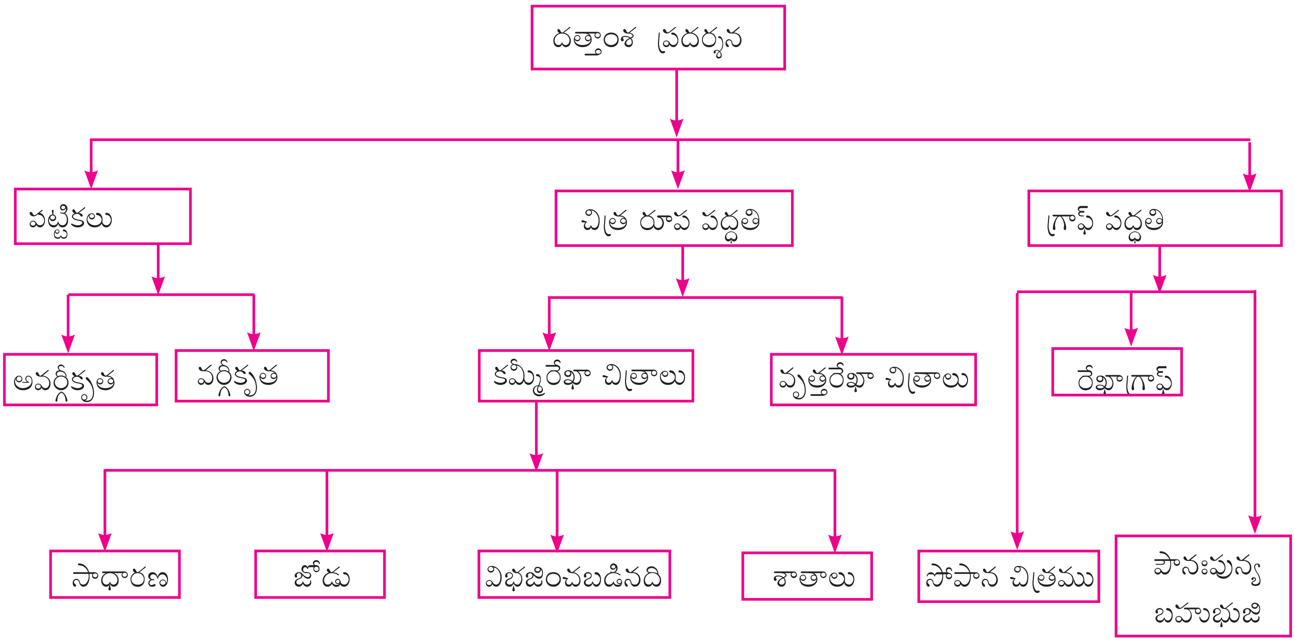
దత్తాంశమును సంక్షిప్త రూపంలో ప్రదర్శించుటకు ఒక పద్ధతి అనగా పట్టిక రూపంలో రాయుట మనకు తెలుసు. కాని పట్టిక రూపంలో ఉండుట వలన దాని నుండి కొన్ని విషయాలు వెంటనే తెలుసుకోలేము. సామాన్య ప్రజానికమునకు అర్థమవుట కొరకు మరియు ప్రాముఖ్యమైన విషయాలవైపు సులభంగా దృష్టి మళ్ళించుటకు వేరే పద్ధతిలో చేయవచ్చునా ఆలోచిద్దాం. ఉదాహరణకు, బడ్జెట్‌లోని విషయాలు, ఆటలలోని సమాచారము మొదలగునవి.





దత్తాంశము యొక్క ప్రదర్శన (Presentation of Data)

చిత్రరూపములో మరియు గ్రాఫ్ రూపంలో ఈ దత్తాంశము సులభంగా అర్థం చేసుకునుటకు మరొక విధానం కూడా కలదు. దత్తాంశ ప్రదర్శన వివిధ రకాలలో చూపించే వర్గీకరణ వృక్షము (tree chart) కింద చూపబడింది.



కింది తరగతులలో మనం వీటిలోని కొన్ని పద్ధతుల మరియు గ్రాఫ్‌లను నేర్చుకున్నాం. ఇప్పుడు మనం సోపాన చిత్రము, పౌనఃపున్య బహుభుజి మరియు వాటి సహాయంతో దత్తాంశ ప్రదర్శన ఎలా చేయవచ్చో చూద్దాం.

ఫ్లోరెన్స్ నైటింగల్ (1820–1910) ఈ సుప్రసిద్ధ మహిళ ఉత్కృష్టమైన మరియు నిష్టాపరురాలు అయిన పరిచారికగా గుర్తించబడింది. క్రిమియన్ యుద్ధంలో గాయపడ్డ సైనికులకు సేవ చేసి ఆమె చాలా మంది ప్రాణాలను కాపాడారు. తాను సంఖ్యాక శాస్త్రంలో కూడా మూలాధారమైన కార్యమును చేసింది అనేక సైనికుల అవస్థలు, వాటికి చేసిన చికిత్సలు మరియు వాటి ఉపయోగాలను అన్నింటిని నమోదు చేసి ఆమె ముఖ్యమైన ఫలితాలను కనుగొన్నారు సైనికుల మరణాలకు వారి గాయాల కంటే టైఫాయిడ్, కలరాలాంటి రోగాలతో ఎక్కువ కారణాలు అయినవి దానికి కారణం పరిసరాల అపరిశుభ్రత కలుషిత త్రాగునీరు, అత్యధిక సంఖ్యలో రోగులు ఉండవలసిరావడం. ఈ కారణములు తొందరగా తెలియుటకు ఫ్లోరెన్స్ పై చార్ట్ లాగా గ్రాఫ్ తయారు చేసింది. సరియైన చికిత్స మరియు పరిశుభ్రత నియమములను పాటించి సైనికుల మరణాల రేటును చాలా తగ్గించి చూపించారు. పట్టణాలలో ఆరోగ్యంను కాపాడుటకు సరియైన మురుగు నీటి కాలువలు మరియు తాగడానికి అందరికి పరిశుభ్రమైన నీరు అవసరము అనే పరిశీలన నగరపురపాలక సంఘంకు అర్థమవునట్లు చెప్పింది. అనేకమైన పరిశీలనలను ఉత్తమమైన నమోదును సంఖ్యాశాస్త్ర ఆధారంగా సాధారణీకరణం చేయటకు సహాయపడుతుందని ఆమె చేసిన పని ద్వారా కనిపించింది.

తెలుసుకుందాం.

సోపాన చిత్రము : Histogram

సోపాన చిత్రము మరియు దానిని గీసే పద్ధతి మనం ఒక ఉదాహరణ ద్వారా అర్థం చేసుకుందాం.

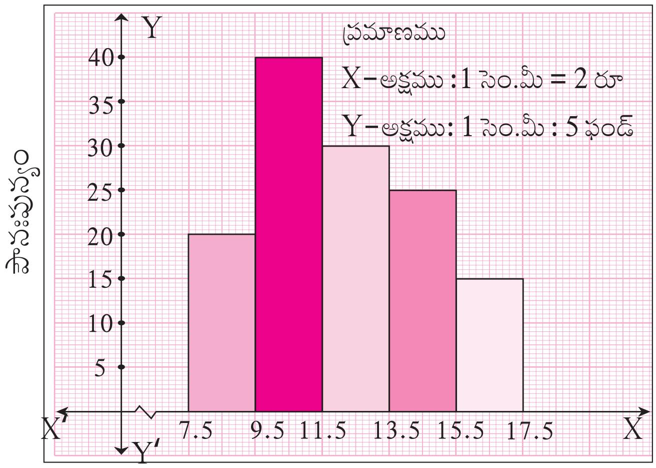
ఉదా : కింది పట్టికలో వివిధ కంపెనీల యొక్క మ్యూచ్‌వల్ ఫండ్ యొక్క ఒక యూనిట్ నికర విలువ (Net asset value) ఇవ్వబడింది.

దాని నుండి సోపాన చిత్రమును గీయండి.

నికర సొత్తు విలువ (రూపాయలు) (NAV)	8−9	10−11	12−13	14−15	16−17
మ్యూచ్యువల్ ఫండ్‌ల సంఖ్య	20	40	30	25	15

సాధన : పై పట్టికలో ఇచ్చిన తరగతులు మినహాయింపు తరగతులు కావు, వాటిని ముందు మినహాయింపు తరగతులుగా చేద్దాం.

యధార్థ తరగతి రూ॥లు	7.5−9.5	9.5−11.5	11.5−13.5	13.5−15.5	15.5−17.5
పౌనఃపున్యం	20	40	30	25	15



పటం 6.1

సోపాన చిత్రము గీయుటకు కృత్యము:

1. మినహాయింపు తరగతి లేనట్లయితే వాటిని మినహాయింపు తరగతులుగా తయారు చేసుకున్న వాటిని యధార్థ తరగతులు (extended class intervals) అంటారు

2. ఈ యధార్థ తరగతులను X− అక్షరంపై సరియైన ప్రమాణంలో (స్కేలు) చూపండి.

3. Y− అక్షంపై పౌనఃపున్యంను సరియైన ప్రమాణంలో చూపండి.

4. X− అక్షంపై ప్రతి యధార్థ తరగతిని భూమిగా తీసుకుని దానిపై కమ్మీని గీయండి. కమ్మీ యొక్క ఎత్తు దాని పౌనఃపున్యమునకు సమాంతరంగా తీసుకోండి.

గుర్తుంచుకోండి.

X-అక్షంపై మూల బిందువు మరియు మొదటి తరగతుల మధ్య ‘—Λ—’ అనే గుర్తు కలదు. (ఈ గుర్తును అక్షసంకోచం (krink mark) అంటారు.) దీని అర్థము మూల బిందువు నుండి మొదటి తరగతి మధ్య ఎలాంటి పరిశీలనలు లేవు. అందువలన X- అక్షమును మడిచినట్లు ఈ గుర్తు గలదు. అవసరాన్ని బట్టి Y- అక్షము పై కూడా ఈ గుర్తును వాడవచ్చు. అందువలన సరియైన ఆకారముగల గ్రాఫ్‌ను గీయవచ్చును.

అభ్యాస మాలిక 6.4

1. కింది సమాచారమును సోపాన చిత్రము ద్వారా చూపండి.

విద్యార్థుల ఎత్తు (సెం.మీ)	135-140	140-145	145-150	150-155
విద్యార్థుల సంఖ్య	4	12	16	8

2. కింది పట్టికలో జొన్నల ఉత్పత్తి ఎకరానికి ఇచ్చారు. దాని సోపాన చిత్రమును గీయండి.

ఉత్పత్తి (క్వింటాళ్ళలో)	2-3	4-5	6-7	8-9	10-11
ఎకరము	30	50	55	40	20

3. కింది పట్టికలోని 210 కుటుంబాల వార్షిక పెట్టుబడి (మదుపు) ఇవ్వబడింది. దాని సోపాన చిత్రమును గీయండి.

పెట్టుబడి (వేల రూ॥లలో)	10-15	15-20	20-25	25-30	30-35
కుటుంబాల సంఖ్య	30	50	60	55	15

4. కింది పట్టికలో విద్యార్థులకు పరీక్షలకు సిద్ధం అవడానికి ఇచ్చిన సమయం చూపబడింది. దాని సోపానచిత్రమును గీయండి.

సమయం (నిమిషాలలో)	60-80	80-100	100-120	120-140	140-160
విద్యార్థుల సంఖ్య	14	20	24	22	16

తెలుసుకుందాం.

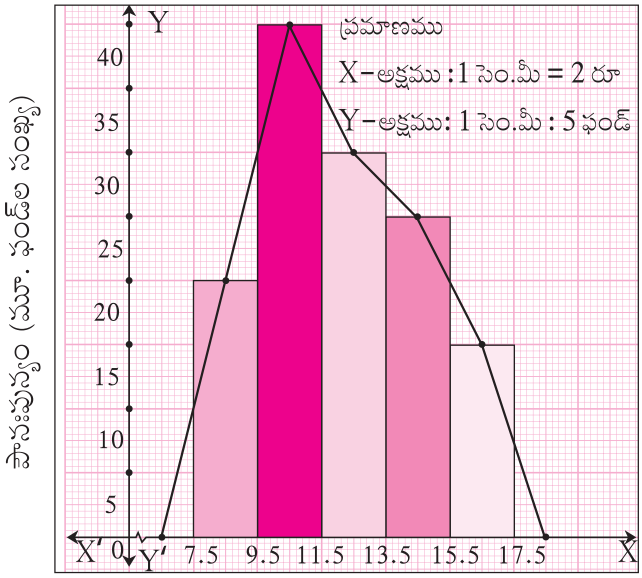
పౌనఃపున్య బహుభుజి (Frequency polygon)

పౌనఃపున్య పట్టికలోని సమాచారం వివిధ రకాలుగా చూపించవచ్చు. మీరు సోపాన చిత్రమును నేర్చుకున్నారు. రెండవ రకము ‘పౌనఃపున్య బహుభుజి’.

పౌనఃపున్య బహుభుజి ని గీయుటకు రెండు పద్ధతులను నేర్చుకుందాం.

(1) సోపాన చిత్రము యొక్క సహాయంతో (2) సోపాన చిత్రమును ఉపయోగించకుండా.

(1) సోపాన చిత్రము సహాయంతో పౌనఃపున్య బహుభుజిని గీసే పద్ధతిని అర్థం చేసుకొనుటకు మనం పటం 6.1లో చూపిన సోపాన చిత్రమును ఉపయోగిద్దాం.



తరగతి (నికర సొత్తు విలువ)

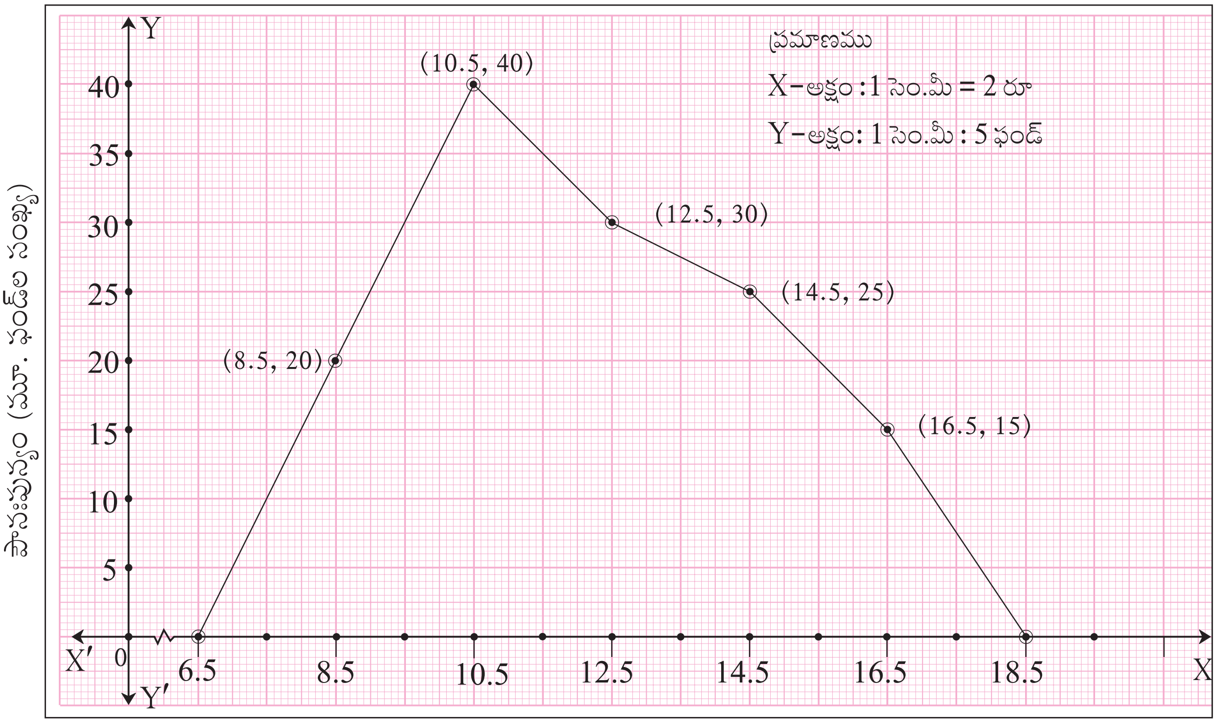
పటం 6.2

1. సోపాన చిత్రములోని కమ్మీపై భాగాన మధ్యబిందువును గుర్తించండి.
2. మొదటి కమ్మీకి ముందు సున్న ఎత్తుగల కమ్మీ ఉంది అని అనుకోండి. దాని మధ్య బిందువును గుర్తించండి. అదే విధంగా చివరి కమ్మీ తర్వాత ఒక సున్న ఎత్తుగల కమ్మీ ఉందని అనుకొని వాటి మధ్య బిందువులను కూడా గుర్తుంచండి. ఈ బిందువులు X− అక్షంపై ఉంటాయి.
3. అన్ని మధ్య బిందువులను క్రమంగా సరళరేఖచే కలపండి.
తయారైన సంవృత పటమే పౌనఃపున్య బహుభుజి అవుతుంది.

(2) సోపాన చిత్రమును గీయకుండా, పౌనఃపున్య బహుభుజిని గీయుటకు. బిందువుల నిరూపకాలను ఏ విధంగా నిర్ణయిస్తారో దానిని కింది పట్టిక ద్వారా అర్థం చేసుకుందాం.

తరగతి	యధార్థ తరగతి	మధ్యవిలువ	పౌనఃపున్యం	బిందునిరూపకలు
6 – 7	5.5 – 7.5	6.5	0	(6.5, 0)
8 – 9	7.5 – 9.5	8.5	20	(8.5, 20)
10 – 11	9.5 – 11.5	10.5	40	(10.5, 40)
12 –13	11.5 – 13.5	12.5	30	(12.5, 30)
14 – 15	13.5 – 15.5	14.5	25	(14.5, 25)
16 – 17	15.5 – 17.5	16.5	15	(16.5, 15)
18 – 19	17.5 – 19.5	18.5	0	(18.5, 0)

పట్టికలో ఐదవ వరసలో నిరూపక బిందువులను గ్రాఫ్ పై గుర్తించండి. వాటిని వరసగా కలిపిన పౌనఃపున్య బహుభుజి లభిస్తుంది. ఈ బహుభుజి 6.3 లో చూపబడింది. దానిని పరిశీలించండి..



తరగతి (నికర సొత్తు విలువ)

పటం 6.3

సాధించిన ఉదాహరణలు

ఉదా. (1) పక్క పటంలో చూపిన విధంగా పౌనఃపున్య బహుభుజి ఆధారంగా కింది ప్రశ్నలకు సమాధానాలు రాయండి.

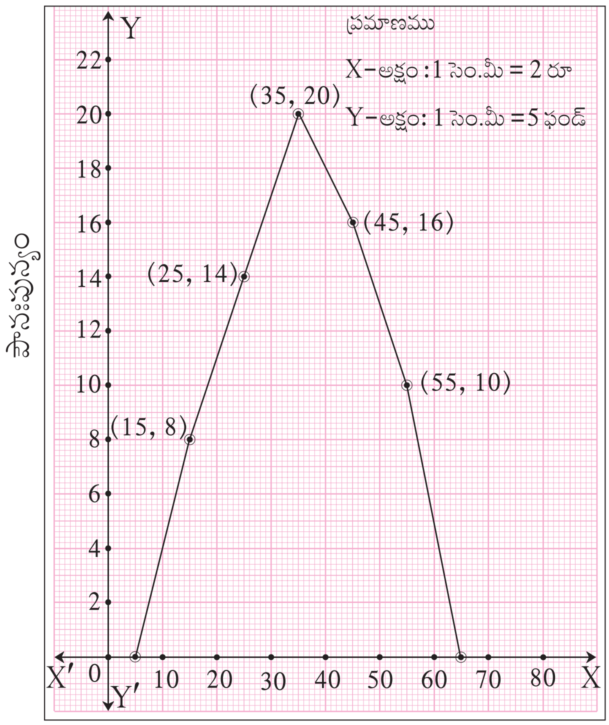
(1) 50−60 ఈ తరగతి యొక్క పౌనఃపున్యమును రాయండి.

(2) ఏ తరగతి యొక్క పౌనఃపున్యం 14 అవుతుందో ఆ తరగతిని రాయండి.

(3) తరగతి మధ్యవిలువ 55 గల తరగతిని రాయండి.

(4) అన్నింటి కంటే ఎక్కువ పౌనఃపున్యం గల తరగతిని రాయండి.

(5) శూన్య పౌనఃపున్యం గల తరగతిని రాయండి.



తరగతి

పటం 6.4

సాధన :

(1) 50-60 తరగతి మధ్య విలువ యొక్క y- నిరూపకము10. కావున 50-60 తరగతి యొక్క పౌనఃపున్యము 10.

(2) పౌనఃపున్యం Y- అక్షంపై చూపబడింది. Y- నిరూపకము14 గల బిందువు యొక్క x-నిరూపకము 25. Y- అక్షముపై 14 పౌనఃపున్యము యొక్కగుర్తును చూడండి. 25 అనేది 20-30 అనే తరగతి యొక్కమధ్య విలువ. కావున పౌనఃపున్యం గల 14 గల తరగతి 20-30 అవుతుంది.

(3) 55 అనే మధ్య బిందువుగలతరగతి 50-60

(4) పౌనఃపున్యం Y- అక్షంపై చూపబడింది. బహుభుజిపై Y- నిరూపకము యొక్క అత్యధిక విలువ 20. దాని సదృష x-నిరూపకము 35. తరగతి మధ్యవిలువ 36 గల తరగతి 30-40 కావున 30-40 తరగతి పౌనఃపున్యం అన్నింటి కంటే పెద్దది.

(5) సున్న పౌనఃపున్యంగల తరగతులు 0-10 మరియు 60-70.

ఉదా. (2) కింది పట్టికలో పిల్లల బరువులు మరియు వారి సంఖ్యలు ఇవ్వబడినవి. ఈ సమాచారము నుండి పౌనఃపున్య బహుభుజిని గీయండి.

పిల్లల బరువులు(కి.గ్రా)	18-19	19-20	20-21	21-22	22-23	23-24
పిల్లల సంఖ్య	4	13	15	25	17	6

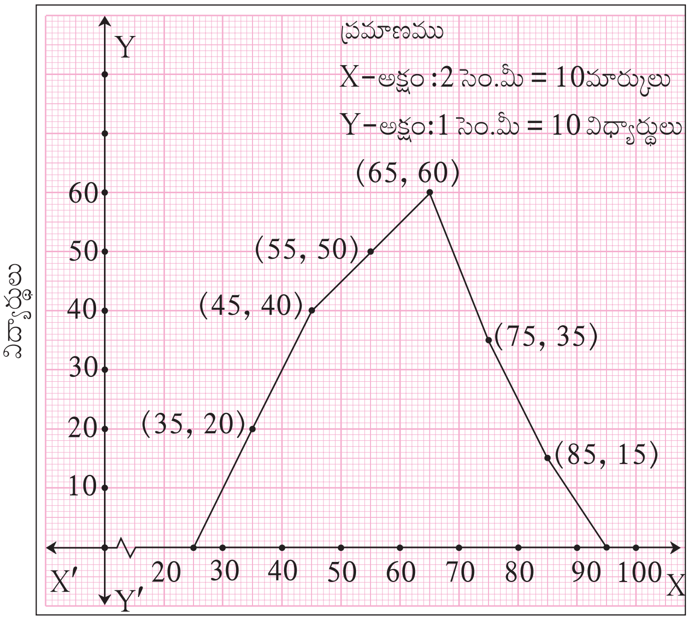
పౌనఃపున్య బహుభుజిని గీయుటకు కావలసిన బిందువులతో కింది పట్టికను తయారు చేసి పౌనఃపున్య బహుభుజిని గీయండి.

తరగతి	18-19	19-20	20-21	21-22	22-23	23-24
మధ్యవిలువ	18.5	19.5	20.5	21.5	22.5	23.5
పౌనఃపున్యం	4	13	15	19	17	6
బిందు నిరూపకములు	(18.5, 4)	(19.5,13)	(20.5,15)	(21.5,19)	(22.5,17)	(23.5,6)

పటం 6.5

అభ్యాస మాలిక 6.5

1. క్రింది పటంలోని బహుభుజిని పరిశీలించి కింది ప్రశ్నలకు జవాబులు రాయండి.



పటం 6.6

(i) అత్యధిక మార్కులు సాధించిన విద్యార్థులు ఏ తరగతిలో కలరు?

(ii) సున్న(శూన్య) పౌనఃపున్యంగల తరగతులను రాయండి.

(iii) 50 మంది విద్యార్థుల సంఖ్య గల తరగతి మధ్య విలువ ఎంత?

(iv) తరగతి మధ్యవిలువ 85 గాగల తరగతి దిగువ మరియు ఎగువ అవధులను రాయండి.

(v) 80−90 మార్కులు సాధించిన విద్యార్థులు ఎందరు?

2. కింది పట్టికలోని సమాచారం యొక్క పౌనఃపున్య బహుభుజి గీయండి.

విద్యుత్ బిల్లు (రూపాలలో)	0−200	200−400	400−600	600−800	800−1000
కుటుంబములు	240	300	450	350	160

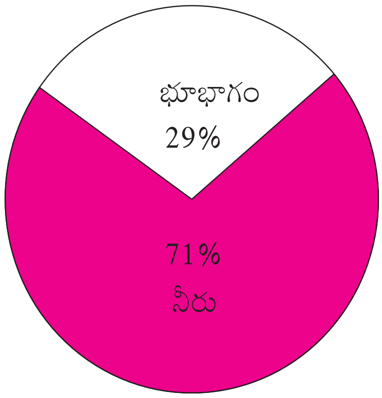
3. ఒక పరీక్ష యొక్క ఫలితాల శాతాల వారీగా తరగతులు మరియు ఆ తరగతులలో గల విద్యార్థుల సంక్య కింది పట్టికలో ఇవ్వబడింది. ఈ పట్టిక నుండి పౌనఃపున్య బహుభుజిని గీయండి.

ఫలితములు(శాతము)	30−40	40−50	50−60	60−70	70−80	80−90	90−100
విద్యార్థుల సంఖ్య	7	33	45	65	47	18	5

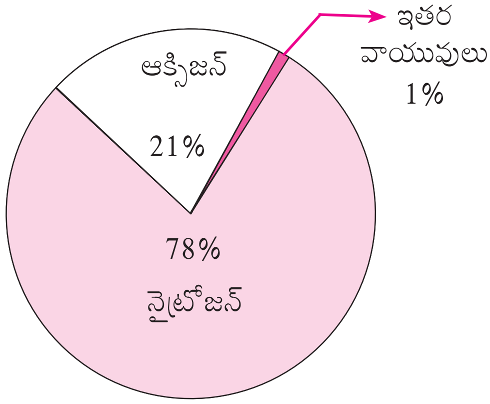
కొంచెం గుర్తుతెచ్చుకుందాం.

వృత్తరేఖా చిత్రము (Pie diagram)

కింది తరగతులలో మనం భూగోళ మరియు సామాన్యశాస్త్రాలలో కింది చిత్రమును చూశాము. ఇలాంటి చిత్రమును వృత్తరేఖా చిత్రములు అంటారు.



భూమిపై భూభాగం, నీరు యొక్క శాతములు



గాలిలోని వివిధ వాయువుల శాతములు

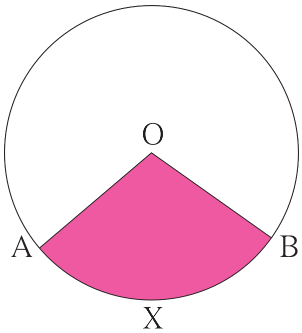
పటం 6.7

వృత్తరేఖా చిత్రములో సాంఖ్యక సమాచారము పూర్తి వృత్త చిత్రములో అనగా వృత్తములో చూపించబడుతుంది. సమాచారములోని వివిధ ఘటకాలను శాతాల వారిగా వృత్త సెక్టరులలో చూపిస్తారు.

పటం 6.8లో వృత్త కేంద్రం O గా గల వృత్తము యొక్క OA మరియు OB లు వ్యాసార్థాలు.

$\angle AOB$ కేంద్రీయ కోణము.

O – AXB అనే ఛాయంకిత భాగము వృత్త సెక్టరు (sector of a circle) అవుతుంది.



పటం 6.8

తెలుసుకుందాం.

వృత్తరేఖా చిత్రమును చదువుట (Reading of Pie diagram)

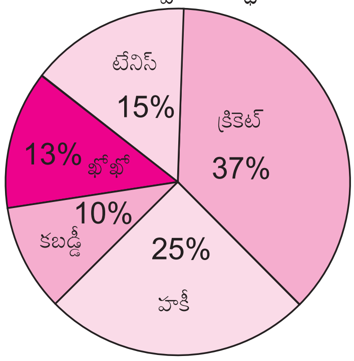
వృత్తరేఖా చిత్రముపై ఉన్న సమాచారము ఎలా లభిస్తుందో కింది ఉదాహరణ ద్వారా అర్థం చేసుకుందాం.

10వ తరగతిలో 120 మంది పిల్లలను 'మీకు ఇష్టమైన ఆట ఏది?' అని అడిగారు. లభించిన సమాచారమును వృత్తరేఖాచిత్రములో చూపించారు.

ఏ ఆట అన్నింటి కంటే ఎక్కువ ఇష్టమైన ఆట?

ఖోఖోను ఇష్టపడే పిల్లలు ఎంత శాతము?

కబడ్డీని ఇష్టపడే పిల్లలు ఎంత శాతము?



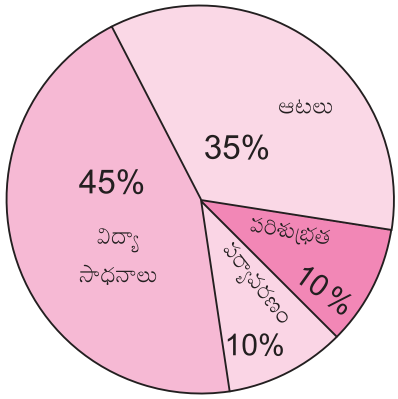
పటం 6.9

ఇలాంటి ప్రశ్నలకు సమాధానాలు మనకు వృత్తరేఖా చిత్రము నుండి లభిస్తాయి.

మరొక వృత్తరేఖాచిత్రమును చూడండి.

పక్క పటంలోని వృత్త రేఖా చిత్రము అనేది ఒక పాఠశాల యొక్క వార్షిక ఆర్థిక ప్రణాళిక(బడ్జెట్). ఈ వృత్తరేఖా చిత్రము నుండి

- 45% సొమ్ము విద్యా సాధనాల కొరకు కేటాయించబడింది.
- 35% సొమ్ము ఆట వస్తువులకు ఇవ్వబడింది.
- 10% సొమ్ము పరిశుభ్రత సామాగ్రి కొరకు ఉంచబడింది.
- 10% సొమ్ము పర్యావరణ పరిరక్షణ కొరకు కేటాయింబడింది అని మనకు తెలుస్తుంది.



పటం 6.10

ఈ రకమైన సమాచారము వృత్తరేఖా చిత్రము ద్వారా మనకు ఒకసారి చూడగానే లభిస్తుంది.

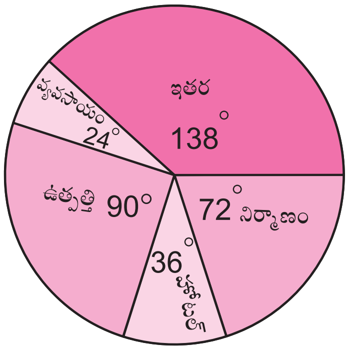
ఇప్పుడు మనం వృత్తరేఖా చిత్రము యొక్క అధిక వివరాలను తెలుసుకుందాం.

అనేకసార్లు వివిధ రకాలైన సమాచారము వృత్తారేఖా చిత్రము ద్వారా ఇవ్వబడిన దిన పత్రికలను (వార్తా పత్రికలను) చూస్తాం. బడ్జెట్ కేటాయింపులు, ఒలంపిక్ పోటీలలో వివిధ దేశాల ప్రదర్శన, దేశం యొక్క పైన రాబడి ఖర్చులు మొదలైనవాటిని చూస్తాం.

దాని కొరకు మనం సమాచారమును ఎలా వెతకాలో ఈ ఉదాహరణ ద్వారా అర్థం చేసుకుందాం.

నమూన ఉదాహరణ :

ఒక సర్వేలో లభించిన ప్రావీణ్యంగల వ్యక్తుల యొక్క రంగాల వారిగా కింది వృత్తరేఖా చిత్రములో చూపించబడినవి. ఒక వేళ ఉత్పత్తి రంగంలో పనిచేసే వ్యక్తుల సంఖ్య 4500 అయిన కింది ప్రశ్నలకు సమాధానాలను రాయండి.



పటం 6.11

(i) అన్ని రంగాలలోని మొత్తం ప్రావీణ్యంగల వ్యక్తులు ఎంత మంది గలరు?

(ii) నిర్మాణ రంగంలోని ప్రావీణ్యంగల వ్యక్తుల సంఖ్య ఎంత?

(iii) వ్యవసాయ రంగంలోని ప్రావీణ్యంగల వ్యక్తులు ఎంత మంది?

(iv) ఉత్పత్తి మరియు నిర్మాణ రంగాలలోని ప్రావీణ్యంగల వ్యక్తుల యొక్క సంఖ్యల తేడా ఎంత?

సాధన : (i) అన్ని రంగాలలోని ప్రావీణ్యంగల వ్యక్తుల సంఖ్యను x అనుకోండి.

$\therefore$ x వ్యక్తుల యొక్క కేంద్రీయ కోణం = 360°

ఉత్పత్తి రంగంలోని ప్రావీణ్యంగల వ్యక్తుల కేంద్రీయ కోణం = $\dfrac{\text{ఉత్పత్తి రంగంలోని వ్యక్తులు}}{\text{మొత్తం వ్యక్తులు}} \times 360$

$$90 = \frac{4500}{x} \times 360$$

$$\therefore x = 18000$$

$\therefore$ అన్ని రంగాలలోని ప్రావీణ్యంగల వ్యక్తులు = 18000.

(ii) నిర్మాణ రంగం యొక్క కేంద్రీయ కోణము 72°గా చూపబడింది.

$$72 = \frac{\text{నిర్మాణ రంగంలోని వ్యక్తులు}}{18000} \times 360$$

$\therefore$ నిర్మాణ రంగంలోని వ్యక్తులు $= \dfrac{72 \times 18000}{360}$

$= 3600$

(iii) వ్యవసాయ రంగం యొక్క కేంద్రీయ కోణం = 24°.

$$24 = \frac{\text{వ్యవసాయరంగంలోని వ్యక్తులు}}{\text{మొత్తం ప్రావీణ్యంగల వ్యక్తులు}} \times 360$$

$$24 = \frac{\text{వ్యవసాయరంగంలోని వ్యక్తులు}}{18000} \times 360$$

$\therefore$ వ్యవసాయరంగంలోని వ్యక్తులు $= \dfrac{24 \times 18000}{360}$

$= 1200$

(iv) ఉత్పత్తి, నిర్మాణ రంగాలలోని కేంద్రీయ కోణాల తేడా = $90^\circ - 72^\circ = 18^\circ$.

$$\therefore \text{ కేంద్రీయ కోణాల తేడా} = \frac{\text{రెండు రంగాలలోని వ్యక్తుల సంఖ్యల బేధము}}{\text{మొత్తం ప్రావీణ్యంగల వ్యక్తులు}} \times 360$$

$$18 = \frac{\text{రెండు రంగాలలోని వ్యక్తుల సంఖ్యల బేధము}}{18000} \times 360$$

$$\text{ఉత్పత్తి, నిర్మాణ రంగాలలోని ప్రావీణ్యంగల వ్యక్తుల సంఖ్యల బేధము} = \frac{18 \times 18000}{360}$$

$$= 900$$

ఇవి గుర్తుంచుకుందాం.

- సమాచారములోని ప్రతి ఘటకము దానికి సంబంధించిన వృత్త సెక్టరుతో చూపబడుతుంది.
- వృత్త సెక్టరు కేంద్రీయ కోణము యొక్క కొలత ఆ ప్రత్యేకమైన ఘటక సంఖ్యలకు అనుపాతములో ఉంటుంది.
- $\text{కేంద్రీయ కోణము కొలత } (\theta) = \dfrac{\text{సంబంధిత ఘటక సంఖ్య}}{\text{ఘటకముల మొత్తం}} \times 360^0$
- తగినంత వ్యాసార్థముతో వృత్తమును గీసి ఎన్ని ఘటకములు కలవో అన్ని కేంద్రీయ కొణాల కొలతల ప్రకారం వృత్తమును వృత్తసెక్టరులలో విభజించండి.

తెలుసుకుందాం.

వృత్తరేఖా చిత్రమును గీయుట (To draw Pie diagram)

గీయబడిన వృత్త రేఖా చిత్రము నుంచి సమాచారమును ఎలా చదవాలో మనం చుశాం. ఇప్పుడు వృత్త రేఖా చిత్రమును ఎలా గీస్తారో చూద్దాం.

1. వృత్తారేఖా చిత్రమును గీసేప్పుడు మొత్తం వృత్తము యొక్క విభజన నిష్పత్తుల వారిగా వృత్త సెక్టర్లుగా చేస్తారు.
2. ప్రతి ఘటక సంభంధిత వృత్త సెక్టరుల కేంద్రీయ కోణ కొలతలను కింది సూత్రము ద్వారా కనుగొంటారు.

$$\text{వృత్త సెక్టరు యొక్క కేంద్రీయ కోణ కొలత } \theta = \frac{\text{ఆ ఘటకములోని సంఖ్య}}{\text{అన్ని ఘటకములలోని సంఖ్యల మొత్తం}} \times 360^0$$

తగినంత వ్యాసార్థముతో వృత్తమును గీసి, సమాచారములో ఎన్ని ఘటకములు కలవో అన్ని వృత్త సెక్టరులలో వృత్తమును విభజిస్తారు.

వృత్తరేఖా చిత్రమును గీయుటకు చేసే కృత్యమును కింది ఉదాహరణ ద్వారా అర్థం చేసుకుందాం.

సాధించిన ఉదాహరణలు

ఉదా. (1) ఒక ద్విచక్ర వాహనాల దుకాణంలో వాహనాల కొనుగోలు కొరకు రంగుల ఇష్టత కింది విధంగా ఉంది. ఈ సమాచారము వృత్తరేఖా చిత్రము ద్వారా చూపించుటకు ప్రతి ఘటకమును సూచించే వృత్త సెక్టారుల కేంద్రీయ కోణముల కొలతలను నిర్ణయించండి?

సాధన : ద్విచక్ర వాహనాల మొత్తం డిమాండు 36. వీటిలో 10 తెలుపు రంగు వాహనాలు కలవు.

∴ తెలుపు రంగు వాహనాలను సూచించే వృత్త సెక్టరు కేంద్రీయ కోణ కొలత

$$= \frac{\text{తెలుపురంగు వాహనాల సంఖ్య}}{\text{మొత్తం వాహనాల సంఖ్య}} \times 360$$

$$= \frac{10}{36} \times 360 = 100$$

ఇదే విధంగా ఇతర రంగుల వాహనాల సదృశ వృత్త సెక్టరు కేంద్రీయ కోణాల కొలతలను కనుగొని పట్టికలో చూపించబడినవి.

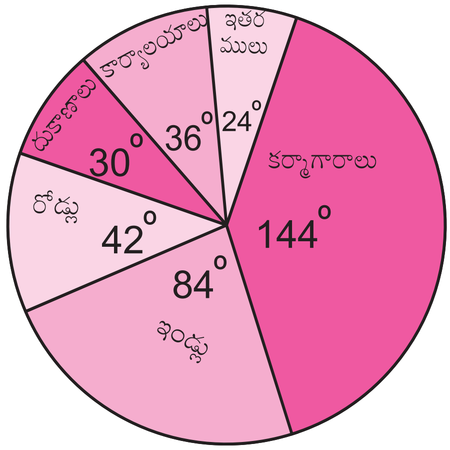
రంగు	ద్విచక్రవాహనాల డిమాండు	వృత్త సెక్టరు కేంద్రీయ కోణం
తెలుపు	10	$\frac{10}{36} \times 360^\circ = 100^\circ$
నలుపు	9	$\frac{9}{36} \times 360^\circ = 90^\circ$
నీలం	6	60°
బూడిద	7	70°
ఎరుపు	4	40°
మొత్తం	36	360°

ఉదా (2) ఒక గ్రామంలో వివిధ ప్రాంతాలలో జరిగే విధ్యుత్ సరాఫరా కింది పట్టికలో చూపబడింది. ఈ సమాచారము యొక్క వృత్త చిత్రమును గీయండి.

ప్రాంతము	కర్మాగారాలు	ఇండ్లు	రోడ్లు	దుకాణాలు	కార్యాలయాలు	ఇతరములు
విద్యుత్ సరఫరా (వేల యూనిట్లు)	24	14	7	5	6	4

సాధన : మొత్తం విధ్యుత్ సరఫరా 60 వేల యూనిట్లు. వాని నుండి కేంద్రీయ కోణముల కొలతలను కనుగొని పట్టికలో చూపుదాం.

విద్యుత్ సరఫరా	యూనిట్లు	కేంద్రీయ కోణ కొలతలు
కర్మాగారాలు	24	$\frac{24}{60} \times 360 = 144^\circ$
ఇండ్లు	14	$\frac{14}{60} \times 360 = 84^\circ$
రోడ్లు	7	$\frac{7}{60} \times 360 = 42^\circ$
దుకాణలు	5	$\frac{5}{60} \times 360 = 30^\circ$
కార్యాలయాలు	6	$\frac{6}{60} \times 360 = 36^\circ$
ఇతరములు	4	$\frac{4}{60} \times 360 = 24^\circ$
మొత్తం	60	360°



పటం 6.12

వృత్త చిత్రమును గీయుటలో సోపానాలు :

(1) మొదట పటంలో చూపిన విధంగా వృత్తమును గీసి ఒక వ్యాసార్థమును గీసాము. తర్వాత పట్టికలో కనుగొన్న కేంద్రీయ కోణ కొలతల వృత్త ఖండ సెక్టారులను ఒక దాని తర్వాత ఒకటి ($144^\circ, 84^\circ, 42^\circ, 30^\circ, 36^\circ$, మరియు 24°) ఈ విధంగా సవ్యదిశలో గీసాము. (వృత్త సెక్టారులను ఒకే దిశలో ఒకదాని తర్వాత ఒకటి గీస్తున్నప్పుడు క్రమము మారిన ఫరవాలేదు.)

(2) ప్రతి సెక్టారులో సంబంధిత ఘటకమును గుర్తించితిమి.

కృత్యము :

ఒక కుటుంబం యొక్క వివిధ అంశాలపై అయ్యే నెలసరి ఖర్చులు ఇవ్వబడ్డాయి, వాటి నుండి వృత్తరేఖ చిత్రమును గీయండి.

వివిధ అంశాలు	ఖర్చు శాతము	కేంద్రీయ కోణ కొలతలు
అహారం	40	$\frac{40}{100} \times 360 = \square$
బట్టలు(దుస్తులు)	20	$\square \times \square = \square$
ఇంటి అద్దె	15	$\square \times \square = \square$
విద్య	20	$\square \times \square = \square$
ఇతర ఖర్చులు	05	$\square \times \square = \square$
మొత్తం	100	360°

అభ్యాస మాలిక 6.6

1. ఒక రక్తదాన శిబిరములో వివిధ వయోవర్గములలోని 200 మంది చేసిన రక్తదానములను ఇవ్వబడింది. వాని నుండి వృత్తరేఖ చిత్రమును గీయండి.

వయోవర్గం (సంవత్సరములలో)	20-25	25-30	30-35	35-40
వ్యక్తుల సంఖ్య	80	60	35	25

2. ఒక విద్యార్థి వివిధ విషయులలో 100 మార్కులకు లభించిన మార్కులు ఇవ్వబడినవి. ఈ సమాచారమును వృత్తరేఖా చిత్రమును ద్వారా చూపించండి.

విషయం	ఆంగ్లము	మరాఠీ	సామాన్యశాస్త్రం	గణితము	సాంఘీక శాస్త్రం	హింది
మార్కులు	50	70	80	90	60	50

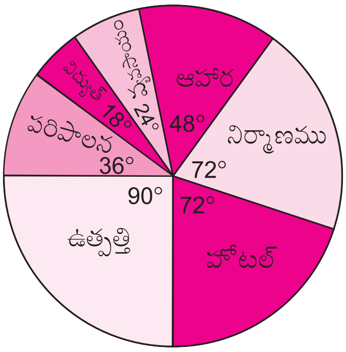
3. చెట్లను నాటే కార్యక్రమంలో పాఠశాలలోని వివిధ తరగతులోని విద్యార్థులు నాటిన మొక్కలు కింది పట్టికలో ఇవ్వబడింది. వివిధ తరగతుల వారిగా నాటిన మొక్కలను వృత్తరేఖా చిత్రము ద్వారా చూపండి.

తరగతి	5 వ	6 వ	7 వ	8 వ	9 వ	10 వ
మొక్కల సంఖ్య	40	50	75	50	70	75

4. ఒక పండ్ల వ్యాపారికి వచ్చిన వివిధ పండ్ల డిమాండు శాతాలలో కింది పట్టికలో ఇవ్వబడింది. ఈ సమాచారము యొక్క వృత్త రేఖా చిత్రమును గీయండి.

పండ్లు	మామిడి	బత్తాయి	ఆపిలు	సపోట	కమల పండు
డిమాండ్ శాతాలలో	30	15	25	20	10

5. వివిధ వృత్తుల ప్రకారం ఒక గ్రామంలోని వివిధ వృత్తులను చేసేవారు శాతాలలో చూపించే వృత్త రేఖా చిత్రము పటం 6.13లో ఇవ్వబడింది. దాని నుండి కింది ప్రశ్నల సమాధానాలను రాయండి.



పటం 6.13

(1) మొత్తం వృత్తుల సంఖ్య 10000 అయిన నిర్మాణ రంగంలో ఎంత మంది వ్యక్తులు గలరు? (2) పరిపాలన రంగంలో ఎంత మంది పని చేస్తున్నారు? (3) ఉత్పత్తి రంగంలో ఎంత శాతము మంది ఉన్నారు?

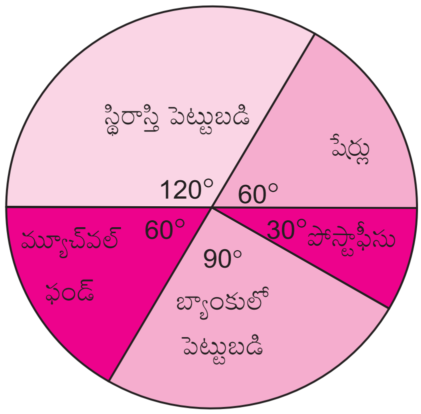
6. ఒక కుటుంబం యొక్క వార్షిక పొదుపుల వృత్తరేఖ చిత్రము పక్క పటంలో ఇవ్వబడింది. దాని నుండి కింది ప్రశ్నలకు సమాధానములు రాయండి.

(1) షేర్లలో పెట్టిన సొమ్ము రూ. 2000 అయిన మొత్తం పెట్టుబడి ఎంత?

(2) బ్యాంకులో మదుపు చేసిన సొమ్ము ఎంత?

(3) షేర్ల కంటే మ్యూచ్‌వల్ ఫండ్‌లో ఎంత ఎక్కువ పెట్టుబడి పెట్టారు?

(4) పోస్టాఫీసులోని పెట్టుబడి ఎంత?



పటం 6.14

సంకీర్ణ ప్రశ్న సంగ్రహము 6

1. బహుళైచ్ఛిక ప్రశ్నల సమాధానాలు ఇచ్చిన ఐచ్ఛికములలో నుండి వెతికి రాయండి.

(1) వివిధ రక్తగ్రూపుల వ్యక్తుల యొక్క రక్త గ్రూపుల ప్రకారం వర్గీకరణ వృతరేఖ చిత్రములో చూపబడింది. O− గ్రూపు గల వ్యక్తులు 40% ఉన్నట్లయితే O− రక్తగ్రూపు గల వ్యక్తుల వృత్తరేఖ చిత్రములో కేంద్రీయ కోణము?

(A) 114° (B) 140° (C) 104° (D) 144°

(2) భవన నిర్మాణ పనిలో వివిధ ఖర్చులు వృత్తరేఖా చిత్రము ద్వారా చూపబడిన, సిమెంటు ఖర్చు 75° ల కేంద్రీయ కోణంగా చూపబడింది. సిమెంటు ఖర్చు రూ॥లు. 45,000 అయిన భవన నిర్మాణ మొత్తం ఖర్చు రూ॥లు?

(A) 2,16,000 (B) 3,60,000 (C) 4,50,000 (D) 7,50,000

(3) వర్గీకృత పౌనఃపున్య పట్టికలోని సంచిత పౌనఃపున్య ఉపయోగం . . . . . ను కనుగొనుటకు జరుగుతుంది.

(A) సగటు (B) మధ్యగతము (C) బహుళకము (D) పైవన్ని

(4) వర్గీకృత పౌనఃపున్య పట్టికలోని సమాచార సగటును కనుగొనుటకు కింది సూత్రము $\overline{X} = A + \frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i} \times g$ లో $u_i = . . .$

(A) $\frac{x_i + A}{g}$ (B) $(x_i - A)$ (C) $\frac{x_i - A}{g}$ (D) $\frac{A - x_i}{g}$

(5)

లీటరుకు ప్రయాణించిన దూరం (కి.మీ.లలో)	12-14	14-16	16-18	18-20
కార్ల సంఖ్య	11	12	20	7

పై పట్టికలోని కార్లు ప్రతి లీటరుకు ప్రయాణించిన దూరం యొక్క మధ్యగతము . . . . . ఈ తరగతిలో కలదు.

(A) 12-14 (B) 14-16 (C) 16-18 (D) 18-20

(6)

ప్రతి విద్యార్థి నాటిన మొక్కలు	1-3	4-6	7-9	10-12
విద్యార్థుల సంఖ్య	7	8	6	4

పై పౌనఃపున్య పట్టికలోని సమాచారాన్ని పౌనఃపున్య బహుభుజి గీయవలెను. 4-6 ఈ తరగతిలో విద్యార్థులను సూచించుటకు బిందు నిరూపకము . . .

(A) (4, 8) (B) (3, 5) (C) (5, 8) (D) (8, 4)

2. ఒక ద్రాక్ష తోట యజమానులకు లభించిన ఆదాయం యొక్క వర్గీకృత పౌనఃపున్య పట్టిక కింద ఇవ్వబడింది. దాని నుండి ఆదాయం యొక్క సగటును కనుగొనండి.

ఆదాయం (వేల రూపాయలలో)	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80
తోటయజమానులు	10	11	15	16	18	14

3. కింది వర్గీకృత పౌనఃపున్య పట్టికలో వ్యవసాయ నీటి గుంటలు తయారు చేయుటకు బ్యాంకు ఇచ్చిన అప్పు ఇవ్వబడినది. అయితే బ్యాంకు ఇచ్చిన సొమ్ము యొక్క సగటును కనుగొనండి.

అప్పు (వేల రూపాయలలో)	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90
వ్యవసాయ నీటి గుంటల సంఖ్య	13	20	24	36	7

4. ఒక కర్మాగారంలోని 120 మంది పనివారి వారం రోజుల జీతముల వర్గీకృత పౌనఃపున్య విభజన పట్టిక కింద ఇవ్వబడింది. వాటి నుండి పని వారి జీతాల సగటును కనుగొనండి.

వారం రోజుల జీతము (రూపాయలలో)	0-2000	2000-4000	4000-6000	6000-8000
పనివారి సంఖ్య	15	35	50	20

5. కింది వర్గీకృత పౌనఃపున్య పట్టికలో 50 వరద బాధితుల కుటుంబాలకు సహాయం చేసిన సొమ్ము (వేల రూపాయలలో) ఇవ్వబడింది. దాని నుండి సహాయం చేసిన సొమ్ము యొక్క సగటును కనుగొనండి.

సహాయం చేసిన సొమ్ము (వేల రూపాయలలో)	50-60	60-70	70-80	80-90	90-100
కుటుంబాల సంఖ్య	7	13	20	6	4

6. కింది వర్గీకృత పౌనఃపున్య పట్టికలో ప్రజా రవాణా బస్సు సేవల 250 బస్సులు ఒక రోజులో ప్రయాణించిన దూరం (కి.మీ.) ఇవ్వబడింది. దాని నుండి ఒక రోజులో ప్రయాణించిన దూరం యొక్క మధ్యగతమును కనుగొనండి.

దూరం (కి.మీ.లలో)	200-210	210-220	220-230	230-240	240-250
బస్సుల సంఖ్య	40	60	80	50	20

7. ఒక జనరల్ స్టోర్‌లోని వివిధ వస్తువుల విలువలు మరియు ఆ వస్తువుల డిమాండుల వర్గీకృత పౌనఃపున్య పట్టిక ఇవ్వబడింది. దాని నుండి విలువల మధ్యగతమును కనుగొనండి.

విలువ(రూపాయలలో)	20 కంటే తక్కువ	20-40	40-60	60-80	80-100
వస్తువుల సంఖ్య	140	100	80	60	20

8. కింది వర్గీకృత పౌనఃపున్య విభజన పట్టికలో ఒక మిఠాయి దుకాణంలోని వివిధ బరువుగల మిఠాయిల ఆర్డరు ఇవ్వబడినవి. వాటి నుండి బరువుల యొక్క బహుళకమును కనుగొనండి.

మిఠాయి యొక్క బరువు (గ్రాములలో)	0-250	250-500	500-750	750-1000	1000-1250
వినియోగదారుల సంఖ్య	10	60	25	20	15

9. కింది పౌనఃపున్య విభజన యొక్క సోపాన చిత్రమును గీయండి.

విద్యుత్ వినియోగం (యూనిట్లలో)	50-70	70-90	90-110	110-130	130-150	150-170
కుటుంబాల సంఖ్య	150	400	460	540	600	350

10. ఒక చేనేత ఖార్ఖానాలో 140 మంది కూలీలు కలిసి ఒక చీర తయారు చేయుటకు పట్టే పని దినాల వర్గీకృత పౌనఃపున్య పట్టిక ఇవ్వబడింది. ఈ సమాచారమునకు పౌనఃపున్య బహుభుజిని గీయండి.

పని దినాలు	8-10	10-12	12-14	14-16	16-18	18-20
కూలీల సంఖ్య	5	16	30	40	35	14

11. ఒక తరగతిలోని విద్యార్థులకు సామన్య శాస్త్ర ప్రయోగాలు చేయుటకు పట్టు సమయముల వర్గీకృత పౌనఃపున్య విభజన పట్టిక ఇవ్వబడింది. ఈ సమాచారం సోపాన చిత్రమును గీసి పౌనఃపున్య బహుభుజిని గీయండి.

ప్రయోగంకొరకు పట్టు సమయం(నిమిషాలలో)	20-22	22-24	24-26	26-28	28-30	30-32
విద్యార్థుల సంఖ్య	8	16	22	18	14	12

12. కింది వర్గీకృత పౌనఃపున్య పట్టిక యొక్క పౌనఃపున్య బహుభుజిని గీయండి..

రక్తదాతల వయస్సు	20-24	25-29	30-34	35-39	40-44	45-49
రక్తదాతల సంఖ్య	38	46	35	24	15	12

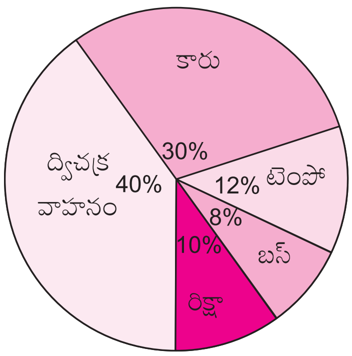
13. కింది పట్టికలో 150 గ్రామాలలో వార్షిక వర్షపాత సరాసరి నమోదు ఇవ్వబడింది. దాని పౌనఃపున్య బహుభుజిని గీయండి.

వర్షపాత నమోదు (సెం.మీ.లలో)	0-20	20-40	40-60	60-80	80-100
గ్రామాల సంఖ్య	14	12	36	48	40

14. ఉదయం 8 నుండి 10 గంటల సమయంలో పట్టణంలోని ఒక (రోడ్డు కూడలి) సిగ్నల్ నుండి ముందుకు వెళ్ళే వివిధ వాహనాల వృత్తరేఖా చిత్రము ఇవ్వబడింది.

(1) ప్రతి రకమైన వాహనాలయొక్క కేంద్రీయ కోణాలను కనుగొనండి..

(2) ద్విచక్రవాహనాల సంఖ్య 1200 అయిన వాహనాల మొత్తం సంఖ్య ఎంత?



పటం 6.15

15. కింది పట్టికలో ధ్వని కాలుష్యం ఏర్పరచే ఘటకాలు ఇవ్వబడినవి. వాటి వృత్తరేఖ చిత్రమును గీయండి.

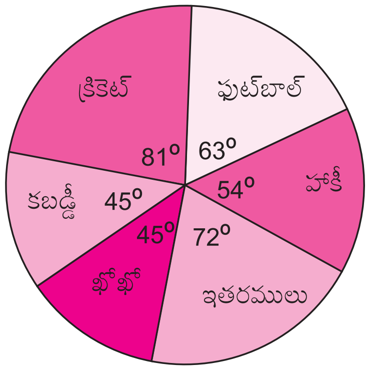
నిర్మాణం	రోడ్లు	విమానాశ్రయాలు	పరిశ్రమలు	రైళ్ళు
10%	50%	9%	20%	11%

16. ఒక సర్వేలో వివిధ ఆటలలో పాఠశాల విద్యార్థుల యొక్క అభిరుచిని కింద వృత్తరేఖా చిత్రములో చూపబడింది. మొత్తం విద్యార్థుల సంఖ్య 1000 అయినట్లయితే,

(1) క్రికెట్‌ను ఇష్టపడే విద్యార్థులు ఎంతమంది?

(2) ఫుట్‌బాల్ ఆట ఎంత మంది విద్యార్థులకు ఇష్టం?

(3) ఇతర ఆటలను ఇష్టపడే విద్యార్థులు ఎంత మంది?



పటం 6.16

17. ఒక గ్రామంలోని ఆరోగ్య కేంద్రములో 180 మంది స్త్రీలకు ఆరోగ్య పరీక్షలు జరిగినవి. అందులో 50 మంది స్త్రీలకు హిమోగ్లోబిన్ తక్కువగా ఉంది, 10 మంది స్త్రీలకు మోతి బిందు సమస్య, 25 మంది స్త్రీలకు శ్వాసకోశ సమస్యలు గలవు. మిగిలిన స్త్రీలు ఆరోగ్యవంతులు ఈ సమాచారమును సూచించే వృత్తరేఖా చిత్రమును గీయండి.

18. అడవుల పెంపక ప్రాజెక్టులో ఒక పాఠశాలలోని విద్యార్థులు పర్యావరణ దినోత్సవ సందర్భంగా 120 మొక్కలను నాటిరి. వాటి సమాచారము కింది పట్టికలో ఇవ్వబడింది. ఈ సమాచారమును సూచించే వృత్తరేఖా చిత్రమును గీయండి.

మొక్కల పేర్లు	జాజి	కరక్కాయ	అశోక	గన్నేరు	వేప
మొక్కల సంఖ్య	20	28	24	22	26

జవాబులు

1. రెండు చరరాశులు గల రేఖీయ సమీకరణాలు

అభ్యాస మాలిక 1.1

2. **(1)** (2, 4) **(2)** (3, 1) **(3)** (6,1) **(4)** (5, 2)

(5) (−1, 1) **(6)** (1, 3) **(7)** (3, 2) **(8)** (7, 3)

అభ్యాసమాలిక 1.2

1. (1)

x	3	−2	0
y	0	5	3
(x, y)	(3, 0)	(−2, 5)	(0, 3)

(2)

x	4	−1	0
y	0	−5	−4
(x, y)	(4, 0)	(−1,−5)	(0,−4)

2. **(1)** (5, 1) **(2)** (4, 1) **(3)** (3, −3) **(4)** (−1, −5) **(5)** (1, 2.5) **(6)** (8, 4)

అభ్యాస మాలిక 1.3

1. $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 3 \times \boxed{5} - \boxed{2} \times 4 = \boxed{15} - 8 = \boxed{7}$

2. **(1)** −18 **(2)** 21 **(3)** $-\frac{4}{3}$

3. **(1)** (2, −1) **(2)** (−2, 4) **(3)** (3, −2) **(4)** (2, 6) **(5)** 6, 5) **(6)** $(\frac{5}{8}, \frac{1}{4})$

అభ్యాస మాలిక 1.4

1. **(1)** $(\frac{1}{9}, 1)$ **(2)** (3, 2) **(3)** $(\frac{5}{2}, -2)$ **(4)** (1, 1)

అభ్యాస మాలిక 1.5

1. **(1)** ఆ సంఖ్య 5 మరియు 2 **(2)** x = 12, y = 8 వైశాల్యం = 640 చ.యూనిట్లు, చుట్టుకొలత = 112 యూనిట్లు **(3)** బాలుని వయస్సు 15 సంవత్సరాలు, తండ్రి వయస్సు 40 సంవత్సరాలు **(4)** $\frac{7}{18}$ **(5)** A = 30 కి.గ్రా, B = 5.5 కి.గ్రా **(6)** 150 కి.మీ.

సంకీర్ణ ప్రశ్న సంగ్రహము 1

1. (1) B (2) A (3) D (4) C (5) A

2.

x	−5	$\frac{3}{2}$
y	$-\frac{13}{6}$	0
(x, y)	$(-5, -\frac{13}{6})$	$(\frac{3}{2}, 0)$

3. (1) (3, 2) (2)(−2, −1) (3) (0, 5) (4) (2, 4) (5) (3, 1)

4. (1) 22 (2) −1 (3) 13

5. (1) $(-\frac{2}{3}, 2)$ (2) (1, 4) (3) $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ (4) $(\frac{7}{11}, \frac{116}{33})$ (5) (2, 6)

6. (1) (6, −4) (2) $(-\frac{1}{4}, -1)$ (3) (1, 2) (4) (1, 1) (5) (2, 1)

7. (2) చాయ్ (తేనీరు) యొక్క ధర ₹300 ప్రతి కి.గ్రా.
చక్కెర యొక్క ధర ₹40 ప్రతి కి.గ్రా.

(3) ₹100 ల యొక్క నోట్ల సంఖ్య 20
₹50 యొక్క నోట్ల సంఖ్య 10

(4) మనీషా యొక్క ప్రస్తుత వయస్సు 23 సంవత్సరాలు
సవిత యొక్క ప్రస్తుత వయస్సు 8 సంవత్సరాలు

(5) నైపుణ్యంగల పనివారి (జీతము) కూలీ ₹450.
నైపుణ్యం లేని పనివారి (జీతము) కూలీ ₹270.

(6) హమీద్ యొక్క వేగం 18 కి.మీ./గంట.
జోసెఫ్ యొక్క వేగం 72 కి.మీ./గంట.

2. వర్గ సమీకరణములు

అభ్యాసమాలిక 2.1

1. $m^2 + 5m + 3 = 0$, $y^2 - 3 = 0$ (ఇలాంటివి ఏవైనా)

2. (1), (2), (4), (5)లు వర్గ సమీకరణములు.

3. (1) $y^2 + 2y - 10 = 0$, $a = 1, b = 2, c = -10$

(2) $x^2 - 4x - 2 = 0$, $a = 1, b = -4, c = -2$

(3) $x^2 + 4x + 3 = 0$, $a = 1, b = 4, c = 3$

(4) $m^2 + 0m + 9 = 0$, $a = 1, b = 0, c = 9$

(5) $6p^2 + 3p + 5 = 0$, $a = 6, b = 3, c = 5$

(6) $x^2 + 0x - 22 = 0$, $a = 1, b = 0, c = -22$

4. (1) 1 అవుతుంది, −1 కాదు (2) $\frac{5}{2}$ అవుతుంది, 2 కాదు

5. k = 3 **6.** k = −7

అభ్యాస మాలిక 2.2

(1) 9, 6 **(2)** −5, 4 **(3)** $-13, -\frac{1}{2}$ **(4)** $5, -\frac{3}{5}$

(5) $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ **(6)** $\frac{2}{3}, -\frac{1}{2}$ **(7)** $-\frac{5}{\sqrt{2}}, -\sqrt{2}$ **(8)** $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

(9) 25, −1 **(10)** $-\frac{3}{5}, \frac{3}{5}$ **(11)** 0, 3 **(12)** $-\sqrt{11}, \sqrt{11}$

అభ్యాస మాలిక 2.3

(1) 4,−5 (2) $\sqrt{6}$,−1 −$\sqrt{6}$,−1 (3) $\frac{\sqrt{13}+5}{2}, \frac{-\sqrt{13}+5}{2}$

(4) $\frac{\sqrt{2}+2}{3}, \frac{-\sqrt{2}+2}{3}$ (5) $-\frac{5}{4}, -\frac{5}{2}$ (6) $\frac{2+\sqrt{39}}{5}, \frac{2-\sqrt{39}}{5}$

అభ్యాస మాలిక 2.4

1. (1) 1, −7, 5 (2) 2, −5, 5 (3) 1, −7, 0

2. (1) −1, −5 (2) $\frac{3+\sqrt{17}}{2}, \frac{3-\sqrt{17}}{2}$ (3) $\frac{-1+\sqrt{22}}{3}, \frac{-1-\sqrt{22}}{3}$

   (4) $\frac{2+\sqrt{14}}{5}, \frac{2-\sqrt{14}}{5}$ (5) $\frac{-1+\sqrt{73}}{6}, \frac{-1-\sqrt{73}}{6}$ (6) −1, $-\frac{8}{5}$

3. $-\sqrt{3} - \sqrt{3}$

అభ్యాస మాలిక 2.5

1. (1) 5గా ఉన్నప్పుడు మూలాలు విభిన్నాలు మరియు వాస్తవసంఖ్యలు, −5 గా ఉన్నప్పుడు మూలాలు వాస్తవ సంఖ్యలు కావు.

   (2) $x^2 + 7x + 5 = 0$ (3) $\alpha + \beta = 2, \alpha \times \beta = -\frac{3}{2}$

2. (1) 53 (2) −55 (3) 0

3. (1) మూలాలు వాస్తవాలు మరియు సమానం. (2) మూలాలు వాస్తవాలు మరియు అసమానం. (3) మూలాలు వాస్తవ సంఖ్యలు కావు.

4. (1) $x^2 - 4x = 0$ (2) $x^2 + 7x - 30 = 0$

   (3) $x^2 - \frac{1}{4} = 0$ (4) $x^2 - 4x - 1 = 0$

5. k = 3 6. (1) 18 (2) 50

7. (1) k = 12 లేదా k = −12 (2) k = 6

అభ్యాస మాలిక 2.6

1. 9 సంవత్సరాలు 2. 10 మరియు 12 3. నిలువు వరసలోని మొక్కలు 10 మరియు అడ్డు వరసలోని మొక్కలు15.

4. కిషోర్ యొక్క ప్రస్తుత వయస్సు 10 సంవత్సరాలు మరియు వివేక్ యొక్క ప్రస్తుత వయస్సు 15 సంవత్సరాలు

5. 10 మార్కులు 6. పాత్రల యొక్క సంఖ్య 6 మరియు ప్రతి పాత్ర యొక్క తయారి ఖర్చు 100 రూ॥లు.

7. 6 కి.మీ/గంట 8. నిషూకి 6 రోజులు మరియు పింటూకి 12 రోజులు.

9. విభాజకం = 9, భాగఫలం = 51 10. AB = 7 సెం.మీ, CD = 15 సెం.మీ, AD = BC = 5 సెం.మీ.

సంకీర్ణ ప్రశ్న సంగ్రహము 2

1. (1) B (2) A (3) C (4) B (5) B (6) B (7) C (8) C

2. (1) మరియు (3) వర్గసమీకరణములు.

3. (1) -15 (2) 1 (3) 21

4. k = 3, 5. (1) $x^2 - 100 = 0$ (2) $x^2 - 2x - 44 = 0$ (3) $x^2 - 7x = 0$

6. (1) మూలాలు వాస్తవ సంఖ్యలు కావు. (2) మూలాలు వాస్తవాలు మరియు అసమానం.
(3) మూలాలు వాస్తవాలు మరియు సమానం.

7. (1) $\frac{1+\sqrt{21}}{2}, \frac{1-\sqrt{21}}{2}$ (2) $\frac{1}{2}, -\frac{1}{5}$ (3) 1, -4
(4) $\frac{-5+\sqrt{5}}{2}, \frac{-5-\sqrt{5}}{2}$ (5) మూలాలు వాస్తవ సంఖ్యలు కావు. (6) $2 + \sqrt{7}, 2 - \sqrt{7}$

8. m = 14 9. $x^2 - 5x + 6 = 0$ 10. $x^2 - 4pqx - (p^2 - q^2) = 0$

11. సాగర్ వద్ద 100 రూపాయలు మరియు ముకుంద్ వద్ద 150 రూపాయలు.

12. 12 మరియు $\sqrt{24}$ లేదా 12 మరియు $\sqrt{24}$ 13. విద్యార్థుల సంఖ్య 60

14. వెడల్పు 45 మీ. పొడవు 100 మీ, వ్యవసాయ కుంట యొక్క పొడవు 15 మీ.

15. పెద్ద నల్లకు 3 గంటలు మరియు చిన్న నల్లకు 6 గంటలు.

3. అంకశ్రేఢి

అభ్యాస మాలిక 3.1

1. (1) అవుతుంది, $d = 2$ (2) అవుతుంది. $d = \frac{1}{2}$ (3) అవుతుంది, $d = 4$ (4) కాదు.
(5) అవుతుంది, $d = -4$ (6) అవుతుంది, $d = 0$ (7) అవుతుంది, $d = \sqrt{2}$ (8) అవుతుంది, $d = 5$

2. (1) 10, 15, 20, 25, . . . (2) $-3, -3, -3, -3$, . . . (3) $-7, -6.5, -6, -5.5$, . . .
(4) $-1.25, 1.75, 4.75, 7.75$, . . . (5) 6, 3, 0, -3 . . . (6) $-19, -23, -27, -31$

3. (1) $a = 5, d = -4$ (2) $a = 0.6, d = 0.3$ (3) $a = 127, d = 8$ (4) $a = \frac{1}{4}, d = \frac{1}{2}$

అభ్యాస మాలిక 3.2

(1) (1) $a = 7$ (2) $d = 3$ (3) $a = -3, d = -5$ (4) $a = 70, d = -10$

2. అవుతుంది 121 3. 104 4. 1115 5. -121 6. 180

7. 55 8. 55వ 9. 60 10. 1

అభ్యాస మాలిక 3.3

1. 1215 **2.** 15252 **3.** 30450 **4.** 5040

5. 2380 **6.** 60 **7.** 9,14,19 లేదా 9, 4, -1 **8.** -3, 1, 5, 9

అభ్యాస మాలిక 3.4

1. 70455 రూపాయలు 2. మొదటి కిస్తీ 100 రూపాయలు, చివరి కిస్తీ 560 రూపాయలు. 3. 1,92,000 రూపాయలు

4. 45, 1242 5. $-20^\circ, -25^\circ, -30^\circ, -35^\circ, -40^\circ, -45^\circ$ 6. 325

సంకీర్ణ ప్రశ్న సంగ్రహము 3

1. (1) B (2) C (3) B (4) D (5) B (6) C (7) C (8) A (9) A (10) B

2. 40 **3.** 1, 6, 11,... **4.** -195 **5.** 16, -21 **6.** -1 **7.** 6, 10

8. 8 **9.** 67, 69, 71 **10.** 3, 7, 11, 15, . . . **14.** 2000 రూపాయలు

4. ఆర్థిక ప్రణాళిక

అభ్యాస మాలిక 4.1

1. CGST 6%, SGST 6% 2. SGST 9%, GST 18%

3. CGST ₹ 784 మరియు SGST = ₹ 784

4. ఆ బెల్ట్ వినియోగదారునికి 691.48 రూపాయలకు లభించును.

5. ఆడుకునే కారు యొక్క పన్ను విధించే విలువ ₹ 1500 దానిపై CGST ₹ 135 SGST ₹ 135

6. (1) SGST యొక్క రేటు = 14% (2) AC పై GST యొక్క రేటు = 28%
(3) AC యొక్క పన్ను విధించే విలువ = 40,000 రూ॥లు. (4) GST యొక్క మొత్తం సొమ్ము = 11,200 రూ॥లు.
(5) CGST = 5600 రూ॥లు. (6) SGST = 5600 రూ॥లు.

7. ప్రసాద్‌కు ఆ వాషింగ్ మషీన్ 48,940 రూపాయలలో లభించును మరియు బిల్లుపై CGST = 5320 రూ॥లు. మరియు SGST = 5320 రూ॥లు.

అభ్యాస మాలిక 4.2

1. చేతన స్టోర్స్‌కు 22,000 రూ॥లు GST ఇవ్వబడెను.

2. నజ్మాకు ₹ 12,500 ల ఇన్‌పుట్ టాక్స్ క్రెడిట్ లభించును ∴ చెల్లించవలసిన GST ₹ 2250.

3. అమీర్ ఎంటర్‌ప్రైజెస్ చెల్లించవలసిన GST = 300 రూ॥లు. దీనిలో CGST = 150 రూ॥లు మరియు SGST = 150 రూ॥లు.
అక్బర్ బ్రదర్స్ చెల్లించవలసిన GST 400 రూ॥లు దీనిలో CGST 200 రూ॥లు దీనిలో SGST 200 రూ॥లు.

4. చెల్లించవలసిన GST ₹ 100, CGST ₹ 50 UTGST ₹ 50. 5. CGST = SGST = ₹ 900

అభ్యాస మాలిక 4.3

1. (1) మార్కెట్ విలువ = 100 రూ॥లు (2) ముఖవిలువ = 75 రూ॥లు (3) తక్కువ విలువ = 5 రూ॥లు.

2. 25% 3. 37,040 రూ॥లు 4. 800 షేర్స్

5. తిరిగిపొందే రేటు = 5.83%

6. కంపెనీ A లోని పెట్టుబడి లాభదాయకమైనది.

అభ్యాస మాలిక 4.4

1. 200.60 రూ॥లు 2. 999 రూ॥లు

3.

షేర్స్ సంఖ్య	షేర్స్ మార్కెట్‌విలువ	షేర్స్ విలువ	దలాలీ రేటు 0.2%	దలాలీ పై CGST 9%	దలాలీ పై SGST 9%	షేర్స్ మొత్తం విలువ
100 B	45 రూ.	4500	9	0.81	0.81	4510.62
75 S	200 రూ.	15000	30 రూ.	2.70 రూ.	2.70 రూ.	14964.60

4. 100 షేర్స్ అమ్మెను 5. నష్టం 8560 రూ॥లు.

సంకీర్ణ ప్రశ్న సంగ్రహము 4. A

1. (1) C (2) B (3) D (4) B (5) A (6) B

2. మొత్తం బిల్లు 28,800 రూ. సిజియస్‌టి 3150 రూ. ఎస్‌జిఎస్‌టి 3150 రూ.

3. ₹ 997.50 4. ₹ 12,500 5. ₹ 4250 ITC చెల్లించే పన్ను GST ₹ 250

6. ITC ₹ 1550 రూపాయలు, కేంద్రం యొక్క పన్ను ₹ 5030 రూపాయలు ఎస్‌జిఎస్‌టి 5030 రూపాయలు.

7. పన్ను విధించే విలువ ₹75,000 కేంద్రం యొక్క పన్ను ₹ 4500, రాష్ట్రంయొక్క పన్ను ₹4500.

8. (1) టోకు వర్తకుని పన్ను రశీదులో సిజియస్‌టి 16200 రూ॥లు ఎస్‌జియస్‌టి 16200 రూ॥లు.

చిల్లర వర్తకుని పన్ను రశీదులో సిజియస్‌టి 19,800 రూ॥లు, ఎస్‌జియస్‌టి 19,800 రూ॥లు

(2) టోకు వర్తకుడు చెల్లించవలసిన పన్ను (CGST) 2700 మరియు (SGST) 2700,

చిల్లర వర్తకుడు చెల్లించవలసిన పన్ను (CGST) 3600 + (SGST) 3600

9. (1) అన్నా పాటిల్ ఇచ్చిన పన్ను రశీదులోని సిజియస్‌టి = 1960, ఎస్‌జియస్‌టి ₹ 1960

(2) వసయి వ్యాపారి వినియోగదారుని వద్ద వసూలు చేసిన, సిజిఎస్‌టి ₹ 2352 మరియు ఎస్‌జిఎస్‌టి ₹ 2352

(3) వసయి వ్యాపారి చెల్లించవలసిన సిజిఎస్‌టి ₹ 392 మరియు చెల్లించవలసిన ఎస్‌జియస్‌టి ₹ 392 రూ॥లు.

10. (1)

వ్యక్తి	చెల్లించవలసిన సిజిఎస్‌టి ₹	చెల్లించవలసిన ఎస్‌జిఎస్‌టి ₹	చెల్లించవలసిన జిఎస్‌టి ₹
ఉత్పత్తిదారుడు	3000	300	600
పంపిణీదారుడు	360−300 =60	60	120
చిల్లర వర్తకుడు	390−360 = 30	30	60
మొత్తం పన్ను	390	390	780

(2) చివరగా వినియోగదారునికి ఆ వస్తువు 7280 రూపాయలకు లభించును.

(3) ఉత్పత్తిదారుడు నుండి పంపిణీదారుడు B2B పంపిణీదారుడు నుండి చిల్లర వర్తకుడు B2B

చిల్లర వ్యాపారి నుండి వినియోగదారుడు B2C

సంకీర్ణ ప్రశ్న సంగ్రహము 4.B

1. (1) B (2) B (3) A (4) C (5) A

2. ₹ 130.39 3. 22.2% 4. 21,000 రూపాయలు లభిస్తాయి.

5. 500 షేర్స్ లభిస్తాయి. 6. లభము 880.70 రూపాయలు. 7. కంపెనీ B ఎందుకనగా తిరిగి లభించేది ఎక్కువ.

8. 1000 షేర్స్ లభిస్తాయి. 9. 118 రూ.

10. (1) 1,20,000 రూ. (2) 360 రూ. (3) 64.80 రూ. (4) 1,20,424.80 రూ.

11.1% లాభం

5. సంభావ్యత

అభ్యాస మాలిక 5.1

1. (1) 8 (2) 7 (3) 5 (4) 11

అభ్యాస మాలిక 5.2

1. (1) S = {1H, 1T, 2H, 2T, 3H, 3T, 4H, 4T, 5H, 5T, 6H, 6T} n(S) = 12

(2) S = {23, 25, 32, 35, 52, 53} n(S) = 6

2. S ={ఎరుపు, వంకాయ, కాషాయం, పసుపు, నీలం, ఆకుపచ్చ} n(S) = 6

3. S = {మంగళవారము, ఆదివారము, శుక్రవారము, బుధవారము, సోమవారము, శనివారము} n(S) = 6

4. (1) B_1,B_2 (2) G_1,G_2 (3) B_1,G_1 B_2,G_1 B_1,G_2 B_2,G_2

(4) $S = \{B_1B_2, B_1G_1, B_1G_2, B_2G_1, B_2G_2, G_1G_2\}$

అభ్యాస మాలిక 5.3

1. (1) S = {1, 2, 3, 4, 5, 6} n(S) = 6

A = {2, 4, 6} n(A) = 3, B = {1, 3, 5} n(B) = 3 C = {2, 3, 5} n(C) = 3

(2) S = {(1,1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2,1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)} n(S) = 36

A = {(1, 5) (2, 4) (3, 3) (4, 2) (5, 1) (6, 6)} n(A) = 6

B = {(4, 6) (5, 5) (5, 6) (6, 4) (6, 5) (6, 6)} n(B) = 6

C = {(1, 1) (2, 2) (3, 3) (4, 4) (5, 5) (6, 6)} n(C) = 6

(3) S = {HHH, HHT, HTT, HTH, THT, TTH, THH, TTT} n(S) = 8

A = {HHH, HHT, HTH, THH} n(A) = 4

B = {TTT} n(B) = 1

C = {HHH, HHT, THH} n(C) = 3

(4) S = {10, 12, 13, 14, 15, 20, 21, 23, 24, 25, 30, 31, 32, 34, 35, 40, 41, 42, 43, 45, 50, 51, 52, 53, 54} n(S) = 25

A = {10, 12, 14, 20, 24, 30, 32, 34, 40, 42, 50, 52, 54} n(A) = 13

B = {12, 15, 21, 24, 30, 42, 45, 51, 54} n(B) = 9

C = {51, 52, 53, 54} n(C) = 4

(5) $S = \{M_1M_2, M_1M_3, M_1F_1, M_1F_2, M_2M_3, M_2F_1, M_2F_2, M_3F_1, M_3F_2, F_1F_2\}$ n(S) = 10

$A = \{M_1F_1, M_1F_2, M_2F_1, M_2F_2, M_3F_1, M_3F_2, F_1F_2\}$ n(A) = 7

$B = \{M_1F_1, M_1F_2, M_2F_1, M_2F_2, M_3F_1, M_3F_2\}$ n(B) = 6

$C = \{M_1M_2, M_1M_3, M_2M_3\}$ n(C) = 3

(6) S = {H1, H2, H3, H4, H5, H6 T1, T2, T3, T4, T5, T6} n(S) = 12

A = {H1, H3, H5} n(A) = 3

B = {H2, H4, H6, T2, T4, T6} n(B) = 6

C = { } n(C) = 0

అభ్యాస మాలిక 5.4

1. (1) $\frac{3}{4}$, (2) $\frac{1}{4}$, 2. (1) $\frac{1}{6}$ (2) 0, (3) $\frac{5}{12}$

3. (1) $\frac{7}{15}$ (2) $\frac{1}{5}$ 4. (1) $\frac{4}{5}$ (2) $\frac{1}{5}$ 5. (1) $\frac{1}{13}$ (2) $\frac{1}{4}$

సంకీర్ణ ప్రశ్న సంగ్రహము 5

1. (1) B (2) B (3) C (4) A (5) A, 2. వాసిమ్ యొక్క, 3. (1) $\frac{1}{11}$ (2) $\frac{6}{11}$, 4. $\frac{5}{26}$,

5. (1) $\frac{2}{9}$ (2) $\frac{1}{3}$ (3) $\frac{4}{9}$, 6. $\frac{1}{2}$, 7.(1) $\frac{1}{3}$ (2) $\frac{1}{6}$,

8.(1) $\frac{1}{2}$ (2) $\frac{1}{6}$, 9. 1/25, 10. (1) $\frac{1}{8}$ (2) $\frac{1}{2}$ (3) $\frac{3}{4}$ (4) 1

11. (1) $\frac{5}{6}$ (2) $\frac{1}{6}$ (3) 1 (4) 0, 12. (1) $\frac{1}{3}$ (2) $\frac{2}{3}$ (3) $\frac{2}{3}$, 13. $\frac{2}{11}$,

14. $\frac{13}{40}$

15. (1) $\frac{1}{4}$ (2) $\frac{3}{10}$ (3) $\frac{1}{5}$, 16. $\frac{11}{30}$

6. సాంఖ్యక శాస్త్రము

అభ్యాస మాలిక 6.1

(1) 4.36 గంటలు (2) 521.43 రూ॥లు (3) 2.85 లీటర్లు (4) 35310 రూపాయలు

(5) 985 రూ॥లు. లేదా 987.5 రూ॥లు. (6) 3070 రూ॥లు. లేదా 3066.67 రూ॥లు.

అభ్యాస మాలిక 6.2

(1) 11.4 గంటలు (2) 184.4 అనగా సమారు 184 మామిడిపండ్లు (3) 74.558 ≈75 వాహనాలు (4) 52.75 ≈ 53 దీపాలు

అభ్యాస మాలిక 6.3

1. 4.33 లీటర్లు **2.** 72 యూనిట్లు **3.** 9.94 లీటర్లు **4.** 12.31 సంవత్సరాలు

అభ్యాస మాలిక 6.5

1. (1) 60-70 (2) 20-30 మరియు 100-110 (3) 55 (4) 80 మరియు 90 (5) 15

అభ్యాస మాలిక 6.6

5. (1) 2000 (2) 1000 (3) 5%

6. (1) 12000 రూ॥లు (2) 3000 రూ॥లు (3) 2000 రూ॥లు (4) 1000 రూ॥లు.

సంకీర్ణ ప్రశ్న సంగ్రహము 6

1. (1) D (2) A (3) B (4) C (5) C (6) c

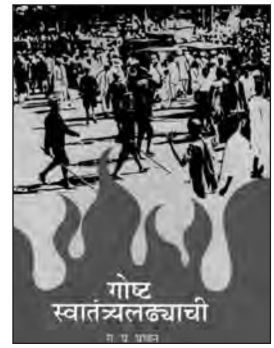
2. 52,500 రూ॥లు **3.** 65,400 రూ॥లు **4.** 4250 రూ॥లు

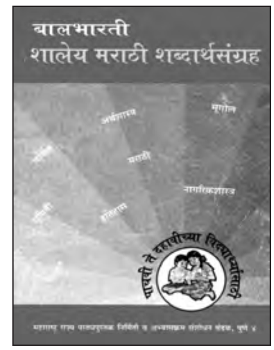
5. 72,400 రూ॥లు **6.** 223.13 కి.మీ. **7.** 32 రూ॥లు **8.** 397.06 గ్రాములు

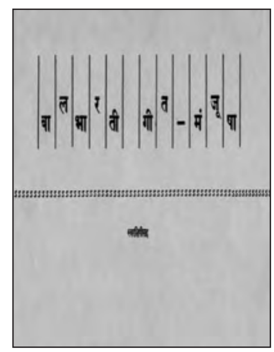
14. (1) కారు - 108°, టెంపో - 43°, బస్సు - 29°, రిక్షా - 36°, ద్విచక్రవాహనము - 144°

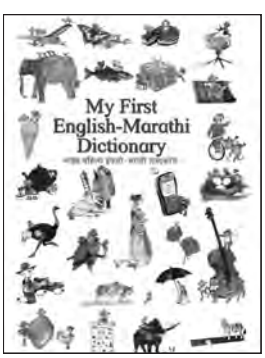
(2) వాహనాల మొత్తం సంఖ్య - 3000

16. (1) క్రికెట్ ఇష్టపడేవారు- 225, (2) ఫుట్‌బాల్ ఇష్టపడేవారు - 175 (3) ఇతర ఆటలను ఇష్టపడేవారు - 200.









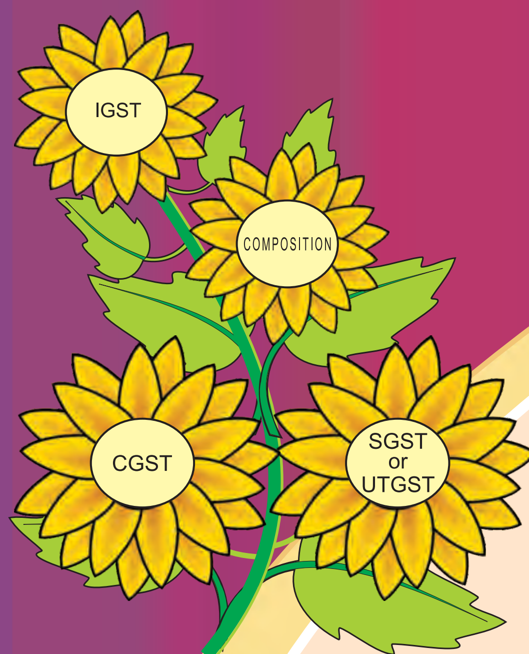
- पाठ्यपुस्तक मंडळाची वैशिष्ट्यपूर्ण पाठ्येत्तर प्रकाशने.
- नामवंत लेखक, कवी, विचारवंत यांच्या साहित्याचा समावेश.
- शालेय स्तरावर पूरक वाचनासाठी उपयुक्त.

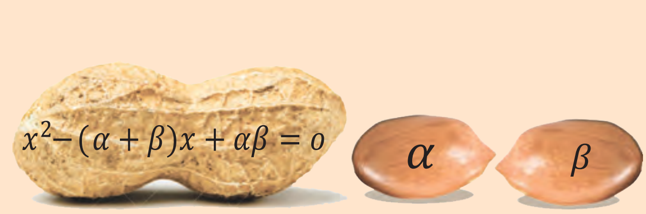
पुस्तक मागणीसाठी www.ebalbharati.in, www.balbharati.in संकेत स्थळावर भेट द्या.

साहित्य पाठ्यपुस्तक मंडळाच्या विभागीय भांडारांमध्ये विक्रीसाठी उपलब्ध आहे.

ebalbharati

विभागीय भांडारे संपर्क क्रमांक : पुणे - ☎ २५६५९४६५, कोल्हापूर- ☎ २४६८५७६, मुंबई (गोरेगाव) - ☎ २८७७१८४२, पनवेल - ☎ २७४६२६४६५, नाशिक - ☎ २३९१५११, औरंगाबाद - ☎ २३३२१७१, नागपूर - ☎ २५४७७१६/२५२३०७८, लातूर - ☎ २२०९३०, अमरावती - ☎ २५३०९६५





మహారాష్ట్ర రాష్ట్ర పాఠ్యపుస్తక నిర్మితి మరియు
పాఠ్యప్రణాళిక పరిశోధన సంస్థ,
పుణె–411 004.

तेलुगु गणित इ.१० वी भाग–१ ₹ 80.00