حساب

پاڱو-II

درجو ڏھون

ڀارتيہ سنوڌان

باب - چوٿون الف

بنيادي فرض

قلم 51A

بُنيادي فرض : ڀارت جي هرهڪ ناگرڪ جو فرض آهي تہ :

(الف) هوُ ڀارت جي سنوڌان کي مڃيندو، اُن جي قومي جهنڊي، قومي ترانيَ، آدرش ۽ سنستا جي عزت ڪندو.

(ب) آدرش ويچارن، جن آزاديءَ جي لڙائيءَ لاءِ همٿايو ۽ اُتساهہ ڏوڪيو، اُنهن جي سنڀال ۽ پوئواري ڪندو.

(ڀ) ڀارت جي ايڪتا، اکنڊتا ۽ سمپوريتا جي رکشا ڪندو.

(پ) ديش جي حفاظت ڪندو ۽ وقت پوڻ تي ديش سيوا ۾ ٽپي پوندو.

(ٻ) سڀني ماڻهن ۾ هڪ ايڪتا جي ڀاونا پئدا ڪندو، جيڪا ڌرم، ڀاشا، کيتروار جي ڀيدڀاءُ کان پري هوندي. اَهڙيون رسمون جيڪي عورت ذات خلاف هونديون، اُنهن جو بهشڪار ڪندو.

(ت) ڀارت جي جامع سنسڪرتي ۽ شاندار ورثي جي حفاظت ڪندو ۽ مُلهہ سمجهندو.

(ٿ) قدرتي ماحول جهڙوڪ جهنگل، ڍنڍون، نديون، جهنگلي-زندگي اِنهن جو بچاءُ ڪندو ۽ سڀني پراڻين لاءِ دردمندي رکندو.

(ٽ) وگيانڪ درشٽي، اِنساني مُلهہ، جاچ جوُچ ۽ سڌاري جي ڀاونا کي اَهميت ڏيندو.

(ث) عام ملڪيت کي سلامت رکندو ۽ هنسا کان پري رهندو.

(ٺ) شخصي ۽ گڏيل مشغولين جي سڀني کيترن ۾ اَڳتي وڌڻ جي لڳاتار ڪوشش ڪندو جئن ملڪ اَڳتي وڌندو رهي ۽ ڪاميابيءَ جي اوچاين کي ڇُهي.

(ڪ) ماءُ يا پيءُ يا پالڪ آهي تہ اُهو ضرور ڏسي تہ پنهنجي ٻار کي تعليم حاصل ڪرڻ جو موقعو ڏيندو. جنهن جي عمر ڇهن ۽ چوڏهن سالن وچ ۾ هجي.

سرڪاري فيصلو نمبر : اَيپاس ٢١١٦ (پر.ڪر ٤٣/١٦) ايس.ڊي ٤ تاريخ ٢٠١٦-٤-٢٥
موجب اسٽاپت ڪيل ڪو آرڊينيٽنگ ڪاميٽيءَ جي تاريخ ٢٩.١٢.١٧ جي ميٽنگ ۾ هن
درسي ڪتاب کي سنه ٢٠١٨-١٩ کان مختصر طور منظوري ڏني ويئي آهي.

حساب

پاڱو - II

درجو ڏهون

مهاراشٽر راجيہ پاٺيہ پُستڪ نرمتي واڀياسڪرم سنشوڌن منڊل، پُڻي -411004

پنهنجي سمارٽ فون ۾ DIKSHA APP ذريعي درسي ڪتاب جي پهرين
صفحي واري Q.R. Code ذريعي Digital درسي ڪتاب ۽ هرهڪ سبق ۾ آيل
Q.R. Code ذريعي ان سبق بابت پڙهڻ / پڙهائڻ لاءِ ڪارائتيون لنڪس
ملنديون.

چاپو پهريون : 2018
سڌاريل ڇاپو : 2022

© مهاراشٽر راڄيہ پاٺيہ پُستڪ نرمتي وَ اڀياس ڪرم سنشوڌن منڊل، پُڻي -۴۱۱۰۰۴.
مهاراشٽر راڄيہ پاٺيہ پُستڪ نرمتي وَ اڀياس ڪرم سنشوڌن منڊل، هن ڪتاب جا سڀ حق واسطا محفوظ ٿو رکي. منڊل جي ڊائريڪٽر جي لکيل اجازت کانسواءِ هن ڪتاب جو ڪوبہ ٽڪر ڇپائي نٿو سگهجي.

حساب وشيہ ماهر ڪاميٽي

ڊاڪٽر منگلا نارڙيڪر (اَڌيڪش)
ڊاڪٽر جئشري اَتري (ميمبر)
شري رماڪانت سرودي (ميمبر)
شري ونائڪ گوڙ بولي (ميمبر)
شريمتي پراجڪتا گوڪلي (ميمبر)
شري سنديپ پنڃ ڀائي (ميمبر)
شريمتي پوڃا ڃاڌو (ميمبر)
شريمتي اُجولا گوڙبولي (ميمبر -سيڪريٽري)

حساب وشيہ ڪاريہ گٽ ميمبر

شري اُميش ريڙي
شري سنيل شريواستو
شريمتي جيشري پُرندڙ
شريمتي تروبين پوپٽ
شري اَڪپا پريت
شري انساري عبدل حميد
شري سنديش سوناوڻي
شري وسنت شيواڙي
شري مليشام بيٿي
شري شرپياد ديشپانڊي
شري پرتاپ ڪاشد
شريمتي سواتي ڌرم اَڌڪاري
ڊاڪٽر پارتي شهستربدي
شري انسار شيخ
شري راما وهنياڙڪر
شري پرمود ڊومبري
شري پرڪاش جهينڊي

شري شريڪانت رتنپارکي
شري اروند ڪمار تواري
شري سريش داتي
شريمتي سوُرنا ديشپانڊي
شري پرڪاش ڪاپسي
شريمتي آريا ڀڙي
شري ملند ڀاڪري
شري گيانيشور ماشاڙڪر
شري لڪشمڻ داوڻڪر
شري سڌير پاٽيل
شري گڻيش ڪولتي
شريمتي روهڻي شِرکي
شري بنسي هوالي
شري رويندر کنداري
شري راجيندر چوڌري

مُکيہ سنيوجڪ : شريمتي اُجولا شريڪانت گوڙبولي
انچارج آفيسر حساب،
پاٺيہ پُستڪ منڊل پُڻي

ٻاهريون صفحو ۽ ڪمپيوٽر آريکن :
شري سنديپ ڪوڙي
ممبئي

سنيوجڪ : شريمتي ڪيتڪي جاني
انچارج آفيسر سنڌي.
سنيوجن : شريمتي گيتا گڻيش ٺاڪر

ڪاپي رائيٽر سنڌي

شري سچيتانند آڦڙي، مکيہ نرمتي اڌڪاري
شري سنجيہ ڪانبلي، نرمتي اڌڪاري
شري پرشانت هرڻي، نرمتي سهايڪ اڌڪاري
ترجمو ڪندڙ : شري اشوڪ ڪملداس مکتا
چڪاس ڪندڙ : شري وجيہ راجڪمار منگلاڻي.
ڪاغذ : 70 جي. ايس. ايم ڪريم وو.
ڇاپيندڙ : N/PB/2018-19/1,000
پرنٽنگ آرڊر :

ٽائيپسيٽنگ :
شريمتي شوڀا لالچنداڻي

پرڪاشڪ
وويڪ اُتم گوساوي، ڪنٽرولر
پاٺيہ پُستڪ نرمتي منڊل،
پرڀاديوي، ممبئي - ٢٥.

ڀارت جو سنوڌان

ديباچو

اسين ڀارت جا لوڪ، ڀارت کي هڪُ مڪمل طور خودمُختيار سماجوادي سَرو ڌرم ۽ سم-ڀاوَ وارو لوڪشاهي گڻراجيه بڻائڻ لاءِ گنڀيرتا سان فيصلو ڪري ۽ انهيءَ جي سڀني ناگرڪن کي :

سماجڪ، آرٿڪ ۽ راڄنيتڪ نياءُ، ويچار، اظهار، وشواس، شرڌا ۽ اُپاسنا جي آزادي؛ درجي ۽ موقعي جي سمانتا؛ خاطريءَ سان حاصل ڪرائڻ ۽ اُنهن سڀني ۾ شخصي سؤمان ۽ راشٽر جي ايڪتا توڙي اکنڊتا جي خاطري ڏيندڙ ڀائيچارو وڌائڻ لاءِ.

اسان جي هن سنوڌان سڀا ۾ اڄ تاريخ ڇويهين نومبر، ۱۹۴۹ جي ڏينهن، هن ذريعي هيءُ سنوڌان سويڪار ڪري، اُن کي قانون جي روپ ۾ پاڻ کي ارپڻ ڪريون ٿا.

راشٽر گيت

جَنَ گَڻَ مَنَ اَڌِينايَڪ جَيَہ هي،
ڀارَتَ ڀاڳِيہ وڌاتا
پَنجابَ، سِنڌ، گُجراتَ، مَراٺا،
دراوڙَ، اُتڪلَ، بَنگَ،
وِنڌيَہ، هِماچَلَ، يَمُنا، گَنگا،
اُڇَڇَلَ، جل ڌِ تَرَنگَ،
تَوَ شُڀَ نامي جاڳي،
تَوَ شُڀَ آشيس ماڳي،
ڳاهي تَوَ جَيَہ - ڳاٿا،
جَنَ گَڻَ - مَنگَلَ دايَڪ جَيَہ هي
ڀارت ڀاڳِيَہ وِڌاتا،
جَيَہ هي، جَيَہ هي، جَيَہ هي،
جَيَہ جَيَہ جَيَہ جَيَہ هي،

پرتِگيا

’ڀارت منهنجو ديش آهي. سڀ ڀارتواسي منهنجا ڀائر ۽ ڀينر آهن.

مونکي پنهنجي ديش لاءِ پيار آهي ۽ مونکي ان جي شاندار ۽ طرح طرح جي ورثي تي گوُرو آهي. مان سدائين ان جي لائق ٿيڻ جو جتن ڪندو رهندس.

مان پنهنجن ميُن مائٽن، اُستادن ۽ سڀني بزرگن جو سنمان ڪندس ۽ هر ڪنهن سان فضيلت ڀريو ورتاءُ ڪندس .

مان پرتگيا ٿو ڪريان تہ مان پنهنجي ديش ۽ ديشواسين سان سچو ٿي رهندس. انهن جي ڪلياڻ ۽ آسودگيءَ ۾ ئي منهنجو سک سمايل آهي.‘

پرستاونا

شاگرد دوستو،

درجي ڏهين ۾ توهان سڀني جو سواگت!

حساب ڀاڱو -I ۽ حساب ڀاڱو -II اِنهن ڪتابن جو توهان کي اَڀياس ڪرڻو آهي.

حساب ڀاڱو -II ۾ توهان جاميٽري، علم مثلث، مساوي جاميٽري ۽ علم پئماش مکيه ڪيترن بابت پڙهندا. درجي نائين ۾ اِنهن يونٽن بابت سڃاڻپ ڏنل آهي هاڻي وڌيڪ اَڀياس توهان ڪندا. اِنهن ڪيترن جو وهنوار ۾ اِستعمال مثالن وسيلي سمجهايل آهي. جتي نوان حصا آهن يا نوان سوتر آهن، اُنهن جي چٽيءَ طرح سمجهاڻي ڏنل آهي. هرهڪ مسودي ۾ حل ڪيل مثال، اَڀياس لاءِ مثال ڏنل آهن. اِن کان سواءِ قابل شاگردن لاءِ خاص تارو - شڪل ڏنل ڪجهه حساب ڏنل آهن. اُهي شاگرد جيڪي ڏهين درجي کان پوءِ شايد حساب وشيه نه کڻڻ اُنهن لاءِ پڻ حساب جي بنيادي ويچار ڌارائن، وهنواري مثال ڏنا ويا آهن. ٻين ڪيترن ۾ ڪم ڪندڙ اِهي شاگرد سڪيل حساب ڪم آڻي سگهن، اِن جو به ڪتاب ۾ جوڳو ڌيان ڏنل آهي. ’’وڌيڪ ڄاڻ لاءِ خاص مسودو اڳتي هلي اُنهن ٻارن لاءِ ڪارگر ٿيندو جيڪي اوچي تعليم ۾ ماهرت حاصل ڪرڻ چاهين ٿا. اِن ڪري اَهڙن ٻارن کي اِها ڄاڻ ضرور پڙهڻ گهرجي. ائپ جي ماڌيم وسيلي ڪيو. آر.ڪوڊ ذريعي هرهڪ سبق جي وڌيڪ ڄاڻ توهانکي ملندي. اُن جو اڀياس توهان لاءِ ضرور ڪمائتو ٿيندو.

ڏهين درجي جو اِمتحان اَهميت وارو مڃيو ويندو آهي. اِها حقيقت آهي پر بنا تناوَ جي توهان چڱيءَ طرح اَڀياس ڪري جس توهان حاصل ڪندا. اِن لاءِ توهان کي شُڀ ڪامنائون.

(ڊا. سُنيل مگر)

سنچالڪ

مهاراشٽر راجيه پاٺيه پُستڪ

نرمتي و اڀياسڪرم سنشوڌن منڊل پڻي.

پڻي

١٨ مارچ ٢٠١٨، گُڙي پاڙوا

ڀارتيه سوُريه تاريخ : ٢٧ ڦاڳُڻ ١٩٣٩

درجي ڏهون حساب ڀاڱو - II اَڀياس ڪرڻ بعد شاگرد هيٺ ڏنل لياقتون حاصل ڪندا

ڪيٽر	يونٽ	لياقت
1. جاميٽري	1.1 هڪ جهڙائي 1.2 گول	• هڪ جهڙن ٽڪنڊن جون خاصيتون، پائٿاگورس جو سڌيان، مثال • هڪ جهڙن ٽڪنڊن جي جوڙجڪ • گول - قطر، نيم قطر، ڇُهٽي جون خاصيتون • ڇُهٽي جوڙجڪ
2. مساوي جاميٽري	2.1 مساوي جاميٽري	• ٻن ٽٻڪن وچ ۾ مفاصلو لهڻ • ورهائيندڙ ٽٻڪي جا مساوا لهڻ • ليڪ جو سلوپ لهڻ
3. علم پئماش	3.1 متاچڙو ايراضي ۽ مقدار	• گول - ڪمان جي ڊيگهه لهڻ • گول سيڪٽر ۽ گول -ٽڪر جي ايراضي لهڻ • ڏنل جاميٽري شڪلين جي ايراضي ۽ مقدار لهڻ
4. علم مثلث	4.1 علم مثلث	• ٽڪنڊي جا بنيادي ريشا لهڻ مثال حل ڪرڻ • وڻ، عمارت، ندي وغيره جي اوچائي، ڊيگهه لهڻ

ماسترن لاءِ سوچنا

پهريان سڄي ڪتاب جو اَڀياس ڪري سمجهڻ علحدن يونٽن جي سمجهاڻي ڏيڻ ۽ سوترن جي چڪاس ڪرڻ مکيه مشغلين ڪرائڻ ۾ مدد ڪرڻ عملي روپ ۾ ملهه ماپڻ ڪرڻو آهي. اُن لاءِ مشغولي ڪرائڻي آهي شاگردن کي پنهنجن ويچارن ظاهر ڪرڻ لاءِ همٿايو . ڪو شاگرد الڳ نموني حساب جو صحيح حل ڪري ته هُن کي شاباسي ڏيو.

جاميٽريءَ جي سڌيانن کي ڌيان ۾ رکي اُنهن جو اُپ يوجن ڪري مثال حل ڪرڻ جي قابليت وڌائڻ لاءِ ڪتاب ۾ ڏنل مشغولين کان سواءِ ٻيون مشغوليون تيار ڪريو.

عملي ڪم (لسٽ)

(1) پاڻي تي هڪ ٽڪنڊو ڪپي وٺو ميز تي ميڻ بتي يا هڪ ننڍڙو ڏيئو رکو. پٺ ۾ ميڻ بتي / ڏيئي وچم ٽڪنڊو رکو. اِن ٽڪنڊي جو پاڇو جاچيو. پاڇو ۽ اصلي ٽڪنڊو، اِهي هڪ جهڙا آهن اِهو جاچيو (اَصلي ٽڪنڊو ۽ اُن جو پاڇو پاڻ ۾ هڪ جهڙا آهن، اُن وقت ڇا ڌيان ۾ رکڻ گهرجي ؟)

(2) هڪ سائي ماپ وارا ٻه گوني ڪنڊ ٽڪنڊا ڪپيو. ٽپڪن کي C،B،A نالا ڏيو. هڪ ٽڪنڊي جي هٽپاٽينيوز تي عمود ڪيو. اُن عمودي چيڙي کي D نالو ڏيو. هڪ عمود تي ڪپي ٻه ٽڪنڊا ملن ٿا. هاڻي ٺيئي ٽڪنڊا هڪ جهڙا آهن. اِها چڪاس ڪريو.

(3) هڪ گول ڪيو. اَندريون پاڱو، ٻاهريون پاڱو ۽ گول تي هڪ هڪ ٽپڪو ڪٺو اِنهن ٽپڪن مان گول ڏانهن گهٽيون ڇهٽيون نڪري سگهن ٿيون. اِها يادداشت تيار ڪريو.

(4) ’ٻن ٽپڪن مان بيشمار گول ڪيدي سگهجن ٿا‘ اِهو ڏيکارڻ لاءِ ٻن ٽپڪن مان لنگهندڙ گهٽ ۾ گهٽ 5 گول ڪيو.

(5) گول جو خاصيتون جاچڻ لاءِ جيئو بورڊ ڪٺو. ربڙ بئنڊ ڪم آڻي ڪوبه هڪ سڌيان جيئو بورڊ تي ڪيو (شڪل (i) گول اَندر سمايل ڪنڊ (ii) ڇهٽي ڪنڊ سڌيان (iii) مخالف ڪندن جو سڌيان

(6) هڪ گول ۾ هڪ ڪنڊ ڪٽي جدا جدا اندر سمايل ڪمانون تيار ڪريو.

(7) هڪ ڪنڊ جا چار برابر حصا ڪريو. ڪمپاس ۽ فوٽي اِستعمال ڪريو.

(8) هڪ مخروط گهگهي ڪٺو اُن جي اوچائي ۽ نيم قطر ماپيو. اُن ۾ ڪيترو پاڻي ماپندو اِهو سوتر وسيلي لهو. اِهو پاڻيءَ سان پري، ماپ - اوزار وسيلي ماپيو. اِنهن نتيجن جي پيٽ ڪريو.

(9) هڪ فرسُم شڪل جو پيالو ڪٺو. اُن جا ٻه نيم قطر ماپيو اوچائي ماپيو اُن ۾ ڪيترو پاڻي ماپي ٿو اِهو سوتر وسيلي لهو. ساڳئي وقت ماپ اوزار وسيلي ٻه مقدار لهو. ٻنهي نتيجن جي پيٽ ڪريو.

(10) ٿلهي پاڻي تي ٻه هڪ جهڙا ٽڪنڊا ڪپي ڪٺو. اُنهن جي ايراضين جو ريشو (i) اُنهن جي گرد ماپن جو ريشو يا (ii) اُنهن جي مڏيانن جو ريشو برابر آهي، اِهو عملي روپ ۾ ڪريو.

فهرست

باب	صفحو
.1 هڪجهڙائي	1 کان 29
.2 پائٿاگورس جو سڌيان	30 کان 46
.3 گول	47 کان 90
.4 جاميٽري جا جوڙجڪ	91 کان 99
.5 مساوي جاميٽري	100 کان 123
.6 علم مثلث	124 کان 139
.7 علم پئماش	140 کان 163
• جواب	164 کان 168

1 هڪ جهڙائي

اچو تہ سکي وٺون.

- ٻن ٽڪنڊن جي ايراضين جو ريشو
- بنياد تناسبيت سڏيان
- بنيادي تناسبت سڏيان جو اُبتڙ
- ٽڪنڊي جي ڪنڊ جي اَڌڪ جي خاصيت
- ٽن پوروچوٽ ليڪن وسيلي ٺهيل اَنترڇيدن جي خاصيت
- ٽڪنڊن جي هڪ جهڙائي لاءِ آزمائشون
- هڪ جهڙن ٽڪنڊن جي ايراضين جو ريشو.

ذرا ياد ڪريو.

اَسان ريشو ۽ پرووپورشن اِنهن بابت اَڳياس ڪيو آهي اِن ويچار ڌارا ۾ اَسان واڌو حقيقي عددن بابت سوچيندا آهيون. اَسان کي ڄاڻ آهي تہ ليڪ - ٽڪر جي ڊيگهہ ۽ ڪنهن شڪل جي ايراضي، اِهي واڌو حقيقي عدد هوندا آهن. اَسان کي ٽڪنڊي جي ايراضي لهڻ جو عام سوتر معلوم آهي.

اوچائي x پايو $\frac{1}{2}$ = ٽڪنڊي جي ايراضي

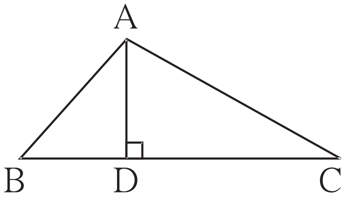
ڄاڻي وٺون .

ٻن ٽڪنڊن جي ايراضين جو ريشو (Ratio of areas of two triangles)

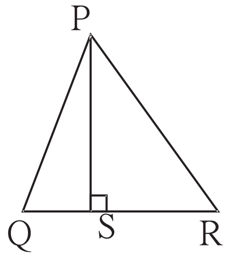
کهڙا بہ بہ ٽڪنڊا کڻي، اُنهن جي ايراضين جو ريشو لهنداسين.

مثال $\triangle ABC$ ۾ BC پايو آهي ۽ AD اوچائي آهي

$\triangle PQR$ ۾ QR پايو آهي ۽ PS اوچائي آهي



شڪل 1.1



شڪل 1.2

$$\frac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta PQR)} = \frac{\frac{1}{2} \times BC \times AD}{\frac{1}{2} \times QR \times PS}$$

$$\therefore \quad \frac{A(\Delta\, ABC)}{A(\Delta\, PQR)} = \frac{BC \times AD}{QR \times PS}$$

تنهن ڪري ٻن ٽڪنڊن جي ايراضين جو ريشو، سندن پاين ۽ نسبتي اوچاين جي ضرب اُپت جي ريشو جي برابر آهي.

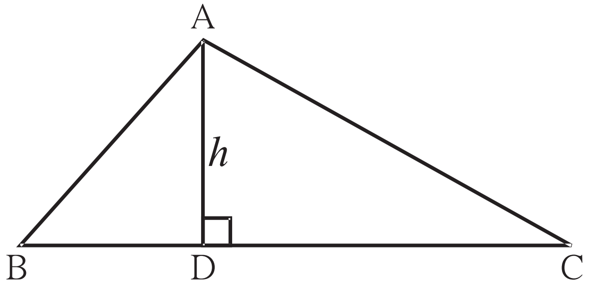
هڪ ٽڪنڊي جو پايو b_1 ۽ اوچائي h_1 آهي ۽ ٻئي ٽڪنڊي جو پايو b_2 ۽ اوچائي h_2 آهي ته

اُنهن جي ايراضين جو ريشو $= \dfrac{b_1 \times h_1}{b_2 \times h_2}$

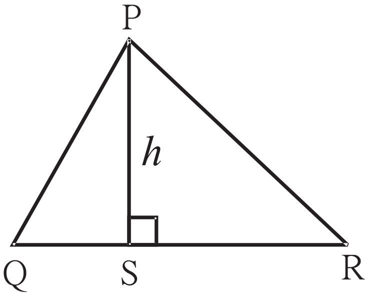
انهن ٻن ٽڪنڊن بابت، ڪي شرط ڪٿيا ته

شرط 1 : ٻنهي ٽڪنڊن جون اوچايون برابر هجن ته

:



شڪل 1.3



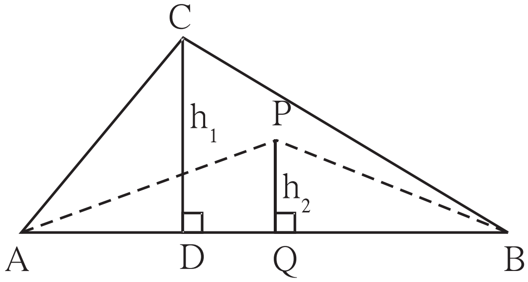
شڪل 1.4

$$\frac{A(\Delta\, ABC)}{A(\Delta\, PQR)} = \frac{BC \times h}{QR \times h} = \frac{BC}{QR}$$

$$\therefore \frac{A(\Delta\, ABC)}{A(\Delta\, PQR)} = \frac{b_1}{b_2}$$

خاصيت : برابر اوچاين وارن ٻن ٽڪنڊن جي ايراضين جو ريشو، سندن نسبتي پاين جي ريشو جي برابر آهي

شرط 2 : ٻنهي ٽڪنڊن جا پايا برابر هجن ته



شڪل 1.5

$$\frac{A(\Delta\, ABC)}{A(\Delta\, APB)} = \frac{AB \times h_1}{AB \times h_2}$$

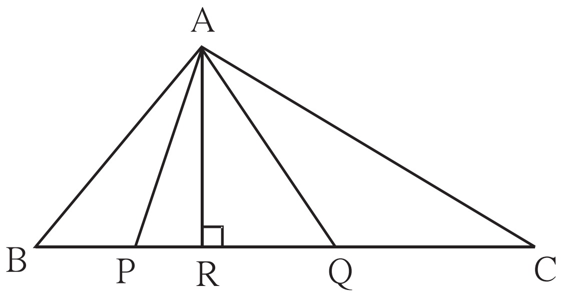
$$\therefore \frac{A(\Delta\, ABC)}{A(\Delta\, APB)} = \frac{h_1}{h_2}$$

خاصيت : برابر پايي وارن ٽڪنڊن جي ايراضين جو ريشو، سندس نسبتي اوچاين جي ريشو جي برابر آهي.

مشغولي :

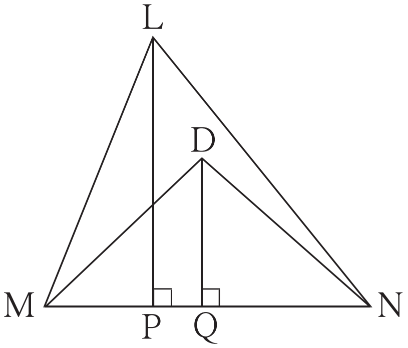
هيٺ ڏنل چوڪندن ۾ مناسب جواب ڀريو.

(i)



شڪل 1.6

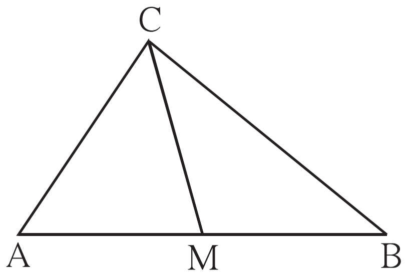
(ii)



شڪل 1.7

$$\frac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta APQ)} = \frac{\square \times \square}{\square \times \square} = \frac{\square}{\square}$$

$$\frac{A(\Delta LMN)}{A(\Delta DMN)} = \frac{\square \times \square}{\square \times \square} = \frac{\square}{\square}$$



شڪل 1.8

(iii) AB ٽڪر جو M مڌيہ ٽپڪو آهي.

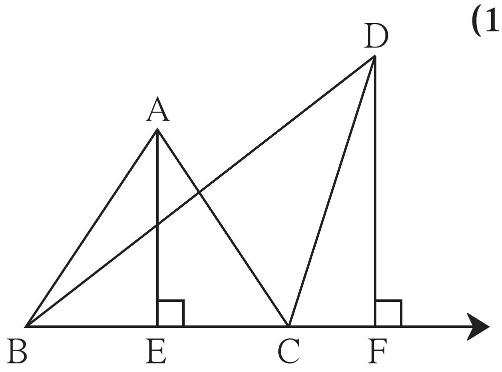
ٽڪر CM، اِهو ΔABC جو مڌيان آهي.

$$\therefore \frac{A(\Delta AMC)}{A(\Delta BMC)} = \frac{\square}{\square}$$

ڪارڻ لکو $= \frac{\square}{\square} = \square$

حل ڪيل مثال

مثال (1)



شڪل 1.9

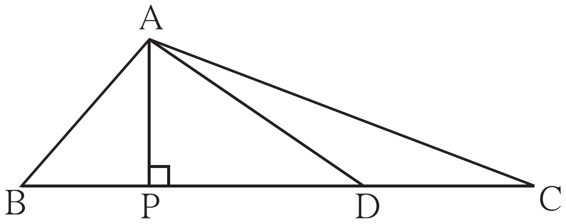
پرواري شڪل ۾ ٽڪر AE ⊥BC،
ليڪ ⊥BC ٽڪر DF
AE=4 , DF=6
تہ $\frac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta DBC)}$ لهو

حل : $\frac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta DBC)} = \frac{AE}{DF}$ .... برابر پاين وارن ٽڪندن جي ايراضين جو ريشو)

$$= \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

مثال (2) ΔABC جي پاسي BC تي ٽپڪو D آهي تہ ، DC = 6، BC = 15.

$A(\Delta ABD): A(\Delta ABD)$ ۽ $A(\Delta ADC) : A(\Delta ABC)$ لهو .



شڪل 1.10

حل : ΔABD اِنهن ٽنهي ٽڪنڊن جو عام نوڪي A ٽپڪو آهي ۽ اُنهن جا پايا هڪ ئي ليڪ تي آهن مطلب ٽنهي ٽڪنڊن جي اوچائي برابر آهي.

$BC = 15, DC = 6 \quad \therefore \; BD = BC - DC = 15 - 6 = 9$

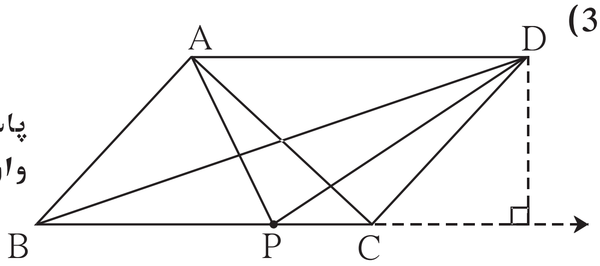
$$\frac{BD}{BC} = \frac{A(\Delta ABD)}{A(\Delta ABC)}$$ .... برابر اوچاين وارن ٽڪنڊن جي ايراضي

$$= \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$$

$$\frac{BD}{DC} = \frac{A(\Delta ABD)}{A(\Delta ADC)}$$ .... برابر اوچاين وارن ٽڪنڊن جي ايراضي

$$= \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$$

مثال(3)



شڪل 1.11

□ABCD هڪ پوروچوٽ پاسو چوڪنڊو آهي پاسي BC مٿان P هڪ ٽپڪو آهي تہ برابر ايراضين وارن ٽڪنڊن جون ٻہ جوڙيون ڳولهيو.

حل : □ ABCD هڪ پوروچوٽ پاسو چوڪنڊو آهي.

$\therefore \; AD \parallel BC$ ۽ $AB \parallel DC$

ΔABC ۽ ΔBDC سوچيو

اِهي ٻہ ٽڪنڊا ٻن پوروچوٽ ليڪن وچڙ نڪتل آهن مطلب پوروچوٽ ليڪن وچڙ مفاصلو اِنهن ٻن ٽڪنڊن جي اوچائي آهي.

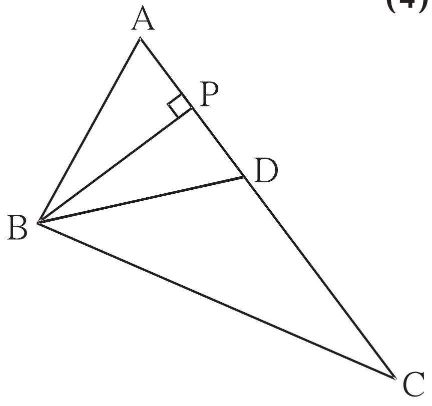
ΔABC ۽ ΔBDC ڙ پاسو BC، عام پايو ۽ برابر اوچائي آهي.

يعني $A(\Delta ABC) = A(\Delta BDC)$

پاسو AB عام پايو آهي ۽ برابر اوچائي آهي .

$\therefore \; A(\Delta ABC) = A(\Delta ABD)$

مثال (4)



شڪل 1.12

پر واري شڪل ۾ $\triangle ABC$ پاسي AC تي D هڪ ٽپڪو آهي.

$AC = 16, DC = 9$،

$BP \perp AC$، هيٺ ڏنل ريشا لهو.

i) $\frac{A(\Delta ABD)}{A(\Delta ABC)}$ ii) $\frac{A(\Delta BDC)}{A(\Delta ABC)}$

iii) $\frac{A(\Delta ABD)}{A(\Delta BDC)}$

مثال : $\triangle ABC$ ۾ پاسي AC مٿان P ۽ D ٽپڪا آهن. $\triangle ABD$، $\triangle BDC$، $\triangle ABC$، $\triangle APB$ اِنهن ۾ B اهو عام نوڪي ٽپڪو آهي. اُنهن جا پايا AD، DC، AC، AP هڪ ليڪ تي آهن اِنهن سڀني ٽڪنڊن جي اوچائي برابر آهي. اِنڪري اِنهن ٽڪنڊن جي ايراضي سندن پاين جو ريشو آهي.

$AC = 16, DC = 9$

$\therefore AD = 16 - 9 = 7$

$\therefore \frac{A(\Delta ABD)}{A(\Delta ABC)} = \frac{AD}{AC} = \frac{7}{16}$ .... (برابر اوچائيءَ وارا ٽڪنڊا)

$\frac{A(\Delta BDC)}{A(\Delta ABC)} = \frac{DC}{AC} = \frac{9}{16}$ .... (برابر اوچائيءَ وارا ٽڪنڊا)

$\frac{A(\Delta ABD)}{A(\Delta BDC)} = \frac{AD}{DC} = \frac{7}{9}$ .... (برابر اوچائيءَ وارا ٽڪنڊا)

اِهو ڌيان ۾ رکو.

- ٻن ٽڪنڊن جي ايراضين جو ريشو، سندن پاين ۽ نسبتي اوچاين جي ضرب اُپت جي ريشو جي برابر آهي.
- برابر اوچائي وارن ٽڪنڊن جي ايراضين جو ريشو، اُنهن جي نسبتي پاين جي ريشو جي برابر آهي.
- برابر پايي وارن ٽڪنڊن جي ايراضين جو ريشو، اُنهن جي نسبتي اوچاين جي ريشو جي برابر آهي.

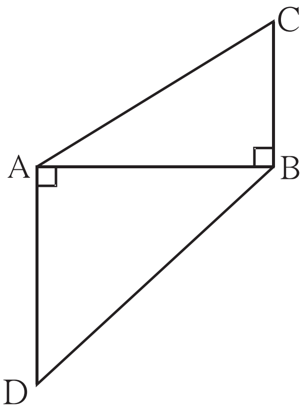
اَڀياس 1.1

1. هڪ ٽڪنڊي جو پايو 9 ۽ اوچائي 5 آهي ٻئي ٽڪنڊي جو پايو 10 ۽ اوچائي 6 آهي ته اِنهن ٽڪنڊن جي ايراضين جو ريشو لهو.

2. ڏنل شڪل 1.13 ۾ $BC \perp AB$،

$AD \perp AB, BC = 4, AD = 8$ ته

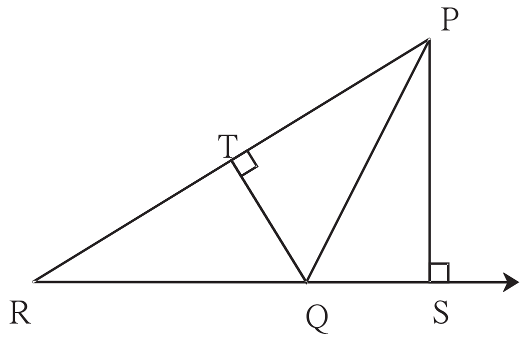
$\frac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta ADB)}$ لهو



شڪل 1.13

3. ڀر واري شڪل 1.14 ۾ تڪر $\perp RQ$ تڪر PS آهي تڪر $\perp PR$ تڪر QT جيڪڏهن

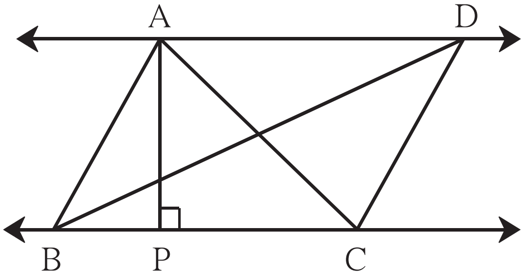
$RQ = 6$، $PS = 6$، $PR = 12$ ته QT لهو .



شڪل 1.14

4. ڀر واري شڪل ۾ $AP \perp BC$ ۽ $AD \parallel BC$ ۽

ته $A(\Delta ABC) : A(\Delta BCD)$ لهو.



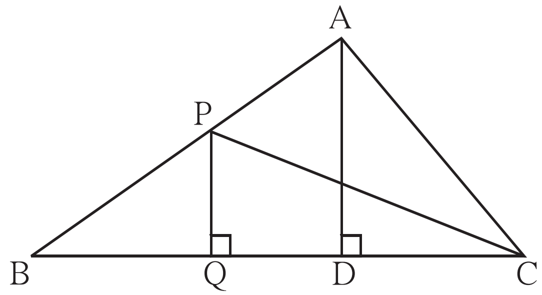
شڪل 1.15

5. ڀر واري شڪل ۾ $PQ \perp BC$ ۽ $AD \perp BC$

ته هيٺ ڏنل ريشا لهو.

i) $\frac{A(\Delta PQB)}{A(\Delta PBC)}$ ii) $\frac{A(\Delta PBC)}{A(\Delta ABC)}$

iii) $\frac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta ADC)}$ iv) $\frac{A(\Delta ADC)}{A(\Delta PQC)}$

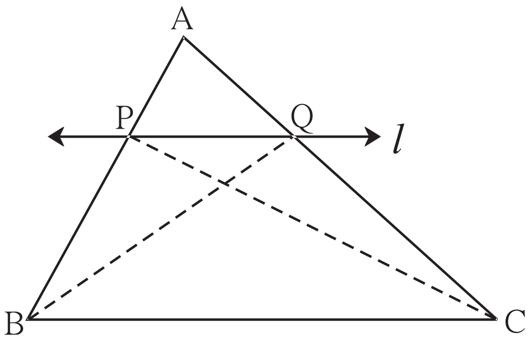


شڪل 1.16

چاڪي وٺون.

بنيادي تناسبيت سڌيان (Basic Proportionality Theorem)

سڌيان : جيڪڏهن ڪنهن ٽڪنڊي جي هڪ پاسي جي پورچوٽ ليڪ ٻين ٻن پاسن کي جُدا جُدا ٽپڪن وٽ ڪپي ٿي ته اُها ليڪ اُنهن پاسن کي ساڳئي ريشي ۾ ورهائي ٿي.



شڪل 1.17

ڏنل : ΔABC ۾ ٽڪر $l \parallel BC$ ليڪ
۽ ليڪ l اِها پاسي AB کي P
تي ۽ پاسي AC کي Q وٽ ڪپي ٿي.

ثابت ڪرڻ : $\frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QC}$

جوڙجڪ : ٽڪر PC ۽ ٽڪر BQ ڪيدو.

ثابتي : $\triangle APQ$ ۽ $\triangle PQB$ اِهي ساڳيءَ اوچائيءَ وارا ٽڪنڊا آهن.

$$\therefore \frac{A(\Delta APQ)}{A(\Delta PQB)} = \frac{AP}{PB}$$ .... ايراضيون پاين جي ريشي ۾ ..... (I)

ساڳئي نموني $$\frac{A(\Delta APQ)}{A(\Delta PQC)} = \frac{AQ}{QC}$$ .... ايراضيون پاين جي ريشي ۾ ..... (II)

$\triangle PQB$ ۽ $\triangle PQC$ ۾ ٽڪر PQ عام پايو آهي ۽ ٽڪر $\parallel BC$ ٽڪر PQ مطلب
$\triangle PQB$ ۽ $\triangle PQC$ اِنهن جي اوچائي برابر آهي.

$$\therefore A(\Delta PQB) = A(\Delta PQC) \quad .... (III)$$

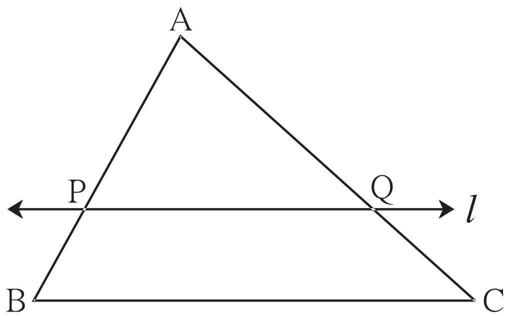
$$\therefore \frac{A(\Delta APQ)}{A(\Delta PQB)} = \frac{A(\Delta APQ)}{A(\Delta PQC)}$$ .... [(I)، (II) ۽ (III)]

$$\therefore \frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QC}$$ .... [(I) ۽ (II)]

بنيادي تناسبيت سڌيان جو اُبتڙ (converse of B.P.T.)

سڌيان : جيڪڏهن ڪا ليڪ ٽڪنڊي جي ڪن ٻه ٻن پاسن کي ساڳئي ريشو ۾ ورهائي ٿي ته پوءِ اُها ليڪ ٽئين پاسي جي پوروچوٽ هوندي آهي.

شڪل 1.18 ۾ ليڪ l اِها $\triangle ABC$ جي پاسن AB ۽ AC کي
نمبر وار P ۽ Q ٽپڪن تي ڪپي ٿي ۽
$\frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QC}$
ته ليڪ $l \parallel BC$ ٽڪر



شڪل 1.18

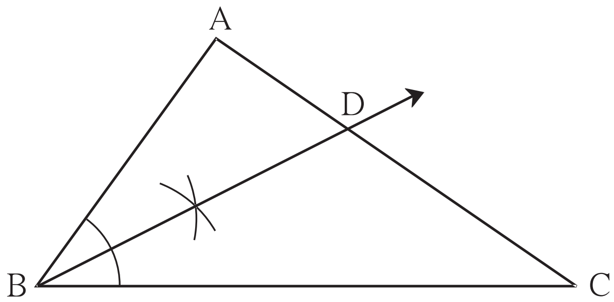
اِن سڌيان جي ثابتي اڻ سڌي طريقي ڏجي ٿي.

مشغولي :

- $\triangle ABC$ کھڙو بہ ٽڪنڊو ڪيو.
- ٽڪنڊي جي $\angle B$ جو اَڌڪ ڪيو اِهو AC تي جتي ڪٽي، اُن کي D نالو ڏيو.
- پاسا ماپي لکو

AB = ☐ س· م BC = ☐ س· م

AD = ☐ س· م DC = ☐ س· م



شڪل 1.19

- $\frac{AD}{DC}$ ۽ $\frac{AB}{BC}$ اِهي ريشا لهو.
- اِهي ٻئي ريشا لڳ ڀڳ ساڳيا آهن. اِهو آزمودو وٺو.
- اِن ٽڪنڊي جي ٻين ڪنڊن جا اَڌڪ ڪيئي، مٿئين نموني ريشا لهو اِهي ريشا برابر آهن اِهو آزمودو وٺو.

جاڻي وٺون

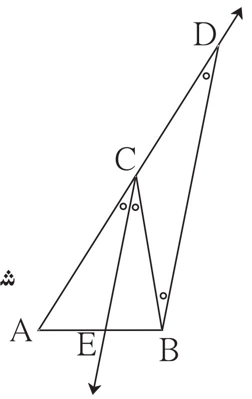
ٽڪنڊي جي ڪنڊ - اَڌڪ جو سڌيان (Theorem of an angle bisector of a triangle)

سڌيان : ٽڪنڊي ۾ ڪنڊ جو اَڌڪ، اُن ڪنڊ جي مخالف پاسي کي ٻين پاسن جي برابر ريشو ۾ ورهائي ٿو.

ڏنل : $\triangle ABC$ ۾ $\angle C$ جو اَڌڪ ٽڪر AB کي E وٽ ڪٽي ٿو.

ثابت ڪرڻ : $\frac{AE}{EB} = \frac{CA}{CB}$

جوڙجڪ : ٽپڪي B وٽان ڪرڻي CE جي پوروچوت ليڪ ڪيو جيڪا وڌايل AC کي ٽپڪي B وٽ ڪٽي ٿي.



شڪل 1.20

ثابتي : ڪرڻو CE $\parallel$ ڪرڻو BD ۽ ليڪ AD ڇيدڻي آهي.

$\therefore \ \angle ACE \cong \angle CDB$ .... (نسبتي ڪنڊون).(I)

هاڻي BCڇيدڻي ڪٽي

$\angle ECB \cong \angle CBD$ .... (متبدل ڪنڊون)...(II)

پر $\angle ACE \cong \angle ECB$ .... (ڏنل)...(III)

$\therefore \ \angle CBD \cong \angle CDB$ .... [(I)، (II) ۽ (III)]

Δ CBD ۾، تڪر CB $\cong$ CD پاسو .... (ٿهڪندڙ ڪندن جي مخالف پاسا)

$\therefore$ CB = CD ...(IV)

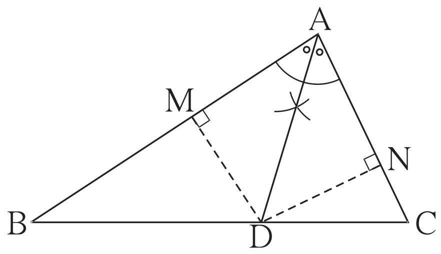
هاڻي، Δ ABD ۾ ، تڪر EC $\parallel$ BD پاسو .... (جوڙجڪ)

$\therefore \ \dfrac{AC}{CD} = \dfrac{AE}{EB}$ بنيادي تناسبيت سڏيان .... (V)

$\therefore \ \dfrac{AC}{CB} = \dfrac{AE}{EB}$ .... [(IV) ۽ (V) مان]

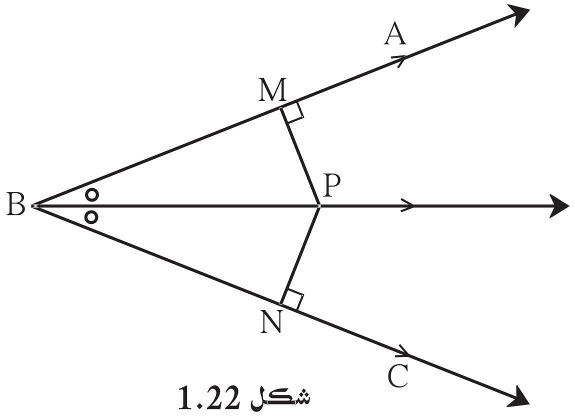
متئين سڏيان جي ثابتي توهان ٻئي طريقي لکو.

اُن لاءِ شڪل 1.21 موجب DM ⊥AB ۽ DN ⊥AC ڪيو.



شڪل 1.21

(1) برابر اوچائي وارن ٽڪنڊن جي ايراضين جو ريشو.



شڪل 1.22

(2) اُنهن جي نسبتي پاين جو ريشو برابر ٿيندو آهي.

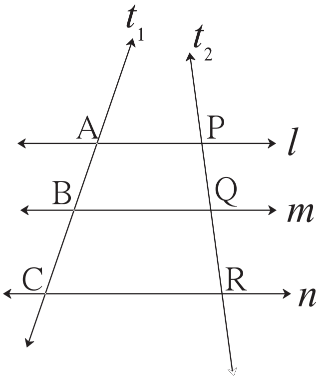
اِهو ڪم آڻيو.

ٽڪنڊي جي اَڌڪ جي سڌيان جو اُبتڙ (Converse of angle bisector of triangle)

$\triangle ABC$ جي پاسي BCمٿان ٽپڪو D اَهڙي نموني آهي جو $\frac{AB}{AC}=\frac{BD}{DC}$،
تہ ڪرٽو AD اهو $\angle BAC$ جو اَڌڪ آهي.

ٽن پوروچوٽ ليڪن وسيلي ٺهيل اَنترڇيدن جي خاصيت (Property of three parallel lines and their intercepts)

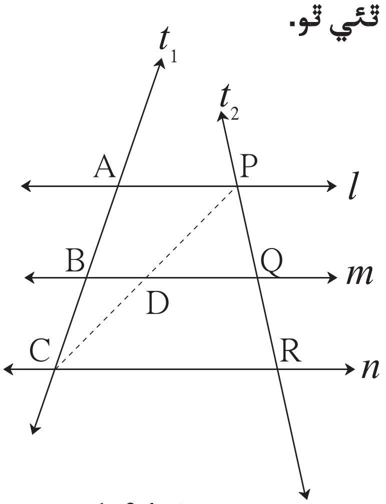
مشغولي :



شڪل 1.23

- ٽي پوروچوٽ ليڪون ڪڍو.
- اُنهن کي l، m، n نالا ڏيو.
- t_1 ۽ t_2 ٻہ ڇيدڪيون ڪڍو.
- t_1 ڇيدڪي ۾ AB ۽ BC اَنتر ڇيد آهن.
- t_2 ڇيدڪي ۾ PQ ۽ QR اَنتر ڇيد آهن.
- $\frac{AB}{BC}$ ۽ $\frac{PQ}{QR}$ اهي ريشا ڪڍو اُهي لڳ ڀڳ ساڳيا آهن اِهو آزمودو ڪريو.

خاصيت : ٽن پوروچوٽ ليڪن سبب هڪ ڇيدڪيءَ تي ٺهيل اَنترڇيدن جو ريشو، ساڳين ٽن پوروچوٽ ليڪن سبب ٻي ڇيدڪيءَ تي ٺهيل انترڇيدن جي برابر ٿئي ٿو.



شڪل 1.24

ڏنل : ليڪ l || ليڪ m || ليڪ n

t_1 ۽ t_2 ٻہ ڇيدڪيون آهن.

t_1 اِنهن ليڪن کي نمبروار A,B,C وٽ ڪپي ٿي. t_2 ڇيدڪي اِنهن ليڪن کي نمبروار P,Q,R وٽ ڪپي ٿي.

ثابت ڪرڻ : $\frac{AB}{BC}=\frac{PQ}{QR}$

ثابتي : ٺڪر PC ڪڍو اِهو ليڪ m ٽپڪي D وٽ ڪپي ٿو.

$\triangle ACP$ ۾ $BD \parallel AP$

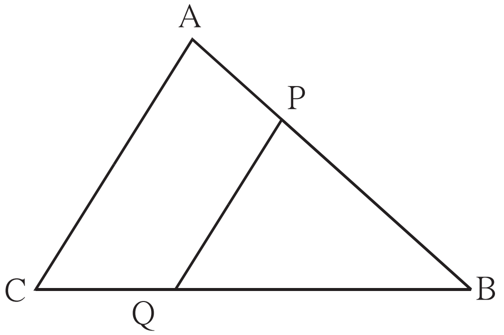
$\therefore \frac{AB}{BC}=\frac{PD}{DC}$ . . . . . (I) (بنيادي تناسيت سڌيان)

ΔCPR ۾ $DQ \parallel CR$

$\therefore \frac{PD}{DC}=\frac{PQ}{QR}$ . . . . . (II) (بنيادي تناسيت سڌيان)

مان (I) ۽ (II) $\therefore \frac{AB}{BC}=\frac{PD}{DC}=\frac{PQ}{QR}$ . . . . . .

$\therefore \frac{AB}{BC}=\frac{PQ}{QR}$



شڪل 1.25

(1) ABC Δ ۾جيڪڏهن B-P-A ،B-Q-C

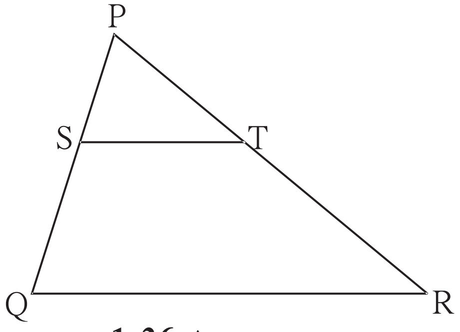
تہ PQ || ACتہ

۽ $\frac{BP}{PA} = \frac{BQ}{QC}$

(2) PQR Δ ۾ جيڪڏهن P-T-R ;P-S-Q

۽ $\frac{PS}{SQ} = \frac{PT}{TR}$

تہ ST || تہ .QR

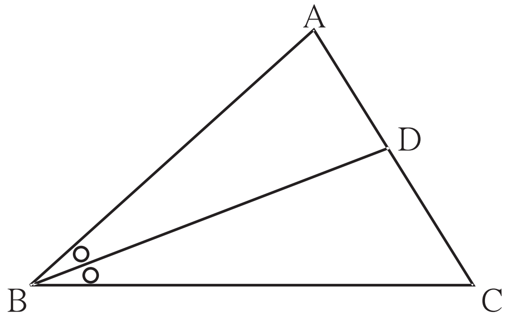


شڪل 1.26

(3) ABC Δ ۾ ABC $\angle$ جو اَڌڪ BD

آهي C-D-A،

تہ $\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DC}$



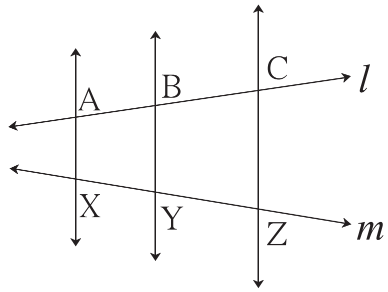
شڪل 1.27

(4) جيڪڏهن تہ AX || تہBY || تہ CZ ۽ ليڪون

l ۽ m ڇيدڻيون آهن تہ

A، B، C ۽ X، Y، Z ڇيدڻيون آهن تہ

تہ $\frac{AB}{BC} = \frac{XY}{YZ}$

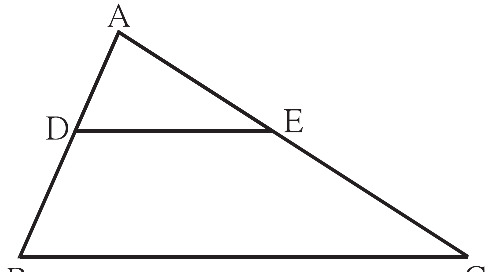


شڪل 1.28

مثال (1) ΔABC ۾ $DE \parallel BC$ (شڪل 1.29)

جيڪڏهن $DB = 5.4$ ، $AD = 1.8$ س م

$EC = 7.2$ س م AE تہ لهو.



شڪل 1.29

حل : ΔABC ۾ $DE \parallel BC$

$\therefore \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ ..... (بنيادي تناسبيت سڌيان)

$\therefore \frac{1.8}{5.4} = \frac{AE}{7.2}$

$\therefore 1.8 \times 7.2 = 5.4 \times AE$

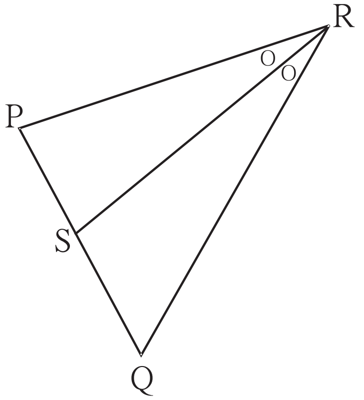
$\therefore AE = \frac{1.8 \times 7.2}{5.4} = 2.4$

$AE = 2.4$ س م

مثال (2) ΔPQR ۾ RS اهو $\angle R$ جو اڌ ڪ آهي جيڪڏهن (شڪل 1.30)

$PR = 15$ ، $RQ = 20$ ، $PS = 12$

SQ تہ لهو. تڪنبدي..



شڪل 1.30

حل : ΔPRQ ۾ تڪر RS اهو $\angle R$ جو اڌ ڪ آهي

$\frac{PS}{SQ} = \frac{PR}{RQ}$ .... (تڪنبدي جو ڪنڊ اڌ ڪ سڌيان)

$\frac{12}{SQ} = \frac{15}{20}$

$SQ = \frac{12 \times 20}{15} = 16$

$\therefore SQ = 16$

مشغولي :

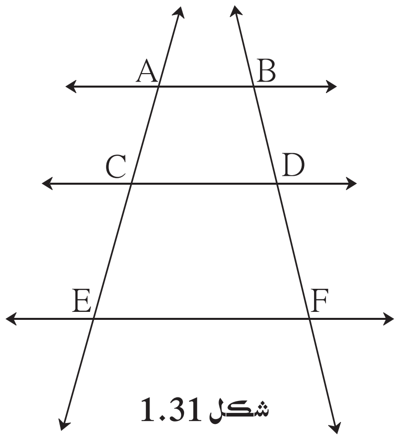
ڏنل شڪل 1.31 ۾ $AB \parallel CD \parallel EF$ جيڪڏهن

$AC = 5.4, CE = 9, BD = 7.5$ تہ DF لهو

حل : $AB \parallel CD \parallel EF$

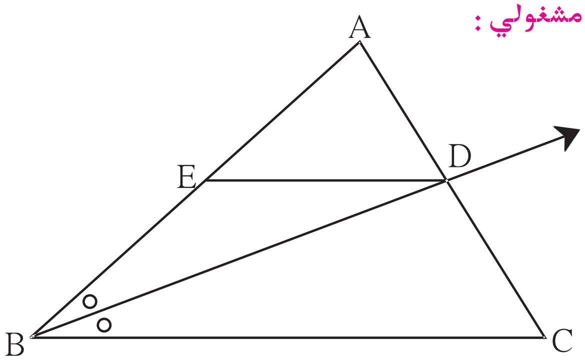
$\frac{AC}{\square} = \frac{\square}{DF}$ . . . . . . ($\square$)

$\frac{5.4}{9} = \frac{\square}{DF}$ $\therefore DF = \square$



شڪل 1.31

مشغولي :



شڪل 1.32

Δ ABC ۾ کرڻو BD اِهو $\angle$ ABC جو اَڌڪ آهي.

A-D-C تڪر DE || BC، A-E-B

ثابت ڪريو، $\frac{AB}{BC} = \frac{AE}{EB}$

ثابتي : Δ ABC ۾ کرڻو BD اِهو $\angle$ B جو اَڌڪ آهي.

$\therefore \frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DC}$ .... (ٽڪنڊي جو ڪنڊ اَڌڪ سڌيان) .... (I)

Δ ABC ۾ DE || BC

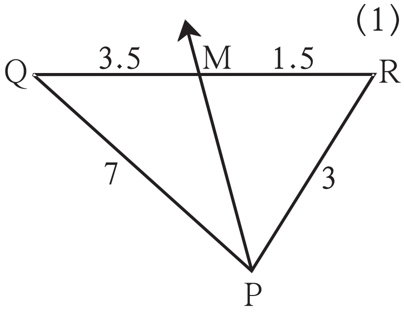
$\frac{AE}{EB} = \frac{AD}{DC}$ .... (. . . . .) .... (II)

$\frac{AB}{\square} = \frac{\square}{EB}$ .... (I) ۽ (II) مان

اَڀياس 1.2

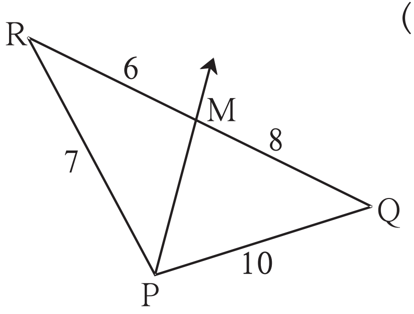
1. هيٺ ڪجهه ٽڪنڊا ڏنل آهن ۽ ٽڪرن جي ڊيگهه ڏنل آهي پڌايو تہ ڪهڙي شڪل ۾ کرڻو PM اهو $\angle$ QPR جو اَڌڪ آهي.

(1)



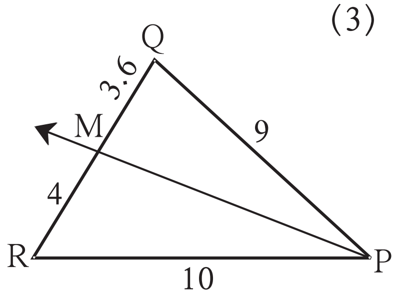
شڪل 1.33

(2)



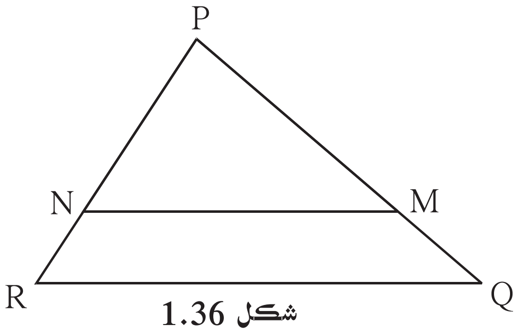
شڪل 1.34

(3)



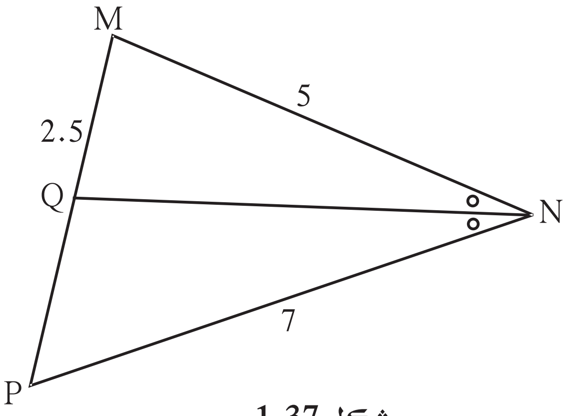
شڪل 1.35

2. Δ PQR ۾ PM = 15، PQ = 25، PR = 20، NR = 8 تہ ٽڪر NM اِهو پاسي RQ جي پوروچوت آهي ڇا؟ سبب لکو.



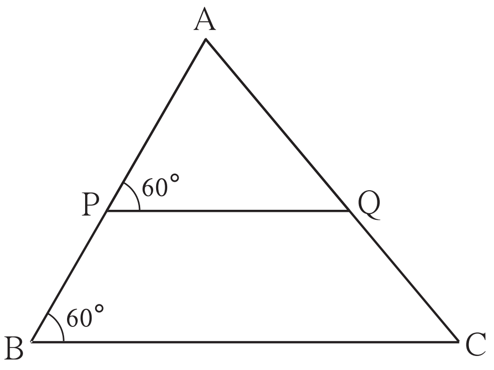
شڪل 1.36

3. ΔMNP ۾ $\angle N$ جو NQ اَڌڪ آهي.
جيڪڏهن $MN = 5$، $PN = 7$، $MQ = 2.5$
ته QP لهو.



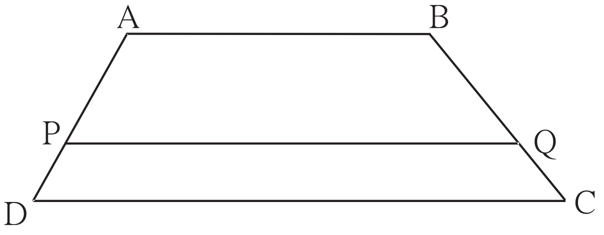
شڪل 1.37

4. شڪل ۾ ڪجهه ڪنڊن جون ماپون مليل
آهن ثابت ڪري ڏيکاريو ته $\frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QC}$



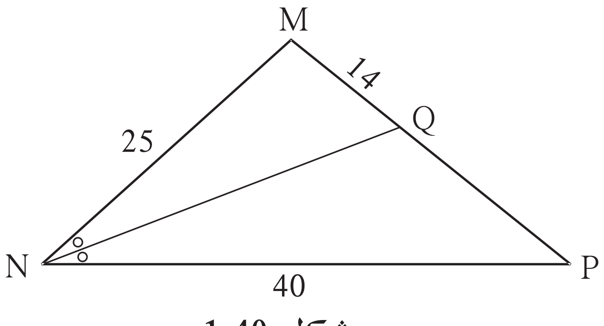
شڪل 1.38

5. □ABCD هڪ پورعمودي چوڪنڊو آهي اِن ۾
AB || PQ || DC ، جيڪڏهن $AP = 15$،
$PD = 12$، $QC = 14$ ته BQ لهو



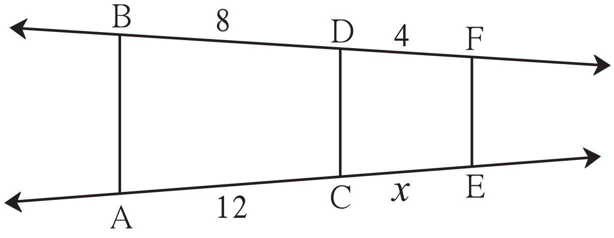
شڪل 1.39

6. شڪل 1.40 ۾ ڏنل چاڙ موجب QP لهو.



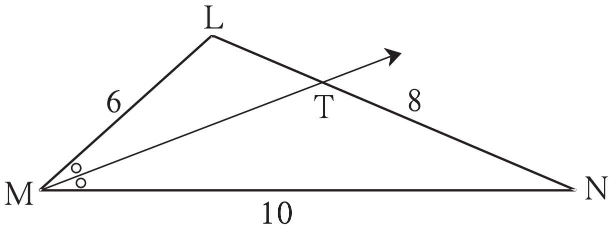
شڪل 1.40

7. پرواري شڪل 1.41 ۾ AB || CD || FE
ته x جو ملهه لهو ۽ AE لهو.



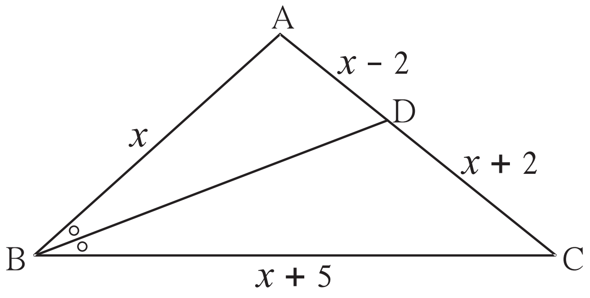
شڪل 1.41

.8 Δ LMN ۾ ڪرڙو MT اِهو $\angle$ LMN جو اَڌڪ آهي.
جيڪڏهن LM = 6، MN = 10،
TN = 8 تہ LT لهو.



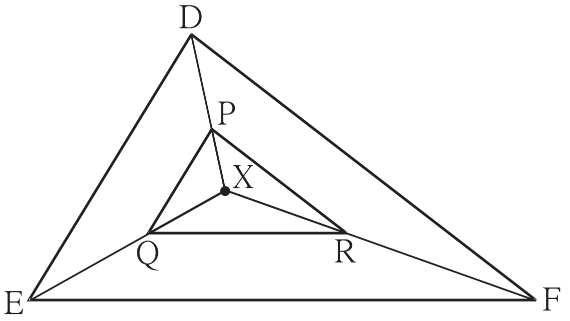
شڪل 1.42

.9 $\triangle$ABC ۾ ٽڪر BD اِهو $\angle$ ABC جو اَڌڪ آهي. جيڪڏهن AB = x، BC = $x + 5$،
AD = $x - 2$، DC = $x + 2$ تہ x جو مُلهہ لهو.



شڪل 1.43

.10 پرواري شڪل 1.44 ۾ ٽڪنڊي جي اَندر ٽٻڪو X آهي. اهو ٽٻڪو X نوڪي ٽٻڪن سان جوڙيل آهي. PQ||DE، QR||EF ۽ PR||DF تہ ثابت ڪرڻ لاءِ چوڪنڊا پورا ڪريو.



شڪل 1.44

ثابتي : Δ XDE ۾ PQ || DE .... $\square$

$\therefore \frac{XP}{\square} = \frac{\square}{QE}$ .... (I) (بنيادي تناسبيت سڏيان جي اُبتڙ)

Δ XEF ۾ QR || EF .... $\square$

$\therefore \frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square}$ ....(II) $\square$

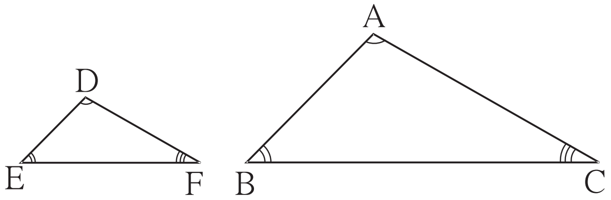
$\therefore \frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square}$ .... (I) ۽ (II) مان

$\therefore$ٽڪر PR || ٽڪر DF .... (بنيادي تناسبيت سڏيان جي اُبتڙ)

.11★ $\triangle$ABC ۾ $\angle$B ۽ $\angle$C جا اَڌڪ پاسن AC ۽ AB تي نمبر وار D ۽ E ٽٻڪن وٽ ڪپين ٿا ثابت ڪريو. ED || BC

ذرا ياد ڪريو

هڪ جهڙا ٽڪنڊا (Similar triangles)



شڪل 1.45

ΔABC ۽ ΔDEF جيڪڏهن $\angle A \cong \angle D$،
$\angle B \cong \angle E$ ۽ $\angle C \cong \angle F$
۽ $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$
ته ΔABC ۽ ΔDEF هڪ جهڙا ٽڪنڊا آهن.

ΔABC ۽ ΔDEF هڪ جهڙا آهن $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ ائين لکبو آهي.

چاڪي وٺون.

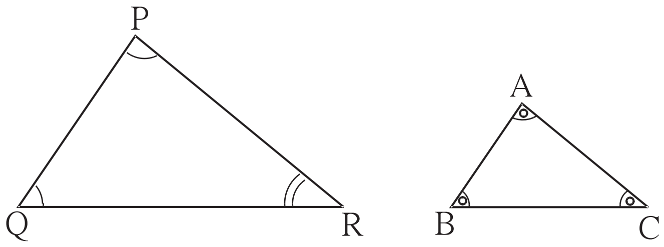
ٽڪنڊن جي هڪ جهڙائي لاءِ آزمائشون (Tests for similarity of triangles)

ٻن ٽڪنڊن جو هڪ جهڙا ٽڪنڊا ٿيڻ لاءِ اِهو ضروري آهي ته اُنهن جا ٽيئي نسبتي پاسا ساڳئي ريشو ۾ هجن ۽ ٽيئي نسبتي ڪنڊون ٺهڪندڙ هجن پر اِنهن ڇهن شرطن مان جيڪڏهن ٽي خاص شرطون پوريون ٿين ته باقي بچيل ٽي شرطون خود بہ خود پوريون ٿينديون. اِهي ٽيئي شرطون جاچڻ ڪان پوءِ خبر پوندي ته ٻئي ٽڪنڊا هڪ جهڙا آهن يا نہ. اِنهن شرطن کي ٽڪنڊن جي هڪ جهڙائي لاءِ آزمائشون چئبو آهي.

ٽڪنڊن جي هڪ جهڙائيءَ لاءِ ڪنڊ-ڪنڊ-ڪنڊ آزمائش

(AAA test for similarity of triangles)

ٻن ٽڪنڊن جي نوڪي ٽڪن وچ۾ هڪ هڪ لاڳاپو موجب جيڪڏهن نسبتي ڪنڊون ٺهڪندڙ هونديون ته ٽڪنڊا هڪ جهڙا هوندا.

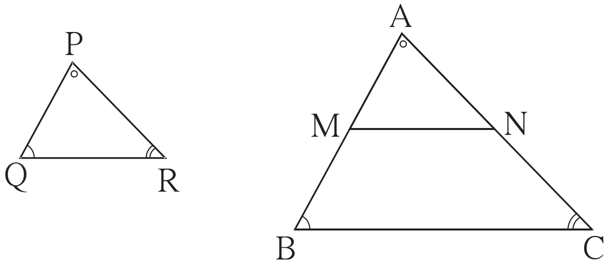


شڪل 1.46

ΔABC ۽ ΔPQR ۾ $ABC \leftrightarrow PQR$
جيڪڏهن $\angle A \cong \angle P$، $\angle B \cong \angle Q$،
$\angle C \cong \angle R$، ته $\Delta ABC \sim \Delta PQR$.

ودِيڪ چاڻ لاءِ :

ڪنڊ - ڪنڊ- ڪنڊ آزمائش لاءِ ثابتي



شڪل 1.47

ڏنل : ΔABC ۽ ΔPQR ۾
$\angle A \cong \angle P$، $\angle B \cong \angle Q$،
$\angle C \cong \angle R$.

ثابت ڪرڻ : $\Delta ABC \sim \Delta PQR$

ثابتي : $\triangle ABC$، اِهو$\triangle PQR$جي پيٽ ۾روڊو آهي. پاسي AB مٿان ٽِڪو M۽ پاسي AC مٿان ٽِڪو N. اهڙي نموني ڪڍو جيئن AM=PQ ۽ AN=PR هجي پوءِ $\triangle AMN \cong \triangle PQR$ ڏيکاريو. هاڻي $MN \| BC$ ثابت ڪبي.

بنيادي تناسبيت سڏيان موجب ، $\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$

مطلب، $\frac{NC}{AN} = \frac{MB}{AM}$ .... (اِنورٽيندڊو)

$\frac{NC + AN}{AN} = \frac{MB + AM}{AM}$ .... (ڪامپونيندو)

$\therefore \frac{AB}{AM} = \frac{AC}{AN}$

$\therefore \frac{AB}{PQ} = \frac{AC}{PR}$. مطلب $\frac{BC}{QR} = \frac{AB}{PQ}$

$\therefore \frac{AC}{PR} = \frac{BC}{QR} = \frac{AB}{PQ}$ $\qquad \therefore \Delta ABC \sim \Delta PQR$

ٽڪنڊن جي هڪ جهڙائي لاءِ ڪنڊ -ڪنڊ آزمائش (AA test for similarity of triangles)

ٽڪنڊن ۾ نوڪي ٽِڪن وچ۾ هڪ - هڪ لاڳاپو موجب جيڪڏهن هڪ ٽڪنڊي جون ٻہ ڪنڊون، ٻئي ٽڪنڊي جي نسبتي ٻن ڪنڊن سان ٺهڪندڙ آهن تہ پهرين ٽڪنڊن جي بچيل ڪنڊ، ٻئي ٽڪنڊي جي بچيل ڪنڊ سان ٺهڪندڙ ٿيندي اِها اسان کي ڄاڻ آهي. مطلب هڪ ٽڪنڊي جون ٻہ ڪنڊون ٻئي ٽڪنڊن جي نسبتي ٻن ڪنڊن سان ٺهڪندڙ آهن تہ اِن شرط موجب ٻئي ٽڪنڊا هڪ جهڙا ٿي سگهندا، مطلب هڪ ٽڪنڊي جون ٻہ ڪنڊون، ٻئي ٽڪنڊي جي نسبتي ٻن ڪنڊن سان ٺهڪندڙ آهن تہ اِهي ٻئي ٽڪنڊا هڪ جهڙا هوندا.

اِن خاصيت کي هڪ جهڙائي لاءِ ڪنڊ - ڪنڊ آزمائش چئبو آهي.

ٽڪنڊن جي هڪ جھڙائيءَ لاءِ پاسو ڪنڊ - پاسو آزمائش (SAS test for similarity of triangles)

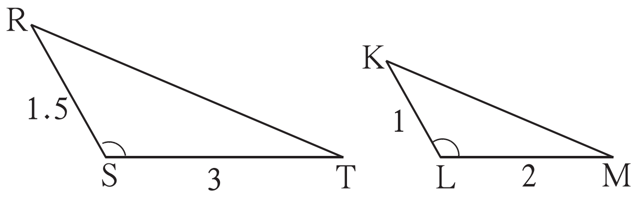
جيڪڏھن ٻن ٽڪنڊن ۾ نوڪي ٽڪن وچ ۾ هڪ - هڪ لاڳاپو موجب اُنھن جي نسبتي ٻن پاسن جو جوڙيون پرپورشن ۾ آهن ۽ اُنھن پاسن وچ ۾ سمايل ڪنڊون نھڪندڙ آهن تہ اِهي ٻہ ٽڪنڊا هڪ جھڙا هوندا.

مثال ، ΔKLM ۽ ΔRST ۾ جيڪڏھن

تہ $\angle KLM \cong \angle RST$

$$\frac{KL}{RS} = \frac{LM}{ST}$$

مطلب $\Delta KLM \sim \Delta RST$



شڪل 1.48

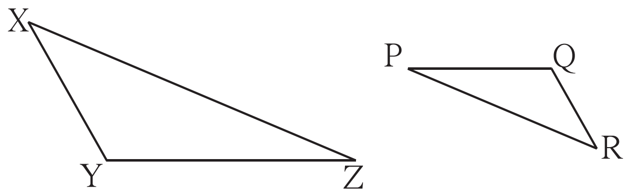
ٽڪنڊن جي هڪ جھڙائي لاءِ پاسو - پاسو - پاسو آزمائش (SSS test for similarity of triangles)

ٻن ٽڪنڊن ۾ نوڪي ٽڪن وچ ۾ هڪ لاڳاپو موجب، جيڪڏھن هڪ ٽڪنڊي جا ٽيئي پاسا ٻئي ٽڪنڊي جي ٽنھي پاسن سان پرپورشن ۾ ھجن تہ اُهي ٽڪنڊا هڪ جھڙا هوندا. اِن آزمائش کي پاسو - پاسو آزمائش چئبو آهي.

مثال ، ΔPQR ۽ ΔXYZ ۾ جيڪڏھن

تہ $$\frac{PQ}{XY} = \frac{QR}{YZ} = \frac{PR}{XZ}$$

مطلب $\Delta PQR \sim \Delta XYZ$



شڪل 1.49

هڪ جھڙن ٽڪنڊن جون خاصيتون

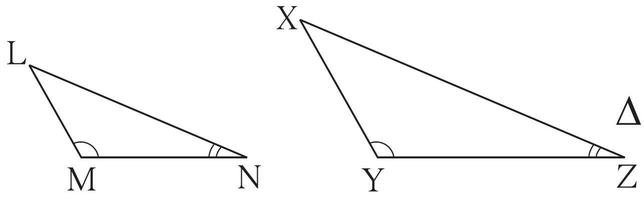
(1) $\Delta ABC \sim \Delta ABC$ – (Reflexivity)

(2) جيڪڏھن $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ تہ $\Delta DEF \sim \Delta ABC$ – (Symmetry)

(3) جيڪڏھن $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ ۽ $\Delta DEF \sim \Delta GHI$ تہ $\Delta ABC \sim \Delta GHI$ – (Transitivity)

حل ڪيل مثال

مثال. **(1)** ΔXYZ ۾ $\angle Y = 100°$،
$\angle Z = 30°$،
ΔLMN ۾ $\angle M = 100°$،
$\angle N = 30°$ تہ ڇا ΔXYZ ۽ ΔLMN
هڪ جھڙا آهن؟
جي آهن تہ ڪھڙي آزمائش موجب؟



شڪل 1.50

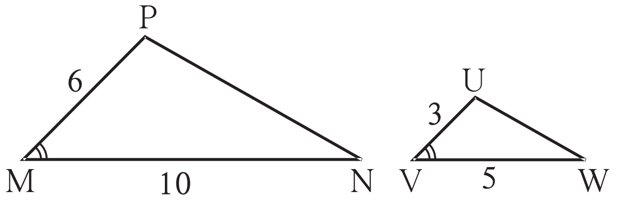
حل : ΔXYZ ۽ ΔLMN ۾ ,

$\angle Y = 100°, \angle M = 100° \therefore \angle Y \cong \angle M$

$\angle Z = 30°, \quad \angle N = 30° \quad \therefore \angle Z \cong \angle N$

$\therefore \Delta XYZ \sim \Delta LMN$ .... (ڪنڊ- ڪنڊ آزمائش موجب)

مثال (2) شڪل 1.51 ۾ ڏنل ٽڪنڊا هڪ جهڙا آهن ڇا؟ جي آهن ته ڪهڙيءَ آزمائش موجب؟



شڪل 1.51

حل : ΔPMN ۽ ΔUVW ۾

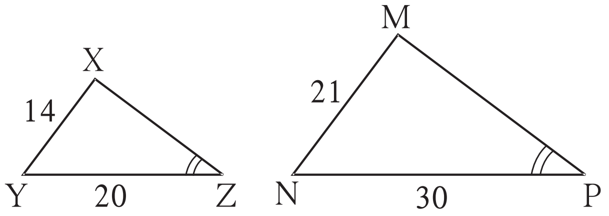
$$\frac{PM}{UV} = \frac{6}{3} = \frac{2}{1}, \frac{MN}{VW} = \frac{10}{5} = \frac{2}{1}$$

$$\therefore \frac{PM}{UV} = \frac{MN}{VW}$$

۽ $\angle M \cong \angle V$ .... (ڏنل)

$\therefore \Delta PMN \sim \Delta UVW$ .... پاسو ڪنڊ - پاسو آزمائش

مثال (3) شڪل 1.52 ۾ ڏنل ڇا ٽڪنڊا هڪ جهڙا آهن؟ جي آهن ته ڪهڙيءَ آزمائش موجب ؟



شڪل 1.52

حل : ΔXYZ ۽ ΔMNP ۾

$$\frac{XY}{MN} = \frac{14}{21} = \frac{2}{3},$$

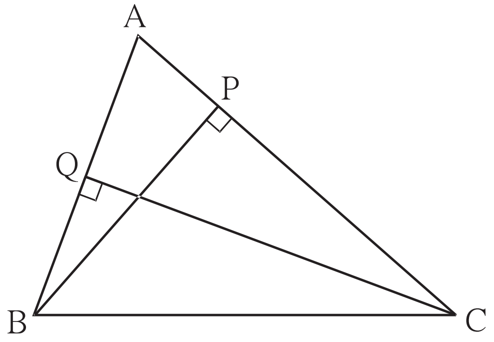
$$\frac{YZ}{NP} = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}$$

$$\therefore \frac{XY}{MN} = \frac{YZ}{NP}$$

پر $\angle Z \cong \angle P$ ڏنل آهي ۽ اِهي ڪندون پروپورشن ۾ هوندڙ پاسن جو سمايل ڪندون نه آهن.

اِنڪري ΔXYZ ۽ ΔMNP اِهي هڪ جهڙا ٽڪنڊا نه آهن.

مثال (4) پرواري شڪل ۾ $BP \perp AC$، $CQ \perp AB$، $A - P - C$، $A - Q - B$ ثابت ڪريو ته ΔAPB ۽ ΔAQC هڪ جهڙا آهن.



شڪل 1.53

حل : ΔAPB ۽ ΔAQC ۾

$\angle APB = \square^\circ$ (I)

$\angle AQC = \square^\circ$ (II)

$\therefore \angle APB \cong \angle AQC$ .... (I) ۽ (II) مان

$\angle PAB \cong \angle QAC$ .... (..............)

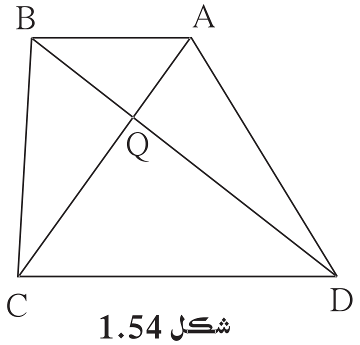
$\therefore \Delta APB \sim \Delta AQC$ ..... (ڪنڊ - ڪنڊ آزمائش)

مثال (5) $\square ABCD$ ۾ اُريب ٽڪي Q وٽ پاڻ ۾ ڪپين ٿا $2QA = QC$ ۽ $2QB = QD$.
ته $DC = 2AB$ ثابت ڪريو

ڏنل : $2QA = QC$

$2QB = QD$

ثابتي : $CD = 2AB$



شڪل 1.54

ثابتي : $\frac{QA}{QC} = \frac{1}{2} \therefore 2QA = QC$ .... (I)

$\frac{QB}{QD} = \frac{1}{2} \therefore 2QB = QD$ .... (II)

$\therefore \frac{QA}{QC} = \frac{QB}{QD}$ .... (I) ۽ (II) مان

ΔAQB ۽ ΔCQD

$\frac{QA}{QC} = \frac{QB}{QD}$ ....

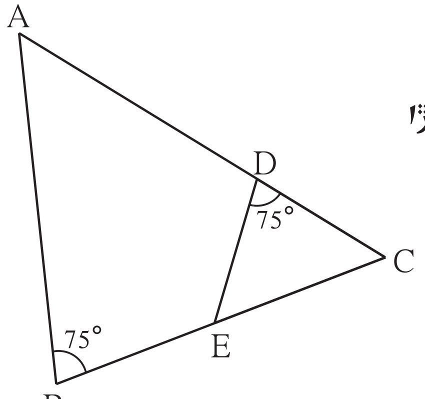
$\angle AQB \cong \angle DQC$ .... (مخالف ڪنڊون)

$\therefore \Delta AQB \sim \Delta CQD$ .... (پاسو ڪنڊ - پاسو آزمائش)

$\therefore \frac{AQ}{CQ} = \frac{QB}{QD} = \frac{AB}{CD}$ .... (نسبتي پاسا)

$\frac{AB}{CD} = \frac{1}{2} \therefore \frac{AQ}{CQ} = \frac{1}{2} \therefore$ پر

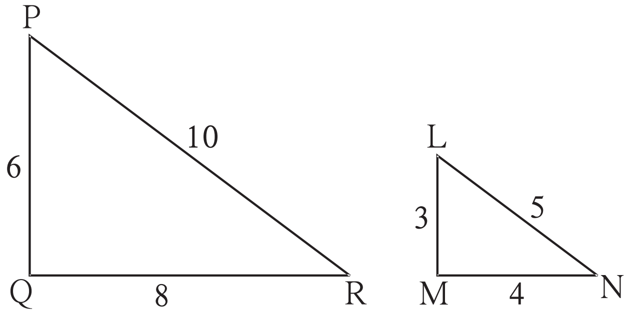
$\therefore 2AB = CD$



شڪل 1.55

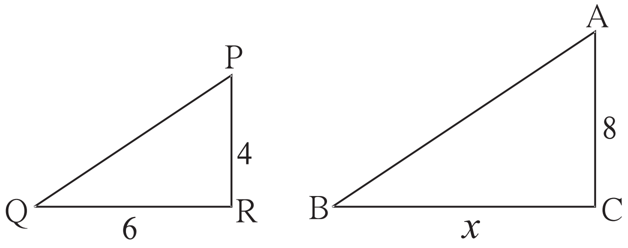
.1 شڪل 1.55 ۾ $\angle ABC = 75°$، $\angle EDC = 75°$ ڪھڙا ٽڪنڊا، ڪھڙيءَ آزمائش موجب هڪ جھڙا آهن؟ اُنهن جي هڪ جھڙائي هڪ - هڪ نسبت موجب لکو.

.2 شڪل 1.56 ۾ ٽڪنڊا هڪ جهڙا آهن ڇا؟ جي آهن تہ ڪھڙيءَ آزمائش موجب؟



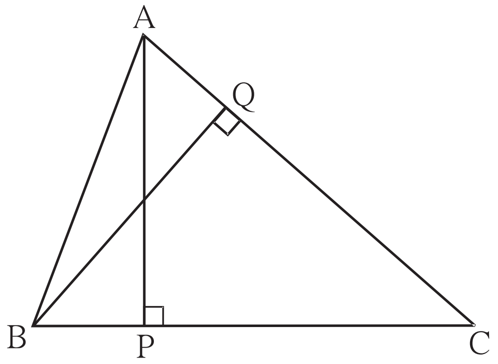
شڪل 1.56

.3 شڪل 1.57 ۾ 8 ميٽر ۽ 4 ميٽر اوچائيءَ وارا ٻہ ٿنيا سڌا زمين تي بيٺل آهن. سج جي روشنيءَ سبب ننڍي ٿنڀي جو پاڇو 6 ميٽر پوي ٿو. اُن وقت ئي وڏي ٿنڀي جي پاڇي جي ڊيگھہ ڪيتري؟



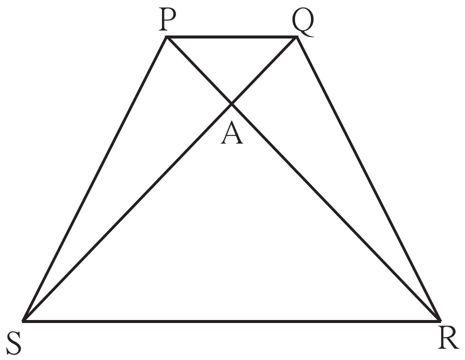
شڪل 1.57

.4 ΔABC ۾ $AP \perp BC$ ، $BQ \perp AC$ ، $B-P-C, A-Q-C$ ثابت ڪريو تہ $\Delta CPA \sim \Delta CQB$ جيڪڏهن $AP = 7, BQ = 8, BC = 12$ تہ AC لھو.



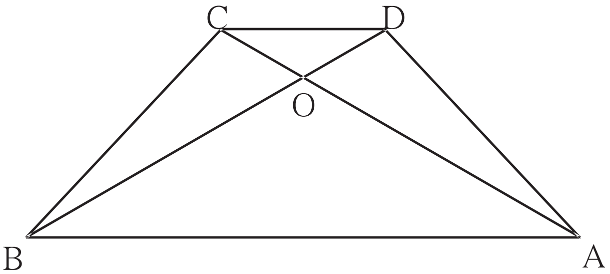
1.58

5. شڪل ۾ پور عمودي چوڪنڊو PQRS ۾ پاسو ،
PQ || SR ۾ پاسو، AR = 5AP،
AS = 5AQ ثابت ڪريو.
SR = 5PQ



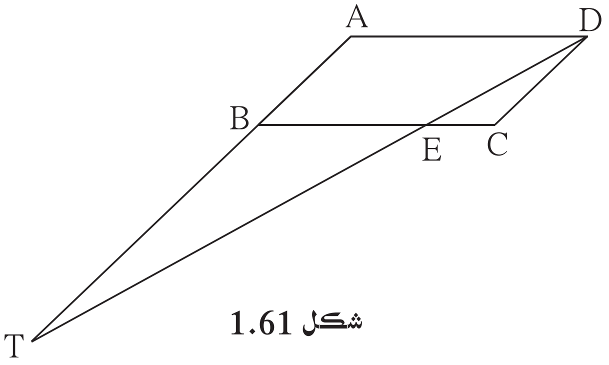
شڪل 1.59

6. پور عمودي چوڪنڊو ABCD ۾ پاسو (شڪل 1.60)
پاسو AB || پاسو DC اُريب AC ۽ اُريب BD
هڪ ٻئي کي ٽٻڪي O وٽ ڪپين ٿا.
AB = 20، DC = 6، OB = 15 تہ OD لهو.



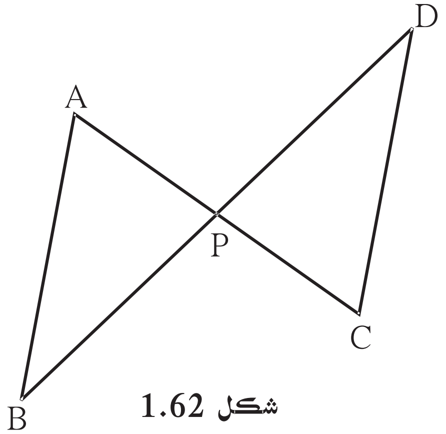
شڪل 1.60

7. □ABCD هڪ پوروچوٽ پاسو چوڪنڊو آهي
پاسي BC مٿان هڪ ٽٻڪو E آهي ليڪ DE اِها
ڪرٽي AB کي ٽٻڪي T وٽ ڪپي ٿي ثابت ڪريو.
DE × BE = CE × TE



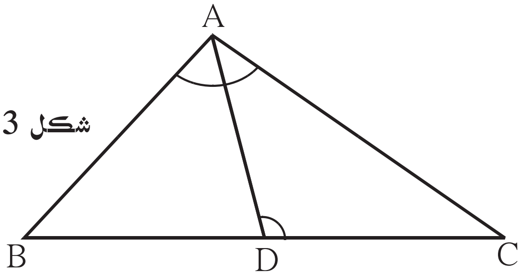
شڪل 1.61

8. شڪل ۾ ٽڪر AC ۽ BD ٽڪر P هڪ ٻئي
کي ٽٻڪي P وٽ ڪپين ٿا ۽ $\frac{AP}{CP} = \frac{BP}{DP}$
ثابت ڪريو $\Delta ABP \sim \Delta CDP$



شڪل 1.62

9. شڪل ۾ $\triangle ABC$ ۾ پاسي BC مٿان ٽٻڪو D
اَهڙي نموني آهي جو $\angle BAC = \angle ADC$
تہ ثابت ڪريو.
$CA^2 = CB \times CD$

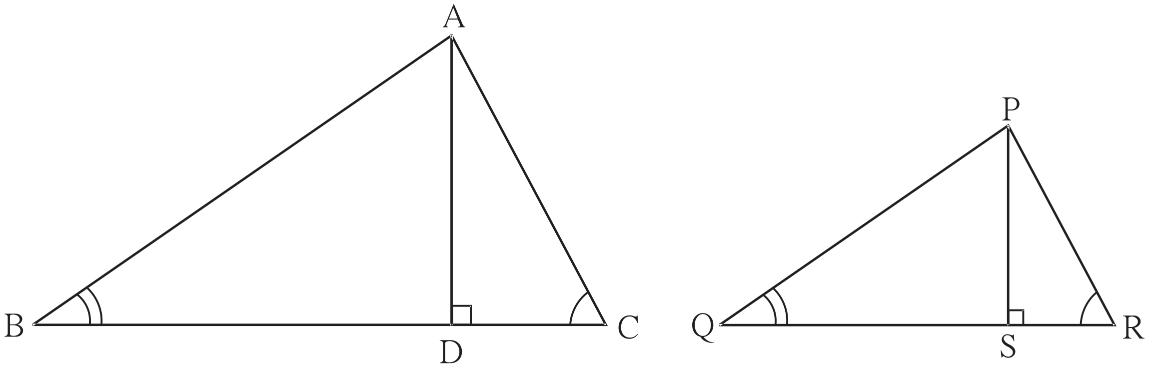


شڪل 1.63

چاڙهي وٺون.

هڪ جهڙن ٽڪنڊن جي ايراضين جو سڌيان (Theorem of areas of similar triangles)

سڌيان : جيڪڏهن ٻه ٽڪنڊا هڪ جهڙا آهن ته اُنهن جي ايراضين جو ريشو، سندن نسبتي پاسن جي ٻي سگهه جي ريشو جي برابر ٿئي ٿو.



شڪل 1.64

ڏنل : $\Delta ABC \sim \Delta PQR,\ AD \perp BC,\ PS \perp QR$

ثابت ڪرڻ : $\dfrac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta PQR)} = \dfrac{AB^2}{PQ^2} = \dfrac{BC^2}{QR^2} = \dfrac{AC^2}{PR^2}$

ثابتي : $\dfrac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta PQR)} = \dfrac{BC \times AD}{QR \times PS} = \dfrac{BC}{QR} \times \dfrac{AD}{PS}$ .... (I)

ΔABD ۽ ΔPQS ۾

$\angle B = \angle Q$ .... (ڏنل)

$\angle ADB = \angle PSQ = 90^\circ$

ڪنڊ-ڪنڊ آزمائش اَنوسار $\therefore \Delta ABD \sim \Delta PQS$

$\therefore \dfrac{AD}{PS} = \dfrac{AB}{PQ}$ .... (II)

پر $\Delta ABC \sim \Delta PQR$

$\therefore \dfrac{AB}{PQ} = \dfrac{BC}{QR} = \dfrac{AC}{PR}$ .... (III)

(II) ۽ (III) مان

$$\frac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta PQR)} = \frac{BC}{QR} \times \frac{AD}{PS} = \frac{BC}{QR} \times \frac{BC}{QR} = \frac{BC^2}{QR^2} = \frac{AB^2}{PQ^2} = \frac{AC^2}{PR^2}$$

مثال (1) : $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ ، $A(\Delta ABC) = 16$ ، $A(\Delta PQR) = 25$ تہ $\frac{AB}{PQ}$ اِهو ريشو لهو.

حل : $\Delta ABC \sim \Delta PQR$

$\therefore \frac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta PQR)} = \frac{AB^2}{PQ^2}$ .... هڪ جهڙن ٽڪندن جي ايراضين جو ريشو.

$\therefore \frac{16}{25} = \frac{AB^2}{PQ^2}$ $\therefore \frac{AB}{PQ} = \frac{4}{5}$ .... (ٻيو مول لهندي)

مثال (2) ٻن هڪ جهڙن ٽڪندن جي نسبتي پاسن جو ريشو 2:5 آهي. ننڍي ٽڪندي جي ايراضي 64 چ.س.م آهي تہ وڏي ٽڪندي جي ايراضي ڪيتري؟

حل : سمجهو تہ $\Delta ABC \sim \Delta PQR$

ΔABC ننڍو ۽ ΔPQR وڏو ٽڪندو آهي.

$\therefore \frac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta PQR)} = \frac{(2)^2}{(5)^2} = \frac{4}{25}$ ....(هڪ جهڙن ٽڪندن جي ايراضين جو ريشو)

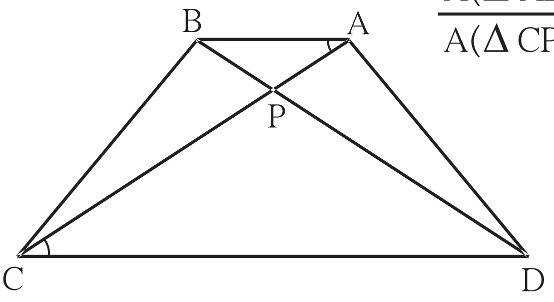
$\therefore \frac{64}{A(\Delta PQR)} = \frac{4}{25}$

$4 \times A(\Delta PQR) = 64 \times 25$

$A(\Delta PQR) = \frac{64 \times 25}{4} = 400$ چ س م

$\therefore$ وڏي ٽڪندي جي ايراضي = 400 چ س م

مثال (3) هڪ پور عمودي چوڪنديABCDم پاسو CD||پاسو AB ، اُريبAC ۽ اُريب BD هڪ ٻئي کي ٽٻڪي Pوٽ ڪپين ٿا تہ ثابت ڪريو $\frac{A(\Delta ABP)}{A(\Delta CPD)} = \frac{AB^2}{CD^2}$



شڪل 1.65

حل : پور عمودي چوڪندي پاسو AB || پاسو CD

ΔAPB ۽ ΔCPD م

$\angle PAB \cong \angle PCD$ ..... (متبدل ڪندون)

$\angle APB \cong \angle CPD$ ..... (مخالف ڪندون)

$\therefore \Delta APB \sim \Delta CPD$ ..... ڪند - ڪند آزمائش

$\frac{A(\Delta APB)}{A(\Delta CPD)} = \frac{AB^2}{CD^2}$ ....(هڪ جهڙن ٽڪندن جي ايراضين جو ريشو)

آيپاس 1.4

1. ٻن هڪ جهڙن ٽڪنڊن جي نسبتي پاسن جو ريشو3:5 آهي ته اُنهن جي ايراضين جو ريشو لهو .

2. $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ ته $AB : PQ = 2:3$ هيٺ ڏنل چوڪنڊا پورا ڪريو

$$\frac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta PQR)} = \frac{AB^2}{\square} = \frac{2^2}{3^2} = \frac{\square}{\square}$$

3. $\Delta ABC \sim \Delta PQR, A(\Delta ABC) = 80, A(\Delta PQR) = 125$، ته هيٺ چوڪنڊا پورا ڪريو .

$$\frac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta ....)} = \frac{80}{125} \qquad \therefore \quad \frac{AB}{PQ} = \frac{\square}{\square}$$

4. $\Delta LMN \sim \Delta PQR, \ 9 \times A(\Delta PQR) = 16 \times A(\Delta LMN)$ ۽ $QR = 20$ ته MN لهو.

5. ٻن هڪ جهڙن ٽڪنڊن جي ايراضيون 225 چ س م ۽ 81 چ س م آهن. جيڪڏهن ننڍي ٽڪنڊي جو هڪ پاسو 12س م آهي ته وڏي ٽڪنڊي جو نسبتي پاسو لهو.

6. ΔABC ۽ ΔDEF اهي ٽيپور پاسو ٽڪنڊا آهن. $A(\Delta ABC) : A(\Delta DEF) = 4 : 7$ ته $AB = 4$ ته DE جي ڊيگهه لهو.

7. شڪل 1.66 ۾ٽڪر $PQ \parallel$ ٽڪر DE، $A(\Delta PQF) = 20$ چ. ايڪا، $PF = 2\,DP$ ته $A(\square\ DPQE)$ لهڻ لاءِ هيٺ ڏنل مشغولي پوري ڪريو .

$A(\Delta PQF) = 20$ چ ايڪا، $PF = 2\,DP$، $DP = x$ سمجهو $PF = 2x$

$$DF = DP + \square = \square + \square = 3x$$

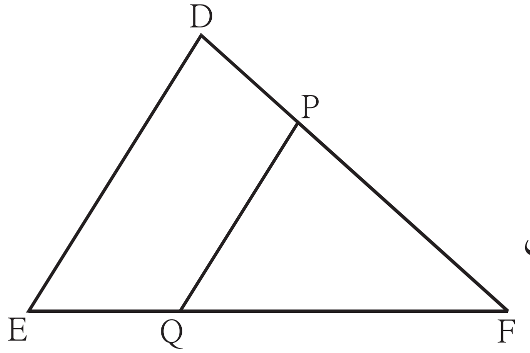
ΔFDE ۽ ΔFPQ ۾

$\angle \ \cong \angle FDE$ .... نسبتي ڪندون

$\angle \ \cong \angle FED$ .... نسبتي ڪندون

$\therefore \Delta FDE \sim \Delta FPQ$ .... ڪند ڪند آزمائش

$$\therefore \frac{A(\Delta FDE)}{A(\Delta FPQ)} = \frac{\square}{\square} = \frac{(3x)^2}{(2x)^2} = \frac{9}{4}$$



شڪل 1.66

$\therefore$ ________ $A(\Delta FDE) = \frac{9}{4} A(\Delta FPQ) = \frac{9}{4} \times \square = \square$

$\therefore$ ________ $A(\square\ DPQE) = A(\Delta FDE) - A(\Delta FPQ)$

$= \square - \square$

$= \square$

.1 هيٺ ڏنل اُپ سوالن جا متبدل جواب ڏنل آهن. صحيح متبدل چونڊيو.

(1) $\triangle ABC$ ۽ $\triangle PQR$ جي هڪ هڪ نسبت ۾

$$\frac{AB}{QR} = \frac{BC}{PR} = \frac{CA}{PQ}$$ ته

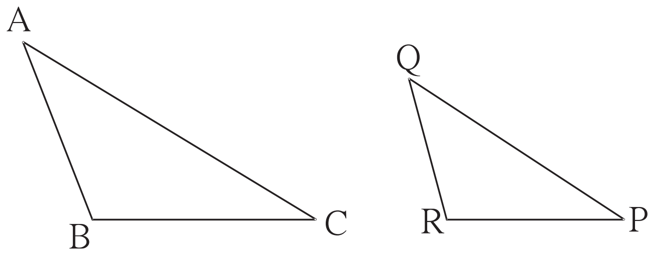
هيٺ وڏانن مان صحيح ڪهڙو؟

(A) $\Delta PQR \quad \Delta ABC$

(B) $\Delta PQR \sim \Delta CAB$

(C) $\Delta CBA \sim \Delta PQR$

(D) $\Delta BCA \sim \Delta PQR$



شڪل 1.67

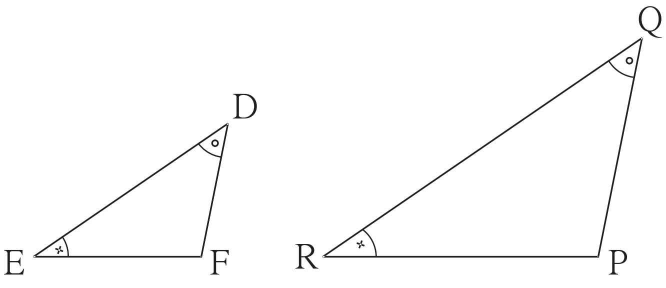
(2) جيڪڏهن $\triangle DEF$ ۽ $\triangle PQR$

۾ $\angle D \cong \angle Q, \angle R \cong \angle E$

هيٺ وڏانن مان غلط ڪهڙو؟

(A) $\frac{EF}{PR} = \frac{DF}{PQ}$ (B) $\frac{DE}{PQ} = \frac{EF}{RP}$

(C) $\frac{DE}{QR} = \frac{DF}{PQ}$ (D) $\frac{EF}{RP} = \frac{DE}{QR}$



شڪل 1.68

(3) $\triangle ABC$ ۽ $\triangle DEF$ ۾ $\angle B = \angle E,$

$\angle F = \angle C$ ۽ $AB = 3\ DE$

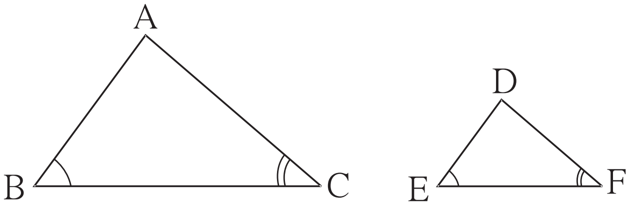
ته اِنهن ٻن ٽڪنڊن لاءِ صحيح بيان ڪهڙو؟

(A) اِهي نه ٹهڪندڙ آهن نه هڪ جهڙا

(B) اِهي هڪ جهڙا آهن پر ٹهڪندڙ نه آهن.

(C) اِهي ٹهڪندڙ آهن ۽ هڪ جهڙا آهن.

(D) مٿين بيانن مان ڪوبه صحيح نه آهي.

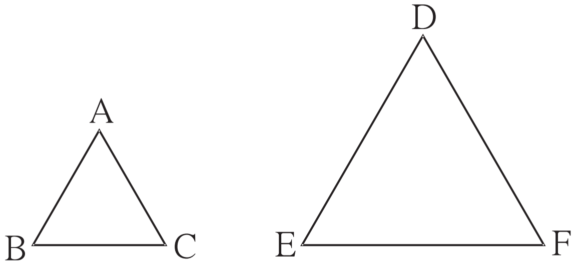


شڪل 1.69

(4) $\triangle ABC$ ۽ $\triangle DEF$ اِهي ٽپور پاسو ٽڪنڊا آهن.

$$A(\Delta ABC) : A(\Delta DEF) = 1:2$$

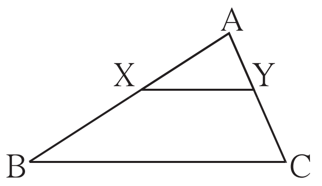
AB=4 ته DE جي ڊيگهه ڪيتري؟



شڪل 1.70

(A) $2\sqrt{2}$ (B) 4 (C) 8 (D) $4\sqrt{2}$

(5) شڪل 1.71 ۾ ٽڪر BC || ٽڪر XY ته هيٺ ڏنل جوابن مان ڪهڙو صحيح جواب آهي؟

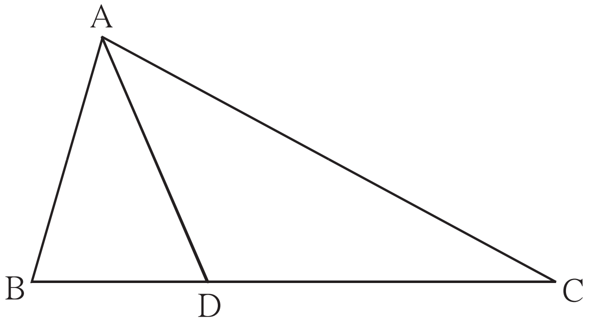


شڪل 1 71.

(i) $\frac{AB}{AC} = \frac{AX}{AY}$ (ii) $\frac{AX}{XB} = \frac{AY}{AC}$

(iii) $\frac{AX}{YC} = \frac{AY}{XB}$ (iv) $\frac{AB}{YC} = \frac{AC}{XB}$

.2 △ABC ۾ B-D-C ۽ BD=7 ، BC=20 ته هيٺ ڏنل ريشا لهو؟



شڪل 1.72

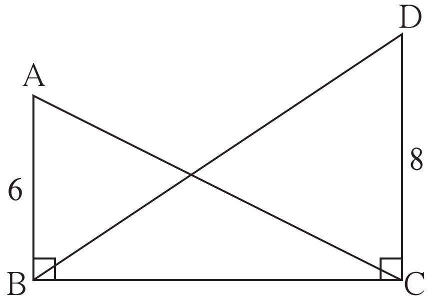
(1) $\frac{A(\Delta ABD)}{A(\Delta ADC)}$

(2) $\frac{A(\Delta ABD)}{A(\Delta ABC)}$

(3) $\frac{A(\Delta ADC)}{A(\Delta ABC)}$

.3 برابر اوچاين وارن ٽن ٽڪنڊن جي ايراضين جو ريشو 2:3 آهي. ننڍي ٽڪنڊي جو پايو 6 س م آهي ته وڏي ٽڪنڊي جو نسبتي پايو ڪيترو ٿيندو؟

.4

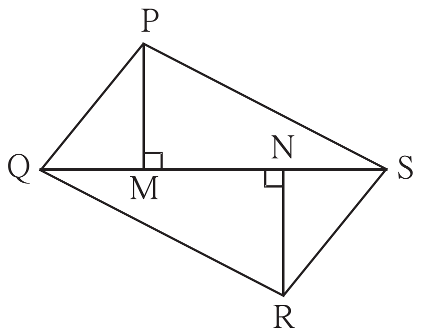


شڪل 1.73

شڪل 1.73 ۾ $\angle ABC = \angle DCB = 90^\circ$

$AB = 6,\ DC = 8$

ته $\frac{A(\Delta ABC)}{A(\Delta DCB)} =$ ڪيتري؟



شڪل 1.74

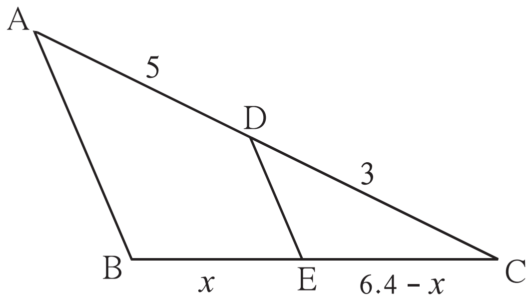
.5 شڪل ۾ 10س م =PM

100 چ س م = A(△PQS)

110 چ س م =A(△QRS) ته NR لهو.

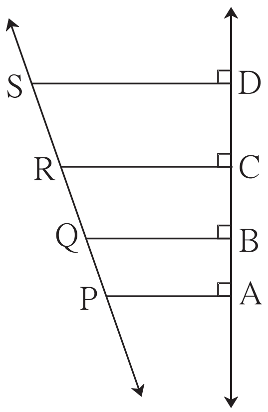
.6 $\Delta MNT \sim \Delta QRS$ ٽپڪي 'T' وٽان نڪتل عمود جي ڊيگھه 5 آهي ۽ ٽپڪي 'S' وٽان نڪتل عمود جي ڊيگھه 9 آهي ته $\frac{A(\Delta MNT)}{A(\Delta QRS)}$ جو ريشو لهو.

7. شڪل 1:75 ۾ A-D-C ۽ B-E-C
پاسو AB || تڪر DE
AD = 5, DC = 3, BC = 6.4
تہ BE لھو.



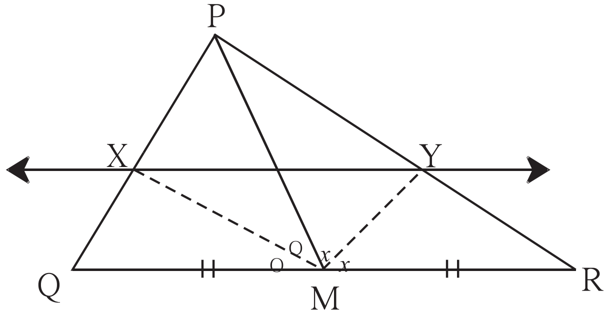
شڪل 1.75

8. شڪل ۾ 1.76 تڪر PA، تڪر QB، تڪر RC ۽ تڪر SD اِهي ليڪ AD تي عمود آهن. AB = 60، BC = 70، CD = 80، PS = 280 تہ PQ، QR، RS لھو.



شڪل 1.76

9. △PQR ۾ تڪر PM مڏيان آهي PMQ ۽ PMR جا اَڌڪ پاسن PQ ۽ PR وٽ نمبروار X ۽ Y تي ڪپين ٿا تہ ثابت ڪريو تہ XY || QR ثابتي لاءِ هيٺ ڏنل چوڪنڊا پورا ڪريو △PMQ ۾ ڪرڻو MX، ∠PMQ جو اَڌڪ آهي.



شڪل 1.77

اَڌڪ سڏيان (I) .... $\frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square}$ ∴

△PMR ۾ ڪرڻو MY، ∠PMR جو اَڌڪ آهي.

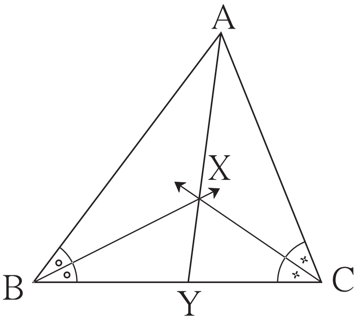
ڪنڊ - اَڌڪ سڏيان (II) .... $\frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square}$ ∴

پر $\frac{MP}{MR} = \frac{MP}{MQ}$ .... M هي QR جو وچ ٽيڪو آهي. MQ=MR

$\therefore \frac{PY}{YR} = \frac{PX}{XQ}$

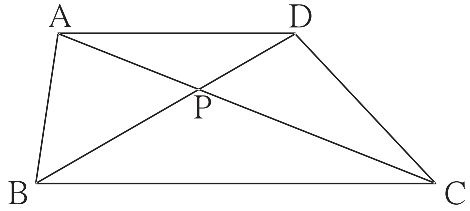
بنيادي تناسيت سڏيان جي اُبتڙ .... XY || QR ∴

10.★ شڪل 1.78 ۾ $\angle B$ ۽ $\angle C$ جا اَڌڪ هڪ ٻئي کي X وٽ ڪپين ٿا ليڪ AX، پاسي BC کي ٽيڪي Y وٽ ڪپي ٿي· $AB = 4$ ،$AC = 5$ ،$BC = 6$ تہ $\frac{AX}{XY}$ جو مُلھ لھو.



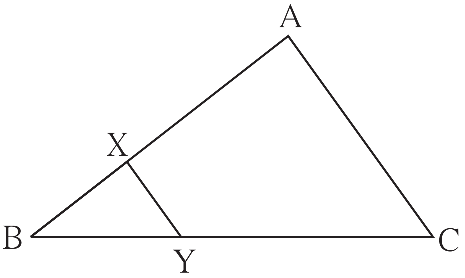
شڪل 1.78

11. ABCD ۾ AD||BC اُريب AC ۽ اُريب BD هڪ ٻئي کي ٽيڪي P وٽ ڪپين ٿا ثابت ڪري ڏيکاريو. $\frac{AP}{PD} = \frac{PC}{BP}$



شڪل 1.79

12. شڪل 1.80 ۾ XY||AC جيڪڏهن $2AX = 3BX$ ۽ $XY = 9$
AC جو ملھ لھڻ لاءِ مشغولي پوري ڪريو .



شڪل 1.80

مشغولي: $2AX = 3BX \quad \therefore \frac{AX}{BX} = \frac{\square}{\square}$

$\frac{AX + BY}{BX} = \frac{\square + \square}{\square}$ .... ڪامپوٽينڊو

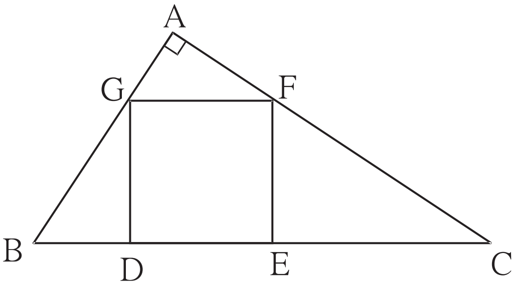
$\frac{AB}{BX} = \frac{\square}{\square}$ .... (I)

$\Delta BCA \sim \Delta BYX$ .... آزمائش

$\therefore \frac{BA}{BX} = \frac{AC}{XY}$ ....

$\therefore \frac{\square}{\square} = \frac{AC}{9} \quad \therefore AC = \square$ ....(I)

13.★ $\triangle ABC$ ۾ $\square$ DEFG هڪ چورس آهي $\angle A = 90°$.
ٽيڪا D ۽ E اِهي پاسو BC متان آهن. ٽيڪو F ، پاسو AC متان ۽ ٽيڪو G ، پاسو AB متان آهي. ثابت ڪريو DE=BDXEC
(اهي $\triangle GBD$ ۽ $\triangle CFF$ اهي هڪ جهڙا ڏيکاريو GD=FE=DE جو اِستعمال ڪريو.)



شڪل 1.81

2 پائٿاگورس جو سڏيان

اَچو تہ سکي وٺون

- گوني کنڊ ٽڪنڊي ۾ هڪ جهڙائي
- ريکا ڳٽ سراسر
- پائٿا گورس جو سڏيان
- پائٿاگورس جا ٽيڙا
- پائٿاگورس سڏيان جا اُپيوگہ
- اَپولو نيس سڏيان

ذرا ياد ڪريو.

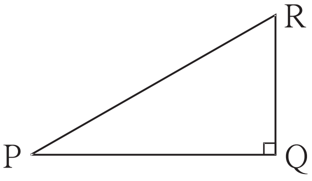
پائٿاگورس جو سڏيان :

گوني کنڊ ٽڪنڊي ۾ هيپاٽينيوز جي ٻي سگهہ باقي ٻن پاسن جي ٻي سگهہ جي جوڙ برابر هوندي آهي.

ΔPQR ۾ $\angle PQR = 90^\circ$

$$l(PR)^2 = l(PQ)^2 + l(QR)^2$$

$$PR^2 = PQ^2 + QR^2$$



شڪل 2.1

ΔPQR ۾ PQ، QR ۽ PR پاسن جي ڊيگهہ نمبروار r ، p ۽ q اکرن وسيلي ڏيکاريي آهي.

شڪل 2.1 ۾ پائٿاگورس سڏيان موجب $q^2 = p^2 + r^2$

پائٿاگورس جا ٽيڙا :

قدرتي عددن جي ٽيڙي ۾ جيڪڏهن وڏيعدد جي ٻي سگهہ، باقي ٻن عددن جي ٻي سگهہ برابر آهي تہ اُن کي پائٿاگورس جو ٽيڙو چئبو آهي.

مثال (11,60,61) اِن ٽيڙي ۾

$11^2 = 121,\quad 60^2 = 3600,\quad 61^2 = 3721$ ۽ $121 + 3600 = 3721$

هتي وڏي عدد جي ٻي سگهہ ٻين عددن جي ٻي سگهہ جي جوڙ برابر آهي.

11,60,61 اِهو پائٿاگورس جو ٽيڙو آهي اَهڙي نموني (5, 12, 13), (8, 15, 17), (24, 25, 7) (3, 4, 5), اِهي پائٿاگورس جا ٽيڙا آهن ڇا؟ جاچ ڪريو پائٿاگورس ٽيڙي ۾ عدد ڪهڙي بہ سلسلي ۾ لکي سگهجن ٿا.

وڌيڪ ڄاڻ لاءِ :

پائٿاگورس جا ٽِپڊا حاصل ڪرڻ جي فارمولا جيڪڏهن b,a اِهي قدرتي عدد آهن.

$a > b$ۦ ته $(a^2 + b^2),(a^2 - b^2)$ ۽ 2ab اِهو پائٿاگورس جو ٽِپڊو آهي.

$$\therefore \quad (a^2 + b^2)^2 = a^4 + 2a^2b^2 + b^4 \quad .... (I)$$

$$(a^2 - b^2)^2 = a^4 - 2a^2b^2 + b^4 \quad .... (II)$$

$$(2ab)^2 = 4a^2b^2 \quad .... (III)$$

$\therefore$ (I)، (II) ۽ (III) مان ، $(a^2 + b^2)^2 = (a^2 - b^2)^2 + (2ab)^2$

$\therefore [(a^2 + b^2), (a^2 - b^2), (2ab)]$ انڪري اِهو پائٿاگورس جو ٽِپڊو آهي

مثال b=3,a=5 هاڻي

$a^2 + b^2 = 34,\ a^2 - b^2 = 16$ ۽ $2ab = 30$.

(34, 16, 30) اهو پائٿاگورس جو ٽِپڊو آهي اِهو توهان ڄاچ ڪريو اَهڙي نموني a ۽ b جا جدا جدا ملھ ڪٽي 5 پائٿاگورس جا ٽِپڊا تيار ڪريو.

گذريل درجي ۾ توهان 30°=60°=90° ۽ 90°=45°=45°ڪندن وارن گوني ڪنڊ ٽڪنڊن جون خاصيتون ڪيون آهن.

(I). 30°=60°=90° ٽڪنڊي جي خاصيت

گوني ڪنڊ ٽڪنڊي ۾ سوڙهيون ڪندون 30° ۽ 60° هجن ته 30°ماپ واري ڪنڊ جي مخالف پاسو هئپاٽينيوز جو اَڌ ۽ 60° ماپ واري ڪنڊ جو مخالف پاسو هئپاٽينيوز جو $\frac{\sqrt{3}}{2}$ هوندو آهي.

شڪل 2.2 ۾ △LMN ۾ $\angle L = 30°, \angle N = 60°, \angle M = 90°$

$\therefore$ 30° جي سامهون وارو پاسو = $MN = \frac{1}{2} \times LN$

60° جي سامهون وارو پاسو = $LM = \frac{\sqrt{3}}{2} \times LN$

جيڪڏهن LN = 6 س م ته MN ۽ LM لهو .

$LM = \frac{\sqrt{3}}{2} \times LN$

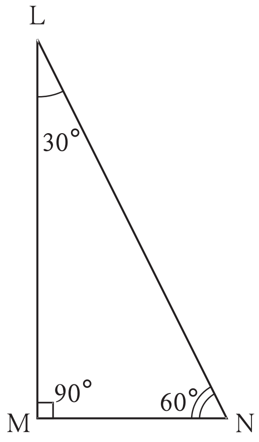
$= \frac{\sqrt{3}}{2} \times 6$

$= 3\sqrt{3}$ س م

$MN = \frac{1}{2} \times LN$

$= \frac{1}{2} \times 6$

= 3 س م



شڪل 2.2

(II) $90°$=$45°$=$45°$ ٽڪنڊي جي خاصيت

گوني ڪنڊ ٽڪنڊي ۾ سوڙهيون ڪنڊيون $45°$ ۽ $45°$ ماپن واريون هجن تہ گوني ڪنڊ ٺاهيندڙ هر هڪ پاسو هائپاٽينيوز جو $\frac{1}{\sqrt{2}}$ هوندو.

شڪل 2.3 ڏسو : $\triangle XYZ$ ۾

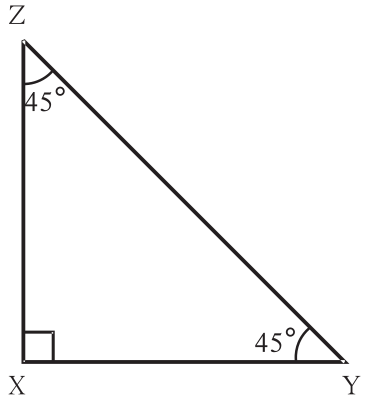
$$XY = \frac{1}{\sqrt{2}} \times ZY$$

$$XZ = \frac{1}{\sqrt{2}} \times ZY$$

جيڪڏهن $ZY = 3\sqrt{2}$ س م تہ XY ۽ XZ لهو.

$$XY = XZ = \frac{1}{\sqrt{2}} \times 3\sqrt{2}$$

$$\therefore XY = XZ = 3 \text{ س م}$$



شڪل 2.3

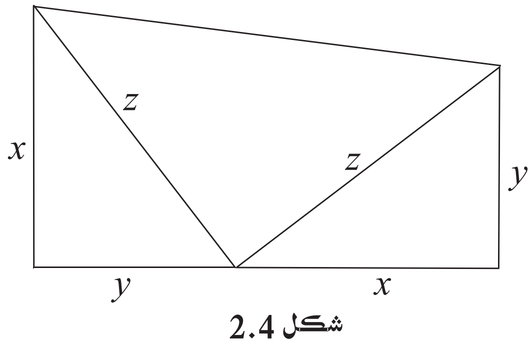
ستين درجي ۾ پائٿاگورس سڌيان ايراضين جي مدد سان سمجهو آهي اُن ۾ چار گوني ڪنڊ ٽڪنڊا ۽ هڪ چورس اِستعمال ڪيو. هاڻي اِن سڌيان جي ثابتي هڪ الڳ طريقي سان ڪنداسين.

مشغولي:

ڏيکاريل شڪل موجب بہ ٺهڪندڙ گوني ڪنڊ ٽڪنڊا ڪٽو اُنهن جي هائپاٽينيوزن جي ڊيگهہ جهڙا هڪ ٻپور پاسو گوني ڪنڊ ٽڪنڊو ڪٽو. اِهي ٽيئي گوني ڪنڊ جوڙي هڪ پور عمودي چوڪنڊو تيار ڪريو.

اوچائي X (پوروچوٽ پاسن جو جوڙ) X = $\frac{1}{2}$ پور عمودي چوڪنڊي جي ايراضي

اِن سوتر جو اُپيوگہ ڪري اُن جي ايراضي ٽنهي ٽڪنڊن جي ايراضين جي جوڙ برابر آهي اِهو جاچي پائٿاگورس جو سڌيان ثابت ڪريو.



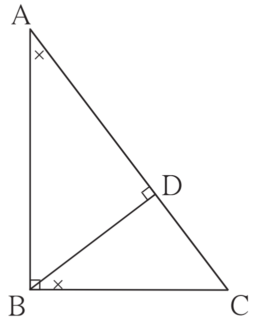
شڪل 2.4

جاڻي وٺون

هاڻي اَسان پائٿاگورس جو سڌيان هڪ جهڙن ٽڪنڊن جي آڌار تي ثابت ڪنداسين. اِن ثابتيءَ لاءِ گوني ڪنڊ ٽڪنڊن جي هڪ جهڙائي خاصيت اَڀياس ڪنداسين.

هڪ جهڙائي ۽ گوني ڪنڊ ٽڪنڊا (Similarity and right angled triangle)

سڌيان : گوني ڪنڊ ٽڪنڊي جي هئپاٽينيوز تي نڪتل عمود سبب جيڪي ٽڪنڊا تيار ٿين ٿا اُهي اصلوڪي ٽڪنڊي ۽ هڪ ٻئي جي هڪ جهڙا هوندا آهن.



شڪل 2.5

ڏنل : $\triangle ABC$ ۾ $\angle ABC = 90^\circ$ ٽڪر $BD \perp AC$ ٽڪر

ثابت ڪرڻ :
$\Delta ADB \sim \Delta ABC$
$\Delta BDC \sim \Delta ABC$
$\Delta ADB \sim \Delta BDC$

ثابتي : ΔADB ۽ ΔABC ۾
$\angle BAC \cong \angle DAB$ ... (عام ڪنڊ)
$\angle ABC \cong \angle ADB$ ... (90° ڪنڊ)
$\Delta ABC \sim \Delta ADB$ ... ڪنڊ - ڪنڊ آزمائش (I)

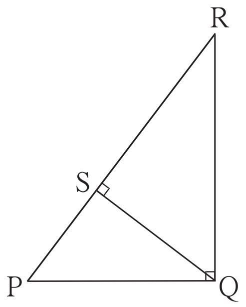
ΔBDC ۽ ΔABC ۾
$\angle ACB \cong \angle BCD$ ... (عام ڪنڊ)
$\angle ABC \cong \angle BDC$ ... (90° ڪنڊ)
$\Delta ABC \sim \Delta BDC$ ... ڪنڊ - ڪنڊ آزمائش (II)

$\therefore \Delta ADB \sim \Delta BDC$ مان (I) ۽ (II) ...(III)

$\therefore \Delta ADB \sim \Delta BDC \sim \Delta ABC$ مان (I), (II), (III)

ريکا ڳڻت سراسر سڌيان (Theorem of geometric mean)

گوني ڪنڊ ٽڪنڊي ۾ هئپاٽينيوز تي نڪتل عمود، ريکا ڳڻت سراسر آهي، اُنهن ٻن ٽڪرن جو، جن ۾ هئپاٽينيوز ورهايو وڃي ٿو.



شڪل 2.6

ثابتي : $\triangle PQR$ ۾ هئپاٽينيوز PR ٽڪر $\perp$ ٽڪر QS

$\Delta QSR \sim \Delta PSQ$ .... گوني ڪنڊ ٽڪنڊي جي هڪ جهڙائي

$$\therefore \frac{QS}{PS} = \frac{SR}{SQ} = \frac{QR}{PQ}$$

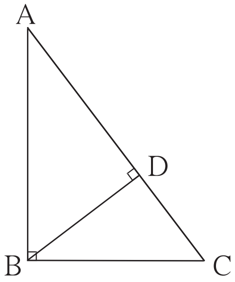
$$\therefore \frac{QS}{PS} = \frac{SR}{QS}$$

$$QS^2 = PS \times SR$$

عمود QS اِهو ٽڪر PS ۽ ٽڪر SR جو ”ريکا ڳڻت سراسر“ آهي.

پائٿاگورس جو سڌيان (Theorem of Pythagoras)

گوني ڪنڊ ٽڪنڊي ۾ هئپاٽينوز جي ٻي سگهه، باقي ٻين پاسن جي ٻي سگهه جي جوڙ برابر هوندي آهي.



شڪل 2.7

ڏنل : $\triangle ABC$ ۾ $\angle ABC=90^\circ$

ثابت ڪرڻ : $AC^2 = AB^2 + BC^2$

جوڙجڪ : ٽپڪي B وٽان پاسو AC تي عمود BD ڪيو A-D-C

ثابتي : $\triangle ABC$ ۾ هئپاٽينيوز $AC \perp$ ٽڪر BD (جوڙجڪ) .....

..... $\therefore \triangle ABC \sim \triangle ADB \sim \triangle BDC$

(گوني ڪنڊ ٽڪنڊن جي هڪ جهڙائي)

$\triangle ABC \sim \triangle ADB$

$\therefore \frac{AB}{AD} = \frac{BC}{DB} = \frac{AC}{AB}$ – نسبتي پاسا

$\therefore \frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AB}$

$AB^2 = AD \times AC$ .... (I)

$\triangle ABC \sim \triangle BDC$

$\therefore \frac{AB}{BD} = \frac{BC}{DC} = \frac{AC}{BC}$ – نسبتي پاسا

$\therefore \frac{BC}{DC} = \frac{AC}{BC}$

$BC^2 = DC \times AC$ .... (II)

(I) ۽ (II) جي جوڙ ڪري

$AB^2 + BC^2 = AD \times AC + DC \times AC$

$= AC\,(AD + DC)$

$= AC \times AC$ .... (A–D–C)

$\therefore AB^2 + BC^2 = AC^2$

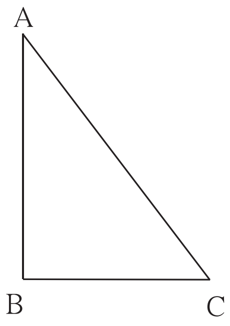
$\therefore AC^2 = AB^2 + BC^2$

پائٿاگورس سڌيان جو اُبتڙ (Converse of Pythagoras' theorem)

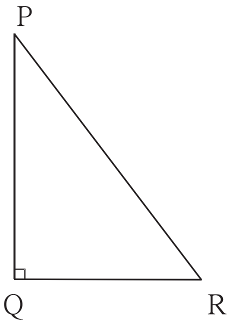
جيڪڏهن ڪنهن ٽڪنڊي ۾ هڪ پاسي ٻي سگهه، باقي ٻين پاسن جي ٻي سگهه جي جوڙ برابر آهي ته اُهي گوني ڪنڊي ٽڪنڊو آهي.

ڏنل : $\triangle ABC$ ۾، $AC^2 = AB^2 + BC^2$

ثابت ڪرڻ : $\angle ABC = 90^\circ$



شڪل 2.8



شڪل 2.9

جوڙجڪ : ΔPQR ڪيو جيئن ۾ $AB = PQ$، $BC = QR$ ۽ $\angle PQR = 90°$.

ثابتي : ΔPQR ۾ $\angle Q = 90°$

$PR^2 = PQ^2 + QR^2$ .... پائٿاگورس جو سڌيان

$= AB^2 + BC^2$ .... جوڙجڪ

$= AC^2$ .... ڏنل

$\therefore PR^2 = AC^2,$

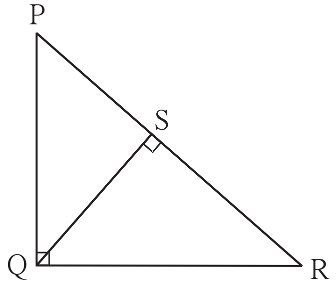
$\therefore PR = AC$

$\therefore \Delta ABC \cong \Delta PQR$ .... پاسو - پاسو - پاسو آزمائش

$\therefore \angle ABC = \angle PQR = 90°$

اِهو ڌيان ۾ رکو .

(1) (a) ڳوني ڪنڊ ٽڪنڊن ۾ هڪ جهڙائي



شڪل 2.10

ΔPQR ۾ $\angle Q = 90$، تڪر $PR \perp$ تڪر QS
هتي $\Delta PQR \sim \Delta PSQ \sim \Delta QSR$
اهڙي شڪل ۾ تيار ٿيل ٽڪنڊا (ڳوني ڪنڊ ٽڪنڊا) هڪ ٻئي سان هڪ جهڙا آهن.

(b) ريکا ڳٽ سراسر سڌيان مٿي ڏنل شڪل ۾

$\Delta PSQ \sim \Delta QSR$

$\therefore QS^2 = PS \times SR$

$\therefore$ تڪر QS اِهو تڪر PS ۽ تڪر SR جي ريکا ڳٽ سراسر آهي.

(2) پائٿاگورس جو سڌيان :

ڳوني ڪنڊ ٽڪنڊي ۾ هئپاٽينيوز جي ٻي سگهه، ٻين پاسن جي ٻي سگهه جي جوڙ برابر هوندي آهي.

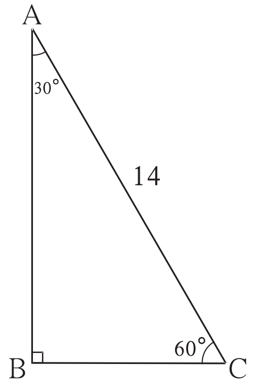
(3) پائٿاگورس سڌيان جي اُبتڙ :

جيڪڏهن ڪنهن ٽڪنڊي ۾ هڪ پاسي جي ڊيگهه، باقي ٻن پاسن جي ٻي سگهه جي جوڙ برابر آهي ته اُهو ٽڪنڊو ڳوني ڪنڊ ٽڪنڊو آهي اِن ڪان سواءِ ٻي به هڪ خاصيت ڪمائتي آهي، اُها به ڌيان ۾ رکو .

(4) ڳوني ڪنڊ ٽڪنڊي ۾ هڪ پاسو هئپاٽينيوز جي اَڌ هجي ته اها خاصيت $30°-60°-90°$ سڌيان جي اُبتڙ آهي.

مثال (1) شڪل 2.11 ڏسو $\triangle ABC$ ۾ $B=90$، $\angle A = 30^\circ$، $\angle B = 90^\circ$، $AC=14$ تہ AB ۽ BC لهو.

حل : ΔABC ۾ ،



شڪل 2.11

$$\angle B = 90^\circ,\ \angle A = 30^\circ,\ \therefore\ \angle C = 60^\circ$$

$30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$ سڏيان موجب ،

$$AB = \frac{\sqrt{3}}{2} \times AC \qquad BC = \frac{1}{2} \times AC$$

$$AB = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 14 \qquad BC = \frac{1}{2} \times 14$$

$$AB = 7\sqrt{3} \qquad BC = 7$$

مثال (2) شڪل 2:12 ۾ ΔABC ۾ تڪر $BC \perp$ تڪر AD، $\angle C=45^\circ$، $BD = 5$ ۽ $AC = 8\sqrt{2}$ ، تہ AD ۽ BC لهو.

حل : ΔADC ۾ ،

$$\angle ADC = 90^\circ,\ \angle C = 45^\circ,\ \therefore\ \angle DAC = 45^\circ$$

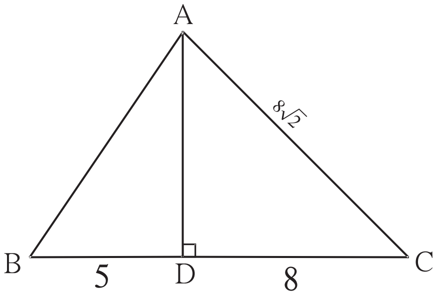
$$AD = DC = \frac{1}{\sqrt{2}} \times 8\sqrt{2} \ \ldots\ (45^\circ\text{-}45^\circ\text{-}90^\circ$$ سڏيان)

$$\therefore\ AD = 8 \qquad \therefore\ DC = 8$$

$$BC = BD + DC$$

$$= 5 + 8$$

$$= 13$$



شڪل 2.12

مثال (3) شڪل 2.13 ڏسو $\angle PQR = 90^\circ$ ، تڪر $QN \perp$ تڪر PR، $PN = 9$، $NR = 16$ تہ QN لهو .

حل : ΔPQR ۾، تڪر $QN \perp$ تڪر PR

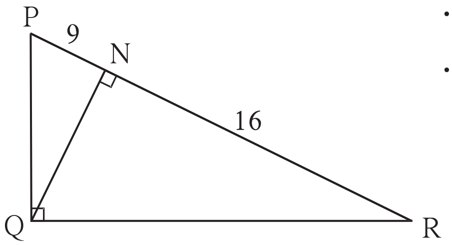
$$\therefore\ QN^2 = PN \times NR \ \ldots.$$ (ريڪا گڏت سراسر سڏيان)

$$\therefore\ QN = \sqrt{PN \times NR}$$

$$= \sqrt{9 \times 16}$$

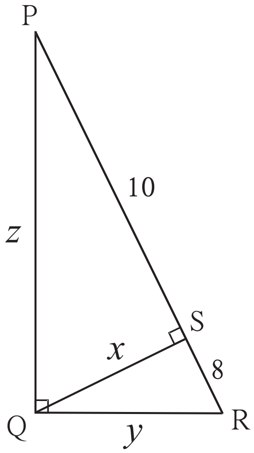
$$= 3 \times 4$$

$$= 12$$



شڪل 2.13

مثال (4) شڪل 2.14 ڏسو $\triangle PQR$ ۾ $\angle Q=90^\circ$، تڪر $PR \perp$ تڪر QS تہ x، y، z جا ملھ لھو



شڪل 2.14

حل : ΔPQR ۾ ، $\angle PQR = 90^\circ$ ، تڪر $QS \perp$ تڪر PR

ريکا گڏٽ سراسر .... $QS = \sqrt{PS \times SR}$

$= \sqrt{10 \times 8}$

$= \sqrt{5 \times 2 \times 8}$

$= \sqrt{5 \times 16}$

$= 4\sqrt{5}$

$\therefore \quad x = 4\sqrt{5}$

ΔQSR ۾ ، $\angle QSR = 90^\circ$

پا.س $\therefore QR^2 = QS^2 + SR^2$

$= \left(4\sqrt{5}\right)^2 + 8^2$

$= 16 \times 5 + 64$

$= 80 + 64$

$= 144$

$\therefore QR = 12$

ΔPSQ ۾ ، $\angle QSP = 90^\circ$

پا.س $\therefore PQ^2 = QS^2 + PS^2$

$= \left(4\sqrt{5}\right)^2 + 10^2$

$= 16 \times 5 + 100$

$= 80 + 100$

$= 180$

$= 36 \times 5$

$\therefore PQ = 6\sqrt{5}$

جواب : $x = 4\sqrt{5}$ ، $y = 12$ ، $z = 6\sqrt{5}$

مثال (5) هڪ ڪوني ڪنڊ ٽڪنڊي جا ڪوني ڪنڊ ٺاهيندڙ پاسا 9 س م ۽ 12 س م آهن تہ ٽڪنڊي جو هائپاٽينيوز لهو.

حل : $\triangle PQR$ ۾ $\angle Q=90^\circ$

$PR^2 = PQ^2 + QR^2$ (پائٿاگورس سڊيان)

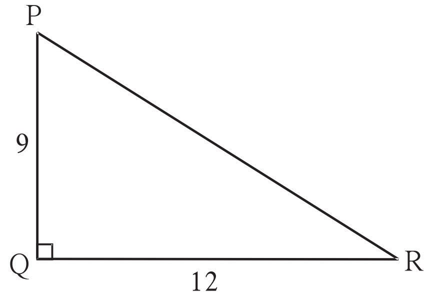
$= 9^2 + 12^2$

$= 81 + 144$

$\therefore PR^2 = 225$

$\therefore PR = 15$

هائپاٽينيوز = 15 س م



شڪل 2.15

مثال (6) $\triangle LMN$ ۾ $l=5$، $m=13$، $n=12$ تہ $\triangle LMN$ گوني ڪنڊ ٽڪنڊو آهي يا نہ؟ اُهو ٻڌايو

حل : $l = 5, \quad m = 13, \quad n = 12$

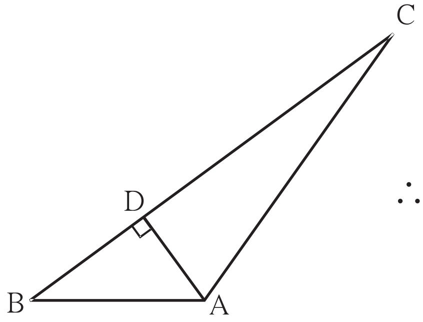
$l^2 = 25, \quad m^2 = 169, \quad n^2 = 144$

$\therefore m^2 = l^2 + n^2$

$\therefore$ پائٿاگورس سڌيان اُبتڙ موجب $\triangle LMN$ گوني ڪنڊ ٽڪنڊو آهي.

مثال (7) شڪل 2.16 ۾ $\triangle ABC$ ۾ ٽڪر $AD \perp BC$ ٽڪر تہ ثابت ڪريو .

$AB^2 + CD^2 = BD^2 + AC^2$



شڪل 2.16

حل : $\triangle ADC$ ۾ پائٿاگورس سڌيان

$AC^2 = AD^2 + CD^2$

$\therefore AD^2 = AC^2 - CD^2 \ldots (I)$

ΔADB ۾ ,

$AB^2 = AD^2 + BD^2$

$\therefore AD^2 = AB^2 - BD^2 \ldots (II)$

$\therefore AB^2 - BD^2 = AC^2 - CD^2$ .... [(I) ۽ (II) مان]

$\therefore AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2$

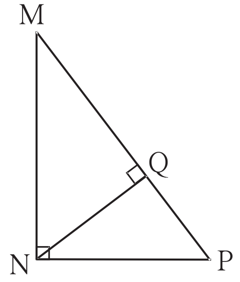
اڀياس 2.1

1. هيٺ ڏنل ٽيڪڙن مان پائٿاگورس جا ٽيڪڙا سڃاڻو سبب سان ٻڌايو

(1) (3, 5, 4) (2) (4, 9, 12) (3) (5, 12, 13)

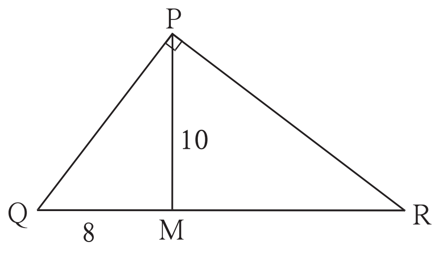
(4) (24, 70, 74) (5) (10, 24, 27) (6) (11, 60, 61)

2. شڪل 2.17 ۾ $\angle MNP = 90^\circ$،
ٽڪر $NQ \perp$ ٽڪر MP، $MQ = 9$،
$QP = 4$ ۽ NQ لهو.



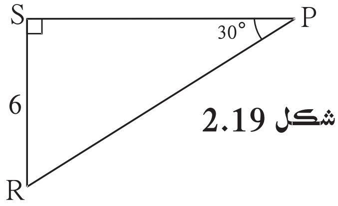
شڪل 2.17

3. شڪل 2.18 ۾ $\angle QPR = 90^\circ$،
ٽڪر $PM \perp$ ٽڪر QR ۽ $Q-M-R$،
$PM = 10$، $QM = 8$ تہ QR لهو.



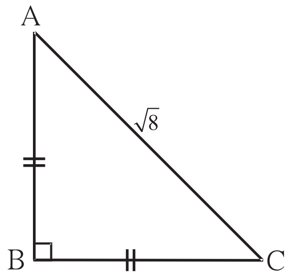
شڪل 2.18

4. شڪل 2.19 ۾ △PSR ۾ ڏنل ڄاڻ موجب RP ۽ PS لهو.



شڪل 2.19

5. شڪل 2.20 ۾ ڏنل ڄاڻ موجب AB ۽ BC لهڻ لاءِ هيٺ ڏنل مشغولي پوري ڪريو



شڪل 2.20

$AB = BC$ ………. $\square$

$\therefore \quad \angle BAC = \square$

$\therefore \; AB = BC = \square \times AC$

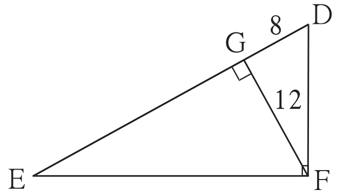
$= \square \times \sqrt{8}$

$= \square \times 2\sqrt{2}$

$= \square$

6. هڪ چورس جو اُريب 10 س م آهي چورس جي پاسي جي ڊيگهه ۽ گرد ماپ لهو.

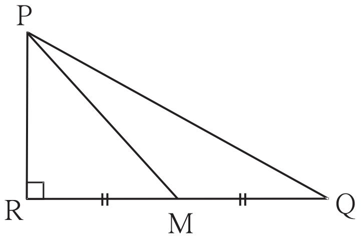
7. شڪل 2.21 ۾ $\angle DFE = 90^\circ$ ،
تڪر $FG \perp ED$ تڪر تہ $GD = 8, FG = 12$،
تہ (1) EG (2) FD ۽ (3) EF لهو.



شڪل 2.21

8. هڪ مستطيل جي ڊيگهه 35س م ۽ ويڪر 12 س م آهي تہ مستطيل جي اُريب جي ڊيگهه لهو

9.★ شڪل 2.22 ۾ M اِهو پاسي QR جو مڌيہ - ٽپڪو آهي.
$\angle PRQ = 90^\circ$ تہ ثابت ڪريو ،
$PQ^2 = 4PM^2 - 3PR$



شڪل 2.22

10.★ رستي جي ٻنهي طرفن عمارتن جون پيتيون هڪ ٻئي جي پوروچوت آهن 5.8 م ڊيگهه واري ڏاڪڻ جو هڪ چيڙو رستي تي رکڻ سان اُهو پهرين عمارت جي 4 م اوچائي تي لڳل دريءَ تائين پهچي ٿو ۽ رستي جي ٻئي پاسي اُهو چيڙو ٻي عمارت جي 4.2ميٽر اوچائي تي لڳل دريءَ تائين پهچي ٿو تہ رستي جي ويڪر لهو.

ڄاڻي وٺون.

پائٿاگورس سڏيان جو اُپيوگ

پائٿاگورس سڏيان ۾ گوني ڪنڊ ٽڪنڊي جي هيپاٽينيوز ۽ گوني ڪنڊ ٺاهيندڙ پاسن وچ ۾ لاڳاپو ٻڌايل آهي. ٽڪنڊي ۾ سوڙهي ڪنڊ جي سامهون وارن ٻن پاسن ۽ ويڪري ڪنڊ جي سامهون وارن ٻن پاسن جو لاڳاپو پائٿاگورس سڏيان موجب مقرر ڪري سگهجي ٿو. اِهو لاڳاپو هيٺ مثالن ۾ سمجهي وٺو.

مثال (1) $\triangle ABC$ ۾ $\angle C$ هڪ سوڙهي ڪنڊ آهي. ٽڪر $AD \perp BC$ ٽڪر

تہ ثابت ڪريو $AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2BC \times DC$

ڏنل شڪل ۾ سمجهو، $AB = c$، $AC = b$، $AD = p$، $BC = a$، $DC = x$

$\therefore BD = a - x$

$\triangle ADB$ ۾ پائٿاگورس سڏيان موجب

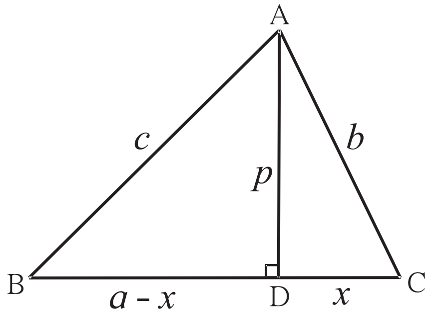
$c^2 = (a-x)^2 + \square$

$c^2 = a^2 - 2ax + x^2 + \square$ .... (I)

$\triangle ADC$ ۾ پائٿاگورس سڏيان موجب

$b^2 = p^2 + \square$

$p^2 = b^2 - \square$ .... (II)



شڪل 2.23

(II) جو ملهہ، (I) ۾ وجهو،

$c^2 = a^2 - 2ax + x^2 + b^2 - x^2$

$\therefore c^2 = a^2 + b^2 - 2ax$

$\therefore AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2BC \times DC$

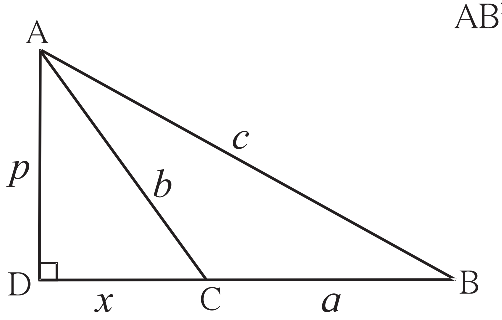
مثال (2) $\triangle ABC$ ۾ $\angle ACB$ هڪ ويڪري ڪنڊ آهي.

ثابت ڪريو $AB^2 = BC^2 + AC^2 + 2BC \times CD$

سمجهو $AD = p,\ AC = b,\ AB = c,$

$BC = a,\ DC = x$

$DB = a + x$



شڪل 2.24

ΔADB پائٿاگورس سڏيان موجب،

$c^2 = (a + x)^2 + p^2$

$c^2 = a^2 + 2ax + x^2 + p^2$ .... (I)

ساڳئي نموني $\triangle ADC$ ۾ ،

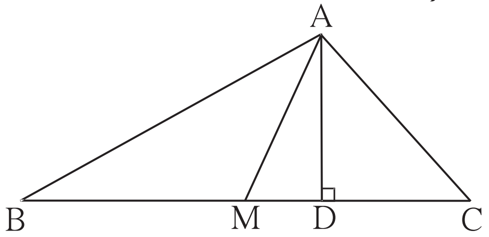
$$b^2 = x^2 + p^2$$
$$p^2 = b^2 - x^2 \qquad .... (II)$$

$\therefore$ (I) جو ملهه (II) ۾

$$\therefore c^2 = a^2 + 2ax + x^2 + b^2 - x^2$$
$$= a^2 + 2ax + b^2$$
$$\therefore AB^2 = BC^2 + AC^2 + 2BC \times CD$$

اَپولونيس سڏيان (Appollonius' Theorem)

$\triangle ABC$ ۾ ٽِڪو M اِهو پاسو BC جو مڌيہ ٽِڪو آهي تہ ثابت ڪريو $AB^2 + AC^2 = 2AM^2 + 2BM^2$



شڪل 2.25

ڏنل : $\triangle ABC$ ۾ M اهو پاسو BC جو مڌيہ ٽِڪو آهي.

ثابت ڪرڻ: $AB^2 + AC^2 = 2AM^2 + 2BM^2$

جوڙجڪ : ٽڪر $BC \perp AD$ ٽڪر ڪيو.

ثابتي : ٽڪر AM، ٽڪر BC مٿان عمود نہ آهي تنهن ڪري $\angle AMB$ ويڪري ڪنڊ $\angle AMC$ سوڙهي ڪنڊ آهي مٿي ڏنل مثال (1) ۽ (2) مان

$$AB^2 = AM^2 + MB^2 + 2BM \times MD \; ..... (I)$$
$$AC^2 = AM^2 + MC^2 - 2MC \times MD$$ ۽
$$\therefore AC^2 = AM^2 + MB^2 - 2BM \times MD \; (\because BM = MC) \; ....(II)$$

$\therefore$ (I) ۽ (II) جوڙ ڪرڻ ،

$$AB^2 + AC^2 = 2AM^2 + 2BM^2$$

جيڪڏهن ٽڪر $AM\perp$ ٽڪر BC مٿان عمود هجي تہ سڏيان جي ثابتي توهان لکو.

هن مثال ذريعي ٽڪنڊي جي پاسن ۽ وچ جو لاڳاپو سمجهہ ۾ اَچي ٿو. انکي اپولونيس سڏيان چئجي ٿو.

حل ڪيل مثال

مثال(1) $\triangle PQR$ ۾، ٽڪر PM اِهو مڌيان آهي PM=9 ۽ $PQ^2 + PR^2 = 290$ تہ QR لهو.

حل : $\triangle PQR$ ۾، ٽڪر PM مڌيان آهي. M اهو ٽڪر QR مٿان مڌيہ - ٽِڪو آهي.

$$QM = MR = \frac{1}{2} QR$$

$PQ^2 + PR^2 = 2PM^2 + 2QM^2$ (اَپولونيس سڌيان موجب)

$$290 = 2 \times 9^2 + 2QM$$

$$290 = 2 \times 81 + 2QM^2$$

$$290 = 162 + 2QM^2$$

$$2QM^2 = 290 - 162$$

$$2QM^2 = 128$$

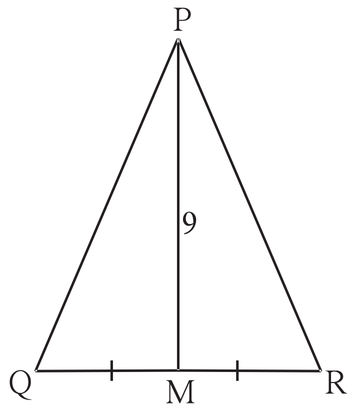
$$QM^2 = 64$$

$$QM = 8$$

$$\therefore \quad QR = 2 \times QM$$

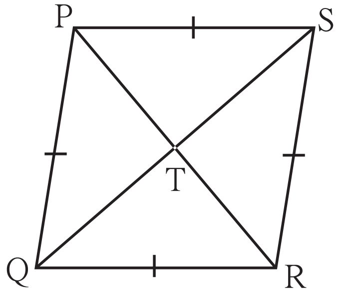
$$= 2 \times 8$$

$$= 16$$



شڪل 2.26

مثال (2) پور پاسي چوڪنڊي (رامبس) جي اُريبن جي ٻي سگهہ جو جوڙ، اُنجي پاسن جي ٻي سگهہ جي جوڙ برابر هوندو آهي. اِهو ثابت ڪريو.



شڪل 2.27

ڏنل : PQRS هڪ پور پاسو چوڪنڊو آهي. اُريب PR ۽ اُريب SQ هڪ ٻئي کي T وٽ ڪپين ٿا.

ثابت ڪرڻ : $PS^2 + SR^2 + QR^2 + PQ^2 = PR^2 + QS^2$

ثابتي : پور پاسي چوڪنڊي جا اُريب هڪ ٻئي کي پورن اَڌن ۾ ڪپيندا آهن اَپولونيس سڌيان موجب

$$PQ^2 + PS^2 = 2PT^2 + 2QT^2 \text{ .... (I)}$$

$$QR^2 + SR^2 = 2RT^2 + 2QT^2 \text{ .... (II)}$$

∴ (I) ۽ (II) جوڙ ڪرڻ،

$$PQ^2 + PS^2 + QR^2 + SR^2 = 2(PT^2 + RT^2) + 4QT^2$$

$$\therefore PS^2 + SR^2 + QR^2 + PQ^2 = 2(PT^2 + PT^2) + 4QT^2 \text{ .... } (RT = PT)$$

$$= 4PT^2 + 4QT^2$$

$$= (2PT)^2 + (2QT)^2$$

$$= PR^2 + QS^2$$

اِهو مثال پائٿاگورس جي سڌيان موجب بہ حل ڪري سگهجي ٿو.

اَڀياس 2.2

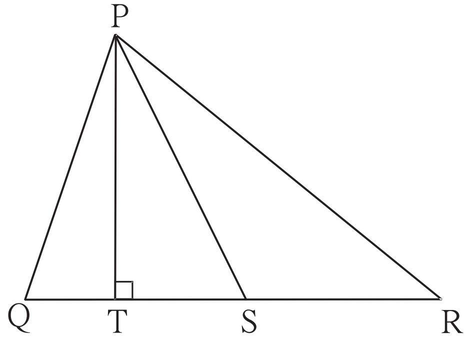
.1 $\triangle PQR$، ٽڪنو S اِهو پاسو QR جو مڌيہ ٽڪنو آهي. PQ=11، PR=17، PS=13 تہ QR جي ڊيگهہ لهو.

.2 $\triangle ABC$ ۾ AB=10، AC=7، BC=9 تہ ٽڪنيC وٽان نڪتل مڌيان جي ڊيگهہ ڪيتري؟

.3 شڪل 2.28 ۾مڌيان PS ڏنل آهي $\triangle PQR$ ۾ $PT \perp QR$ تہ ثابت ڪريو .

$$(1)\ PR^2 = PS^2 + QR \times ST + \left(\frac{QR}{2}\right)^2$$

$$(2)\ PQ^2 = PS^2 - QR \times ST + \left(\frac{QR}{2}\right)^2$$

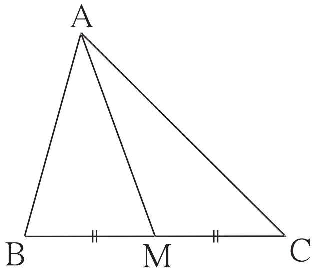


شڪل 2.28

.4 شڪل 2.29 ۾، $\triangle ABC$ ۾پاسي BCجو ٽڪنو M، اِهو مڌيہ ٽڪنو آهي.

$$AB^2 + AC^2 = 290$$

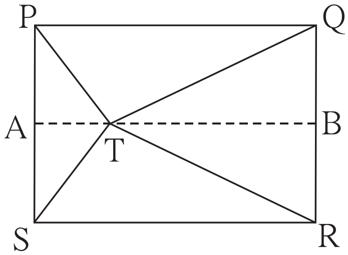
AM = 8 سم تہ BC لهو.



شڪل 2.29

.5★ 2.30 ۾ ٽڪنو T هڪ مستطيل PQRS ۾ ڏنل آهي تہ ثابت ڪريو

$$TS^2 + TQ^2 = TP^2 + TR^2$$



شڪل 2.30

(شڪل ۾ڏيکاريل A-T-B ليڪ ڪيو SR || AB هجي)

گڏيل اَڀياس 2

.1 هيٺ ڏنل پهو - متبدل سوالن جي جوابن مان مناسب متبدل چونڊيو.

(1) هيٺ ڏنل ٽپڙن مان ڪهڙا پائٿاگورس جا ٽپڙا آهن؟

(A) (1, 5, 10) (B) (3, 4, 5) (C) (2, 2, 2) (D) (5, 5, 2)

(2) ڪوني ڪنڊ ٽڪنڊي ۾ڪوني ڪنڊ ٺاهيندڙ پاسن جي ٻي سگهہ جو جوڙ169 آهي تہ هئپاٽنيوز جي ڊيگهہ ڪيتري؟

(A) 15 (B) 13 (C) 5 (D) 12

(3) هيٺ ڏنل تاريخن مان ڪهڙا عدد پائٿاگورس ٽپڙي سان واسطو رکن ٿا؟

(A) 15/08/17 (B) 16/08/16 (C) 3/5/17 (D) 4/9/15

(4) پاس جي ڊيگهه a،b،cواري ٽڪنڊي ۾ $a^2 + b^2 = c^2$ آهي ته اُهو ٽڪنڊو ڪهڙي قسم جو آهي؟

(A) ويڪري ڪنڊ ٽڪنڊو (B) سوڙهي ڪنڊ ٽڪنڊو (C) گوني ڪنڊ ٽڪنڊو (D) ٽپور پاسو ٽڪنڊو

(5) هڪ چورس جو اُريب $10\sqrt{2}$س م آهي ته سندس گرد ماپ ....آهي .

(A) 10 س م (B) $40\sqrt{2}$ س م (C) 20 س م (D) 40 س م

(6) هڪ گوني ڪنڊ ٽڪنڊي ۾ هئپاٽينيوز مٿان نڪتل عمود، هئپاٽينيوز کي 4 س م ۽ 9 س م ۾ ورهائي ٿو ته عمود جي ڊيگهه ڪيتري؟

(A) 9 س م (B) 4 س م (C) 6 س م (D) $2\sqrt{6}$ س م

(7) گوني ڪنڊ ٺاهيندڙ پاسن جي ڊيگهه 24 س م ۽ 18س م آهي ته هئپاٽينيوز جي ڊيگهه .... ٿيندي.

(A) 24 س م (B) 30 س م (C) 15 س م (D) 18 س م

(8) ΔABC ۾، $AB = 6\sqrt{3}$ س م، $AC = 12$ س م ۽ $BC = 6$ س م ته $\angle A$ جي ماپ ڪيتري؟

(A) 30° (B) 60° (C) 90° (D) 45°

2. هيٺيان مثال حل ڪريو

(i) هڪ ٽپور پاسي ٽڪنڊي جو پاسو 2a آهي ته اُنجي اوچائي لهو؟

(ii) 7 س م، 24 س م، 25 س م پاسن وارو ٽڪنڊو گوني ڪنڊ ٽڪنڊو آهي ڇا؟

(iii) هڪ مستطيل جا پاسا 11 س م ۽ 60 س م آهي ته اُنجي اُريب جي ڊيگهه لهو؟

(iv) هڪ گوني ڪنڊ ٽڪنڊي جا پاسا 9 س م ۽ 12 س م آهن ته هئپاٽينيوز جي ڊيگهه لهو.

(v) هڪ ٻپور پاسي گوني ڪنڊ ٽڪنڊي جو پاسو ‘x’ آهي ته هئپاٽينيوز جي ڊيگهه لهو .

(vi) ΔPQR ۾ $PQ = \sqrt{8}$ ، $QR = \sqrt{5}$ ۽ $PR = \sqrt{3}$ ڇا اِهو ٽڪنڊو گوني ڪنڊ ٽڪنڊو آهي ڇا؟ اِن ۾ گوني ڪنڊ ڪهڙي آهي؟

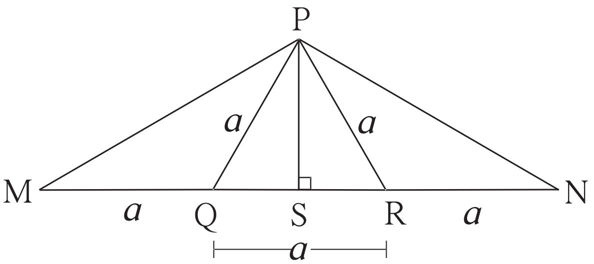
3. ΔRST ۾ ، $\angle S = 90°$، $\angle T = 30°$، $RT = 12$س م، RS ۽ ST س م لهو.

4. هڪ مستطيل جي ايراضي 192 چ. س م آهي. اِن جي ڊيگهه 16 س م آهي ته مستطيل جي اُريب جي ڊيگهه لهو.

5★. هڪ ٽپور پاسي ٽڪنڊي جي اوچائي $\sqrt{3}$ س م آهي ته اُنجي پاسن جي ڊيگهه ۽ گرد ماپ لهو.

6. ΔABC ۾ تڪر AP مڏيان آهي جيڪڏهن $BC = 18, AB^2 + AC^2 = 260$ ته AP لهو.

★7. $\triangle ABC$ هڪ ٽپور پاسو ٽڪنڊو آهي پايو BC تي ٽپڪو P اَهڙي نموني آهي جو $AB = 6\,PC = \frac{1}{3}\,BC$ س م ته AP لهو.



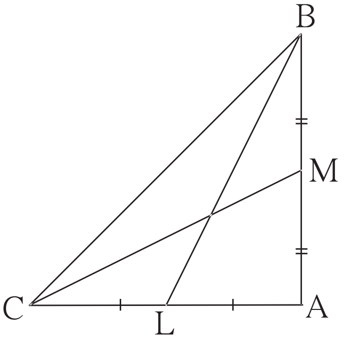
شڪل 2.31

8. شڪل 2:31 ۾ ڏنل ڄاڻ موجب ثابت ڪريو

$$PM = PN = \sqrt{3} \times a$$

9. ثابت ڪريو ته پوروچوٽ پاسي چوڪنڊي جي اُريبن جي ٻي سگهه جو جوڙ اُنجي پاسن جي ٻي سگهه جي جوڙ برابر آهي.

10. وَنيتا ۽ وجيه هڪ جڳهه کان اوڀر ۽ اُتر طرف ساڳيءَ رفتار سان روانا ٿيا. ٻن ڪلاڪن کان پوءِ اُنهن وچ۾ مفاصلو $15\sqrt{2}$ ڪ م هو ٻڌايو ته اُنهن جي ڪلاڪ ۾ رفتار ڪيتري؟

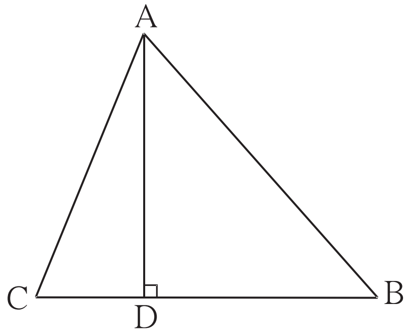


شڪل 2.32

★11. $\triangle ABC$ ۾ $\angle BAC=90^\circ$ تڪر BL ۽ تڪر CM اِهي $\triangle ABC$ جا مڏيان آهن ثابت ڪريو:

$$4(BL^2 + CM^2) = 5\,BC^2$$

12. هڪ پوروچوٽ پاسي چوڪنڊي جي لاڳيتي پاسن جي ٻي سگهه جو جوڙ 130 چ س م آهي اُنهن جي هڪ اُريب جي ڊيگهه 14 س م آهي ته ٻئي اُريب جي ڊيگهه لهو.



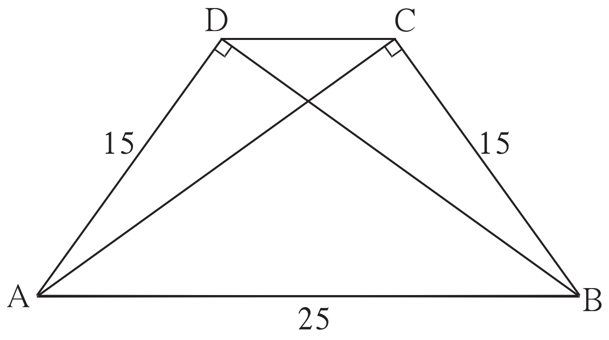
شڪل 2.33

13. $\triangle ABC$ ۾ تڪر $BC \perp$ تڪر AD
DB=3CD
ته ثابت ڪريو

$$2AB^2 = 2AC^2 + BC^2$$

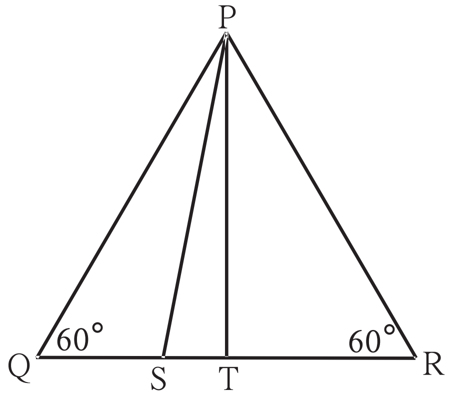
★14. هڪ ٻپور پاسي ٽڪنڊي ٽهڪندڙ پاسن جي ڊيگهه 13 س م آهي ۽ پايو 10 س م آهي ته اُن ٽڪنڊي جي مڏياتن جي عام ٽپڪي کان پايي سامهون نڪتل عمود جي ڊيگهه لهو.

15. پور عمودي چوڪنڊي ABCD ۾
تڪر DC||AB تڪر
تڪر AD⊥ تڪر BD
تڪر BC⊥ تڪر AC
تہ AD = 15 ،BC = 15 ،AB = 25
A(□ABCD) تہ ڪيتري ؟



شڪل 2.34

16.[★] △PQR هڪ ٽيپور پاسو ٽڪنڊو آهي ٽپڪو S
اِهو تڪر QR مٿان اَهڙي نموني آهي جو
$QS = \frac{1}{3}$ QR ثابت ڪريو؛ $9\ PS^2 = 7\ PQ^2$



شڪل 2.35

17.[★] تڪر PM اِهو △PQR جي مڏيان آهي.PQ=40،PR42،PM=29 تہ QR لهو.

18. تڪر AM اهو △ABC جي مڏيان آهي AB=22،AC=34 ، BC=24 تہ AM جي ڊيگهہ لهو.

ICT Tools or Links

ونڊوز اِنٽرنيٽ ايڪسپلور ۾ 'Story on the life of Pythagoras' ۾ پيون اَنٽر-ڪريائن جا ويڊيو ڏسو.
Slide Show تيار ڪريو . اَڳتي واري لنڪ ڏسو http://en.wikipedia.org/wiki/

RIG6I9

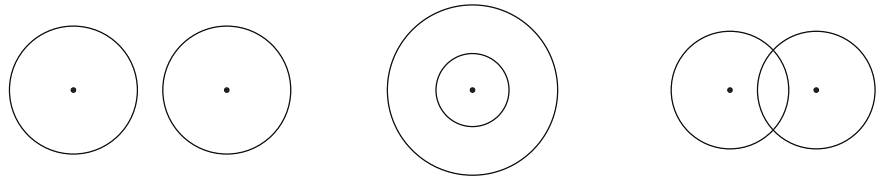
3 گول

چاڪي وتون.

- هڪ ئي ٽيڪن مان لنگهندڙ گول
- قاطع ۽ ڇُهڻي
- ڇُهندڙ گول
- گول جو ڪمان
- اِرديل ڪنڊ. اَنترڇيديل ڪمان
- چڪرڪ (محدود) چوڪندو
- ڇهڻي - قاطع سڏيان
- انتر ڪپيندڙ زهہ سڏيان

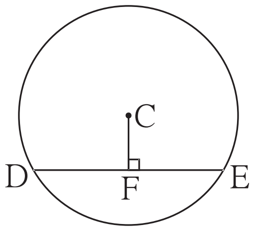
ذرا ياد ڪريو .

توهان ڪي گول جي ياڻن مرڪز، نيم قطر، قطر، زهہ، اَندريون حصو، ٻاهريون حصو اِنهن بابت توهان جي سني سڃاڻپ ٿي آهي ڻهڪندڙ گول، هم -مرڪزي گول ۽ ڪپيندڙ گول اِهي اِسم ياد ڪريو.



درجي نائين ۾سڪيل زهن جي خاصيتن ڪي هيٺ ڏنل مشغوليءَ جي مدد سان ياد ڪريو.

مشغولي I : پرواري شڪل ۾گول جو مرڪز C آهي. زهہ DE آهي زهہ DE ⊥ ٽڪر CF. قطر = 20 س م ، = 16 س م = (DE)1 تہ = (CF)1 = ___________



شڪل 3.1

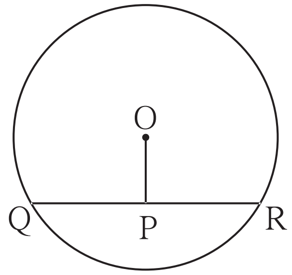
اِن سوال ڪي حل ڪرڻ لاءِ مناسب سڏيان ۽ خاصيتون ڪم آڻي لکو.

(1) گول جي مرڪز ڪان زهہ تي نڪتل عمود ___________

(2) ___________

(3) ___________

مشغولي II : پرواري شڪل ۾ گول جو مرڪز O آهي. تڪر QR هڪ زهه آهي. P اِهو زهه QR جو مڌيہ ٽبڪو آهي. جيڪڏهن QR=24، OP=10 تہ گول جو نيم قطر لهو.



شڪل 3.2

اِهو سوال حل ڪرڻ لاءِ گُهربل سڏيان لکو.

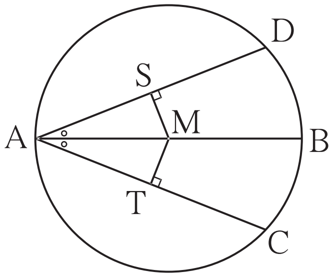
(1) ______________________________

(2) ______________________________

اِهي سڏيان ڪم آڻي مثال حل ڪريو :

مشغولي III : گول جو مرڪز M شڪل ۾ ڏنل آهي. تڪر AB اِهو قطر آهي. زهه AD تڪر MS⊥ زهه MT⊥AC زهه $\angle DAB \cong \angle CAB$.

تہ ثابت ڪريو ; AD زهه ≅ زهه AC.



شڪل 3.3

اهو سوال حل ڪرڻ لاءِ هيٺ ڏنل سڏيانن مان ڪهڙو سڏيان واپرائبو؟

(1) گول ۾ جيڪڏهن ٻہ زهہ مرڪز کان هم مفاصلي آهن تہ اُهي زهہ نهڪندڙ هوندا آهن.

(2) گول ۾ نهڪندڙ زهہ مرڪز کان هم - مفاصلي هوندا آهن. اِن کان سواءِ ٽڪنڊن جي ڪهڙي آزمائش ڪم آڻبي؟

(1) پاسو-ڪنڊ-پاسو ، (2) ڪنڊ-پاسو - ڪنڊ ، (3) ڪنڊ-ڪنڊ-ڪنڊ ،

(4) ڪنڊ-ڪنڊ-پاسو ، (5) هئپاٽينيوز پاسو

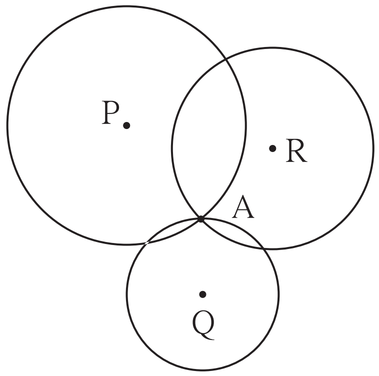
مناسب ڪسوٽي ۽ سڏيان ڪم آڻي ثابتي لکو.

چاڻي وٺون.

هڪ ٻہ، ٽي ٽبڪن مان لنگهندڙ گول

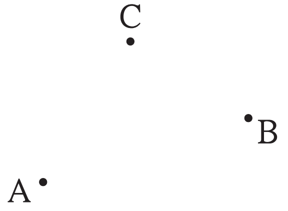
پر واري شڪل ۾ هڪ سطح ۾ ٽبڪو A ڏيکاريل آهي. R,Q,P مرڪزن وارا گول ٽبڪي A مان لنگهندڙ آهن. ٽبڪي A مان اَڃان ڪيترا گول لنگهي سگهبا. توهان کي ڇا ٿو لڳي؟ توهان جو جواب 'ڪيترا ٻہ' يا 'بي اَنت' اِهو آهي تہ توهان برابر آهيو.

هڪ ٽبڪي مان لنگهندڙ گول 'بي اَنت' هوندا آهن.



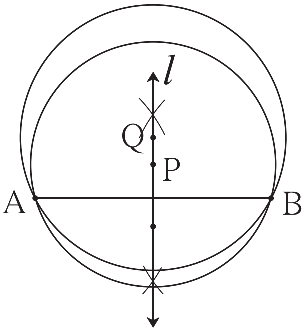
شڪل 3.4

پر واري شڪل ۾ A ۽ B اِنهن جدا جدا ٽپڪن مان لنگهندڙ ڪيترا گول ٿيندا؟ A,B,C اِنهن ٽنهي ٽپڪن مان لنگهندڙ گول ڪيترا ٿيندا؟



شڪل 3.5

مشغولي I : ٽپڪي A ۽ ٽپڪي B کي ڳنڍيندڙ ٽڪر AB ڪيو. اِن ٽڪر جو عمودي اَڌڪ ليڪ l ڪيو ليڪ l تي P ٽپڪو مرڪز ڪٽي ۽ نيم قطر PA ڪٽي گول ڪيو. اِهو گول B مان به لنگهي ٿو. اِن جو ڪارڻ ڳولهي لهو. (عمودي ليڪ جي خاصيت ياد ڪريو)

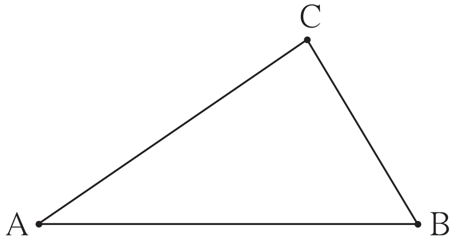


شڪل 3.6

ليڪ l تي هڪ ٻيو ٽپڪو Q ڪڍو. ٽپڪو Q مرڪز ۽ نيم قطر QA ڪٽي گول ڪيو. ڇا اِهو گول B مان لنگهندو؟ ويچار ڪريو.

ٽپڪي A ۽ ٽپڪي B مان لنگهندڙ اَچا وڌيڪ ڪيترا گول نڪري سگهن ٿا؟ اُنهن جا مرڪز ڪٿي آهن.

مشغولي II : غير هم ليڪ ٽپڪا A,B,C لاءِ ڪيو. اِنهن ٽنهي مان لنگهندڙ گول ڪيڻ لاءِ ڇا ڪبو؟ اِنهن ٽنهي ٽپڪن مان لنگهندڙ گول ڪيو. اِنهن ٽنهي ٽپڪن مان اَچا هڪ گول ڪيڍي سگهبو ڇا؟ ويچار ڪريو.



شڪل 3.7

مشغولي III : هم ليڪ ٽپڪا D,E,F ڪڍو اِنهن ٽنهي ٽپڪن مان لنگهندڙ گول ڪيڻ جي ڪوشش ڪريو. اَهڙو گول نہ ڪيڍي سگهبو. ڇو نہ ڪيڍي سگهبو، اُن بابت ويچار ڪريو.

اِهو ڌيان ۾ رکو.

(1) هڪ ٽپڪي مان لنگهندڙ گول بيشمار هوندا آهن.

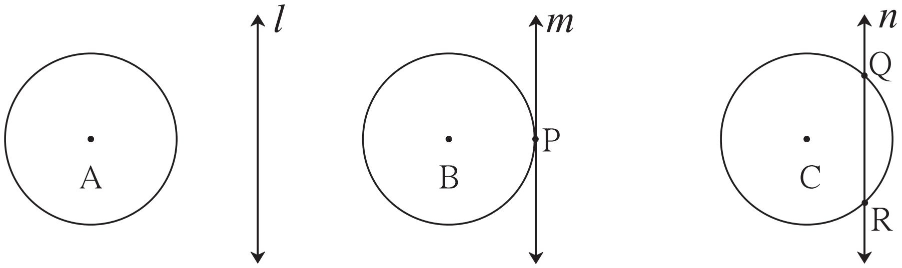
(2) ٻن جدا جدا ٽپڪن مان لنگهندڙ گول بيشمار هوندا آهن.

(3) ٽي غير هم ليڪ ٽپڪن مان هڪ ۽ فقط گول ڪيڍي سگهبو.

(4) ٽي هم ليڪ ٽپڪن مان هڪ ۾ گول نہ ڪيڍي سگهبو.

جاڻي وٺون.

قاطع ۽ ڇهڪي (Secant and tangent)



شڪل 3.8

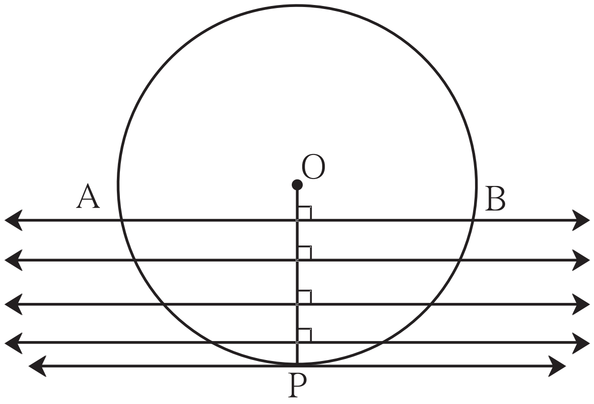
شڪل ۾ ليڪ l ۽ گول ۾ ڪوبہ عام ٽٻڪو ڪونهي ليڪ m ۽ گول ۾ فقط هڪ ٽٻڪو عام آهي.

ليڪ m کي ڇهڪي ۽ ٽٻڪي n کي ڇيڙ - ٽٻڪو چئبو آهي. ليڪ n اِها گول کي ٻن ٽٻڪن Q ۽ R ۾ ڪپي ٿي ليڪ n کي قاطع چئبو آهي.

QR گول ۾ اَندر آهي اِهو گول جو زهہ آهي گول جي ڇهڪيءَ جي هڪ اَهميت واري خاصيت هڪ مشغوليءَ ذريعي سمجهنداسين.

مشغولي :

مرڪز O کڻي هڪ وڏو گول ڪيو. اُن ۾ هڪ نيم قطر OP ڪڍو. اِن نيم قطر جي عمود هڪ ليڪ ڪيو اِن ليڪ ۽ گول ڪپيندڙ ٽٻڪن کي A ۽ B نالو ڏيو. ويچار ڪريو. ليڪ AB اِها O کان P طرف آهستي آهستي سرڪندي وڃي جيئن اُها نئين حالت ۽ شروعاتي حالت، اهي پورڀچوت هجن مطلب ليڪ AB ۽ نيم قطر وچ ۾ هميشهہ گوني ڪنڊ هجي



3.9

ائين ڪندي A ۽ B هڪ ٻئي جي ويجهو ايندا وڃن ٿا. آخر ۾ اُهي ٽٻڪي P وٽ اَچي ملن ٿا ان حالت ۾ ليڪ AB اها گول جي ڇهڪي بڻجي پوي ٿي.

پر نيم قطر OP ۽ ليڪ AB وچ ۾ ڪنڊ گوني ئي رهي ٿي.

اِن مان سمجهہ ۾ اَچي ٿو تہ گول جي ڪنهن بہ ٽٻڪي وٽ ڇهڪي، نيم قطر جي ڇيڙ ٽٻڪي سان گوني ڪنڊ ٺاهي ٿي اِن کي ڇهڪي سڏيان چئبو آهي.

چھٽي - نيم قطر سڌيان (Tangent theorem)

سڌيان : گول تي ڪنهن به ٽٻڪي وٽ ڇھٽي، نيم قطر تي ملائي ٽٻڪي وٽ عمود ٿئي ٿي.

وڌيڪ ڄاڻ لاءِ :

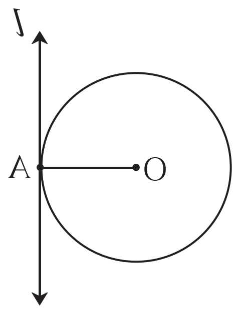
ڏنل : 'O' مرڪز واري گول ۾ ليڪ 'l' A وٽ ڇُھي ٿي ٽڪر OA نيم قطر آھي.

ثابت ڪرڻ : نيم قطر OA ⊥ ليڪ l

ثابتي : سمجھو ته ليڪ l ٽڪر OAتي عمود نہ آھي.

ٽٻڪيOوٽان ليڪ l تي عمود ڪيو.

ٽٻڪو B اُن جو پايو آھي.



شڪل 3.10

اھو مڃيندي تہ ٽٻڪو A اِھو ٽٻڪي B کان جُدا آھي ليڪ l تي ٽٻڪو C اَھڙي نموني

ڪڍو جيئن A-B-C ۽ BA = BC.

ھاڻي ، Δ OBC ۽ Δ OBA ۾.

ٽڪر BC ≅ ٽڪرBA..........

∠ OBC ≅ ∠OBA ....

ٽڪر OB ≅ ٽڪرOB

∴ Δ OBC ≅ Δ OBA ....

∴ OC = OA

پر ٽڪر OA تہ نيم قطر آھي

اِن ڪري ٽڪر OC پڻ نيم قطر آھي.

مطلب ٽٻڪو C اھو گول مٿان آھي

مطلب ليڪ l اِھا گول کي A ۽ C اِنھيءَ ٻن ٽٻڪن وٽ ڇُھي ٿي

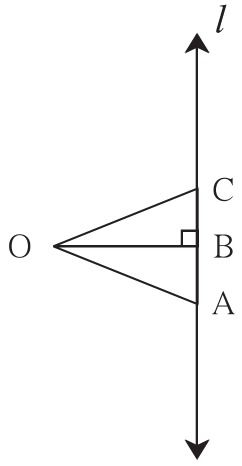
اِھو ڇھٽيءَ جي وصف ۾ اُبتر آھي.

اسان جو مڃڻ غلط آھي.

اِن ڪري ليڪ l اھا نيم قطرOAجو عمود نہ آھي،

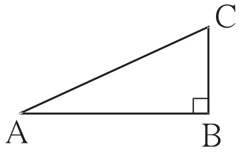
اِھو غلط آھي.

∴نيم قطر OA ⊥ ليڪ l



شڪل 3.11

ذرا ياد ڪريو.



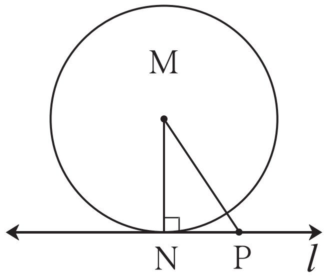
شڪل 3.12

گوني ڪُنڊ ٽڪنڊي ۾ هئپاٽينيوز وڏي ۾ وڏو پاسو هوندو آهي اِهو ڪهڙن ڪهڙن سڏيانن جي آڌار ۾ ثابت ڪري سگهجي ٿو؟

چاڪي وٺون.

ڇهنٽي نيم قطر سڏيان جو اُبتڙ (Converse of Tangent theorem)

سڏيان : گول جي نيم قطر تي سنڌس ٻاهرين پڇڙ وٽ ڏنل عمودي ليڪ اُن گول جي ڇهنٽي ٿئي ٿي.



شڪل 3.13

ڏنل : ٽٻڪو M گول جو مرڪز آهي. ٽڪر MN نيم قطر N ٽٻڪي وٽ ليڪ l عمود آهي.

ثابت ڪرڻ : ليڪ l اها گول جي ڇهنٽي آهي.

ثابتي : ليڪ l ئي ٽٻڪي N کي ڇڏي ٻيو ٽٻڪو P ڪٽو. ٽڪر MP ڪيو.

هاڻي $\triangle MNP$ ۾ $\angle N$ گوني ڪنڊ آهي.

ٽڪر MP هئپاٽينيوز آهي.

ٽڪر MN > ٽڪر MP

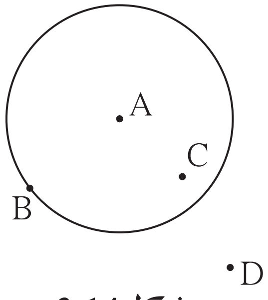
مطلب ٽٻڪو P گول ئي تہ آهي.

ليڪ l تي ٽٻڪي N کان سواءِ ٻيو ڪو بہ ٽٻڪو گول تي نہ آهي.

ليڪ l اها گول جي هڪ ∴ ٽٻڪي وٽ ڇهي ٿي.

مطلب ليڪ l گول جي ڇهنٽي آهي.

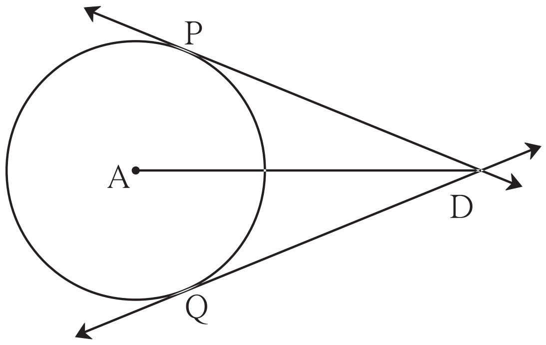
اچو تہ ويچار ڪريون.



شڪل 3.14

مرڪز A هوندڙ گول تي ٽٻڪو B ڏنل آهي. اِن ٽٻڪي مان لنگهندڙ ڇهنٽي ڪيڏي آهي.
ٽٻڪي B مان بيشمار ليڪون لنگهي سگهجن ٿيون؟ اُنهن مان ڇهنٽي ڪهڙي ليڪ آهي؟ اِها ڪيئن ڪيڏبي، ڇا ٽٻڪي B مان هڪ کان وڌيڪ ڇهنٽيون نڪري سگهجن ٿيون؟

گول جي اندرين ڀاڱي ۾ 'C' اِن ٽپڪي مان ، اُن گول ڏانهن ڇهٽي ڪڍي سگهبي ڇا؟



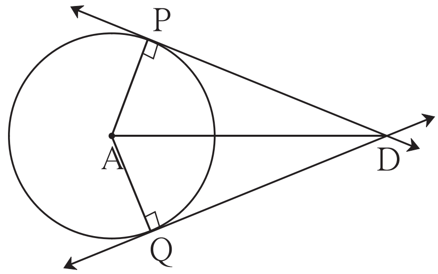
شڪل 3.15

گول جي ٻاهرين پاسي ٽپڪي D مان گول ڏانهن ڇهٽي ڪڍي سگهجي ٿي ڇا؟
اهڙيون گهڻيون ڇهٽيون ڪڍيون وينديون شڪل مان ظاهر آهي ته گول ٻاهرين ڀاڱي جي ٽپڪي مان ٻه ڇهٽيون ڪڍي سگهجن ٿيون.
ير واري شڪل ۾ ليڪ DP ۽ ليڪ DQ اهي A مرڪز واري گول تي ٽپڪي P ۽ ٽپڪي Q وٽ ڇُهن ٿيون. اِنهن ٽڪرن DP ۽ DQ کي ڇهٽي ٽڪر چئجي ٿو.

ڇهٽي ٽڪرن جو سڌيان (Tangent Segment Theorem)

سڌيان : گول ۾ ٻاهر ورتل ٽپڪي مان گول طرف ڪيل ڇهٽي ٽڪر نهڪندڙ هوندا آهن.

ير واري شڪل لاءِ 'ڏنل' ۽ 'ثابتي' مقرر ڪريو



شڪل 3.16

ثابتي : △PAD ۽ △QAD ۾

پاسو PA ≅ ________ (هڪ گول جا نيم قطر)

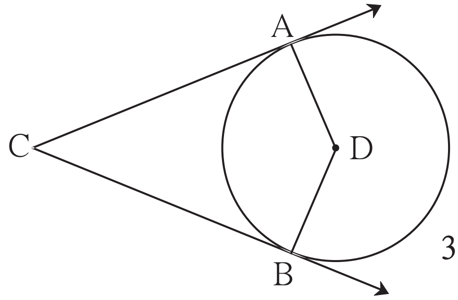
پاسو AD ≅ پاسو AD ________

∠APD ≅ ∠AQD = 90° ...... (ڇُهٽي سڌيان)

∴ Δ PAD ≅ Δ QAD ________

∴ پاسو DP ≅ پاسو DQ ________

حل ٿيل مثال



شڪل 3.17

مثال (1) D مرڪز واري گول ۾ ∠ACB = 52° CA ۽ BC اِهي ڇهٽيون آهن ته ∠ADB لهو.

حل : چوڪنڊي جي چئني ڪندن جي ماپن جو جوڙ 360°

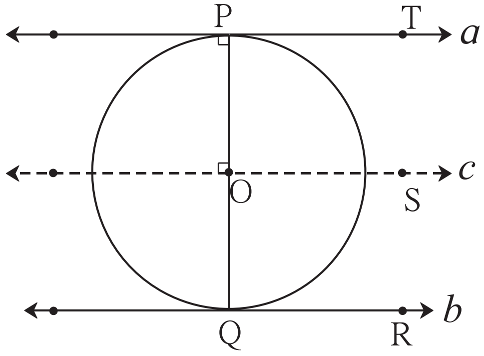
$\therefore \angle ACB + \angle CAD + \angle CBD + \angle ADB = 360°$

$\therefore 52° + 90° + 90° + \angle ADB = 360°$ .... (ڇُهٽي سڌيان)

$\therefore \angle ADB + 232° = 360°$

$\therefore \angle ADB = 360° - 232° = 128°$

مثال (2) ليڪ a ۽ ليڪ b اِهي O مرڪز واري گول تي سلسليوار P ۽ Q وٽ ڇهندڙ پوروڇوٽ ڇهڻيون آهن ثابت ڪريو تہ PQ اهو گول جو قطر آهي.



شڪل 3.18

ثابتي : ٽبڪي O وٽان هڪ ليڪ C ڪڍو جيڪا ليڪ a جي پوروڇوٽ هجي نيم قطر OP ۽ OQ ڪڍو.

$\angle OPT = 90°$ ..... (ڇهڻي سڌيان)

$\therefore \angle SOP = 90°$ .....(اَندريون ڪندون) .... (I)

ليڪ a || ليڪ c ..... (رچنا)

ليڪ a || ليڪ b ..... (ڏنل)

ليڪ b || ليڪ c

$\angle OQR = 90°$ .....

$\therefore \angle SOQ = 90°$ ..... اندريون ڪندون .... (II)

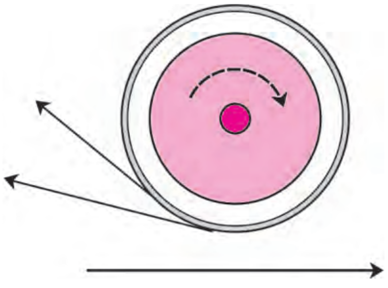
$\therefore$ (I) ۽ (II) مان ،

$\angle SOP + \angle SOQ = 90° + 90° = 180°$

$\therefore$ ڪرڻو OP ۽ ڪرڻو OQ اهي مخالف ڪرڻا آهن.

$\therefore$ Q,O,P اهي هم ليڪ ٽبڪا آهن.

$\therefore$ ٽڪر PQ اهو قطر آهي.


قيٿن جي هلڻ جو طرف

برسات ۾ هلندڙ واهڻ ۾ ٽاير مان اُڏامندڙ پاڻيءَ جو نظارو توهان ڏٺو آهي اِهو گول ۽ ڇهڻيءَ وانگر توهان کي لڳي ٿو اِها وهڪ ڪيئن آهي اِهو وڳيان جي اُستاد کان ڄاڻ حاصل ڪريو.

اهو ڌيان ۾ رکو

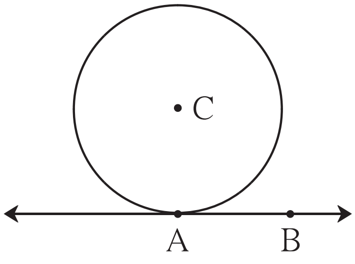
(1) ڇهڻي سڌيان گول ڏانهن نڪتل ڇهڻي نيم قطر جي ڇيڙ وٽ عمود هوندي آهي.

(2) ڇهڻي سڌيان اُبتڙ گول جي نيم قطر جي ٻاهرين ملاقي ٽبڪي وٽ نڪتل عمود، اها ليڪ گول جي ڇهڻي هوندي آهي.

(3) گول جي ٻاهران ٽبڪي مان نڪتل ڇهڻي ٽڪر ٺهڪندڙ هوندا آهن.

اَڀياس 3.1

1. پرواري شڪل ۾ گول جو مرڪز C آهي. گول جو نيم قطر 6 س م آهي. ليڪ AB اِهو گول تي ٽٻڪي A وٽ ڇُهي ٿو اِن جاڻ موجب، سوالن جا جواب ڏيو.



شڪل 3.19

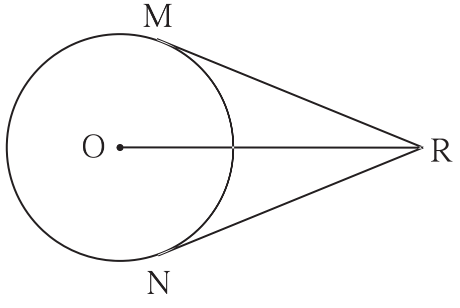
(1) $\angle CAB$ جي ماپ ڪيتري؟

(2) ٽٻڪو C اهو ليڪ AB ڪان ڪيترو پري آهي؟

(3) $d(A,B)=6$ س م تہ $d(B,C)$ لهو.

(4) $\angle ABC$ جي ماپ ڪيتري؟

2. پر واري شڪل ۾ ٽٻڪي O مرڪز واري گول ڏانهن نڪتل ڇهٽي ٽڪر RM ۽ RN اهي نمبر وار M ۽ N وٽ ڇُهن ٿا جيڪڏهن QR=10س م ۽ گول جو نيم قطر 5 س م آهي تہ



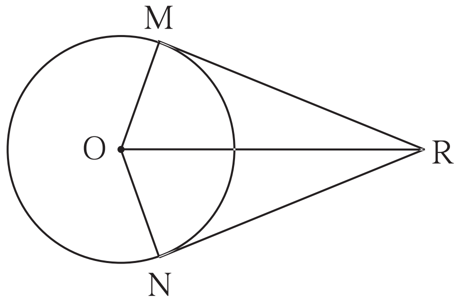
شڪل 3.20

(1) هرهڪ ڇهٽي - ٽڪر جي ڊيگهہ ڪيتري ؟

(2) $\angle MRO$ جي ماپ ڪيتري؟

(3) $\angle MRN$ جي ماپ ڪيتري؟

3. ٽڪر RM ۽ ٽڪر RN اِهي O مرڪز واري گول جا ڇهٽي ٽڪر آهن تہ ثابت ڪريو تہ ٽڪر OR اِهو $\angle MRN$ ۽ $\angle MON$ جو اَڌڪ آهي.



شڪل 3.21

4. نيم قطر 4.5 س م واري گول ۾ بہ ڇهٽيون هڪ ٻئي جي پورچوٽ آهن تہ اُنهن ڇهٽين جي وچ ۾ مفاصلو لهو.

ICT Tools or Links

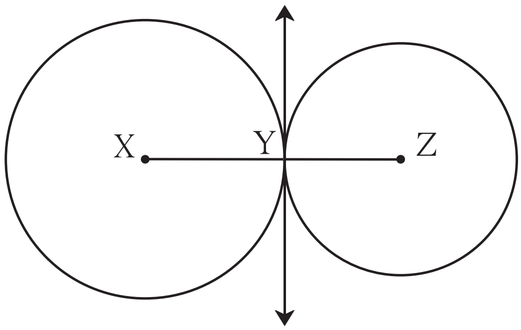
ڪمپيوٽر تي جيئو جبرا اُن Software مدد سان گول ۽ گول ٻاهران ٽٻڪي مان ڇهٽيون ڪڍو. ڇا ڇهٽِي ٽڪِر نهڪندڙ آهي؟ اِن جي جاچ ڪريو.

جاڻي وٺون.

ڇُهندڙ گول (Touching Circles)

مشغولي I :

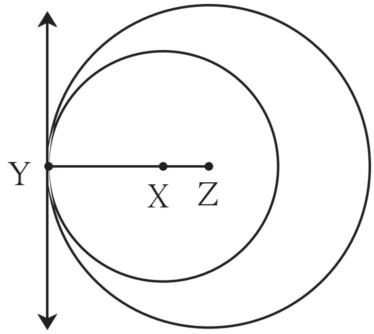
X-Y-Z اِهي هم ليڪ جو ٽپڪا آهن مرڪز X ۽ نيم قطر XY کڻي هڪ گول ڪڍو. مرڪز Z ۽ نيم قطر YZ ڪڍي، هڪ ٻيو گول ڪڍو. اهي ٻئي گول هڪ ٻئي کي Y ٽپڪي وٽ ڇُهن ٿا. ٽپڪي Y وٽان هڪ ليڪ ڪڍو اها YZ ڪي عمود هجي. اها ليڪ ٻنهي گولن جي عام ڇهڻي آهي اهو ڌيان ۾ رکو.



شڪل 3.22

مشغولي II :

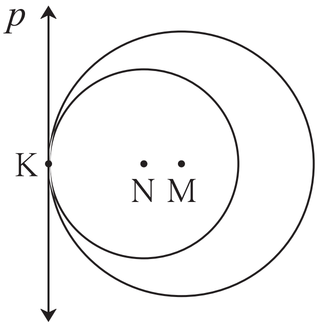
شڪل 3.23 ۾ X-Y-Z اِهي هم ليڪ ٽپڪا آهن مرڪز Z ۽ نيم قطر YZ کي کڻي هڪ گول ڪڍو اهي ٻئي گول ٽپڪي Y وٽ هڪ ٻئي کي ڇُهن ٿا اهو آزمودو وٺو. ٽپڪي Y مان لنگهندڙ هڪ ليڪ ڪڍو جا ٽڪر YZ تي عمود هجي.



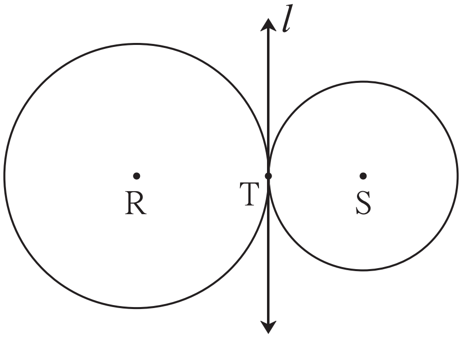
شڪل 3.23

اها ليڪ ٻنهي گولن جي عام ڇهڻي آهي. اهو ڌيان ۾ رکو.
مٿي ڏنل مشغولِيون مان ظاهر آهي ته ٻنهي شڪلين ۾ ٻہ ئي گول هڪ سطح ۾ آهن ۽ هڪ ٻئي کي ساڳئي ٽپڪي وٽ ڇهن ٿا. اِنهن کي ڇهندڙ گول چئبو آهي.

هڪ ئي سطح ۾ ٻہ گول جنهن ٽپڪي تي ملن ٿا اُن مان لنگهندڙ ليڪ ٻنهي گولن جي عام ڇهڻي آهي ۽ اِن عام ٽپڪي کي ڇهڻي ٽپڪو چئبو آهي.



شڪل 3.25



شڪل 3.24

شڪل 3.24 ۾ مرڪز R ۽ S وارن گولن کي l ليڪ کي هڪئي ٽيڪي T وٽ ڪپي ٿي. مطلب اها l ليڪ ٻنهي گولن جي عام ڇهٽي آهي انهن کي ٻاهران ڇهندڙ گول چئبو آهي.

شڪل 3.25 ۾ ليڪ P ٻنهي گولن جي عام ڇهٽي آهي اهي اندريان ڇهندڙ جي گول آهن.

اچو ته ويچار ڪريون

(1) شڪل 3.24 ۾ گولن کي ٻاهرن ڇهندڙ گول ڇو ٿو چئجي؟

(2) شڪل 3.25 ۾ گولن کي اندران ڇهندڙ گول ڇو ٿو چئجي؟

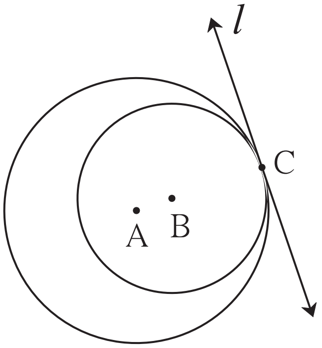
(3) 3.26 ۾ مرڪز A ۽ مرڪز B وارن جا نيم قطر نمبر وار 3 س م ۽ 4 س م هوندا ته

(i) شڪل 3.26(a) ۾ d(A,B)= ڪيترو؟

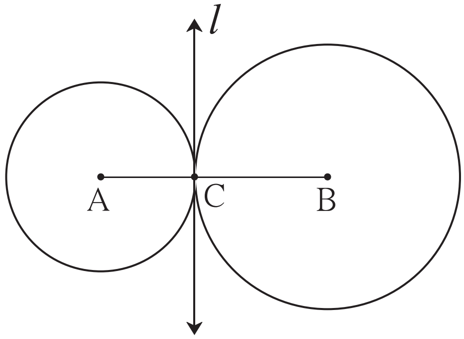
(ii) شڪل 3.26(b) ۾ d(A,B)= ڪيترو؟

ڇهندڙ گول سڌيان (Theorem of touching circles)

سڌيان : جيڪڏهن ٻه گول ڇهندڙ گول آهن ته پوءِ ڇهڻ ٽيڪو ٻنهي گولن جي مرڪزن کي ملائيندڙ ليڪ تي هوندو آهي.



(b)



(a)

شڪل 3.26

ڏنل : مرڪز A ۽ مرڪز B وارن گولن ڇهڻ ٽپڪو C آهي.

ثابت ڪرڻ : ته ٽپڪو C اهو ليڪ AB تي آهي.

ثابتي : سمجهو ليڪ l اها C مان لنگهندڙ ٻنهي گولن جي عام ڇهڻي آهي.

ٽڪر $BC \perp$ ليڪ ٽڪر $AC \perp$ ليڪ ٽڪر AC ۽ ٽڪر BC اِهي ليڪ تي عمود آهن. ∴

ٽپڪي C وٽان ليڪ ڏانهن فقط هڪ ئي عمود ڪڍي سگهبو. اِن ڪري ٽپڪا B,A,C اهي هم ليڪ ٽپڪا آهن.

اهو ڌيان ۾ رکو

(1) هڪ ٻئي کي ڇهندڙ گولن جو ڇهڻ ٽپڪو اُنهن گولن جي مرڪزن کي ملائيندڙ ليڪ تي هوندو آهي.

(2) ٻاهران ڇهندڙ گولن ۾ مرڪزن جو مفاصلو اُنهن جي نيم قطرن جي زور برابر هوندو آهي.

(3) اندريان ڇهندڙ گولن ۾ مرڪزن جو مفاصلو اُنهن جي نيم قطرن جي ڪٽ برابر هوندو آهي.

اڀياس 3.2

1. هڪ ٻئي کي اندريان ڇهندڙ گولن جا نيم قطر نمبر وار 3.5 س م ۽ 4.8 س م آهن. اُنهن جي مرڪزن جو مفاصلو ڪيترو؟

2. ٻاهريان ڇهندڙ گولن جا نيم قطر نمبر وار 5.5 ۽ 4.2 س م آهن ته اُنهن جي مرڪزن جو مفاصلو ڪيترو؟

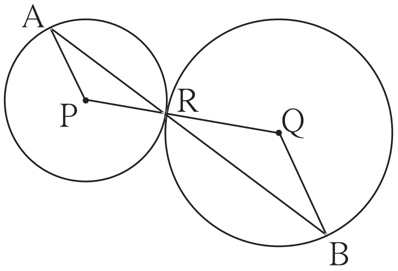
3. نيم قطر نمبروار 4 س م ۽ 2.8 س م ڪٽي ٻاهران ڇهندڙ گول ۽ اندريان ڇهندڙ گول ڪيڊو.

4. شڪل 3.27 ۾ مرڪز P ۽ مرڪز Q وارا گول هڪ ٻئي کي R تي ڇهن ٿا ٽپڪي R مان لنگهندڙ ليڪ اُنهن گولن کي نمبروار A ۽ B وٽ ڪپي ٿي ته

(1) ثابت ڪريو ٽڪر AP || ٽڪر BQ

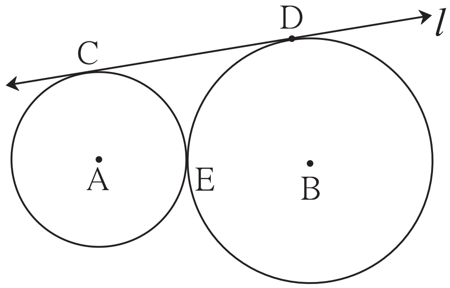
(2) $\triangle APR \sim \triangle RQB$ ثابت ڪريو

(3) جيڪڏهن $\angle PAR = 35^\circ$ ته $\angle RQB$ جي ماپ لهو.



شڪل 3.27

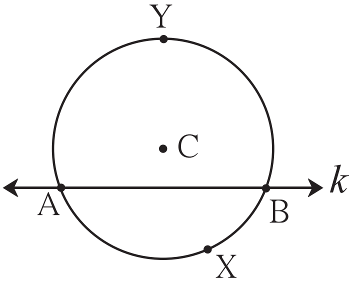
5. شڪل 3.28 ۾ مرڪز A ۽ مرڪز B وارا گول هڪ ٻئي کي ٽپڪي E وٽ ڇهن ٿا. ليڪ l اها عام ڇهڻي اُنهن کي نمبروار C ۽ D وٽ ڇهي ٿي. جيڪڏهن گولن جا نيم قطر نمبر وار 4 س م ۽ 6 س م آهن ته ٽڪر CD جي ڊيگهه ڪيتري ٿيندي؟



شڪل 3.28

ذرا ياد ڪريو.

گول جي ڪمان (Arc of a circle)



شڪل 3.29

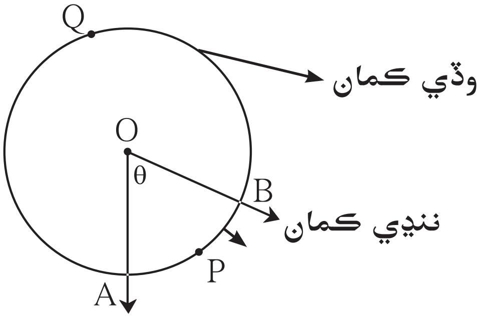
قاطع ڪري گول ٻن حصن ۾ ورهائجي ٿو اِن مان ڪوبه هڪ حصو ۽ قاطع جي عام ٽٻڪن سان گڏ نهيل شڪل کي ڪمان چئبو آهي. جن ٽٻڪن تي قاطع گول کي ڪپي ٿي. اُنهن کي ڇيڙ ٽٻڪا چئبو آهي.

شڪل 3.29 ۾ قاطع K، C مرڪز واري گول کي ڪپي ٻه ڪمائون AYB ۽ AXB تيار ڪري ٿي.

جنهن ڪمان پاسي مرڪز هجي اُن کي وڏي ڪمان چئبو آهي۽ اُن جي مخالفت ڪمان کي ننڍي ڪمان چئبو آهي.

شڪل 3.29 ۾ AYB اها وڏي ڪمان آهي ۽ AXB اها ننڍي ڪمان آهي. عام طور ڪمان کي ٽن اکرن سان لکبو آهي جيئن مونجهه نه ٿئي پر ننڍي ڪمان ٻه اکر ڇيڙ ٽٻڪا ڪم آڻي سگهون ٿا مثال ڪمان AXB کي ڪمان AB لکي سگهجي ٿو اسان ڪمان لکڻ لاءِ اهو طريقو ڪم آڻيندا آهيون.

مرڪزي ڪنڊ (Central angle)



شڪل 3.30

جنهن ڪنڊ جو نوڪي ٽٻڪو گول جي مرڪز تي هوندو آهي اُن کي مرڪزي ڪنڊ چئبو آهي.

شڪل 3.30 گول ۾ جو مرڪز O آهي. $\angle AOB$ هڪ مرڪزي ڪنڊ آهي قاطع وانگر ٿي مرڪزي ڪنڊ ڪري گول ٻن ڪمانن ۾ ورهائجي ٿو.

ڪمان جي ماپ (Measure of an arc)

ڪيترائي دفعا ٻن ڪمانن جي ڀيٽ ڪرڻي پوندي آهي. اُن ڪمانن جي ماپ اڳتي سمجهايل آهي.

(1) ننڍي ڪمان جي ماپ اُن جي نسبتي مرڪزي ڪنڊ جي برابر هوندي آهي.

شڪل 3.30 ۾ مرڪزي ڪنڊ $\angle AOB$ اُن جي ماپ θ آهي تہ ننڍي ڪمان APB جي ماپ θ آهي.

(2) وڏي ڪمان جي ماپ = نسبتي ڪنڊ جي ماپ - 360°

(3) اڌ گول ڪمان مطلب اڌ گول جي ماپ 180° آهي.

(4) سڄي گول جي ماپ 360° هوندي آهي.

چاڪي وٺون.

ڪمانن جو ٺهڪڻ (Congruence of arcs)

جڏهن بہ سطحي شڪلون هڪ ٻئي سان پوري طرح سان ٺهڪي اچن تہ اُن کي ٺهڪندڙ شڪليون چئبو آهي. اها ويچار ڌارا ڪم آڻي ساڳئي ماپ وارين ڪنڊن کي ٺهڪندڙ ڪنڊون چئبو آهي. ساڳئي نموني جيڪڏهن ٻن ڪمانن جون ماپون برابر آهن تہ اُهي ڪمان ٺهڪندڙ هونديون ڇا؟

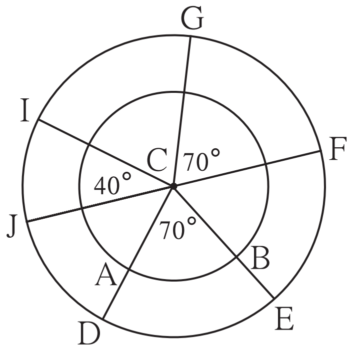
اِن سوال جو جواب اڳي ڏنل مشغولي ڪري ڳولهيو.

مشغولي :

شڪل 3.31 ۾ هڪ 'C' مرڪز وارا بہ گول ڪيو. $\angle DCE$ ۽ $\angle FCG$ اهي ساڳئي ماپ واريون ڪنڊون ڪيو. اِنهن ڪنڊن جي ماپن ۾ پيٽ ۾ جدا ماپ واري $\angle ICJ$ ڪيو. $\angle DCE$ جي پاسن ۾ سمايل ڪمان کي AB نالو ڏيو.

ڪمانن جي ماپن جي وسف موجب ڪمان AB ۽ ڪمان DE جون ماپون ساڳيون آهن. اهو ڌيان ۾ آيو ڇا؟

اهي ٻئي ڪمانون هڪ ٻئي سان ٺهڪي اچن ٿيون ڇا؟



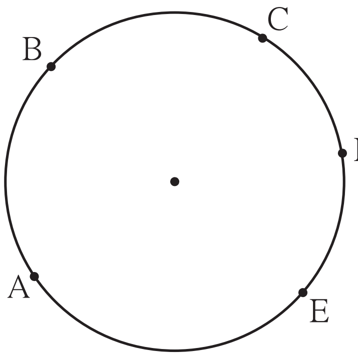
شڪل 3.31

پڪ سان ٺهڪي نہ ٿيون اچن. هاڻي C-DE، C-GF ۽ C-IJ اهي ٽڪرا ڪپيو. هڪ ٻئي سان ٺهڪندڙ DE، GF ۽ IJ ڪمانن مان ڪهڙيون ڪمانون هڪ ٻئي سان پوري طرح سان ملن ٿيون. اِن مشغولي موجب بہ ڪمانون ٺهڪندڙ هجڻ اُن جي لاءِ ضروري نہ آهي تہ اُهي هڪ ٻئي سان پوري طرح ٺهڪي اچن.

ٻن ڪمانن جي ٺهڪڻ لاءِ ٻي ڪهڙي شرط هئڻ گهرجي؟ مٿي ڏنل مشغولي مان ڌيان ۾ اچي ٿو.

ٻن ڪمانن جا نيم قطر ۽ اُن جون ماپون برابر آهن تہ اُهي ڪمانون ٺهڪندڙ هونديون آهن ڪمان DE ۽ ڪمان GF اهي ٺهڪندڙ آهن اِهو نشانين ۾ لکبو آهي. ڪمان GF $\cong$ ڪمان DE

کمانن جي ماپن جي جوڙ جي خاصيت (Property of sum of measures of arcs)



شڪل 3.32

شڪل 3.32 ۾ ٽِڪا D,C,B,A گول تي ڏنل آهن. انهن ٽِڪن مان ڪيترين ئي ڪمانون تيار ٿين ٿيون. اِنهن مان ڪمان ABC ۽ ڪمان CDE ۾ ٽِڪو C عام ٽِڪو آهي. مطلب ڪمان ABC ۽ ڪمان CDE جي ماپن جو جوڙ ڪمان ACE جي ماپ برابر ٿيندو .

$$m(\text{arc ABC}) + m(\text{arc CDE}) = m(\text{arc ACE})$$

پر ڪمان ABC ۽ ڪمان BCE ۾ هڪ کان وڌيڪ عام ٽِڪا آهن. اِن ڪري ڪمان ABC ۽ ڪمان BCE اِنهن جي ماپن جو جوڙ ڪمانABE جي ماپ برابر نہ ٿيندو.

سڌيان : هڪ ئي گول (يا ٺهڪندڙ گولن ۾) ٺهڪندڙ ڪمانن جا نسبتي زهہ ٺهڪندڙ هوندا آهن.

ڏنل : گول جو مرڪز B آهي. ڪمان DQE ≅ ڪمان APC

ثابت ڪرڻ تہ : زهہ DE ≅ زهہ AC

ثابتي : خال ڀري ثابتي پوري ڪريو

$\triangle ABC$ ۽ $\triangle DBE$ ۾

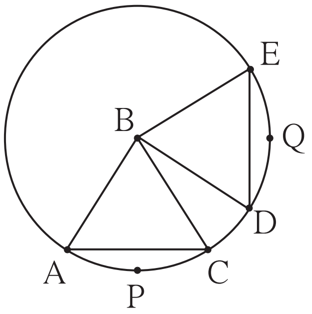
پاسو AB ≅ پاسو DB .....(......................)

پاسو .... ≅ پاسو .....(......................)

$\angle ABC \cong \angle DBE$ ..... (ٺهڪندڙ ڪمان وصف)

$\therefore \triangle ABC \cong \triangle DBE$ ..... (......................)

∴ زهہ AC ≅ زهہ DE .....(......................)



شڪل 3.33

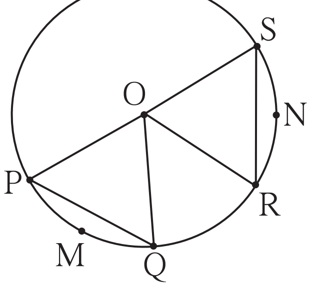
سڌيان : هڪ ئي گول (يا ساڳين گولن)۾ ٺهڪندڙ زهن جو نسبتي ڪمانون ٺهڪندڙ هونديون آهن.

ڏنل : گول جو مرڪز O آهي.

زهہ RS ≅ زهہ PQ

ثابت ڪرڻ تہ: ڪمان RNS ڪمان PMQ

اَڳتي ويچار ڪري ثابتي لکو ٻن ڪمانن جي ٺهڪڻ لاءِ اُنهن جا نيم قطر ۽ ماپون برابر هئڻ گهرجن ڪمان PMQ ۽ ڪمان RNS اِهي ساڳئي گول جون ماپون آهن اِن ڪري انهن جا نيم قطر ساڳيا آهن.



شڪل 3.34

اِنهن ڪمانن جون ماپون اُنهن جي نسبتي مرڪزي ڪنڊن جي برابر هونديون آهن اِنڪري نيم قطر OP، OQ، OR ۽ OS ڪيو.

$\triangle OPQ$ ۽ $\triangle ORS$ ٺهڪندڙ آهن ڇا؟ مٿيان ٻئي سڏيان توهان ٺهڪندڙ ڳول ڪٽي ثابت ڪريو.

ويچار ڪريو

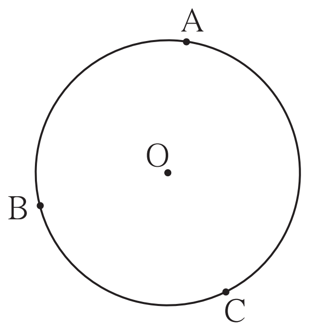
- مٿين سڏيانن مان پهرين ۾ ڪمان APC ۽ ڪمان DQE اِهي ننڍيون ڪمانون ٺهڪندڙ ثابت ڪيون آهن اُنهن جون نسبتي وڏيون ڪمانون ٺهڪندڙ ثابت ڪري سگهجن ٿيون ڇا؟
- ٻئين سڏيان ۾ ٺهڪندڙ زهن جون نسبتي وڏيون ڪمانون ٺهڪندڙ هونديون ڇا؟ جيڪڏهن زهه PQ ۽ زهه RS اِهي قطر هوندا ته سڏيان صحيح آهن ڇا؟

حل ڪيل مثال

مثال (1) O مرڪز واري ڳول تي A,B,C ٽپڪا آهن.

(i) اِنهن ٽن ٽپڪن وسيلي تيار ٿيندڙ سڀ ڪمانن جا نالا لکو

(ii) ڪمان BC ۽ ڪمان AB جون نمبروار ماپون 110° ۽ 125° آهن ته بچيل ڪمانن جون ماپون لکو.

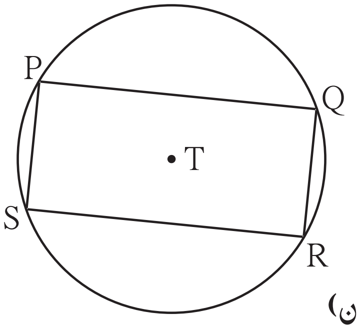


شڪل 3.35

حل : (i) ڪمان AB، ڪمان BC، ڪمان AC، ڪمان ABC ، ڪمان ACB، ڪمان BAC

$$\text{(ii)}\ m(\text{arc } ABC) = m(\text{arc } AB) + m(\text{arc } BC)$$
$$= 125^\circ + 110^\circ = 235^\circ$$
$$m(\text{arc } AC) = 360^\circ - m(\text{arc } ABC)$$
$$= 360^\circ - 235^\circ = 125^\circ$$
$$m(\text{arc } ACB) = 360^\circ - 125^\circ = 235^\circ$$
$$m(\text{arc } BAC) = 360^\circ - 110^\circ = 250^\circ$$

(2) شڪل 3.36 ۾ گول جو مرڪز T آهي. مستطيل PQRS گول ۾ اِرديل آهي. ثابت ڪريو



شڪل 3.36

(i) ڪمان SR ≅ ڪمان PQ

(ii) ڪمان PQR ≅ ڪمان SPQ

حل : PQRS □ مستطيل آهي.

∴ زهه PQ ≅ زهه SR .... (مستطيل جا مخالف پاسا)

∴ ڪمان PQ ≅ ڪمان SR ...... (ٺهڪندڙ زهن جو نسبتي ڪمانون)

زهه PS ≅ زهه QR ..... (مستطيل جا مخالف پاسا)

∴ ڪمان SP ≅ ڪمان QR ..... (ٺهڪندڙ زهن جون نسبتي ڪمانون)

∴ ڪمان SP ۽ ڪمان QR جون ماپون ساڳيون آهن.

$$m(\text{arc } SP) + m(\text{arc } PQ) = m(\text{arc } PQ) + m(\text{arc } QR)$$

$$\therefore\ m(\text{arc } SPQ) = m(\text{arc } PQR)$$

$$\therefore \text{arc } SPQ \cong \text{arc } PQR$$

ڌيان ۾ رکو

(1) جن ڪنڊن جا نوڪي ٽِڪا گول جي مرڪز تي هوندا آهن اُنهن کي مرڪزي ڪنڊون چئبو آهي.

(2) ڪمان - ماپ وصف (i) ننڍي ڪمان جي ماپ = نسبتي مرڪزي ڪنڊ ماپ

(ii) وڏي ڪمان ماپ = نسبتي ڪنڊ ماپ ـ 360° (iii) اَڌ گول ماپ = 180°

(3) ہِن گول جي ڪمانن جا نيم قطر ۽ ماپون برابر تہ اُهي ڪمانون ٺهڪندڙ آهن.

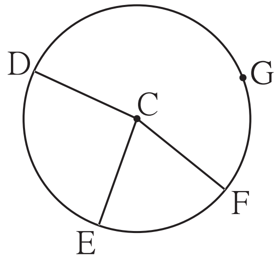
(4) جيڪڏهن ڪمان ABC ۽ ڪمان CDE ۾ فقط C ٽِڪو ئي عام آهي تہ

$$m(\text{arc } ABC) + m(\text{arc } CDE) = m(\text{arc } ACE)$$

(5) هڪ گول (يا ٺهڪندڙ گولن ۾) ٺهڪندڙ ڪمانن جا نسبتي زهہ ٺهڪندڙ هوندا آهن.

(6) هڪ گول (يا ٺهڪندڙ گولن ۾) ٺهڪندڙ زهن جون نسبتي ڪمانون ٺهڪندڙ هونديون آهن.

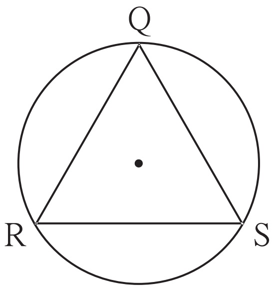
اَڀياس 3.3



شڪل 3.37

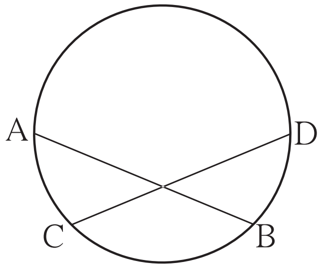
1. شڪل 3.37 ۾ گول جو مرڪز C آهي. گول تي F,E,D,G ٽِڪا آهن. ∠ECF جي ماپ 70° ۽ ڪمان DGF جي ماپ 200° آهي تہ ڪمان DE ۽ ڪمان DEF اِنهن جون ماپون لهو.

2*. شڪل 3.38 ۾ هڪ گول ۾ ٽيپور پاسو ٽڪنڊو
$\triangle QRS$ اِرديل آهي.
ته ثابت ڪريو :
(i) ڪمان QR $\cong$ ڪمان QS $\cong$ ڪمان RS
(ii) ڪمان QRS جي ماپ 240° آهي.



شڪل 3.38

3. شڪل 3.39 ۾،
زهه CD $\cong$ زهه AB
ته ثابت ڪريو :
ڪمان BD $\cong$ ڪمان AC



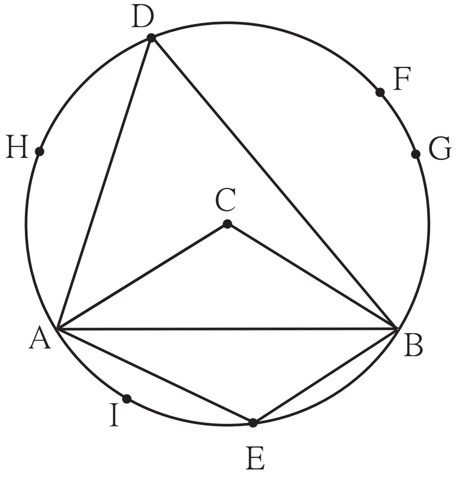
شڪل 3.39

چاڪي وٺون.

گول ۾ ٽيڪو، گول ۾ ليڪ (ڇهڻي) اِنهن وچ ۾ لاڳاپي بابت آسان ڪجهه خاصيتون ڏنيون آهن. هاڻي گول ۾ ڪنڊ وچ ۾ ڪجهه خاصيتن جو اَڀياس ڪنداسين. مشغوليون رستي اِهي خاصيتون سمجهنداسين.

مشغولي I :
مرڪز C کڻي هڪ وڏو گول ڪڍو. شڪل 3.40 موجب زهه AB ڪڍو مرڪزي ڪنڊ ACB ڪڍو زهه AB واري وڏي ڪمان مٿان ٽيڪو D ۽ ننڍي ڪمان مٿان ٽيڪو E کڻو

(1) $\angle ADB$ ۽ $\angle ACB$ ماپيو اِنهن جون ماپون ڀيٽيو.
(2) $\angle ADB$ ۽ $\angle AEB$ ماپيو اِنهن ماپن جو جوڙ ڪري ڏسو.



شڪل 3.40

(3) ڪمان ADB مٿان H,G,F اِهي ٽِڪا ڪڍو. $\angle AFB$, $\angle AGB$, $\angle AHB$ ڪُنڊن جون ماپون لهو. اِنهن ماپن جي $\angle ADB$ ماپ سان ڀيٽ ڪريو.

(4) ڪمان $\angle AEB$ مٿان هڪ ٽِڪو I ڪڍو $\angle ACB$ ماپي اُن جي $\angle AEB$ سان ڀيٽ ڪريو اِن مشغوليءَ مان هيٺيان نتيجا نڪرندا.

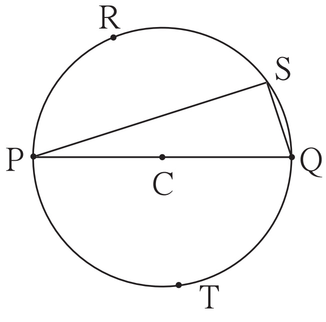
(1) $\angle ACB$ جي ماپ $\angle ADB$ کان ٻيڻي آهي.

(2) ADB ۽ AEB اِنهن جي ماپن جو جوڙ $180°$ آهي.

(3) $\angle AHB$, $\angle ADB$, $\angle AFB$, $\angle AGB$ اِنهن سڀني جون ماپون ساڳيون آهن.

(4) AEB ۽ AIB اِنهن جي ماپ ساڳئي آهي.

مشغولي II :

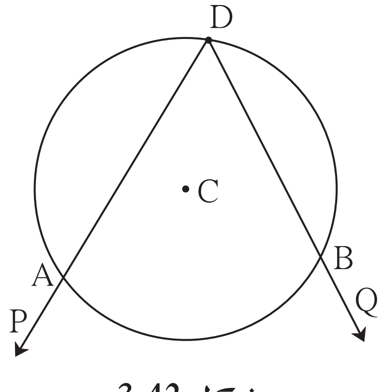


شڪل 3.41

'C' مرڪز کڻي هڪ وڏو گول ڪڍو. ٽُڪر PQقطر ڪيو. اِن قطر ڪري تيار ٿيل اَڌ گولن مان ٽِڪا T,S,R ڪڍو. $\angle PRQ$, $\angle PSQ$, $\angle PTQ$ ماپيو. اِنهن مان هرهڪ ڪهڙي ڪُنڊ آهي ڇا؟

مٿي ڏنل مشغولين مان حاصل ٿيل خاصيتن جو مطلب گول ۽ ڪنڊ لاڳاپي بابت سڏيان آهي. اِن سڏيان کي اَسان ڏسون پوءِ وڏيڪ اسم سڃاڻي سگهنداسين

اِرديل ڪنڊ (Inscribed angle)



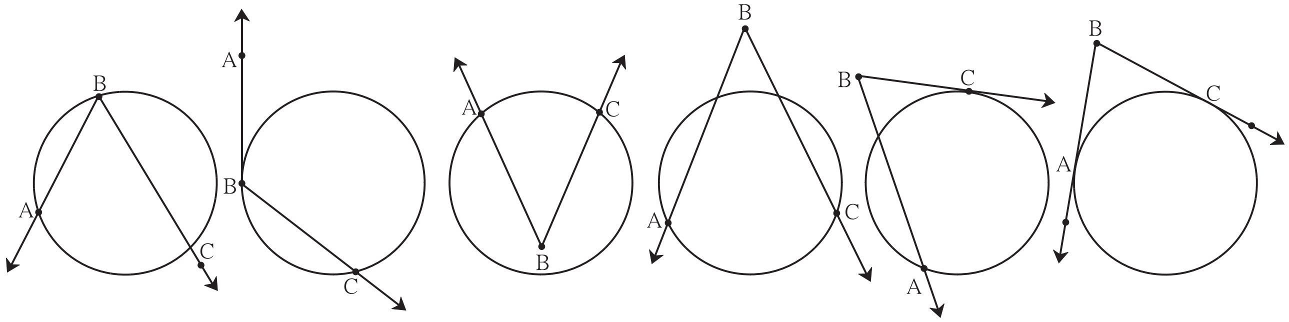
شڪل 3.42

شڪل 3.42 ۾ گول جو مرڪز C آهي. PDQ جو نوڪي ٽِڪو D گول مٿان آهي. ڪنڊ جا ٻاسا DP ۽ DQ گول کي نمبروار A ۽ B وٽ ڪپين ٿا. اِن ڪنڊ کي گول ۾ اِرديل ڪنڊ چئبو آهي.

شڪل 3.42 ۾ ADB اِها ڪمان ADB ۾ اِرديل آهي.

اَنٽر ڇيديل ڪمان (Intercepted arc)

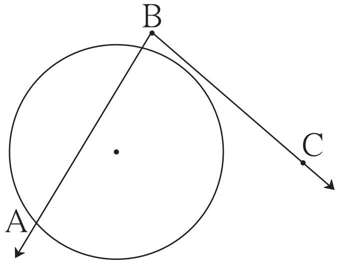
هيٺ ڏنل شڪل 3.43 واريون (i) کان (vi) سڀ شڪليون جاچ ڪريو



شڪل 3.43

هرهڪ شڪل ۾ ABC∠ جي اَندرين حصي ۾ گول جو ڪمان سمايل آهي. اِن ڪمان کي اَنٽرڇيديل ڪمان چئبو آهي. اَنٽرڇيديل ڪمان جا ڇيڙ ٽپڪا اِهي گول ۽ ڪنڊ جا ڇيد ٽپڪا هوندا آهن. ڪنڊ جي هرهڪ پاسي مٿان ڪمان جو هڪ ڇيڙ ٽپڪو هئڻ لازمي آهي. شڪل 3.43 جي (i) (ii) (iii) ۾ ڪنڊن فقط هڪ ئي ڪمان کي اَنٽر ڇيديو آهي پر (iv) (v) ۽ (vi) ۾ هرهڪ ڪنڊ ٻہ ڪمانون اَنٽرڇيديون آهن. شڪل v ۾ ڪنڊ جي هڪ پاسو ۽ vi ۾ ڪنڊ جا ٻہ پاسا گول کي ڇهن ٿا.

شڪل 3.44 ۾ ڪمان اَنٽرڇيديل نہ آهي. ڇو تہ ڪنڊ جي پاسي BC تي ڪمان جو هڪ بہ ڇيڙ - ٽپڪو موجود نہ آهي.



شڪل 3.44

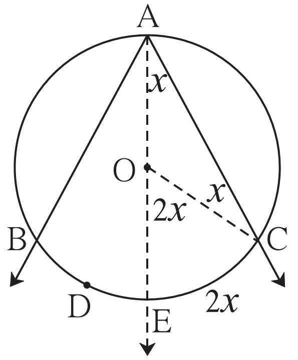
اِرديل ڪنڊ سڌيان (Inscribed angle theorem)

سڌيان : گول ۾ اِرديل ڪنڊ جي ماپ، اُن جي انٽرڇيديل ڪمان جي ماپ جي اَڌ هوندي آهي.

ڏنل : گول جو مرڪز O آهي BAC∠ اِها ڪمان BAC∠ ۾ اِرديل آهي. BAC∠ ڪمان BDC∠ کي اَنٽر ڇيديو آهي.

ثابت ڪرڻ : $\angle BAC = \frac{1}{2}\, m(\text{arc BDC})$

رچنا : ڪرڻو AO ڪيو. اِهو گول تي ٽپڪي E وٽ ڪپي ٿو. نيم قطر OC ڪيو.



شڪل 3.45

ثابتي : $\triangle AOC$ ۾

پاسو $OA \cong$ پاسو OC ...... (هڪ ئي گول جا نيم قطر)

$\therefore \angle OAC = \angle OCA$ ..... (ٻپور پاسو ٽڪنڊو سڏيان)

$\angle OAC = \angle OCA = x$ ...... (I) (سمجھه)

$\therefore \angle EOC = \angle OAC + \angle OCA$ .... (پرين اندرين ڪنڊن جو سڏيان)

$= x^\circ + x^\circ = 2x^\circ$

پر $\angle EAC$ اِها مرڪزي ڪنڊ آهي.

$\therefore m(\quad EC) = 2x^\circ$ .... (ڪمان ڪنڊ وصف) ..... (II)

$\therefore$ (I) ۽ (II) مان

$$\angle OAC = \angle EAC = \frac{1}{2}\, m(\text{arc } EC) \ \ldots\ldots (III)$$

اهڙي نموني نيم قطر OB ڪڍي. $\angle EAB = \frac{1}{2}\, m(\text{arc } BE)$ ..... (IV)

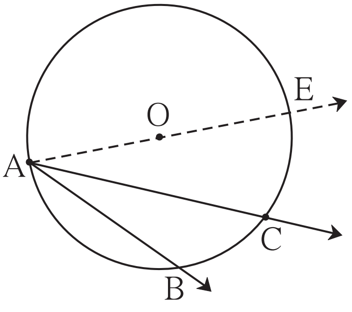
$\therefore \angle EAC + \angle EAB = \frac{1}{2}\, m(\text{arc } EC) + \frac{1}{2}\, m(\text{arc } BE)$ .... (III) ۽ (VI) مان

$$\therefore \angle BAC = \frac{1}{2}\,[m(\text{arc } EC) + m(\text{arc } BE)]$$

$$= \frac{1}{2}\,[m(\text{arc} BEC)] = \frac{1}{2}\,[m(\text{arc } BDC)] \ \ldots\ldots (V)$$

ڌيان ڏيو

اِرديل ڪنڊ ۽ مرڪز لاءِ تي لاڳاپا ممڪن آهن گول جو مرڪز ڪنڊ جي پاسي تي، يا اَندرين حصي يا ڪنڊ کان ٻاهر تي سگهي ٿو. اِنهن مان بہ آسان III ۽ IV ۾ ثابت ڪيا. هاڻي ٽئين باري ويچار ڪريون.



شڪل 3.46

$\angle BAC = \angle BAE - \angle CAE$

$= \frac{1}{2}\, m(\text{arc } BCE) - \frac{1}{2}\, m(\text{arc } CE)$

...... (III) مان

$= \frac{1}{2}\,[m(\text{arc} BCE) - m(\text{arc } CE)]$

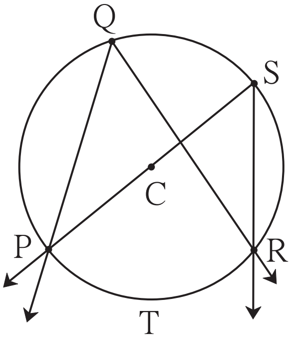
$= \frac{1}{2}\,[m(\text{arc } BC)]$ ...... (VI)

گول جي ڪمان طرفان ڪنهن بہ ٽپڪي وٽ ٺهيل ڪنڊ جي ماپ (Subtended) اُن ڪمان جي نسبتي مرڪزي ڪنڊ جي ماپ جي اَڌ هوندي آهي.

هن سڏيان جا بيان اُپ سڏيان لکيا وڃن ٿا .

اِرديل ڪنڊ سڌيان جا اُپ سڌيان (Corollaries of inscribed angle theorem)

1. هڪ ئي ڪمان ۾ اِرديل سڀ ڪنڊون نهڪندڙ هونديون آهن.



شڪل 3.47

1. شڪل 3.47 جي آڌار تي ڏنل ۽ ثابت ڪرڻ لکو. سوالن جي آڌار تي ثابتي لکو.

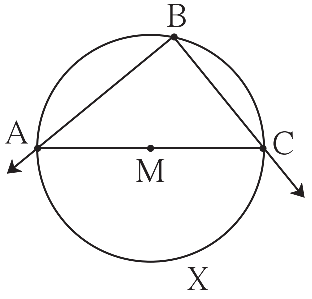
(1) $\angle PQR$ جي اَنترچيديل ڪمان ڪهڙي؟

(2) $\angle PSR$ جي انترچيديل ڪمان ڪهڙي؟

(3) اِرديل ڪندي اَنترچيديل ڪمان، اُنهن جي ماپن ۾ ڪهڙو لاڳاپو آهي؟

2. اَڌ گول ۾ اِرديل ڪنڊ گوني ڪنڊ هوندي آهي.

پر واري شڪل 3.48 جي آڌار تي ڏنل، ثابت ڪرڻ ۽ ثابتي لکو.



شڪل 3.48

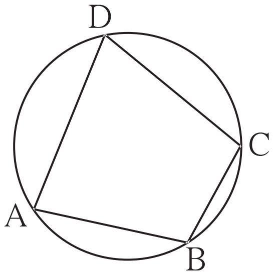
چڪرڪ (محدود) چوڪنڊو (Cyclic quadrilateral)

چوڪنڊي جا چار ئي ٽپڪا جيڪڏهن ساڳئي گول تي هجن ته اُن چوڪنڊي کي چڪرڪ چوڪنڊو چئبو آهي.

چڪرڪ چوڪنڊو سڌيان (Theorem of cyclic quadrilateral)

چڪرڪ چوڪنڊي جون مخالف ڪنڊون تتمهه هونديون آهن.

خال ڀري ثابت ڪريو .



شڪل 3.49

ڏنل : □ ______ هڪ چڪرڪ چوڪنڊو آهي

ثابت ڪرڻ : $m\angle B + m\angle D =$ ______

$m\angle C = 180^\circ +$ ______

ثابتي : $\angle ADC$ اِرديل ڪنڊ ڪمان ABC کي اَنتر چيدي ٿي.

$\therefore \angle ADC = \frac{1}{2}$ ______ .... (I)

اهڙي نموني ______ اِرديل ڪنڊ ڪمان ADC کي اَنترچيدي ٿي.

$\therefore \boxed{\quad} = \frac{1}{2}\, m(\text{arc}ADC) \;.....\; (\text{II})$

$\therefore \angle ADC + \boxed{\quad} = \frac{1}{2} \boxed{\quad} + \frac{1}{2}\, m(\text{arc } ADC) \;.....$ [(I) ۽ (II) مان]

$= \frac{1}{2}\, [\boxed{\quad} + m(\text{arc } ADC)]$

$= \frac{1}{2} \times 360^\circ \;........$ (کمان ABC ۽ کمان ADC گول ناهن تا)

$= \boxed{\quad}$

ساڳئي نموني $m\angle A + m\angle C = \boxed{\quad}$

چکرڪ چوڪنڊي سڌيان جو اُپ سڌيان (Corollary of cyclic quadrilateral theorem)

چکرڪ چوڪنڊي جي ٻاهرين ڪنڊ، سندس پر واري ڪنڊ جي مخالف ڪنڊ سان ڦهڪندڙ هوندي آهي. اِن اُپ سڌيان جي ثابتي پاڻ لکو.

ويچار ڪريو

متي ڏنل سڌيان ۾ $m\angle B + m\angle D = 180^\circ$ اِهو ثابت ڪرڻ بعد ٻچيل مخالف ڪندن جو جوڙ 180° ٻئي ڪنهن طريقي ثابت ڪري سگهجي ٿو ڇا؟

چکرڪ چوڪندو سڌيان جو اُبتڙ (Converse of cyclic quadrilateral theorem)

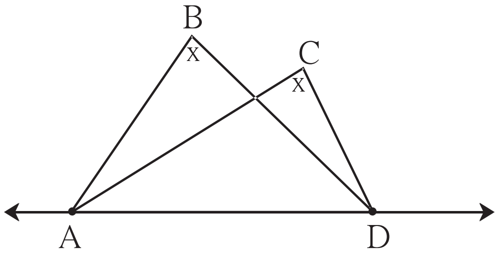
سڌيان : ڪنهن چوڪنڊي جون مخالف ڪندون تتمه آهي تہ اُهو چکرڪ چوڪندو هوندو آهي.

متئين سڌيان مان آسان اٿين ويچار ڪريون تہ جيڪڏهن چوڪنڊي جون مخالف ڪندون تتمه آهن تہ اُن چوڪنڊي جي گرد گول هوندو. هرهڪ ٽڪنڊي جو هڪ گرد گول ٿئي ٿو. اِها آسان ڪي ڄاڻ آهي. پر هرهڪ چوڪنڊي جو گرد گول هوندو، اٿين نہ آهي ڪهڙي شرط سان چوڪنڊي جو گرد گول هوندو مطلب چوڪنڊي جا نوڪي ٽپڪا گول تي هجن، اِهو متئين سڌيان مان سمجهہ ۾ ايندو. اَچا هڪ اَلڳہ حالت ۾ چار غير هم ليڪ ٽپڪا گول تي هوندا اِهو اَڳتي سڌيان ۾ ٻڌايل آهي.

سڏيان : جيڪڏهن ڪنهن ليڪ جا ٻہ ٽپڪا ساڳئي پاسي ۾ ٽپڪن وٽ ٺهڪندڙ ڪنڊون ٺاهن ٿا تہ اِهي چار ئي ٽپڪا هڪ گول مٿان هوندا آهن.

ڏنل : ليڪ AD جي ساڳئي پاسي ٽپڪا B ۽ C آهن. $\angle ABD \cong \angle ACD$

ثابت ڪرڻ : ٽپڪا A, B, C, D اِهي هڪ ئي گول تي آهن (يعني) ABCD □ هڪ چڪرڪ چوڪنڊو آهي اِن لاءِ اَڳ سڏي ثابتي ڏجي ٿي.



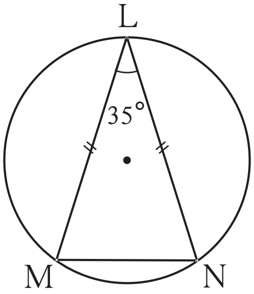
شڪل 3.50

ويچار ڪريو

مٿيون سڏيان ڪهڙي سڏيان جي اُبتڙ آهي؟

حل ڪيل مثال

مثال (1) شڪل 3.51 ۾، زهہ LM $\cong$ زهہ LN تہ $\angle L = 35^\circ$



شڪل 3.51

(i) $m(\text{arc MN}) = ?$

(ii) $m(\text{arc LN}) = ?$

حل : (i) $\angle L = \frac{1}{2}\ m(\text{arc MN})$ ...... (اِرديل ڪنڊ سڏيان)

$\therefore\ 35 = \frac{1}{2}\ m(\text{arc MN})$

$\therefore\ 2 \times 35 = m(\text{arc MN}) = 70^\circ$

(ii) $m(\text{arc MLN}) = 360^\circ - m(\text{arc MN})$ ...... (ڪمان ڪنڊوصف)

$= 360^\circ - 70^\circ = 290^\circ$

زهہ LM $\cong$ زهہ LN هاڻي

$\therefore$ LM arc $\cong$ LN arc

پر $m(\text{arc LM}) + m(\text{arc LN}) = 290^\circ = m(\text{arcMLN})$ ..... (ڪمان جوڙ خاصيت)

$m(\text{arc LM}) = m(\text{arc LN}) = \frac{290^\circ}{2} = 145^\circ$

يا, (ii) زهہ LM $\cong$ زهہ LN

$\therefore\ \angle M = \angle N$ ...... (پور پاسو ٽڪنڊو سڏيان)

$\therefore\ 2\angle M = 180^\circ - 35^\circ = 145^\circ$

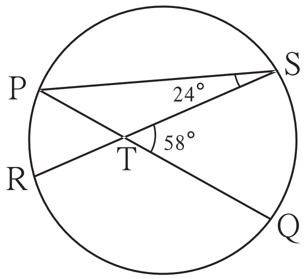
$\therefore\ \angle M = \frac{145^\circ}{2}$

$\therefore\ m(\text{arc LN}) = 2 \times \angle M$

$= 2 \times \frac{145^\circ}{2}$

$= 145^\circ$

مثال (2) شڪل 3.52 ۾زهه PQ ۽ RS زهه آر ايس هڪ ٻئي کي ٽٻڪي T وٽ ڪپين ٿا.



شڪل 3.52

(i) جيڪڏهن $\angle STQ = 58^\circ$، $\angle PSR = 24^\circ$، ته $m(\text{arc SQ})$ لهو

(ii) $\angle STQ = \frac{1}{2}\,[m(\text{arc PR}) + m(\text{arc SQ})]$ اها چڪاس ڪريو

(iii) زهه PQ ۽ زهه RSوچ۾ڪنڊ جي ماپ ڪهڙي به هجي ته ثابت ڪريو

$m\angle STQ = \frac{1}{2}\,[m(\text{arc PR}) + m(\text{arc SQ})]$

(iv) اِن ثابت ٿيل مثال جي خاصيت لفظن ۾لکو

حل : (i) $\angle SPQ = \angle SPT = 58^\circ - 24^\circ = 34^\circ$ .... ٻاهرين ڪنڊ سڏيان

$m(\text{arc QS}) = 2m\angle SPQ = 2 \times 34^\circ = 68^\circ$

(ii) $m(\text{arc PR}) = 2m\angle PSR = 2 \times 24^\circ = 48^\circ$

$\frac{1}{2}\,[m(\text{arc PR}) + m(\text{arc SQ})] = \frac{1}{2}\,[48 + 68]$

$= \frac{1}{2} \times 116 = 58^\circ$

$= m\angle STQ$

(iii) اِن خاصيت کي ثابت ڪرڻ لاءِ خال ڀريو

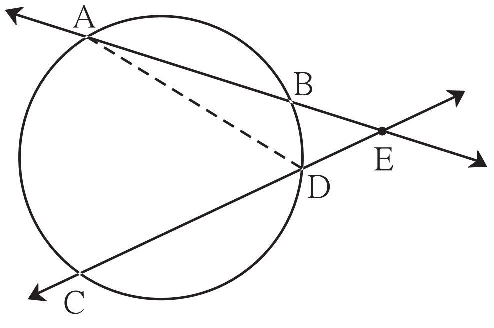
$m\angle SPQ = m\angle STQ +$ [ ] ....(ٻرين ڪندن جو سڏيان)

$= \frac{1}{2}\,m(\text{arc SQ}) +$ [ ] .... (اِرديل ڪنڊ سڏيان)

$= \frac{1}{2}\,[$ [ ] $+$ [ ] $]$

(iv) گول ۾جيڪڏهن ٻه زهه هڪ ٻئي کي ڪپيندڙ آهن ته اُنهن زهن ۾ٺهيل ڪنڊ جي ماپ، اُن ڪنڊ جي اَنتر ڇيديل ڪمان ۽ اُن جي مخالف ڪنڊ جي اَنترڇيديل ڪمان جي جوڙ جو اَڌ هوندي آهي.

مثال (3) گول جي ٻاهر، جيڪڏهن اُن جا ٻہ هڪ ٻئي کي ڪپين ٿا تہ اُنهن کي سمائيندڙ ليڪن جي وچواري ڪنڊ جي ماپ، اُن طرفان انتر ڇيديل ڪمانن جي فرق جو اَڌ هوندي آهي.



شڪل 3.53

ڏنل : گول جا ٻہ AB ۽ CD اِهي گول کان ٻاهر ٽڪيءَ وٽ هڪ ٻئي کي ڪپين ٿا.

ثابت ڪرڻ : $m\angle AEC=\frac{1}{2}[m(\text{arc}AC)-m(\text{arc}BD)]$

جوڙجڪ : ٽڪر AD ڪڍو اِن خاصيت جي ثابتي مثال (2) وانگر ڏجي ٿي اُن لاءِ $\triangle AED$ جون ڪنڊون، اُن جي پرين ڪنڊن جو سڌيان خيال ۾ رکي ثابتي لکو.

اِهو ڌيان ۾ رکو.

(1) گول ۾ اِرديل ڪنڊ جي ماپ، اُن جي اَنترڇيديل ڪمان جي ماپ جي اَڌ هوندي آهي.

(2) گول ۾ هڪ ڪمان ۾ اِرديل ڪنڊون ٺهڪندڙ هونديون آهن.

(3) اَڌ گول ۾ اِرديل ڪنڊ گوني هوندي آهي.

(4) چوڪنڊي جا چارئي نوڪي ٽڪا گول تي هوندا تہ اُن چوڪنڊي کي چڪرڪ چوڪنڊو چئبو آهي.

(5) چڪرڪ چوڪنڊي جو مخالف ڪنڊون تتمهہ هونديون آهن.

(6) چڪرڪ چوڪنڊي جي ٻاهرين ڪنڊ، اُن جي پرواري ڪنڊ جي مخالف ڪنڊ جي ٺهڪندڙ هوندي آهي.

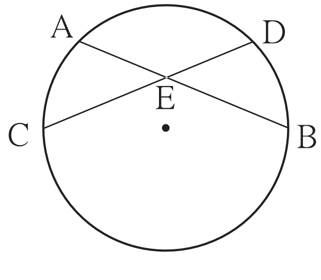
(7) چوڪنڊي جون مخالف ڪنڊون تتمهہ هونديون تہ اُهو چوڪنڊو چڪرڪ آهي.

(8) ليڪ جا ٻہ ٽڪا، ساڳئي پاسي ٻن ٽڪن تي ٺهڪندڙ ڪنڊون ناهين ٿا تہ اُهي چار ئي ٽڪا هڪ ئي گول تي هوندا آهن.

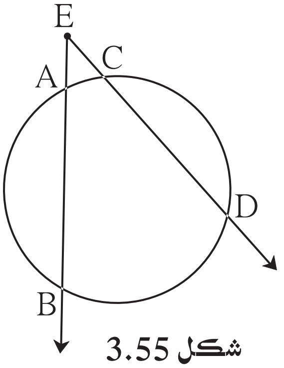
(9) پر واري شڪل 3.54 ۾

(i) $m\angle AEC=\frac{1}{2}[m(\text{arc}AC)+m(\text{arc}DB)]$

(ii) $m\angle CEB=\frac{1}{2}[m(\text{arc}AD)+m(\text{arc}CB)]$



شڪل 3.54

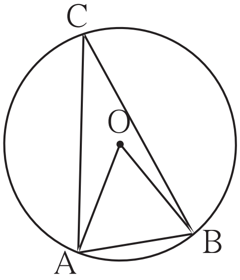


شڪل 3.55

(10) پرواري شڪل 3.55 ۾،

$$m\angle BED = \frac{1}{2}\,[m(\text{arc } BD) - m(\text{arc } AC)]$$

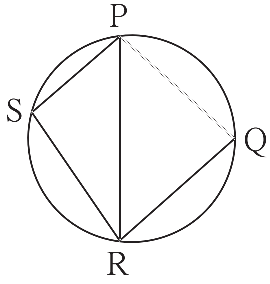
اڀياس 3.4



شڪل 3.56

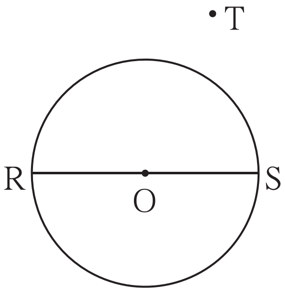
1. شڪل 3.56 ۾ گول جو مرڪز O آهي ۽ زهہ AB جي ڊيگهہ نيم قطر برابر آهي تہ
(1) $\angle AOB$ (2) $\angle ACB$ (3) arc AB
(4) ڪمان ACB جون ماپون لهو.

2. شڪل 3.57 ۾ $\square PQRS$ هڪ چڪرڪ چوڪنڊو آهي. پاسو $RQ \cong$ پاسو PQ، $m\angle PSR = 110^\circ$ تہ
(1) $\angle PQR = ?$
(2) $m(\text{arc } PQR) = ?$
(3) $m(\text{arc } QR) = ?$
(4) $\angle PRQ = ?$



شڪل 3.57

3. چڪرڪ چوڪنڊي $\square MRPN$ ۾ $\angle R = (5x - 13)^\circ$ ۽ $\angle N = (4x + 4)^\circ$ تہ $\angle R$ ۽ $\angle N$ جون ماپون لهو.



شڪل 3.58

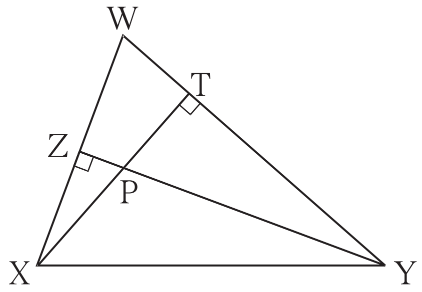
4. شڪل 3.58 ۾ O مرڪز آهي ٽڪر RS گول جو قطر آهي ٽپڪو T گول کان ٻاهر آهي ثابت ڪريو $\angle RTS$ سوڙهي ڪنڊ آهي.

5. هرهڪ مستطيل چڪرڪ چوڪنڊو هوندو آهي. اِهو ثابت ڪريو.

6. شڪل 3.59 ۾ ٽڪر YZ ۽ ٽڪر XT اِهي عمود $\triangle WXY$ اَندر ٽِڪي P وٽ ڪپين ٿا. تہ ثابت ڪريو

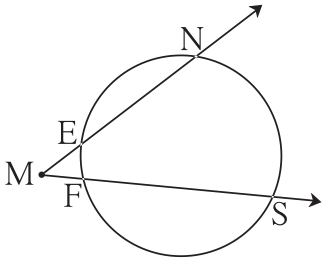
(1) $\square WZPT$ هڪ چڪرڪ چوڪنڊو آهي.

(2) ٽِڪا X,Z,T,Y اِهي ساڳئي گول تي آهن.



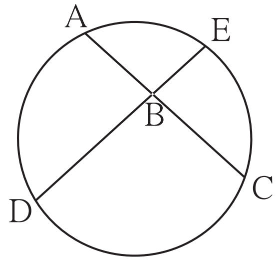
شڪل 3.59

7. شڪل 3.60 ۾ $m(\text{arc NS}) = 125°$، $m(\text{arc EF}) = 37°$، $\angle NMS$ جي ماپ لهو.



شڪل 3.60

8. شڪل 3.16 ۾ زهہ AC ۽ زهہ DE اِهي ٽِڪي B وٽ ڪپين ٿا. جيڪڏهن $\angle ABE = 108°$، $m(\text{arc AE}) = 95°$ تہ $m(\text{arc DC})$ لهو.

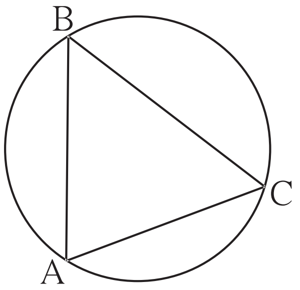


شڪل 3.61

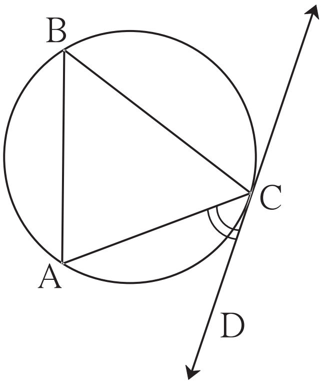
چاڪي وٺون

مشغولي :

هڪ وڏو گول ڪڍو شڪل 3.62 انوسار هڪ ٽڪر AC هڪ زهہ ڪڍو گول تي B ٽِڪو کڻو $\angle ABC$ اِها اِرديل ڪنڊو ڪڍو $\angle ABC$ جي ماپ ماپي درج ڪريو هاڻي شڪل 3.63 موجب ٽِڪي C وٽ ليڪ CD ڇُهڻي ڪڍو ACD جي ماپ لهو.



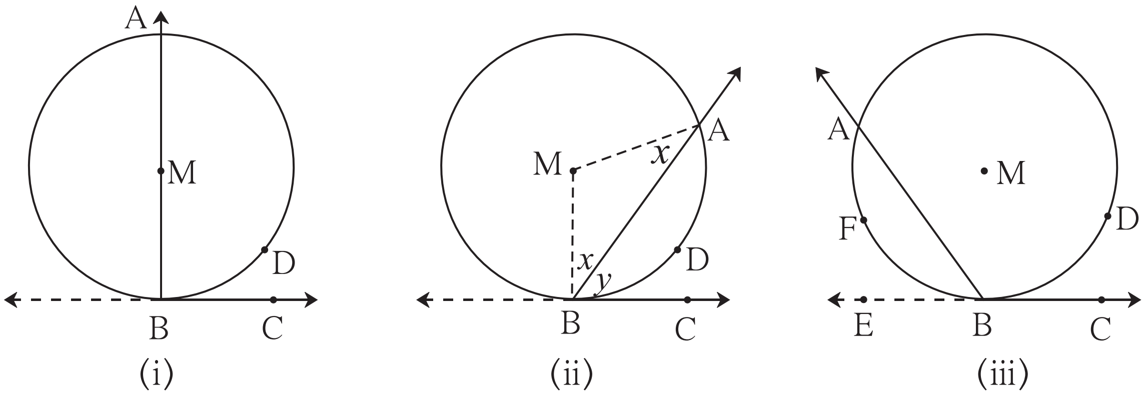
شڪل 3.62



شڪل 3.63

ACD جي ماپ، اِها ∠ABC جي ماپ برابر آهي انگريزي $m\angle ABC = \frac{1}{2}\, m(\text{arc}\,AC)$
اِها ڄاڻ آهي اِن مان ∠ACD جي ماپ جي اَڌ آهي پڻ ڪمان AC جي ماپ گول جي
ڇهڙيءَ جي هڪَ اهميت واري خاصيت آهي. اِهو اسان ثابت ڪنداسين.

ڇهڙي - قاطع ڪنڊ سڏيان (Theorem of angle between tangent and secant)



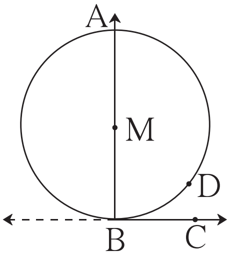
شڪل 3.64

ڏنل : ∠ABC جو نوڪي ٽيڪو M مرڪز واري گول مٿان آهي. اُن جو پاسو BC گول کي ڇهي ٿو. پاسو BA گول کي ٽيڪي A وٽ ڪپي ٿو. ∠ABC جو اَنترڇيديل ڪمان ∠ADB آهي.

ثابت ڪرڻ : $m\angle ABC = \frac{1}{2}\, m(\text{arc}\,ADB)$

ثابتي : اِن سڏيان لاءِ ٽي ثابتيون ممڪن آهن.

(1) شڪل 3.64 ۾ گول جو مرڪز M ∠ABC مٿان آهي.



شڪل 3.64(i)

$\angle ABC = \angle MBC = 90^\circ$ ..... (ڇهڙي سڏيان) .....(I)

ڪمان ADB اِهو اَڌ گول آهي.

$\therefore\ m(\text{arc}\ ADB) = 180^\circ$

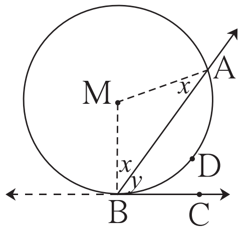
(I) ۽ (II) مان

$\angle ABC = \frac{1}{2}\, m(\text{arc}\,ADB)$

(2) 3.64 موجب مرڪز M ∠ABC جي ٻاهر آهي نيم قطر MA ۽ نيم قطر MB ڪڍيو.

$\angle MBA = \angle MAB$ ..... (ٻپور پاسو ٽڪندو سڏيان)

$\angle MBC = 90^\circ$ ..... (ڇهڙي سڏيان) ..... (I)



شڪل 3.64(ii)

سمجهو $\angle MBA = \angle MAB = x,\ \angle ABC = y$

$\angle AMB = 180 - (x + x) = 180 - 2x$

$\angle MBC = \angle MBA + \angle ABC = x + y$

$\therefore\ x + y = 90^\circ \qquad \therefore\ 2x + 2y = 180^\circ$

ΔAMB ۾ $2x + \angle AMB = 180^\circ$

$\therefore\ 2x + 2y = 2x + \angle AMB$

$\therefore\ 2y = \angle AMB$

$\therefore\ y = \angle ABC = \frac{1}{2}\angle AMB$

3.64 (3) ثابتي انوسار خال پري پوري ڪريو

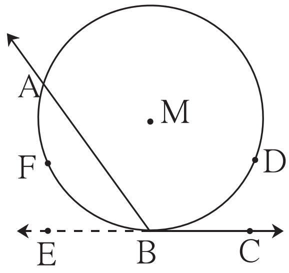
ڪرڏو $\underline{\quad\quad}$ اهو ڪرڏو BC جو مخالف ڪرڏو آهي.

۾ $m\angle ABE = \frac{1}{2}\, m(\text{arc}\ \underline{\quad\quad})$ ...... (2) ثابت ٿيل

$180 - \underline{\quad\quad} = \angle ABE$ .....

$\therefore\ 180 - \underline{\quad\quad} = \frac{1}{2}\, m(\text{arc AFB})$ (ليکي ڪندون)

$= \frac{1}{2}\,[360 - m(\underline{\quad\quad})]$



شڪل 3.64(iii)

$\therefore\ 180 - m\angle ABC = 180 - \frac{1}{2}\, m(\text{arc ADB})$

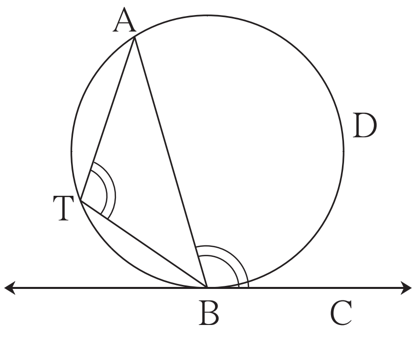
$\therefore\ m\text{-}\angle ABC = -\frac{1}{2}\, m(\underline{\quad\quad})$

$\therefore\ m\angle ABC = \frac{1}{2}\, m(\text{arc ADC})$

ڇهڙي - قاطع سڌيان جو متبدل بيان

شڪل ۾ AB اِها قاطع ۽ BC ڇهڙي آهي ∠ABC جو اَنترچيديل ڪمان ADB آهي. زهہ AB گول کي ٻن ڪمانن ۾ ورهائي ٿو. ٻئي ڪمانون هڪ ٻئي جي مخالف آهن. هاڻي ڪمان ∠ADB جي مخالف ڪمان مٿان ٽيڪو T ڪٽو.

$\angle ABC = \frac{1}{2}\, m\ (\text{arc ADB}) = \angle ATB.$

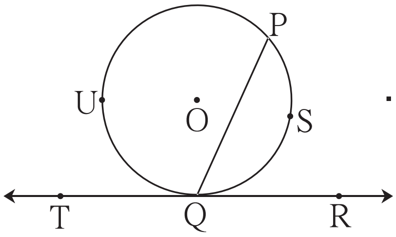


شڪل 3.65

گول جي ڇهڙي واري چيز ٽيڪي مان نڪتل زهہ اِنهن وچ ۾ ڪنڊ اُها اَنتر چيديل ڪمان جي مخالف ڪمان جي اَنترچيديل ڪنڊ برابر هوندي آهي.

ڇھٽي - قاطع ڪنڊن جي سڌيان جو اُبتڙ

گول جي زھ جي ڇيڙي وٽان نڪتل ليڪ اَھڙي نموني آھي جو اُنھن وچ ٺھيل ڪنڊ اَنتر ڇيديل ڪمان ماپ جي اَڌ آھي تہ اُھا ليڪ گول جي ڇُھٽي آھي.



شڪل 3.66

شڪل 3.66 ۾،

جيڪڏھن $\angle PQR = \frac{1}{2}\, m(\text{arc PSQ})$ تہ اِھا ڇھٽي آھي.

[يا $\angle PQT = \frac{1}{2}\, m(\text{arc PUQ})$]

۽ ليڪ TR اِھا ڇھٽي آھي.

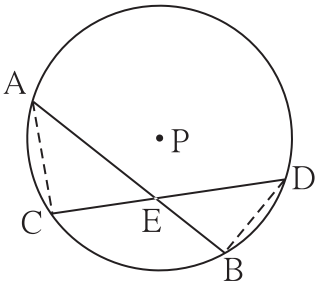
ليڪ TR اِھا گول جي ڇھٽي آھي اِن اُبتڙ سڌيان جو پريوگہ گول جي ڇھٽي جوڙجڪ ۾ ٿيندو آھي. اِن سڌيان کي اَڳ سڌي نموني بہ ثابت ڪري سگھجي ٿو.

زھن جي اَندرين ورچ سڌيان (Theorem of internal division of chords)

ھڪ گول ۾ جيڪڏھن بہ زھ گول اَندر ڪنھن ٽبڪي وٽ ڪپين ٿا تہ ھڪ زھ جي بن حصن جي ڊيگھہ جي ضرب اُپت، ٻئي زھ جي بن حصن جي ڊيگھہ جي ضرب اُپت برابر آھي.

ڏنل : گول جو مرڪز P آھي.

زھ AB ۽ زھ CD اِھي گول اندر ٽبڪي E وٽ ملن ٿا.



شڪل3.67

ثابت ڪرڻ : $AE \times EB = CE \times ED$

رچنا : ٽڪر AC ٽڪر DB ڪيو.

ثابتي : Δ CAE Δ BDE ۾،

$\angle AEC \cong \angle DEB$ ..... (مخالف ڪنڊون)

$\angle CAE \cong \angle BDE$ ..... ساڳئي ڪمان جون ڪنڊون

$\therefore \Delta CAE \sim \Delta BDE$ ..... ڪنڊ - ڪنڊ آزمائش

$\therefore \frac{AE}{DE} = \frac{CE}{BE}$ .....

$\therefore AE \times EB = CE \times ED$

ويچار ڪريون

شڪل 3.67 ۾ اَسان ٽڪر AD ۽ ٽڪر BC ڪڍي اِھو سڌيان ثابت ڪري سگھون ٿا ڇا.

ودیڪ چاڻ لاءِ

شڪل 3.67 ۾ زهه AB جا ٽپڪي E ڪري ٻه حصا AE ۽ EB ٿيا آهن. ٽڪر AE ۽ ٽڪر EB اِهڙا لاڳيتا پاسا ڪٽي مستطيل ٺاهيو ته AExEB اِهو اُن مستطيل جي ايراضي ٿيندي. ساڳئي نموني CExED اِهو زهه CD جي ٻن حصن مان ٺهيل مستطيل جي ايراضي ٿيندي آسان ثابت ڪيو.AExEB=CExED مطلب ته اِهو سڌيان اَلڳه نموني به بيان ڪري سگهجي ٿو.

هڪ گول ۾ جيڪڏهن ٻه زهه، گول جي اَندر ڪنهن ٽپڪي وٽ ڪپين ٿا ته هڪ زهه جي ٻن حصن سبب ٺهيل مستطيل جي ايراضي اِها ٻئي زهه جي ٻن حصن ٺهيل مستطيل جي ايراضي برابر هوندي آهي.

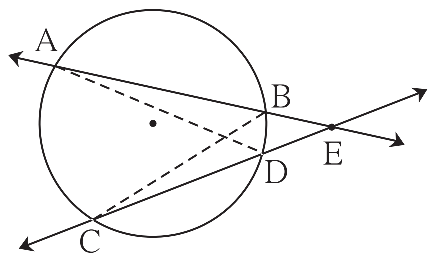
زهن جي ٻاهرين ورڇ جو سڌيان (Theorem of external division of chords)

هڪ گول ۾ زهه AB ۽ زهه CD کي سمائيندڙ ليڪون گول جي ٻاهران ٽپڪي E وٽ ڪپين ٿيون ته

$AE \times EB = CE \times ED.$

سڌان لاءِ ڏنل ۽ ثابت ڪرڻ پاڻ لکو

جوڙجڪ : ٽڪر AD ۽ ٽڪر BC ڪيڊو



شڪل 3.68

ثابتي : △CBE ۽ △ADE ۾

$\angle AED \cong$ [ ] .... (عام ڪنڊ)

$\angle DAE \cong \angle BCE$ .... ([ ])

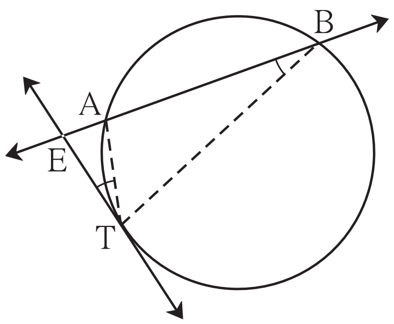
$\therefore \Delta ADE \sim$ [ ] .... ([ ])

$\therefore \frac{(AE)}{[\ ]} = \frac{[\ ]}{[\ ]}$ ....

$\therefore$ [ ] $= CE \times ED$

ڇهڻي - قاطع ٽڪرن جو سڏيان (Tangent secant segments theorem)

گول ٻاهران ٽٻڪي E وٽان نڪتل قاطع گول کي ٽٻڪن A ۽ B وٽ ڪپي ٿي ۽ وٽان نڪتل ڇهڻي گول کي T تي ڇُهي ٿي.



شڪل 3.69

ثابت ڪريو : $EA \times EB = ET^2$

رچنا : ٽڪر TA ۽ ٽڪر TB ڪڍو.

ثابتي : Δ EAT ۽ Δ ETB ۾,

$\angle AET \cong \angle TEB$ .... (عام ڪنڊ)

$\angle ETA \cong \angle EBT$ .. (ڇهڻي قاطع سڏيان)

$\therefore \Delta EAT \sim \Delta ETB$ ..... (ڪنڊ - ڪنڊ آزمائش)

$\therefore \frac{ET}{EB} = \frac{EA}{ET}$ .....

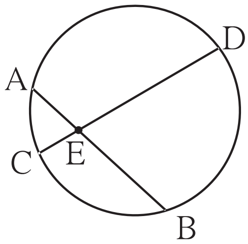
$\therefore EA \times EB = ET^2$

اِهو ڌيان ۾ رکو

(1) شڪل 3.70 موجب

$AE \times EB = CE \times ED$

ان کي زهن جي اَندرين ورڇ سڏيان چئبو آهي.

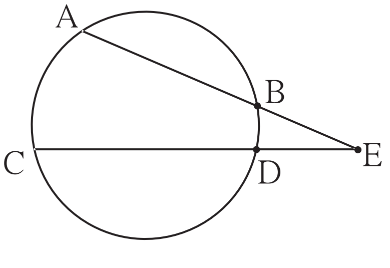


شڪل 3.70

(2) شڪل 3.71 موجب

$AE \times EB = CE \times ED$

اِن کي زهن جي ٻاهرين ورڇ سڏيان چئبو آهي.

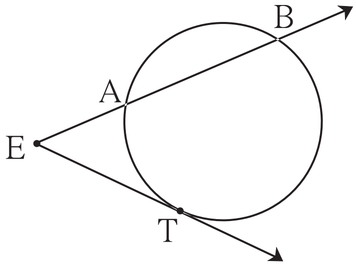


شڪل 3.71

(3) شڪل 3.72 موجب

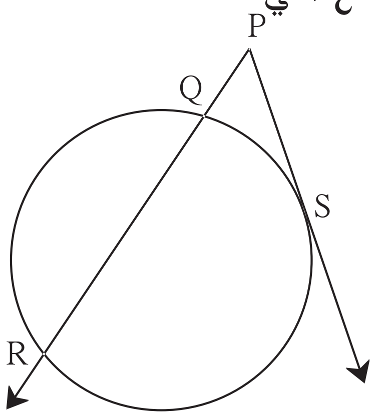
$EA \times EB = ET^2$

ان کي ڇهڻي قاطع ٽڪرن جو سڏيان چئبو آهي.



شڪل 3.72

مثال (1) شڪل 3.73 ۾ تڪر PS اِهو ڇهڻي تڪر آهي. ليڪ PR اِها قاطع آهي



شڪل 3.73

$PQ = 3.6$،

$QR = 6.4$ تہ PS لهو.

حل : $PS^2 = PQ \times PR$ .... **(ڇهڻي قاطع سڏيان)**

$= PQ \times (PQ + QR)$

$= 3.6 \times [3.6 + 6.4]$

$= 3.6 \times 10$

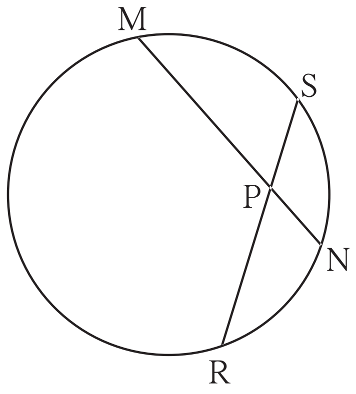
$= 36$

$\therefore PS = 6$

مثال (2) **شڪل 3.74 ۾ زهہ MN ۽ زهہ RS اِهي گول اَندر ٽيڪي P وٽ ملن ٿا.**

$PR = 6, PS = 4, MN = 11$

تہ PN لهو.



شڪل 3.74

حل : زهن جي اَندرين ورڇ سڏيان موجب

$PN \times PM = PR \times PS \ldots (I)$

$PN = x$ سمجهو $\therefore PM = 11 - x$

$x(11 - x) = 6 \times 4$

$\therefore 11x - x^2 - 24 = 0$

$\therefore x^2 - 11x + 24 = 0$

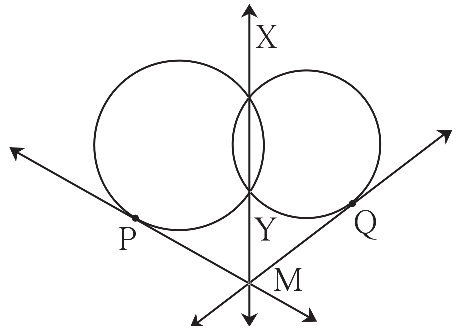
$\therefore (x - 3)(x - 8) = 0$

$\therefore x - 3 = 0$ يا $x - 8 = 0$

$\therefore x = 3$ يا $x = 8$

$\therefore PN = 3$ يا $PN = 8$

مثال (3) شڪل 3.75 ۾ ٻه گول هڪ ٻئي کي ٽپڪن X ۽ Y تي ڪپين ٿا. ليڪ XY تي ٽپڪو M آهي M وٽان گولن ڏانهن P ۽ Q وٽ ڇھڙيون نڪتل آهن.



شڪل 3.75

ثابت ڪريو ٽڪر PM ≅ ٽڪر QM.

ثابتي : خالي جڳھيون پري ثابتي لکو.

ليڪ MX اِها ٻنهي گولن جو عام................ آهي.

∴ (I) ..... $PM^2 = MY \times MX$

ساڳئي نموني .... = ... × .... ، ڇھڙي - قاطع ٽڪرن سڏيان ..... (II)

∴ (I) ۽ (II) مان ...... = QM^2

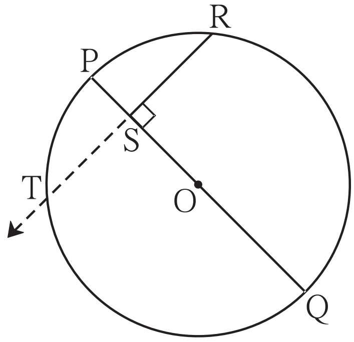
∴ $PM = QM$

ٽڪر PQ ≅ ٽڪر RS

مثال (4)

مثال (4) شڪل 3.76 ۾ ٽڪر PQ اِهو 'O' مرڪز واري گول جو قطر آهي. گول تي ٽپڪو R ڏنل آهي. ٽڪر PQ ⊥ ٽڪر RS ته ثابت ڪريو. SR اِهو PS ۽ SQ جو ريکا گڻت مڌيه آهي.

[$SR^2 = PS \times SQ$]



شڪل 3.76

حل : هيٺ ڏنل ڏاڪا سمجھي ثابتي لکو

(1) ڪرڻو RS ڪيدو اِهو گول کي T وٽ ڪپي ٿو.

(2) RS=RT ثابت ڪريو.

(3) زهن جي اَندرين ورچ سڏيان واپرايو.

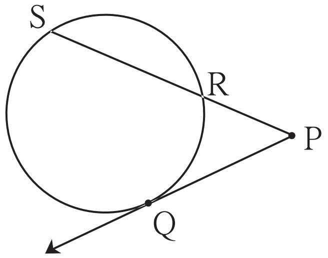
(4) RS=RT اِستعمال ڪري ثابتي لکو.

ويچار ڪريو

(1) مٿي ڏنل شڪل 3.76 ۾ ٽڪر PR ۽ ٽڪر RQ ڪيڏ سان △PRQ ڪھڙي قسم جو ٽڪندو آهي؟

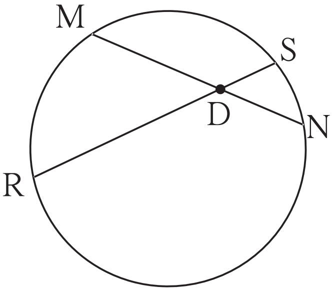
(2) مٿي ڏنل مثال 4 ۾ ثابت ڪيل خاصيت ان ڪان اَڳه ٻئي نموني ثابت ڪئي ويئي آهي ڇا؟

1. شڪل 3.77 ۾ ٽڪو Q چيڙ ٽڪو آهي.
$PQ = 12, PR = 8$،
$RS =$ لهو ؟



شڪل 3.77

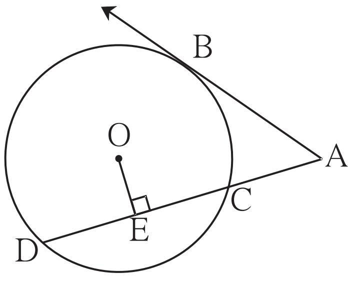
2. شڪل 3.78 ۾ زهه MN ۽ زهه RS
اِهي D وٽ ملن ٿا
(1) جيڪڏهن $RD = 15, DS = 4$،
$MD = 8$ تہ $DN =$ لهو؟
(2) جيڪڏهن $RS = 18$، $MD = 9$،
$DN = 8$ تہ $DS =$ لهو ؟



شڪل 3.78

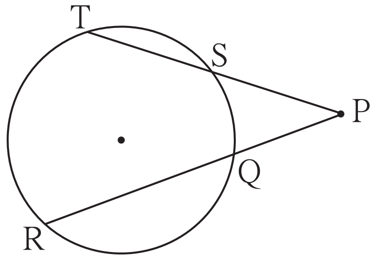
3. شڪل 3.79 ۾ ٽڪو B چيڙ ٽڪو آهي.
گول جو O مرڪز آهي.
ٽڪر $\perp AD$ ٽڪر OE

$AB = 12$,
$AC = 8$، تہ (1) AD (2) DC
(3) DE لهو .



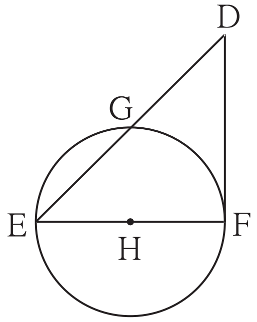
شڪل 3.79

4. شڪل 3.80 ۾ جيڪڏهن $PQ = 6$،
$QR = 10, PS = 8$
تہ $TS =$ لهو ؟



شڪل 3.80

5. شڪل 3.81 ۾ ٽڪر EF قطر آهي. ٽڪر
DF اِهو ڇهڻي ٽڪر آهي. نيم قطر r
آهي تہ ثابت ڪريو
$DE \times GE = 4r^2$



شڪل 3.81

.1 هرهڪ اُپ سوال جا چار متبدل جواب ڏنل آهن.مناسب جواب چونڊيو

(1) 5.5 س م ۽ 3.3 س م نيم قطر وارا گول هڪ ٻئي کي ڇهن ٿا اُنهن جي مرڪزن وچ ۾ مفاصلو ڪيترا س م آهي؟

(A) 4.4 (B) 8.8 (C) 2.2 (D) 8.8 يا 2.2

(2) ٻہ گول هڪ ٻئي کي ڪپيندڙ آهن هڪ گول هرهڪ گول ٻئي گول جي مرڪز مان لنگهي ٿو. جي اُنهن جي مرڪزن وچ ۾ مفاصلو 12 س م آهي تہ هرهڪ گول جو نيم قطر ڪيترا س م ٿيندو؟

(A) 6 (B) 12 (C) 24 (D) ٻڌائي نہ ٿو سگهجي

(3) هڪ گول پوروچوٽ پاسي چوڪنڊي جي سيني پاسن کي ڇهي ٿو تہ اُهو چوڪنڊو .... هئڻ گهرجي.

(A) مستطيل (B) پورچوٽ پاسو (C) چورس (D) پور پاسو چوڪنڊو

(4) هڪ گول جي مرڪز کان 12.5س م مفاصلي تي هڪ ٽٻڪي کان اُن گول ڏانهن ڇهٽي 12 س م آهي تہ گول جو قطر ڪيترا س م آهي؟

(A) 25 (B) 24 (C) 7 (D) 14

(5) ٻاهريان ڇهندڙ ٻن گولن ۾ وڌ ۾ وڌ عام ڇهٽيون گهٽيون تي سگهن ٿيون؟

(A) هڪ (B) ٻہ (C) ٽي (D) چار

(6) مرڪز O واري گول ۾ ∠ACB ڪمان ۾ ∠ACB اِرديل آهي $m\angle ACB = 65°$ تہ $m(\text{arc ACB})$ = لهو. ؟

(A) 65° (B) 130° (C) 295° (D) 230°

(7) هڪ گول ۾ زهہ AB ۽ CD اَندر ۾ وٽ ملن ٿا.

(ED) تہ (AE) = 5.6, (EB) = 10, (CE) = 8 = لهو.؟

(A) 7 (B) 8 (C) 11.2 (D) 9

(8) □ABCD چڪرڪ چوڪنڊو آهي ∠A جي ماپ جي ٻيڻي اِها ∠C جي ماپ جي ٽيڻي آهي تہ ∠C جي ماپ ڪيتري؟

(A) 36 (B) 72 (C) 90 (D) 108

★(9) هڪ گول مٿان ٽٻڪا A,B,C تہ $m(\text{arc AB}) = m(\text{arc BC}) = 120°$, انهن ٻنهي ڪمانن ۾ عام ٽٻڪو ڪوبہ نہ آهي △ABC جو ڪهڙو قسم آهي؟

(A) اَڻپور پاسو (B) ٽپور پاسو

(C) ٻہ پور پاسو (D) گوني ڪنڊ

(10) ٽڪر XZ گول جو قطر آهي گول اَندر Y ٽپڪو آهي ته هيٺين بيانن مان ڪهڙو صحيح آهي؟

(i) $\angle XYZ$ سوڙهي ڪنڊ نه آهي

(ii) $\angle XYZ$ گوني ڪنڊ ٿي نٿي سگهي

(iii) $\angle XYZ$ ويڪري ڪنڊ آهي.

(iv) $\angle XYZ$ لاءِ ڪجهه چئي نه ٿو سگهجي.

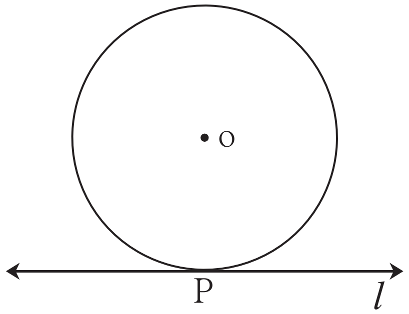
(A) فقط ٻي (B) فقط ٻه (C) فقط هڪ (D) سڀ

.2 گول جو مرڪز O آهي l ليڪ ٽپڪي P وٽ ڇهڻي آهي. نيم قطر 9 س م آهي ته

(1) $d(O, P) = ?$

(2) $d(O,Q)=8$ س م ته Q ٽپڪو ڪٿي آهي؟

(3) $d(O,R)=15$ ته اَهڙا ٽپڪا ليڪ l تي ڪيترا آهن؟ اُنهن جو P کان ڪيترو مفاصلو؟



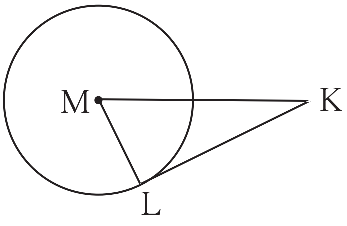
شڪل 3.82

.3 پر واري شڪل ۾ مرڪز M ۽ ٽڪر KL ڇهڻي ٽڪر آهي.

$MK = 12, KL = 6\sqrt{3}$ ته

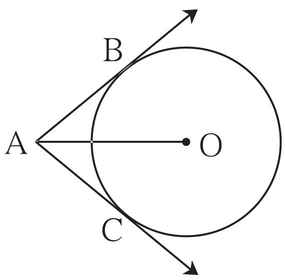
(1) گول جو نيم قطر لهو.

(2) $\angle K$ ۽ $\angle M$ جون ماپون لهو.



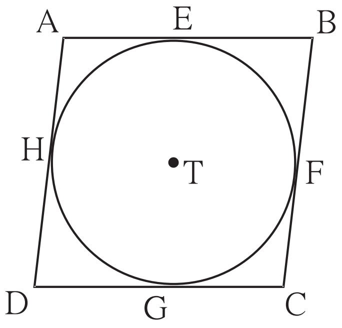
شڪل 3.83

.4 شڪل 3.84 ۾ مرڪز O آهي ٽڪر AB ۽ ٽڪر AC اِهي ڇهڻي ٽڪر آهن گول جو نيم قطر r آهي ۽ $l(AB)=r$ ثابت ڪريو. $\square ABOC$ هڪ چورس آهي.



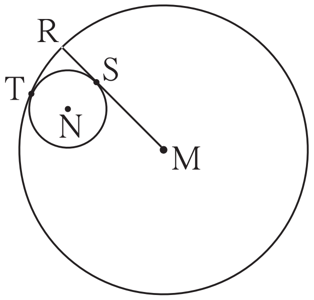
شڪل 3.84

.5 شڪل 3.85 ۾ ABCD□ هڪ پوروچوٽ پاسو چوڪنڊو T مرڪز واري گول جي گرد آهي (مطلب پاسا گول کي ڇهندڙ آهن) G,F,E ۽ H اِهي ڇيڙ - ٽڪا آهن.
AE=4.5 ۽ EB=5.5 تہ AD لهو



شڪل 3.85

.6 شڪل 3.86 ۾ N مرڪز وارو گول M مرڪز واري گول کي T وٽ ڇهي ٿو. وڏي گول جو نيم قطر ننڍي گول کي S وٽ ڇهي ٿو. جيڪڏهن وڏي گول ۽ ننڍي گول جا نيم قطر نمبروار 9 س م ۽ 2.5 س م تہ MS:SR ريشو لهو.



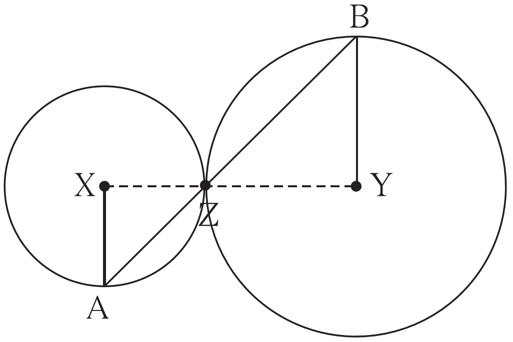
شڪل 3.86

(1) MT = لهو؟ (2) MN = لهو ؟
(3) m∠NSM =ڪيتري؟

نيم قطر

.7 پرواري شڪل ۾ X ۽ Y مرڪزن وارا گول ٽڪي Z وٽ ڇهن ٿا. Z مان لنگهندڙ قاطع اُنهن کي نمبروار A ۽ B وٽ ڪپي ٿي تہ ثابت ڪريو. نيم قطر XA || نيم قطر YB.

ثابتي لاءِ هيٺيان خال ڀريو



شڪل3.87

جوڙجڪ ٽڪر XZ ۽ ٽڪر .... ڪڍو.

∴ ∠ XZA ≅ .... مخالف ڪنڊون

∠ XZA = ∠ BZY = *a* ..... (I)

ٽڪر XA ≅ هاڻي XZ .... (..........)

∴ ∠ XAZ = ... = *a* .... ڀپور پاسو سڏيان (II)

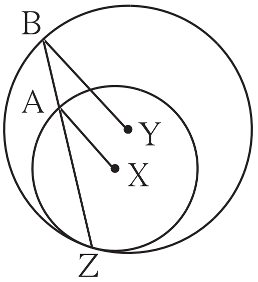
ٽڪرYB ≅ .... (..........)

(III) (..........) .... ∴ ∠ BZY = ... = *a*

∴ (I)، (II) ۽ (III) مان ،

$m\angle XAZ = \ldots\ldots\ldots$

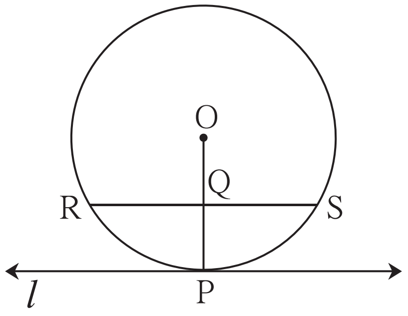
∴ نيم قطر XA || نيم قطر YB ………. (……….)



شڪل 3.88

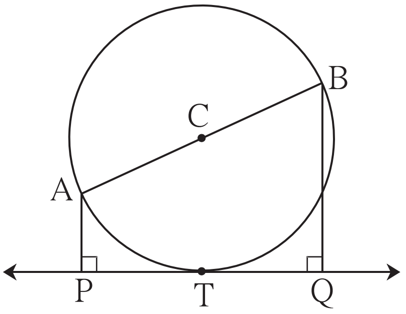
8. شڪل 3.88 ۾ X ۽ Y مرڪز وارا گول هڪ ٻئي کي اَندريان ٽپڪي Z وٽ ڇهن ٿا. ٽڪر BZ وڏي گول جو زهہ ننڍي گول کي A وٽ ڪپي ٿو. ثابت ڪريو ٽڪر BY || ٽڪر AX

9. پرواري شڪل ۾ ليڪ l اِها O مرڪز واري گول کي P وٽ ڇهي ٿي. ٽپڪو Q اِهو نيم قطر OP جو مڌيہ - ٽپڪو آهي. ٽپڪو Q کي سمائيندڙ زهہ RS || ليڪ l جيڪڏهن RS = 12 س م تہ گول جو نيم قطر لهو؟



شڪل 3.89

10★. شڪل 3.90 ۾ گول جو مرڪز C آهي. ٽڪر AB قطر آهي ڇهڻي PQ اِها گول کي T وٽ ڇهي ٿي ليڪ PQ⊥ ٽڪر AP ۽ ليڪ PQ ⊥ ٽڪر PQ تہ ثابت ڪريو ٽڪر CQ ≅ ٽڪر CP



شڪل 3.90

11★. هرهڪ 3 س م نيم قطر وارا C,B,A مرڪزن سان ٽي گول اَهڙي نموني ڪڍو جيئن هرهڪ گول ٻين ٻن گولن کي ڇهي.

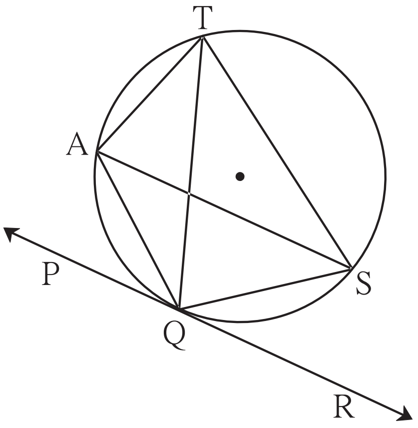
12★. گول جا کهڙا بہ ٽي ٽپڪا هم - ليڪ ٽپڪا نہ هوندا آهن. اِهو ثابت ڪريو.

13. شڪل 3.11 ۾ ليڪ PR گول کي Q وٽ ڇهي ٿي. اِن شڪل جي آڌار تي سوالن جا جواب لکو

(1) $\angle$TAQ ۽ $\angle$TSQ ماپن جو جوڙ ڪيترو؟

(2) $\angle$AQP سان ٺهڪندڙ ڪنڊ ڪهڙي؟

(3) $\angle$ QTS سان ٺهڪندڙ ڪنڊ ڪهڙي؟



شڪل 3.91

(4) جيڪڏهن $\angle$TAS=65° تہ $\angle$TQS ۽ m(arcTS) ٻڌايو.

(5) جيڪڏهن $\angle$AQP=42° ۽ $\angle$SQR=58 تہ $\angle$ATS لهو.

14. پرواري شڪل ۾ گول جو مرڪز O آهي.

تڪر PQ ۽ تڪر RS اِهي ٺهڪندڙ زهہ آهن

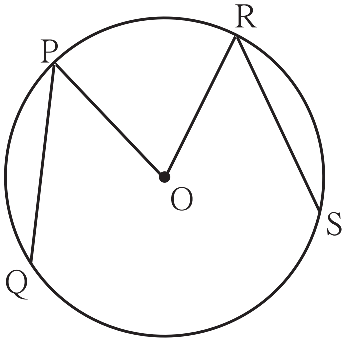
$m\angle$ POR = 70° ۽ ؟

m(arcRS) = 80°، تہ

(1) m(arc PR) ڪيترو؟

(2) m(arc QS) ڪيترو؟

(3) m(arc QSR) ڪيترو؟



شڪل 3.92

15. شڪل 3.93 ۾ ، m(arc WY) = 44°،

m(arc ZX) = 68°، تہ

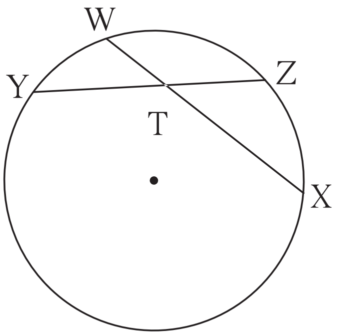
(1) $\angle$ZTX ۽ ڪمان جي ماپ لهو

(2) WT = 4.8, TX = 8.0،

YT = 6.4 TZ = ڪيترو ؟

(3) WX = 25, YT = 8،

YZ = 26، WT = ڪيترو؟.



شڪل 3.93

16. شڪل 3.94 ۾

(1) $m(\text{arc CE}) = 54^\circ$,

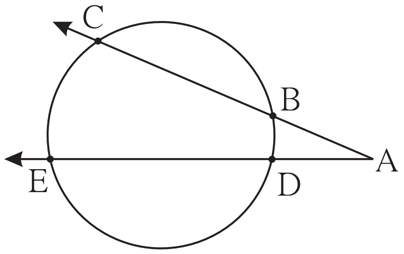
$m(\text{arc BD}) = 23^\circ$, تہ $\angle CAE$ = ڪيتري؟

(2) AB = 4.2, BC = 5.4,

AE = 12.0 تہ AD = ڪيترو؟

(2) AB = 3.6, AC = 9.0,

AD = 5.4 تہ AE = ڪيترو؟



شڪل 3.94

17. پرواري شڪل ۾ زهہ GH || زهہ EF تہ ثابت ڪريو زهہ FH || زهہ EG

هيٺ ڏنل خال پري ثابتي پوري ڪريو .

ثابتي : ٽڪر GF ڪڍو

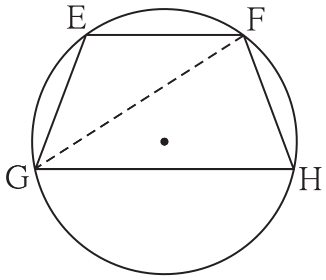
$\angle EFG = \angle FGH$ .... (I)

$\angle EFG$ = ... (اِرديل ڪنڊ سڏيان) (II)

$\angle FGH$ = ... (اِرديل ڪنڊ سڏيان) (III)

$\therefore m(\text{arc EG})$ = ... [(I)، (II) ۽ (III) مان]

زهہ EG ≅ زهہ FH ....(................)



شڪل 3.95

18. پرواري شڪل ۾ ٽپڪو P اهو ڇيڙ ٽپڪو آهي

(1) $m(\text{arc PR}) = 140$،

تہ $\angle POR = 36^\circ$

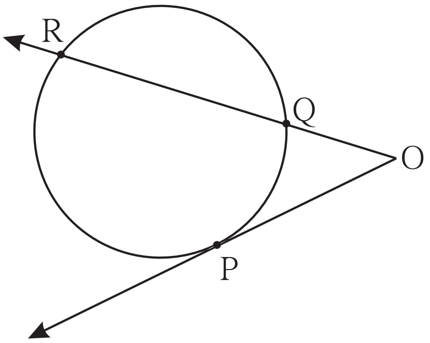
$m(\text{arc PQ})$ = ڪيترو ؟

(2) OP = 7.2، OQ = 3.2،

OR = ڪيترو؟ QR = ڪيترو؟

(3) OP = 7.2، OR = 16.2،

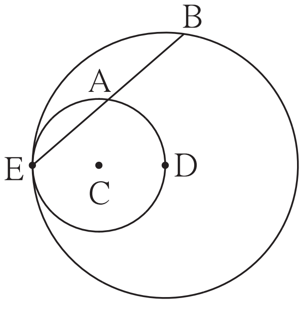
QR = ڪيترو؟



شڪل 3.96

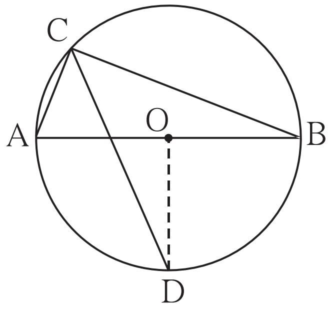
19. پرواري شڪل ۾ C مرڪز وارو گول D مرڪز واري گول کي اندريان E وٽ ڇهي ٿو. ٽپڪو D اندرين گول مٿان آهي. ٻاهرين گول جو زهہ EB اِهو اندرين گول کي ٽپڪي A وٽ ڪپي ٿو تہ ثابت ڪريو

ٽڪر AB ≅ ٽڪر EA



شڪل 3.97

.20 شڪل 3.98 ۾ ٽڪر AB اِهو O مرڪز واري گول جو قطر آهي. اِرديل ACB جو اَڌ گول تي ٽِڪي D وٽ ڪپي ٿو ته ثابت ڪريو : ٽڪر BD ≅ ٽڪر AD



شڪل 3.98

ثابتي خال پري پوري ڪريو

ثابتي ٽڪر OD ڪڍو

$\angle$ ACB = ... (اَڌ ۾ اِرديل ڪنڊ)

$\angle$ DCB = ... (ٽڪر CD اَڌ ڪ آهي)

m(arc DB) = ...(اِرديل ڪنڊ سڌيان)

$\angle$ DOB = ... (ڪمان-ماپ وصف) (I)

ٽڪر OA ≅ ٽڪر OB .... (II)

∴ ليڪ OD اِها ٽڪر AB جي.......... ليڪ آهي.(I) ۽ (II) مان

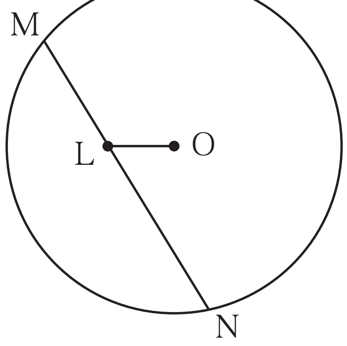
∴ ليڪ AD ≅ ليڪ BD ....

.21 پرواري شڪل 3.99 ۾ O مرڪز واري گول جو زهه MN آهي. زهه MN مٿان L ٽِڪو آهي .

MN = 25, زهه MN ٽِڪو آهي L

ML = 9 ۽ d(O,L) = 5

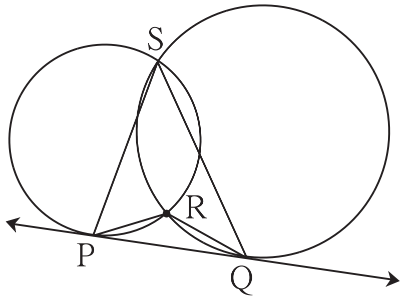
ته گول جو نيم قطر ڪيترو؟



شڪل 3.99

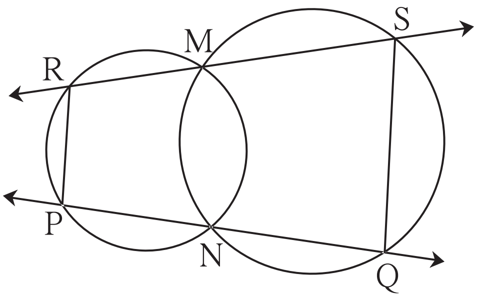
★22. شڪل 3.100 ۾ ٻه گول هڪ ٻئي کي S ۽ R وٽ هڪ ٻئي کي ڪپين ٿا. اُنهن ۾ ليڪ PQ اِها عام ڇهڻي آهي ته ثابت ڪريو.

$\angle$ PRQ + $\angle$ PSQ = 180°



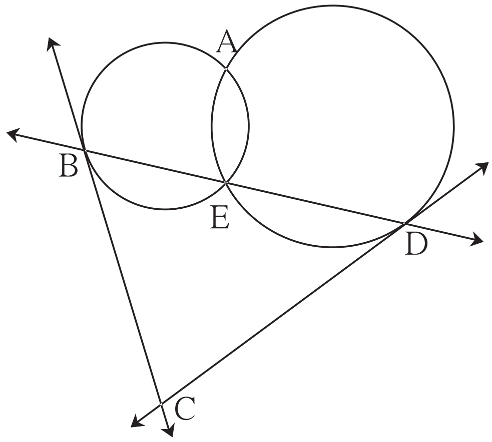
شڪل 3.100

★23. شڪل 3.101 ۾ ٻہ گول هڪ ٻئي کي M ۽ N وٽ ڪپين ٿا. ٽپڪي M ۽ ٽپڪي N مان نڪتل قاطع ٽپڪنR ۽ S ۽ P ۽ Q تي ڪپي ٿي ثابت ڪريو PR||QS چڪرڪ چوڪندو آهي.



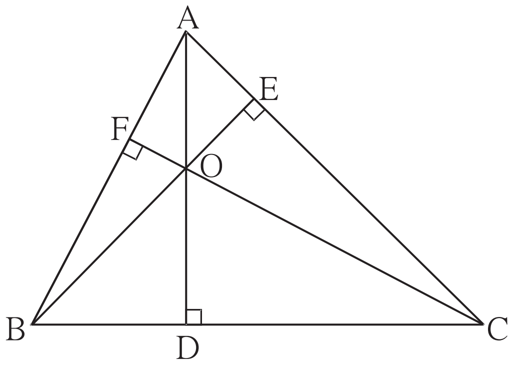
شڪل 3.101

★24 ٻہ گول هڪ ٻئي کي A ۽ E وٽ ڪپين ٿا ٽپڪي C وٽان نڪتل ڇهڻيون B ۽ D وٽ ڇهن ٿيون ثابت ڪريو □ABCD چڪرڪ چوڪندو آهي.



شڪل 3.102

★25. △ABC ۾ پاسو BC⊥ ٽڪر AD
پاسو AC⊥ ٽڪر BE
پاسو AB⊥ ٽڪر CF
ٽپڪو O اِهو آرٿو مرڪز آهي ثابت ڪريو
ٽپڪو O اِهو ٽڪنڊي △DEF جي اَندرين حصي ۾ آهي.



شڪل 3.103

ICT Tools or Links

جيئو جبرا مدد سان جدا جدا گول ڪيو. اُنهن ۾ زهه ۽ ڇهڻيون ڪيدي خاصيتون چڪاس ڪريو.

4 جاميٽريءَ جا جوڙجڪ

اڃا تہ سکي وٺون.

- هڪ جھڙن ٽڪنڊن جو جوڙجڪ

* ٻن هڪ جھڙن ٽڪنڊن مان هڪ ٽڪنڊي جا پاسا ۽ ٻنهي ٽڪنڊن جي نسبتي پاسن جو ريشو مليا تہ ٻيو ٽڪنڊو ڪيڻ.
  (i) هڪ ٻہ نوڪي ٽبڪو عام نہ هئڻ
  (ii) هڪ نوڪي ٽبڪوءَ هڪ ڪنڊ عام هئڻ

- گول جي ڇهٽي ڪيڻ

* گول تي مليل ٽبڪي تي ڇهٽي ڪيڻ
  (i) گول جو مرڪز اِستعمال ڪري
  (ii) گول جو مرڪز اِستعمال نہ ڪري
* گول جي ٻاهران مليل ٽبڪي مان گول ڏانهن ڇهٽي ڪيڻ.

ذرا ياد ڪريو .

هيٺ ڏنل جوڙجڪ اَسان اڳہ وارن درجن ۾ سکيا آهيون اُنهن جوڙجڪن جو دوُر ڪريو

- ڏنل ليڪ جي ٻاهر ٽبڪي مان، اُن ليڪ جي پوروچوٽ ليڪ ڪيڻ.
- ڏنل ليڪ - ٽڪر جو عمودي اَڌڪ ڪيڻ
- ٽڪنڊي جا پاسا ملڻ سان ٽڪنڊو ڪيڻ
- ڏنل ليڪ - ٽڪر جو ڏنل عدد موجب حصا ڪرڻ
- ڏنل ليڪ ٽڪر کي مليل ريشي ۾ ورهائڻ.
- ڏنل ڪنڊ جي ٻہڪندڙ ڪنڊ ڪيڻ

درجي نائين ۾ توهان اِسڪول جي پسگردائيءَ جو نقشو تيار ڪرڻ جو عملي ڪم ڪيو آهي ڪنهن عمارت ٺاهڻ کان اَڳہ، اُن جو ڪچو نقشو تيار ڪبو آهي، اِسڪول جي پسگردائي ۽ اُن جو نقشو، عمارت ۽ اُنجو ڪچو نقشو اِهي هڪ ٻئي ۾ هڪ جھڙائي خاصيت ڏيکارين ٿا. جاگرافي، واستو شاستر، اِنجنيئرنگہ وغيرهہ ۾ شڪليون ڪيڏيون پونديون آهن. ٽڪنڊو هڪ سادي - بند شڪل جو مثال آهي ڏنل ٽڪنڊي جو هڪ جھڙو ٽڪنڊو ڪيئن ڪيو اَچو تہ سکون.

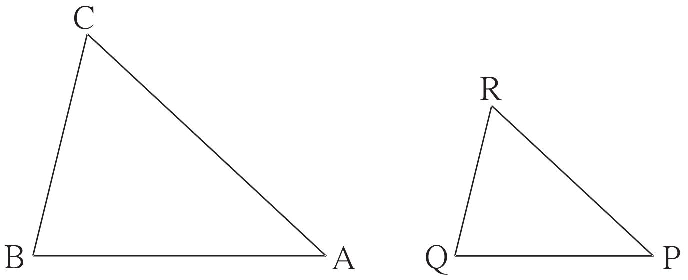
چاڪي وٺون.

هڪ جهڙا ٽڪنڊا : جوڙجڪ

هڪ ٽڪنڊي جا پاسا مليل آهن اُن مان هڪ جهڙو ۽ ريشو شرط پوري ڪندي ٽڪنڊو ڪيڻ :

ٻن هڪ جهڙن ٽڪنڊن جا نسبتي پاسا پروپورشن ۾ هوندا آهن ۽ نستبي ڪنڊون ٺهڪندڙ هونديون آهن اِن جو اِستعمال ڪري هڪ جهڙا ٽڪنڊا ڪيبا آهن.

مثال (1) $\Delta ABC \sim \Delta PQR$، ΔABC ۾ $AB =$ 5.4 س م، $BC =$ 4.2 س م، $AC =$ 6.0 س م. $AB : PQ = 3:2$ ته ΔABC ۽ ΔPQR ڪيو



شڪل 4.1
ڪچي شڪل

پهريائين ΔABC ماپن موجب ڪيو.

ΔABC ۽ ΔPQR هڪ جهڙا آهن

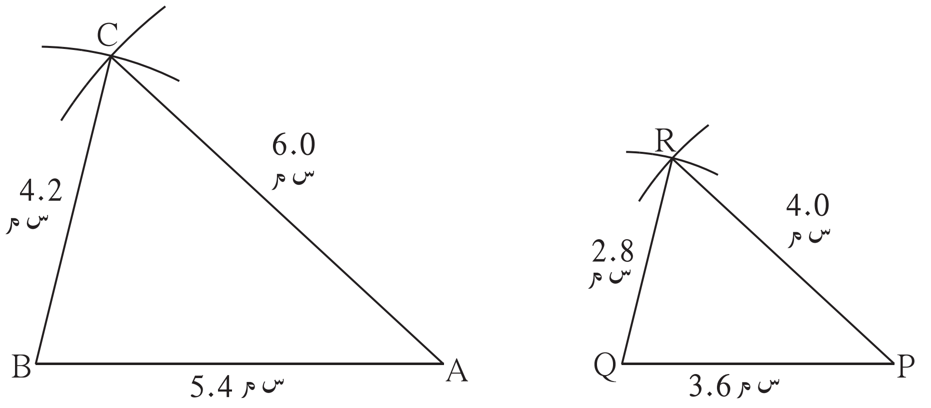
∴ نسبتي پاسا پروپورشن ۾ آهن.

$$\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{AC}{PR} = \frac{3}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(I)}$$

AB, BC, AC جون ماپون مليل آهن اِن ڪري PQ, QR, PR جو ماپون لهي سگهجن ٿيون.

$$\frac{5.4}{PQ} = \frac{4.2}{QR} = \frac{6.0}{PR} = \frac{3}{2}$$

∴ $PQ =$ 3.6 س م، $QR =$ 2.8 س م ۽ $PR =$ 4.0 س م

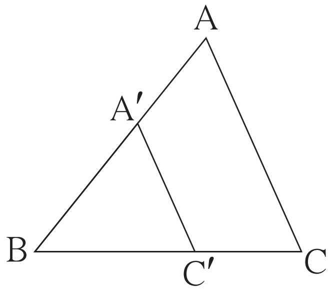


4.2

△PQR جا سيني پاسن جي ڊيگھہ ملڻ سان اُهو ٽڪنڊو ڪيڊو.

> **وڌيڪ ڄاڻ لاءِ**
>
> ڪيترائي دفعا ڏنل ٽڪنڊي جو هڪ جهڙو ٽڪنڊو ڪيڏو هوندو آهي اُنهن جا پاسا ماپي نہ سگھيا آهن. اهڙي وقت ڏنل ليڪ - ٽڪر جا عدد موجب حصن ۾ ورهائي ٽڪنڊي جا پاسا ڪيڊا
>
> مثال پاسي AB جي ڊيگھہ $\frac{11.6}{3}$ س م تہ 11.6س م ٽڪر جا 3 برابر حصا ڪري AB پاسو ڪيڊو.

△PQR جا سڀ پاسا ملڻ سان، اُنجو جوڙجڪ ڪيڊو. مٿي ڏنل مثال ۾ ٻنهي ٽڪنڊن ۾ ڪوبہ نوڪي ٽڪو عام نہ هو. هڪ نوڪي ٽڪو عام هجي، تہ ٽڪنڊا ڪيڻ وڌيڪ سولا ٿيندا.



شڪل 4.3
ڪچي شڪل

مثال(2) △ABC ڪوبہ ٽڪنڊو ڪيڊو △ABC جو هڪ جهڙو ٽڪنڊو A'B'C'ڪيڊو جئن

AB : A′B = 5:3

ڇيد : B,A,A ءِ B,C,C اِهي هم ليڪ ٽڪا ڪٽو.

$$\Delta ABC \sim \Delta A'BC' \therefore \angle ABC = \angle A'BC'$$

$$\frac{AB}{A'B} = \frac{BC}{BC'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{5}{3}$$

∴△ABC جا پاسا △A'B'C' جي ڀيٽ ۾ وڏا هوندا.

∴ ٽڪرBCجا 5 برابر حصا ڪبا اُنهن مان3 حصا ٽڪر BC' جا هوندا △ABC ۾ ٽڪر BC جي Bٽڪي کان 3 حصا ڪٽي اُنکي C' نالو ڏيو. ٽڪي C' مان ٽڪرACجي پوروچوٽ ليڪ BA کي A' وٽ ڪپيندي.

$\frac{BA'}{BA} = \frac{BC'}{BC} = \frac{3}{5}$ مطلب ، $\frac{BA}{BA'} = \frac{BC}{BC'} = \frac{5}{3}$

جوڙجڪ جا ڏاڪا

(1) $\triangle ABC$ ڪڍيو

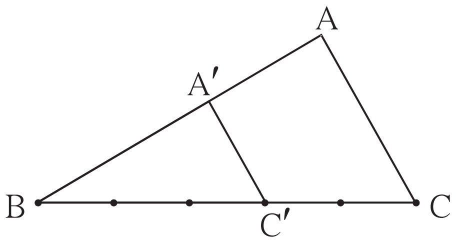
(2) BC ٽڪر جا پنج حصا ڪريو

(3) B کان 3 حصا ڪٽي اُن ٽپڪي کي C نالو ڏيو.

$\therefore\ BC' = \frac{3}{5}\ BC$

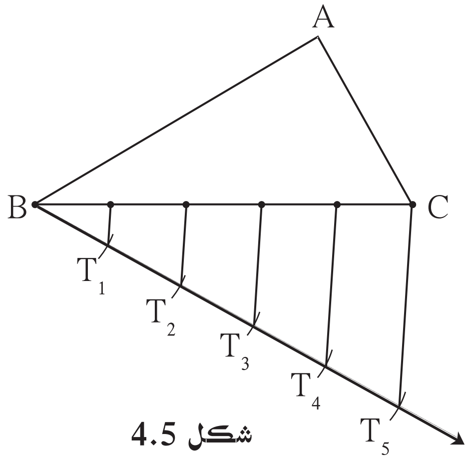
(4) مطلب هاڻي C' ٽپڪي مان CA جي پوروچوٽ ليڪ ڪڍيو اِها AB کي جتي ڪپي اُتي A' نالو ڏيو.

(5) $\triangle ABC$ جو هڪ جهڙو ٽڪنڊو $\triangle A'B'C$ ملندو.



شڪل 4.4

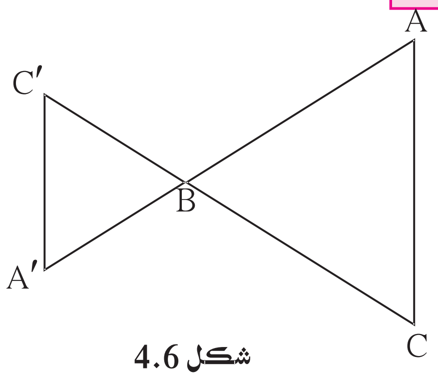
ٽپ : BC جا پنج حصا ڪرڻ لاءِ جنهن پاسي A آهي، اُن جي مخالف پاسي B وٽان هڪ ڪرڻو ڪڍي، اُنجا حصا ڪرڻ سهوليت پريو آهي. اُن ڪرڻي تي $BT_1 = T_1T_2 = T_2T_3 = T_3T_4 = T_4T_5$ حصا ڪٽو T_5C جوڙيو T_1, T_2, T_3, T_4, T_5 مان T_5C جي پوروچوٽ ليڪ ڪڍيو.



شڪل 4.5

ويچار ڪريو

هڪ جهڙا ٽڪنڊا ڪڍڻ وقت ڪڇي شڪل موجب $\triangle A'B'C$ ڪڍي سگهجي ٿو. اِن لاءِ $\triangle A'B'C$ ڪڍڻ وقت جوڙجڪ جي ڏاڪن ۾ ڪهڙي تبديل ڪرڻي پوندي.



شڪل 4.6

مثال (3) $\triangle ABC$ جو هڪ جهڙو ٽڪنڊو $\triangle A'B'C'$ ڪڍو جئن $AB : A'B = 5:7$

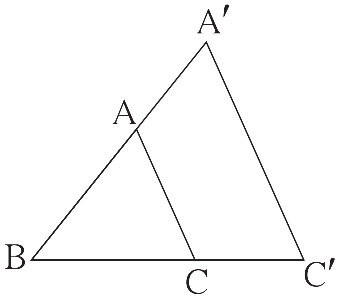
چيد : B, A, A' ۽ B, C, C' هم ليڪ ٽپڪا آهن.

$\Delta ABC \sim \Delta A'BC'$ ۽ $AB : A'B = 5:7$

∴ $\triangle ABC$ جا پاسا $\triangle A'B'C'$ جي ڀيٽ ۾ ننڍا آهن
اِن جو ويچار ڪندي ڪچي شڪل ڪڍبي.

$$\angle ABC \cong \angle A'BC'$$

$$\frac{BC}{BC'} = \frac{5}{7}$$



شڪل 4.7
ڪچي شڪل

∴ ٽڪر BC جا 5 برابر حصا ڪرڻ سان اُنهن ۾ هڪ حصي جي ستوڻ BC' ٽڪر ٿيندو.

∴ $\triangle ABC$ ڪڍي ٽڪر BC جا 5 برابر حصا ڪري، B کان ست حصا ڏيگهه ڪٽي BC تي C' ملندو. پروپورشن جي بنيادي سڏيان موجب C' وٽان AC جي پوروچوٽ ليڪ ڪرڻي BA کي A' وٽ ڪپيندي. $\triangle A'B'C'$ اِهو گهربل ٽڪنڊو آهي.

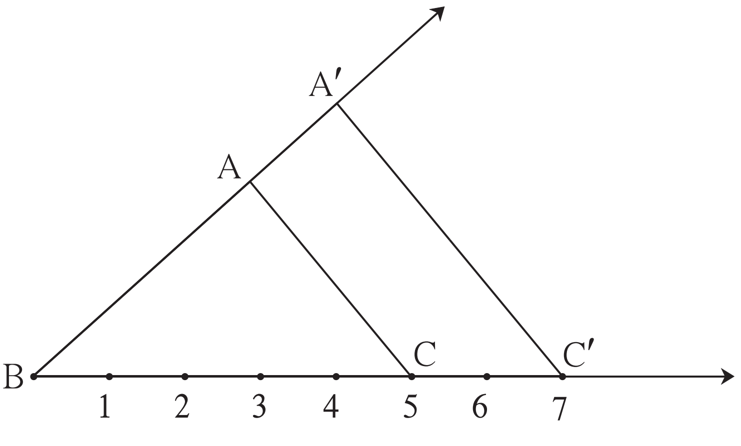
جوڙجڪ جا ڏاڪا

(1) $\triangle ABC$ ڪڍو

(2) BC جا 5 برابر حصا ڪريو ڪرڻي BC تي C' ڪٽو جئن BC' جي ڏيگهه BC جي هڪ حصي ۾ ستوڻ ٿئي.

(3) C' مان AC جي پوروچوٽ ليڪ ڪڍو جيڪا ڪرڻي BA کي A' وٽ ڪپي.

(4) $\triangle A'B'C'$ هاڻي $\triangle ABC$ جو هڪ جهڙو ٽڪنڊو ملندو.



شڪل 4.8

اَڀياس 4.1

1. $\Delta LMN \sim \Delta ABC$ ، ΔABC ۾ $AB = 5.5$ س م ، $BC = 6$ س م ، $CA = 4.5$ س م ۽ $\frac{BC}{MN} = \frac{5}{4}$ ته ΔABC ۽ ΔLMN ڪڍو

2. $\Delta LTR \sim \Delta PQR$ ، ΔPQR ۾ $PQ = 4.2$ س م ، $QR = 5.4$ س م ، $PR = 4.8$ س م ۽ $\frac{PQ}{LT} = \frac{3}{4}$ ته ΔPQR ۽ ΔLTR ڪڍو

3. $\Delta XYZ \sim \Delta RST$ ، ΔRST ۾ $RS = 4.5$ س م ، $\angle RST = 40^\circ$ ، $ST = 5.8$ س م ۽ $\frac{RS}{XY} = \frac{3}{5}$ ته ΔRST ۽ ΔXYZ ڪڍو.

4. $\Delta AHE \sim \Delta AMT$ ، ΔAMT ۾ $AM = 6.3$ س م ، $\angle TAM = 50^\circ$ ، $AT = 5.6$ س م ۽ $\frac{AM}{AH} = \frac{7}{5}$ ته ΔAHE ڪڍو.

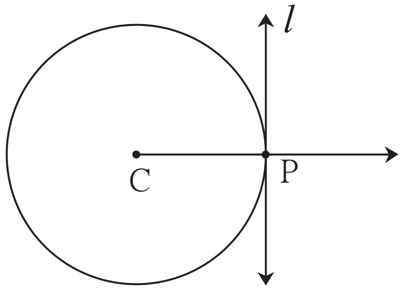
چاڙهي وٺون.

گول تي ڏنل ٽٻڪي مان گول ڏانهن ڇُهٽي ڪڍڻ

(i) گول جو مرڪز اِستعمال ڪري.

چيد :

سمجهو ته 6 مرڪز واري گول تي P ٽٻڪي وٽ ليڪ l ڇهٽي ڪيڏي آهي. اَسان کي خبر آهي ته نيم قطر جي ٻاهرين چيڙ ٽٻڪي تي نڪتل عمود اِها ڇهٽي آهي. اِن خاصيت جو اِستعمال ڪبو. CP نيم قطر تي ليڪ CP عمود ڪڍبو ته اها ليڪ ڇهٽي ٿيندي



شڪل 4.9

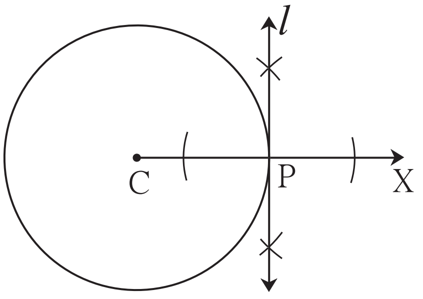
اِن ڪري CP ڪڍي، ليڪ l جو جوڙجڪ ڪنداسين جيئن ليڪ $l \perp CP$

جوڙجڪ جا ڏاڪا :

(1) گول جو مرڪز C ڪٽو. گول تي هڪ ٽٻڪو P ڪٽو.

(2) ڪرڙو C ڪڍو

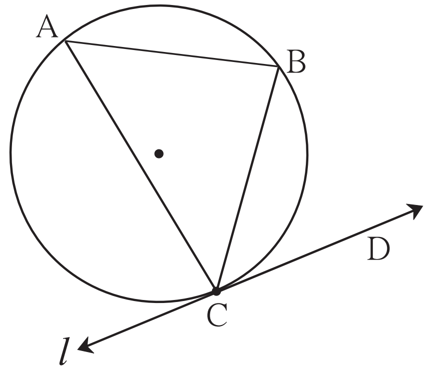
(3) ٽٻڪي P وٽ، ڪرڙي CX تي هڪ عمود ليڪ ڪڍو. اِها ليڪ P ٽٻڪي تي گول ڏانهن ڇهٽي آهي.



شڪل 4.10

(ii) گول تي ڏنل ٽپڪي مان گول ڏانهن ڇهڪي ڪڍڻ (بنا گول جي مرڪز اِستعمال جي)

مثال : ڪهڙي بہ نيم قطر وارو گول ڪيو. اُن تي 'C' ٽپڪو ڪٽو بنا مرڪز اِستعمال جي، C تي گول ڏانهن عمود ڪڍو.



شڪل 4.11

شڪل موجب ليڪ l اِها C وٽ گول ڏانهن ڇُهڪي آهي. ٽڪر CB اِهو قطر ۽ CAB اِها اِرديل ڪنڊ آهي. ڇهڪي - قاطع سڌيان موجب $\angle CAB \cong \angle BCD$.

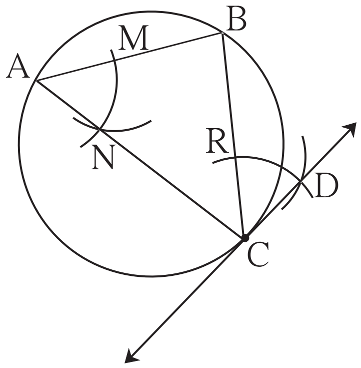
انڪري اِن سڌيان جو اُبتڙ موجب جيڪڏهن $\angle CAB \cong \angle BCD$,

تہ ليڪ l ڇُهڪي اِن ڪري ٽڪر CB اِهو زهہ ڪٽي، $\angle CAB$ ڪنڊ ڪڍي، $\angle BCD$ڪنڊ ڪڍي، BCD ڪنڊ اَهڙي نموني ڪڍبي، جئن $\angle BCD$

$\angle BCD \cong \angle BAC.$

ليڪ CD اِها گهربل ڇهڪي نڪرندي.

جوڙجڪ جا ڏاڪا



شڪل 4.12

(1) هڪ گول ڪيو. گول تي ٽپڪو C ڪٽو.

(2) زهہ CB ۽ اِرديل ڪنڊ $\angle CAB$ ڪيو.

(3) ڪمپاس تي سهوليت ۾ وارو نيم قطر ڪٽي ۽ مرڪز A ڪٽي $\angle BAC$ جي پاسن تي M ۽ N وٽ ڪپي ڪمان ڪيو.

(4) اُهو نيم قطر ۽ C مرڪز ڪٽي زهہ CB تي R وٽ ڪپيندڙ ڪمان ڪيو.

(5) ڪمپاس وسيلي MN ماپ وارو نيم قطر ۽ مرڪز R ڪٽي اَڳہ واري ڪيڊل ڪمان تي D وٽ ڪپيندڙ ٻي ڪمان ڪيو.

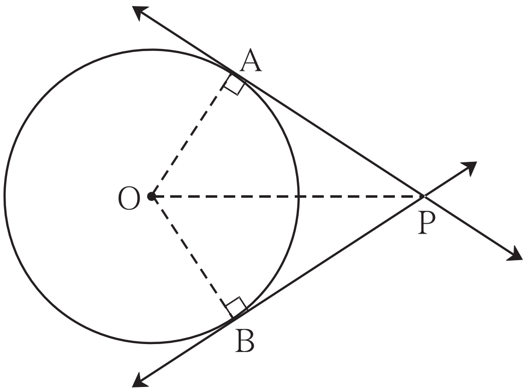
ليڪ CD ملايو. اِها ليڪ CD گهربل ڇهڪي آهي.

(متي ڏنل شڪل ۾ $\angle BCD \cong \angle MAN$ اِن جا ڪارڻ سوچيو ٽڪر MN ۽ ٽڪر RD

جوڙڻ سان پاسو - پاسو - پاسو آزمائش $\Delta MAN \cong \Delta RCD. \therefore \angle MAN \cong \angle BCD$)

گول ٻاهران ڏنل ٽبڪي مان گول ڏانهن ڇهٽي ڪيڻ

چيد :



شڪل 4.13

O گول جو مرڪز آهي P گول جي ٻاهران ٽبڪو آهي P وٽان نڪتل ڇهٽيون A ۽ B وٽ گول تي ڪپين ٿيون. جيڪڏهن گول تي A ۽ B جايون برابر ملن تہ PA ۽ PB ڇهٽيون ٿينديون. نيم، قطر OA ۽ OB ڪڍبا ليڪ PB نيم قطر OB ليڪ PA ⊥ نيم قطر △OAP ۽ △OBP اِهي گوني ڪنڊ ٽڪنڊا آهن. OP اِهو ٻنهي ٽڪنڊن جو هئپاٽينيوز آهي.

قطر OP ڪٽي گول ڪڍبو تہ O مرڪز واري گول تي A ۽ Bوٽ ڪپيندو اَڌ گول اِرديل ڪنڊ گوني ڪنڊ هوندي آهي.

جوڙجڪ جا ڏاڪا :

(1) Oمرڪز وارو هڪ گول ڪڍو.

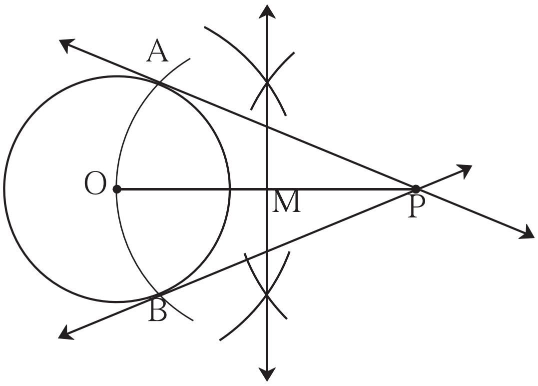
(2) گول جي ٻاهران P هڪ ٽبڪو ڪٽو.

(3) ٽڪر OPڪڍو ۽ اُنجو عمودي اَڌڪ ڪڍي 'M' حاصل ڪيو.

(4) مرڪز M ۽ نيم قطر OM ڪٽي گول ڪڍو.

(5) اِهو گول ڏنل گول تي A ۽ B وٽ ڪپيندو.

(6) ليڪ PA ۽ ليڪ PB ڪيو. اِهي گهربل ڇهٽيون آهن.



شڪل 4.14

اَڀياس 4.2

(1) مرڪز P ۽ نيم قطر 3.2 س م وارو گول ڪڍو. گول تي ٽبڪو M ڪٽي، اُن تي گول ڏانهن ڇهٽي ڪڍو.

(2)2.7س م نيم قطر وارو گول ڪڍو. اُنتي ڪوبہ ٽبڪو ڪٽي ڇهٽي ڪڍو.

(3) 3.6 س م نيم قطر وارو گول ڪڍو. بنا مرڪز اِستعمال جي، گول جي ڪنهن بہ ٽبڪي تي ڇهٽي ڪڍو.

(4) 3.3 س م نيم قطر وارو گول ڪڍو. 6.6 س م ڊيگهہ وارو زهہ PQ ڪڍو. P ۽ Q وٽ ڇهٽيون ڪڍو. ڇهٽين بابت چڪاس ڪريو.

5. 3.4 س م نيم قطر وارو گول ڪيو 5.7 س م ڊيگهه وارو زهہ MN ڪيو. M ۽ N تي گول ڏانهن ڇهٽيون ڪيو.

6. مرڪز P ۽ C نيم قطر 3.4 ڪٽي هڪ گول ڪيو. گول مرڪز کان 5.5 س م مفاصلي تي ٽپڪو O ڪٽيو. O وٽان گول ڏانهن ڇهٽيون ڪيو.

7. 4.1 س م نيم قطر وارو گول ڪيو. مرڪز کان 7.3 س م مفاصلي تي ٽپڪي کان ڇهٽيون ڪيو.

گڏيل اڀياس 4

1. مناسب متبدل چونڊيو

1. گول تي ڏنل ٽپڪي مان گول ڏانهن ڇهٽين جو عدد ... هوندو آهي.

(A) 3 (B) 2 (C) 1 (D) 0

(2) گول کان ٻاهر ڏنل ٽپڪي مان گول ڏانهن ..... ڇهٽيون ڪيدي سگهيون.

(A) 2 (B) 1 (C) فقط هڪ (D) 0

(3) $\Delta ABC \sim \Delta PQR$، $\frac{5}{7} = \frac{AB}{PQ}$ تہ ....

(A) ΔABC وڏو (B) ΔPQR وڏو

(C) چئي نہ ٿو سگهجي (D) ٻئي برابر

2. O مرڪز ۽ 3.5 س م نيم قطر وارو گول ڪيو. مرڪز کان 5.7 س م مفاصلي تي P ڪٽي اُن کان گول ڏانهن ڇهٽيون ڪيو.

3. ڪوبہ گول ڪيو اُن تي هڪ ٽپڪو A ڪٽي بنا مرڪز اِستعمال جي اُن ٽپڪي تي ڇُهٽي ڪيو.

4. 6.4 قطر وارو گول ڪيو مرڪز کان قطر جيتري مفاصلي تي ٽپڪو R ڪٽي، اُن مان گول ڏانهن ڇُهٽيون ڪيو.

5. P مرڪز ڪٽي گول ڪيو. $100°$ ماپ وارو ڪمان AB ڪيو A ۽ B وٽ گول ڏانهن ڇهٽيون ڪيو.

6. E مرڪز ۽ 3.4 س م نيم قطر ڪٽي گول ڪيو گول تي F ٽپڪو ڪٽيو. ٽپڪو A اهڙي نموني ڪٽيو جيئن FA = 4.1 E-F-A ٽپڪي A وٽان گول ڏانهن ڇهٽي ڪيو.

7. $\Delta ABC \sim \Delta LBN$، ΔABC ۾ $AB = 5.1$ س م، $\angle B = 40°$، $BC = 4.8$ س م، $\frac{AC}{LN} = \frac{4}{7}$ تہ ΔABC ۽ ΔLBN ڪيو

8. ΔPYQ ڪيو PY=6.3س م، YQ=7.2س م، PQ=5.8س م، ΔXYZ ڪيو جيڪو ΔPYQ سان هڪ جهڙائي رکي ٿو. $\frac{YZ}{YQ} = \frac{6}{5}$

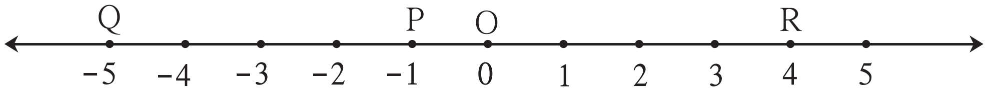
5 مساوي جاميٽري

اَچو تہ سکي وٺون

- مفاصلو سوتر
- ورڇ سوتر
- ليڪ جو لاهہ

ذرا ياد ڪريو.

عدد - ليڪ تي ٻن ٽٻڪن وچ ۾ مفاصلو ڪيئن لهبو آهي. اِها اَسان کي ڄاڻ آهي Q,P ۽ Rجا مساوا نمبروار 1-,5-,4 جا آهن تہ ٽڪر PQ ۽ ٽڪر QR جي ڊيگهہ لهو.



شڪل 5.1

شڪل 5.1 اَنوسار R,Q,Pجا مساوا آهن 1-,5-,4

ٽٻڪي A ۽ B جا مساوا x_1 ۽ x_2 جا مساوا، ۽ $x_2 > x_1$ آهن

$= d(A,B) = x_2 - x_1$

ٽڪر Q,Pجي ڊيگهہ شڪل 5.1 اَنوسار R,Q,Pجا مساوا آهن 1-,5-,4

$\therefore\ d(P, Q) = (-1)-(-5) = -1 + 5 = 4$

$d(Q, R) = 4 - (-5) = 4 + 5 = 9$

اها ويچار ذارا ڪم آڻي XY گراف تي هڪ ئي محور تي ٻن ٽٻڪن وچ ۾ مفاصلو لهي سگهجي ٿو.

ڄاڻي وٺون

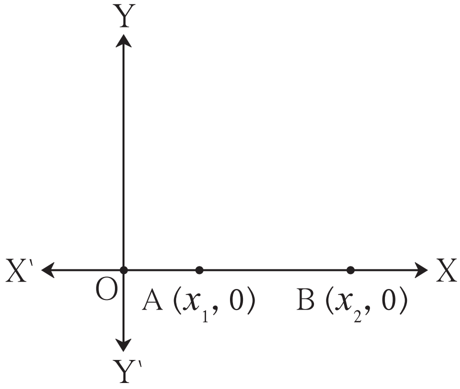
(1) هڪ ئي محور تي ٻن ٽٻڪن وچ ۾ مفاصلو لهڻ

هڪ محور تي ٻہ ٽٻڪا X- مطلب هڪ ئي عدد - ليڪ تي ٻہ ٽٻڪا X- محور تي ٽٻڪن جا مساوا $(0, 1), (0, \frac{17}{2}), (0, -3)\ (2, 0), (\frac{-5}{2}, 0), (8, 0)$ هوندا

اِهو ڌيان ۾ رکو.

X- محور جا ڪاٽو مساوا ڌيڪاينڊز ياڱو OX' ۽ Y- محور تي ڪاٽو مساوا ڌيڪارينڊز ياڱو OY آهي.

i) X- محور تي ٻن ٽپڪن وچ ۾ مفاصلو



شڪل 5.2

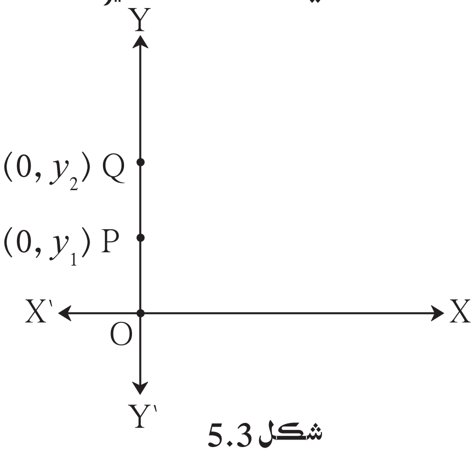
متي ڏنل شڪل موجب

$A(x_1, 0)$ $B(x_2, 0)$ محور تي

X- ، $x_2 > x_1$

$\therefore$ $d(A, B) = x_2 - x_1$

ii) Y- محور تي ٻن ٽپڪن وچ ۾ مفاصلو



شڪل 5.3

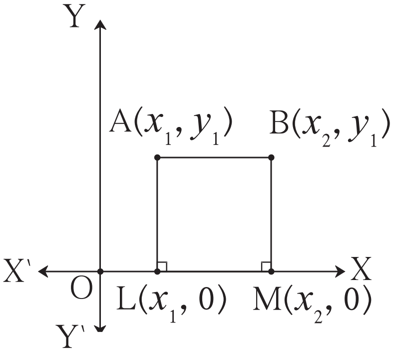
متي ڏنل شڪل موجب

$Q(0, y_2)$ $P(0, y_1)$ محور تي

Y- ، $y_2 > y_1$

$\therefore$ $d(P,Q) = y_2 - y_1$

2) XYمحور تي ٻن ٽپڪن کي ملائيندڙ ٽڪر ڪنهن محور جي پورو چوٽ هجي ته اُنهن ٻن ٽپڪن وچ ۾ مفاصلو لهڻ.



شڪل 5.4

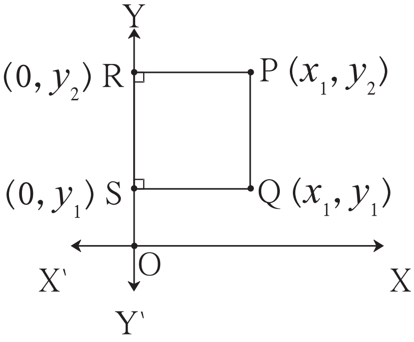
(i) شڪل موجب ٽڪر AB اهو X- محور جي پورو چوٽ آهي. مطلب A ۽ B جو Y- مساوو ساڳيو آهي. X- محور تي ٽڪر AL ۽ ٽڪر AL ۽ ٽڪر OM عمود ڪيو.

ABML□ مستطيل آهي

$\therefore$ AB = LM

پر ، $LM = x_2 - x_1$

$\therefore$ $d(A,B) = x_2 - x_1$



شڪل 5.5

ii) شڪل ۾ ٽڪر PQ اِهو Y- محور جي پورو چوٽ آهي. مطلب P ۽ Q جو X مساوو ساڳيو آهي

Y- محور تي PR ۽ QS عمود ڪيو.

$\therefore$ PSQR□ مستطيل آهي

$\therefore$ PQ = RS

پر $RS = y_2 - y_1$

$\therefore$ $d(P,Q) = y_2 - y_1$

مشغولي :

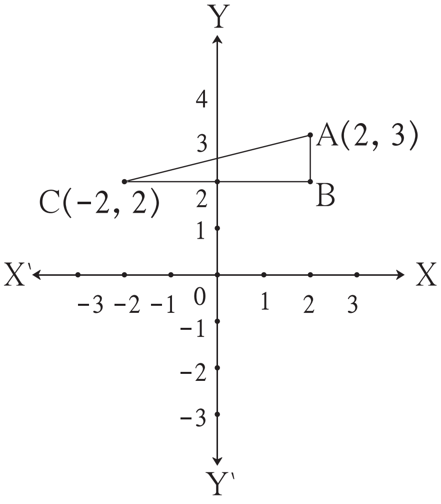
شڪل ۾ Y- محور || تکر AB

X- محور || تکر CB

A ۽ C جا مساوا ڏنل آهن.

$\triangle ABC$ ڳوني ڪند تڪندو آهي

پائٿاگورس سڏيان موجب



شڪل 5.6

$(AB)^2 + (BC)^2 = \boxed{}$

AB ۽ BC ڳولهڻ لاءِ ٽپڪي B جا مساوا لهون

$CB \parallel X-$محور $\therefore$ B جو y مساووت = $\boxed{}$

$BA \parallel Y-$محور $\therefore$ B جو x مساووت = $\boxed{}$

$AB = \boxed{3} - \boxed{} = \boxed{}$ $\qquad$ $BC = \boxed{} - \boxed{} = \boxed{4}$

$\therefore AC^2 = \boxed{} + \boxed{} = \boxed{}$ $\qquad$ $\therefore AC = \boxed{\sqrt{17}}$

چاڪي وٺون

مفاصلو سوتر (Distance formula)

شڪل 5.7 ۾، $A(x_1, y_1)$ ۽ $B(x_2, y_2)$

XY گراف تي ٻه ٽپڪا آهن

ٽپڪي B وٽان X- محور طرف BP عمود ڪيو.

ٽپڪي A وٽان Y- محور طرف DA عمود ڪيو.

تکر BP اِهو X- محور جي پوروچوٽ آهي.

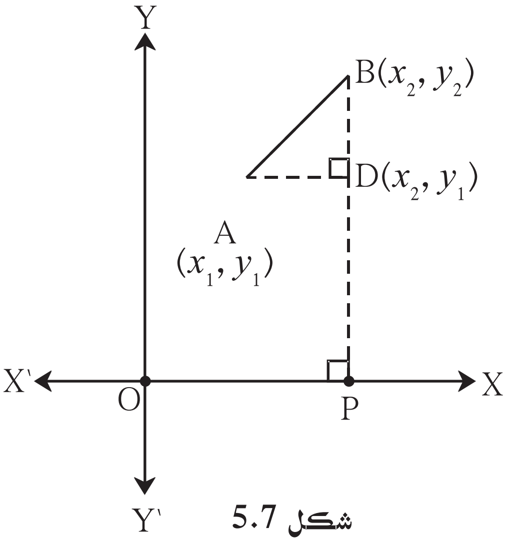
$\therefore$ ٽپڪي D جو X مساوو X آهي.

تکر AD، X- محور جي پوروچوٽ آهي.

$\therefore$ ٽپڪي D جو Y- مساوو Y_1 آهي.

$\therefore \quad AD = d(A, D) = x_2 - x_1,$

$BD = d(B, D) = y_2 - y_1$



شڪل 5.7

ΔABD ڳوني ڪند تڪندو آهي، $AB^2 = AD^2 + BD^2$

$$= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

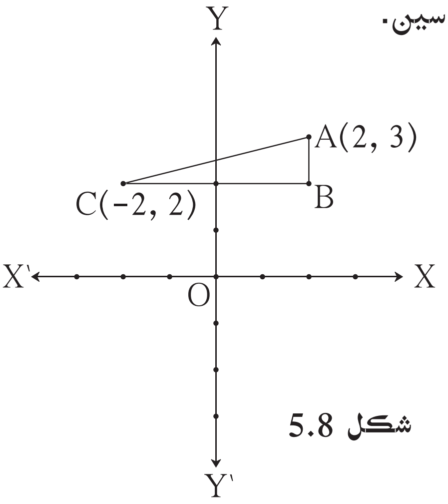
$$\therefore AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

اِن سوتر کي مفاصلو سوتر چئبو آهي.

اِهو ڌيان ۾ رکو ، $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

اڳ واري صفحي تي AB ، AC جي ڊيگهه ڪڍڻ لاءِ پائٿاگورس جو سڌيان اِستعمال ڪيو.

هاڻي مفاصلو سوتر ڪم آڻي اُنهن ٽڪرن جي ڊيگهه لهندا سين.



شڪل 5.8

$A(2, 3) \quad C(-2, 2)$

$A(x_1, y_1) \quad C(x_2, y_2)$

$x_1 = 2, y_1 = 3, x_2 = -2, y_2 = 2$

$$AC = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$= \sqrt{(-2-2)^2 + (2-3)^2}$$

$$= \sqrt{(-4)^2 + (-1)^2}$$

$$= \sqrt{16+1}$$

$$= \sqrt{17}$$

ٽڪر-|| YAB محور-|| XBC محور

B جو مساوو (2,2) آهي.

$$\therefore AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(2-2)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{0+1} = 1$$

$$BC = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(-2-2)^2 + (2-2)^2} = \sqrt{(-4)^2 + 0} = 4$$

اِهو ڌيان ۾ رکو.

- منبع ٽيڪو O جا مساوا (O,O) آهن. اِن ڪري جي P جا مساوا (y,x) آهن تہ
  $d(O, P) = \sqrt{x^2 + y^2}$
- $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$
  $d(P, Q) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

سمجهو $PQ^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$

مثال (1) P(-1, 1), Q(5,-7) تہ اِنهن وچ مفاصلو لهو.

حل : $P(x_1, y_1)$ $Q(x_2, y_2)$ سمجهو

$$x_1 = -1, \quad y_1 = 1, \quad x_2 = 5, \quad y_2 = -7$$

مفاصلو سوتر موجب

$$d(P, Q) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$
$$= \sqrt{[5-(-1)]^2 + [(-7)-1]^2}$$
$$= \sqrt{(6)^2 + (-8)^2}$$
$$= \sqrt{36+64}$$
$$d(P, Q) = \sqrt{100} = 10$$

∴ ٽپڪي P ۽ Q وچ مفاصلو 10

مثال (2) ثابت ڪريو تہ A(-3, 2), B(1, -2) C(9, -10) اِهي هم ليڪ ٽپڪا آهن

حل : جيڪڏهن d(A, B) ; d(B, C) d(A, C) ۽ اِنهن مان ٻن جي مفاصلن جو جوڙ

ٽئين مفاصلي جي برابر هوندو تہ A,B,C هم ليڪ ٽپڪا هوندا

∴ d(A, B), d(B, C) , d(A, C)

مفاصلو سوتر	ٽپڪو B مساوا	ٽپڪو A مساوا
$d(A,B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$	(1, -2)	(-3, 2)
	(x_2, y_2)	(x_1, y_1)

$$\therefore\ d(A, B) = \sqrt{[1-(-3)]^2 + [(-2)-2]^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$= \sqrt{(1+3)^2 + (-4)^2}$$
$$= \sqrt{16+16}$$
$$= \sqrt{32} = 4\sqrt{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(I)$$

$$d(B, C) = \sqrt{(9-1)^2 + (-10+2)^2}$$
$$= \sqrt{64+64} = 8\sqrt{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(II)$$

$$d(A, C) = \sqrt{(9+3)^2 + (-10-2)^2}$$
$$= \sqrt{144+144} = 12\sqrt{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(III)$$

مان (III) ۽ (II), (I) .... $4\sqrt{2} + 8\sqrt{2} = 12\sqrt{2}$

∴ d(A, B) + d(B, C) = d(A, C)

∴ A, B, C اِهي هم ليڪ ٽپڪا آهن.

مثال (3) $P(6, -6), Q(3, -7)$ $R(3, 3)$ ڇا اِهي ٽُپڪا هم ليڪ آهن؟

حل :

$$PQ = \sqrt{(6-3)^2 + (-6+7)^2} \quad ....$$

$$= \sqrt{(3)^2 + (1)^2} \quad = \sqrt{10} \quad .... (I)$$

$$QR = \sqrt{(3-3)^2 + (-7-3)^2}$$

$$= \sqrt{(0)^2 + (-10)^2} \quad = \sqrt{100} \quad .... (II)$$

$$PR = \sqrt{(3-6)^2 + (3+6)^2}$$

$$= \sqrt{(3)^2 + (9)^2} \quad = \sqrt{90} \quad .... (III)$$

(I)، (II) ۽ (III) مان $\sqrt{10}$ ، $\sqrt{100}$ ، $\sqrt{90}$ ، $\sqrt{100}$ ھرسڀ کان وڏو مان آهي

$\left(\sqrt{100}\right)$ ۽ $\left(\sqrt{10}+\sqrt{90}\right)$

$\left(\sqrt{10}+\sqrt{90}\right)^2$ ۽ $\left(\sqrt{100}\right)^2$

اِنھن جي ڀيٽ ڪريو $\therefore PQ + PR \neq QR$ $\left(\sqrt{10}+\sqrt{90}\right) > \left(\sqrt{100}\right)$

$\therefore P(6, -6), Q(3, -7)$ ۽ $R(3, 3)$

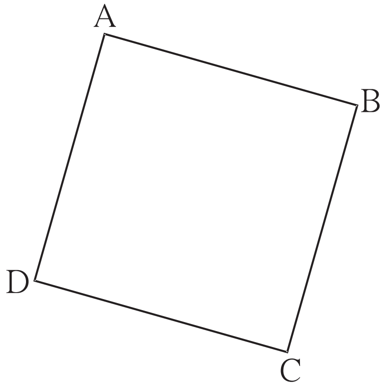
اِهي هم ليڪ ٽُپڪا نہ آهن

مثال (4) $(-1, -1)$, $(4, 2)$, $(1, 7)$ ۽ $(-4, 4)$

چورس جا نوڪي ٽُپڪا آهن. ثابت ڪريو.

حل :چوڪنڊي جا جيڪڏهن چارئي پاسا ۽ اُريب ساڳيءَ ڊيگهہ وارا آهن تہ اُهو چوڪنڊو چورس آهي.

$\therefore$ $A(1, 7), B(4, 2), C(-1, -1)$ ۽ $D(-4,4)$



شڪل 5.9

$$AB = \sqrt{(1-4)^2 + (7-2)^2} = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}$$

$$BC = \sqrt{(4+1)^2 + (2+1)^2} = \sqrt{25+9} = \sqrt{34}$$

$$CD = \sqrt{(-1+4)^2 + (-1-4)^2} = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}$$

$$DA = \sqrt{(1+4)^2 + (7-4)^2} = \sqrt{25+9} = \sqrt{34}$$

$$AC = \sqrt{(1+1)^2 + (7+1)^2} = \sqrt{4+64} = \sqrt{68}$$

$$BD = \sqrt{(4+4)^2 + (2-4)^2} = \sqrt{64+4} = \sqrt{68}$$

$\therefore AB = BC = CD = DA$ ۽ $AC = BD$

اِن مان ظاهر آهي تہ چوڪنڊي جا چار ئي پاسا برابر آهن ۽ اُريب C ۽ AD ساڳئي ڊيگهہ جا آهن.

$\therefore$ (1,7), (4,2), (−1,−1) ۽ (−4,4)

اِهي چورس جا نوڪي ٽپڪا آهن.

مثال (5) Y- محور تي اهڙي نموني ٽپڪي جا مساوا ڳولهيو جيئن

N(3,2) ۽ M (−5,−2) کان اُهو ٽپڪو هم مفاصلي هجي.

حل : سمجهہ Y- محور تي 'P' ٽپڪي جا مساوا آهن (O,Y)

$$\therefore PM = PN \qquad \therefore PM^2 = PN^2$$

$$\therefore [0-(-5)]^2 + [y-(-2)]^2 = (0-3)^2 + (y-2)^2$$

$$\therefore 25 + (y+2)^2 = 9 + y^2 - 4y + 4$$

$$\therefore 25 + y^2 + 4y + 4 = 13 + y^2 - 4y$$

$$\therefore 8y = -16 \quad \therefore y = -2$$

$\therefore$ 'P' ٽپڪي جا مساوا آهن (O,-2) =

ٽپڪو (O,-2) M (-5,-2) ۽ N (3,2) کان هم مفاصلي آهي.

مثال (6) A(−3, −4), B(−5, 0), C(3, 0) اِهي Δ ABC

اهي ABC$\triangle$ جا نوڪي ٽپڪا آهن تہ ٽڪنڊي جي گرد مرڪز جا مساوا لهو.

حل : سمجهو P(a,b) اهو ABC$\triangle$ جو گرد مرڪز آهي اِهو کان هم مفاصلي آهي.

$$\therefore PA^2 = PB^2 = PC^2 \text{ .... (I)} \qquad \therefore PA^2 = PB^2$$

$$(a+3)^2 + (b+4)^2 = (a+5)^2 + (b-0)^2$$

$$\therefore a^2 + 6a + 9 + b^2 + 8b + 16 = a^2 + 10a + 25 + b^2$$

$$\therefore -4a + 8b = 0$$

$$\therefore a - 2b = 0 \text{ .... (II)}$$

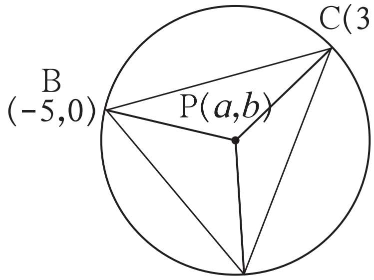
$$PA^2 = PC^2 \text{ .... (I)}$$

$$\therefore (a+3)^2 + (b+4)^2 = (a-3)^2 + (b-0)^2$$

$$\therefore a^2 + 6a + 9 + b^2 + 8b + 16 = a^2 - 6a + 9 + b^2$$

$$\therefore 12a + 8b = -16$$

$$\therefore 3a + 2b = -4 \text{ .... (III)}$$



شڪل 5.10

(II) ۽ (III) مساوتون حل ڪري $\quad a = -1,\ b = -\frac{1}{2}$

$\therefore$ گرد مرڪز جا مساوا $\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$

مثال (7) (X,Y) اِهو ٽپڪو ۽ (7,1)۽ (3,5) ڪان هم مفاصلي آهي ته ثابت ڪريو Y=X-2

حل :

$$\therefore AP = BP$$
$$\therefore AP^2 = BP^2$$
$$\therefore (x-7)^2 + (y-1)^2 = (x-3)^2 + (y-5)^2$$
$$\therefore x^2 - 14x + 49 + y^2 - 2y + 1 = x^2 - 6x + 9 + y^2 - 10y + 25$$
$$\therefore -8x + 8y = -16$$
$$\therefore x - y = 2$$
$$\therefore y = x - 2$$

مثال (8) ٽپڪو A (2,-2) ۽ ٽپڪو B $(-1, y)$ وچيرمفاصلو 5 آهي ته Y جو ملهه لهو.

حل

$$\therefore AB^2 = [(-1) - 2]^2 + [y - (-2)]^2 \ldots\ldots\ldots$$
$$\therefore 5^2 = (-3)^2 + (y+2)^2$$
$$\therefore 25 = 9 + (y+2)^2$$
$$\therefore (y+2)^2 = 16$$
$$\therefore y + 2 = \pm\sqrt{16}$$
$$\therefore y + 2 = \pm 4$$

$\therefore y = 4 - 2$ يا $y = -4 - 2$

$\therefore y = 2$ يا $y = -6$

$\therefore$ Yجي قيمت 2 يا 6- آهي.

اَڀياس 5.1

1. ڏنل ٽپڪن وچيرمفاصلو لهو

(1) A(2, 3), B(4, 1) (2) P(−5, 7), Q(−1, 3) (3) R(0, −3), S(0, $\frac{5}{2}$)

(4) L(5, −8), M(−7, −3) (5) T(−3, 6), R(9, −10) (6) W($\frac{-7}{2}$, 4), X(11, 4)

2. هيٺ ڏنل ٽپڪا هم ليڪ آهن يا نه

(1) A(1, −3), B(2, −5), C(−4, 7) (3) L(−2, 3), M(1, −3), N(5, 4)

(2) R(0, 3), D(2, 1), S(3, −1) (4) P(−2, 3), Q(1, 2), R(4, 1)

3. X- محور تي اُهڙو ٽپڪو ڳولهيو جيڪو A(−3, 4) ۽ B(1, −4)ٽپڪن ڪان هم مفاصلي هجي.

4. P(−2, 2), Q(2, 2) ۽ R(2, 7) ڇا اِهي ڳوني ڪنڊ ٽڪنڊي جي نوڪي ٽپڪا آهن؟ جاچ ڪريو.

.5 $P(2, -2), Q(7, 3), R(11, -1)$ ۽ $S(6, -6)$

ثابت ڪريو تہ اِنهن نوڪي ٽٻڪن وارو چوڪنڊو پوروچوت پاسو چوڪنڊو آهي.

.6 $\square ABCD, D(5, -4), A(-4, -7), B(-1, 2), C(8, 5)$

ثابت ڪريو تہ پور پاسو چوڪنڊو آهي.

.7 جيڪڏهن $L(x, 7)$ ۽ $M(1, 15)$ وچم مفاصلو 10 آهي تہ X جو ملهہ لهو.

.8 $A(1, 2), B(1, 6), C(1 + 2\sqrt{3}, 4)$

ثابت ڪريو تہ اهي ٽٻڪا ٽپور پاسي ٽڪنڊي جا نوڪي ٽٻڪا آهن.

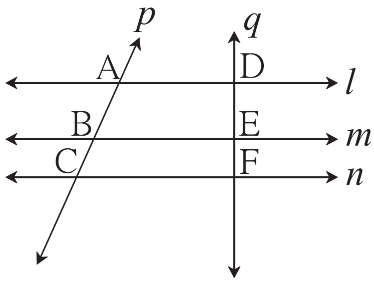
ذرا ياد ڪريو .

ٽن پوروچوت ليڪن جي انٽر چيد خاصيت :

ليڪ l || ليڪ m || ليڪ n،

ليڪون q ۽ p چيدڻيون آهن.

$$\therefore \frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$$



شڪل 5.11

چاڻي وٺون

ليڪ - ٽڪر جي ورچ (Division of a line segment)

شڪل 5.12

شڪل ، $AP = 6$ ۽ $PB = 10$.

$$\therefore \frac{AP}{PB} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

جدا لفظن ۾ : ٽٻڪو P اِهو ٽڪر AB کي 3:5 ۾ورهائي ٿو. ائين چئبو آهي ٽٻڪو جڏهن ڪنهن ٽڪر کي ڏنل ريشي ۾ورهائي ٿو تہ اُنجا مساوا ڪيئن لهبا، اِهو ڏسنداسين.

چاڪي وٺون

ورچ سوتر (Section formula)

شڪل 5.13 ۾ XY گراف ۾ ٽڪر AB تي ٽپڪو P، ٽڪر AB کي m:n ۾ ورهائي ٿو

سمجهو $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ ، $P(x, y)$

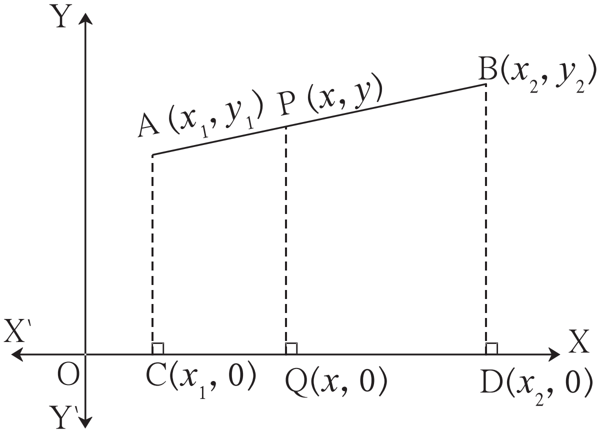
ٽڪر AC، ٽڪر PQ، ٽڪر BD

X- ۽ اِهي محور تي عمودي ٽڪر آهن.

$\therefore C(x_1, 0); Q(x, 0)$

$D(x_2, 0)$.

$$\therefore \left.\begin{aligned} CQ &= x - x_1 \\ QD &= x_2 - x \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots (I)$$



شڪل 5.13

ٽڪر AC || ٽڪر PQ || ٽڪر BD.

$\therefore$ (ٽن پوروچوٽ ليڪون خاصيت) $\frac{AP}{PB} = \frac{CQ}{QD} = \frac{m}{n}$

$$CQ = x - x_1 \qquad QD = x_2 - x \ldots\ldots\ldots (I)$$

$$\therefore \frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{m}{n}$$

$$\therefore n(x - x_1) = m(x_2 - x)$$

$$\therefore nx - nx_1 = mx_2 - mx$$

$$\therefore mx + nx = mx_2 + nx_1$$

$$\therefore x(m + n) = mx_2 + nx_1$$

$$\therefore x = \frac{mx_2 + nx_1}{m + n}$$

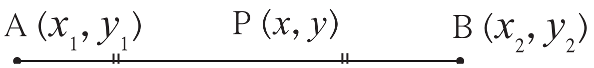
اَهڙي نموني B,P,A وٽان Y-محور تي عمود ڪيڏڻ سان آسان کي ملندو.

$$y = \frac{my_2 + ny_1}{m + n}$$

$\therefore$ $A(x_1, y_1)$ ۽ $B(x_2, y_2)$ اِنهن ٽپڪن کي جوڙڻ واري ٽڪر AB کي m:n ۾ ورهائڻ واري ٽپڪي جا مساوا ٿيندا. $\left(\frac{mx_2 + nx_1}{m + n}, \frac{my_2 + ny_1}{m + n}\right)$

مڊيم - ٽپڪو سوتر (Mid-point formula)

$A(x_1, y_1)$ ۽ $B(x_2, y_2)$ انهن ٻنهي ٽپڪن جي ٽڪر AB جو مڊيم ٽپڪو $P(X,Y)$ آهي تہ m=n هاڻي ورڇ سوتر موجب x ۽ y جا ملهہ لهون.



شڪل 5.14

$$x = \frac{mx_2 + nx_1}{m+n}$$

$$= \frac{mx_2 + mx_1}{m+m} \qquad \because \; m = n$$

$$= \frac{m(x_1 + x_2)}{2m}$$

$$= \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$$y = \frac{my_2 + ny_1}{m+n}$$

$$= \frac{my_2 + my_1}{m+m} \qquad \because \; m = n$$

$$= \frac{m(y_1 + y_2)}{2m}$$

$$= \frac{y_1 + y_2}{2}$$

$\therefore$ P اِن مڊيم ٽپڪي جا مساوا آهن $\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$ اِن کي مڊيم ٽپڪو سوتر چئبو آهي.

اَسان اڳئين درجي ۾ ٻن منتق عددن a ۽ b عدد ليڪ تي ڏيکاري اُنجو مڊيم ٽپڪو $\frac{a+b}{2}$ سمجهايو . اِهو نتيجو اَلڳہ آهي.

حل ڪيل مثال

مثال (1) A(3,5) ,B(7,9) ٽپڪو Q اِهو ٽڪر AB کي 2:3 ۾ ورهائي ٿو تہ Q جا مساوا لهو.

حل : ڏنل مثال موجب $(x_1, y_1) = (3, 5)$

$(x_2, y_2) = (7, 9)$

$m : n = 2:3$

ورڇ سوتر موجب

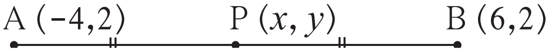
$$x = \frac{mx_2 + nx_1}{m+n} = \frac{2\times7+3\times3}{2+3} = \frac{23}{5}$$

$$y = \frac{my_2 + ny_1}{m+n} = \frac{2\times9+3\times5}{2+3} = \frac{33}{5}$$

$\therefore$ Q جا مساوا آهن $\left(\frac{23}{5}, \frac{33}{5}\right)$

مثال (2) $A(-4,2)$ $B(6,2)$ ۾ اِهو AB جو مذيہ ٽپڪو آهي تہ P جا مساوا لهو

حل :



شڪل 5.15

$P(x, y)$ سمجهو $(-4, 2) = (x_1, y_1)$; $(6, 2) = (x_2, y_2)$

∴ مذيہ -ٽپڪو سوتر موجب ،

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-4+6}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{2+2}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

∴ سمجهو P جا مساوا آهي (1,2)

ذرا ياد ڪريو

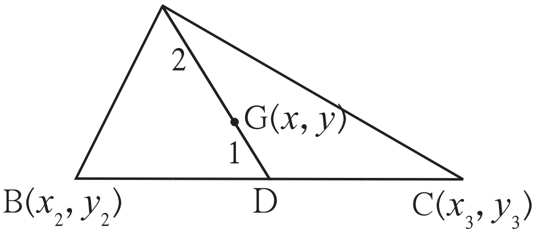
آسان کي ڄاڻ آهي تہ ٽڪنڊي جا مذيان هم ڇيدي هوندا آهن مرڪز (مذيان ڇيدي ٽپڪو) (centroid) 2:1 اِهو مذيان کي ورهائيندو آهي.

ڄاڻي وٺون

مرڪز سوتر (Centroid formula)

ٽڪنڊي جي ٽنهي نوڪي ٽپڪن جا مساوا مليل هجن تہ مفاصلو سوتر موجب موڪز جا مساوا ڪڍب لهبا, اِهو سکنداسين.

سمجهو $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$



شڪل 5.16

اِهي △ABC جا نوڪي ٽپڪا اهن.

ٽڪر AD مذيان آهي

G(X,Y) اِهو موڪز آهي.

ٽپڪو D اِهو BC جو مذيہ ٽپڪو آهي.

∴ ٽڪي D جا مساوا .... $x = \frac{x_2 + x_3}{2}, \quad y = \frac{y_2 + y_3}{2}$

G اِهو مرڪز آهي. $\therefore AG : GD = 2 : 1$

∴ ورڇ سوتر موجب،

$$x = \frac{2\left(\frac{x_2 + x_3}{2}\right) + 1 \times x_1}{2+1} = \frac{x_2 + x_3 + x_1}{3} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$$

$$y = \frac{2\left(\frac{y_2 + y_3}{2}\right) + 1 \times y_1}{2+1} = \frac{y_2 + y_3 + y_1}{3} = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$$

مطلب $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ ان ٽڪنڊي جي مرڪز جا مساوا ٿيندا

$$\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$$

ان کي مرڪز سوتر چئبو آهي.

اِهو ڌيان ۾ رکو

- **ورڇ سوتر**

  (x_1, y_1) ۽ (x_2, y_2) اِنهن ٻن ٽڪي کي جوڙڻ واري ٽڪر کيm:n ۾ورهائڻ واري ٽڪي جا مساوا ٿيندا. $\left(\frac{mx_2 + nx_1}{m+n}, \frac{my_2 + ny_1}{m+n}\right)$

- **مڌيہ ٽڪو سوتر**

  $(x_1, \ y_1)$ ۽ $(x_2, \ y_2)$ انهن کي ملائيندڙ ٽڪر جي مڌيہ ٽڪي جا مساوا ٿيندا

  $$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

- **مرڪز سوتر**

  $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ ۽ (x_3, y_3)انهن نوکي ٽڪن واري ٽڪنڊي جي مرڪز جا مساوا ٿيندا

  $$\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$$

مثال (1)   A(-7,4)   ۽   B(-6,-5)

اِنهن ۾ ٽپڪو T اِهو ٽڪر AB کي 7:2 ۾ ورهائي ٿو. تہ T جا مساوا لهو.

حل   :   سمجهو تہ T جا مساوا (X,Y) آهن

∴ ورچ سوتر اَنوسار ،

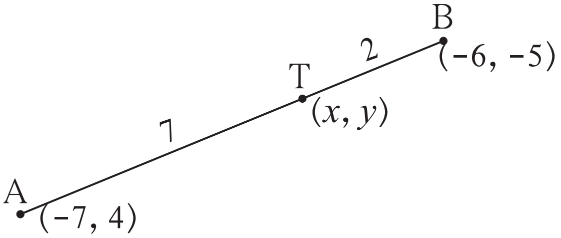
$$x = \frac{mx_2 + nx_1}{m+n} = \frac{7\times(-6)+2\times(-7)}{7+2}$$

$$= \frac{-42-14}{9} = \frac{-56}{9}$$

$$y = \frac{my_2 + ny_1}{m+n} = \frac{7\times(-5)+2\times(4)}{7+2}$$

$$= \frac{-35+8}{9} = \frac{-27}{9} = -3$$

∴ T جا مساوا آهن. $\left(\frac{-56}{9}, -3\right)$



شڪل 5.17

مثال (2)   ٽپڪو P(-4, 6)   A(-6, 10)   B(r, s)   T اِهو ٽڪر AB کي 2:1 ۾ ورهائي ٿو.

تہ B جا مساوا لهو. سمجهو تہ T جا مساوا (X,Y) آهن

حل   :   ورچ سوتر اَنوسار

$$-4 = \frac{2 \times r + 1 \times (-6)}{2 + 1}$$

$$\therefore \quad -4 = \frac{2r - 6}{3}$$

$$\therefore \quad -12 = 2r - 6$$

$$\therefore \quad 2r = -6$$

$$\therefore \quad r = -3$$

$$6 = \frac{2 \times s + 1 \times 10}{2 + 1}$$

$$\therefore \quad 6 = \frac{2s + 10}{3}$$

$$\therefore \quad 18 = 2s + 10$$

$$\therefore \quad 2s = 8$$

$$\therefore \quad s = 4$$

∴ B جا مساوا آهن (-3,4)

(3)   A (15,5)   ۽   B (9,20) ۾ A-P-B ۾ P (11,15) آهي تہ P اهو AB کي ڪهڙي ريشي ۾ ورهائي ٿو؟

حل : سمجهہ P (11,15) کي AB کي m:n ۾ ورهائي ٿو .

ورچ سوتر اَنوسار

ساڳئي نموني Y- مساوو ڪٽي ريشو لهو نتيجو لکو.

$$x = \frac{mx_2 + nx_1}{m+n}$$

$$\therefore\ 11 = \frac{9m + 15n}{m+n}$$

$$\therefore\ 11m + 11n = 9m + 15n$$

$$\therefore\ 2m = 4n$$

$$\therefore\ \frac{m}{n} = \frac{4}{2} = \frac{2}{1}$$

$$\therefore\ m:n = 2 = 1$$

مثال (4) A(2,-2) ۽ B(-7,4) اِنهن ٽپڪن کي ملائيندڙ ٽڪر کي ٽڏڪ ڪندڙ ٽپڪن جا مساوا لهو.
(ٽڪر کي ٽن حصن ۾ ورهائڻ واري ٽپڪي کي ٽڏڪ چئبو آهي)

حل : سمجهو ته ٽپڪا P ۽ Q اِهي AB ٽڪر کي ٽن حصن ۾ ورهائيندڙ آهن.

$$AP = PQ = QB \ .... \ (I)$$

$$\frac{AP}{PB} = \frac{AP}{PQ+QB} = \frac{AP}{AP+AP} = \frac{AP}{2AP} = \frac{1}{2} \ .... \ (I)$$

ٽپڪو P ٽڪر AB کي 1:2 ورهائي ٿو

شڪل 5.18

$$P \text{ جو X مساوو} = \frac{1\times(-7)+2\times 2}{1+2} = \frac{-7+4}{3} = \frac{-3}{3} = -1$$

$$P \text{ جو Y مساوو} = \frac{1\times 4+2\times(-2)}{1+2} = \frac{4-4}{3} = \frac{0}{3} = 0$$

$\frac{AQ}{QD} = \frac{2}{1}$ ساڳئي نموني Q اِهو AB کي 2:1 ۾ ورهائي ٿو.

$$Q \text{ جو X مساوو} = \frac{2\times(-7)+1\times 2}{2+1} = \frac{-14+2}{3} = \frac{-12}{3} = -4$$

$$Q \text{ جو Y مساوو} = \frac{2\times 4+1\times -2}{2+1} = \frac{8-2}{3} = \frac{6}{3} = 2$$

∴ P ۽ Q مساوا آهن (−1, 0)، (−4, 2)

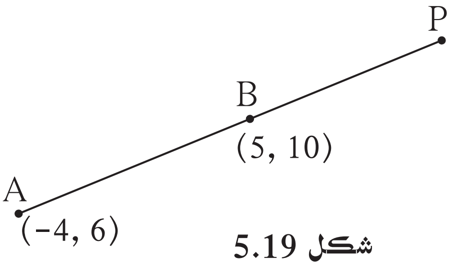
وڌيڪ ڄاڻ لاءِ :

A ۽ B ٽِڪن کي جوڙيندڙ ٽڪر AB جي ٻاهرين ورڇ ڪيئن ٿيندي آهي.

$A(-4, 6), B(5, 10)$

ان ٽڪر AB کي 3:2 ۾ ٻاهريان ورڇ ڪندڙ ٽِڪي جا مساوا ڪيئن لهبا.

$\frac{AP}{PB} = \frac{3}{1}$ AB اِهو وڏو آهي، اِنڪري A-B-P



شڪل 5.19

$\frac{AP}{PB} = \frac{3}{1}$ $AP = 3k, BP = k, AB = 2k$

$\therefore \frac{AB}{BP} = \frac{3}{2}$

هاڻي ٽِڪو B ٽڪر AP کي 3:2 ۾ ورهائي ٿو A ۽ B جا مساوا خبر آهن تہ P جو مساوو لهي سگهندا سين

اَڀياس 5.2

1. جيڪڏهن P اِهو A(-1,7) ۽ B(4-3) جي ٽڪر AB کي 2:3 ۾ ورهائي ٿو تہ P جا مساوا لهو.

2. هيٺ مثالن ۾ ٽڪر PQ کي A ٽِڪو a:b ۾ ورهائي ٿو تہ A جا مساوا لهو.

(1) $P(-3, 7), Q(1, -4), a : b = 2 : 1$

(2) $P(-2, -5), Q(4, 3), a : b = 3 : 4$

(3) $P(2, 6), Q(-4, 1), a : b = 1 : 2$

3. P-T-Q ۾ T(1,6) اِهو ٽِڪو (-3,10) ۽ Q(6,-8) کي ملائيندڙ ٽڪر کي ڪهڙي ريشي ۾ ورهائي ٿو؟

4. ٽڪر AB گول جو قطر آهي ٽِڪو P مرڪز آهي A(2,-3) ۽ (-2,0) تہ B جا مساوا لهو.

5. (A(2,-3) ۽ B(1,2)، AB ٽڪر کي P(K,7) ڪهڙي ريشي ۾ ورهائي ٿو؟ K جو ملهہ لهو.

6. (22,20) ۽ (0,16) ٽِڪن کي ملائيندڙ ٽڪر جي مڌيہ - ٽِڪي جا مساوا لهو.

7. هيٺ ڏنل ٽڪنڊن ۾ مرڪزڪ جا مساوا لهو

(1) $(-7, 6), (2, -2), (8, 5)$

(2) $(3, -5), (4, 3), (11, -4)$

(3) $(4, 7), (8, 4), (7, 11)$

8. $\triangle ABC$ ۾ مرڪز $G(-4,7)$ آهي، $A(-14,-19)$ ، $B(3,5)$ آهي تہ C جا مساوا لهو.

9. مرڪز $(1,5)$ هوندڙ ٽڪنڊي ۾ $(h,-6)$، $(2,3)$ ۽ $(-6,K)$ نوڪي ٽپڪا آهن تہ h ۽ k جا ملهہ لهو.

10. $A(2,7)$، $B(-4,-8)$ اِن ٽڪر AB جي ٽڏڪ جا مساوا لهو.

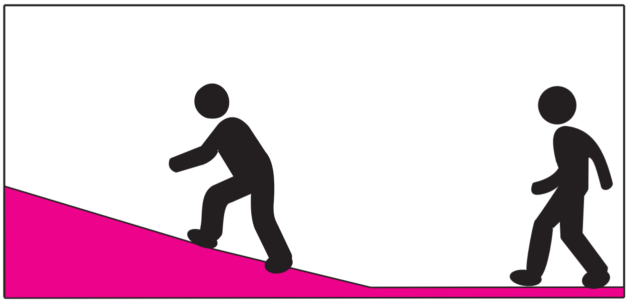
11. $A(-14,-10)$ اِن ٽڪر $B(6,-2)$ ان ٽڪر AB کي چئن برابر حصن ۾ ورهائڻ وارن ٽپڪن جا مساوا لهو.

12. $A(-20,10)$، $B(0,-20)$ اِن ٽڪر AB کي پنجن برابر حصن ۾ ورهائڻ وارن ٽپڪن جا مساوا لهو.

چاڙهي وٺون

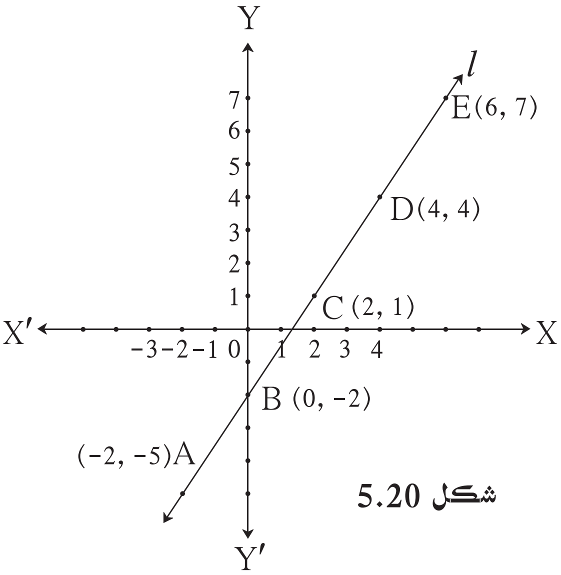
ليڪ جو لاهہ (Slope of a line)

شما اِسڪول سائيڪل تي پيئي وڃي سڌو رستو ختم ٿيڻ تي جڏهن چڙهائي شروع ٿي تہ هوءَ هيٺ لهي پيئي. فاتما ڪارڻ پڇيو تڏهن شما جواب ڏنو تہ هاڻي سڌو رستو پورو ٿيو آهي. چڙهائي شروع ٿي آهي. چڙهائيءَ واري رستي پئدل هلائڻ ۾ ڏاڍي محنت ڪرڻي پوندي آهي. چڙهائي ۾ رستي تي هلڻ ۾ اَسان ڌرتيءَ جي ڪشش زور مخالف هلون ٿا. اِهو سائنس ۾ پڙهيو آهي. مساوي جاميٽري ۾ ليڪ جو لاهہ هڪ اَهميت رکندڙ آهي اِن بابت اَسان سمجهنداسين.



مشغولي I :

پرواري شڪل ۾ $A(-2,-5)$، $B(0,-2)$، $C(2,1)$، $D(4,4)$، $E(6,7)$ اهي ٽپڪا ليڪ l مٿان آهن. اِنهن مساون کي واپرائي هيٺ ٽيبل جاچيو.



شڪل 5.20

$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$	ٻئي ٽٻڪي وارا جا مساوا (x_2, y_2)	پهرين ٽٻڪي جا مساوا (x_1, y_1)	ٻيو ن ٽٻڪو	پهريون ٽٻڪو	نمبر
$\frac{7-1}{6-2} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$	(6, 7)	(2, 1)	E	C	1
$\frac{4-(-5)}{4-(-2)} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$	(4, 4)	(-2, -5)	D	A	2
$\frac{-5-4}{-2-4} = \frac{-9}{-6} = \frac{3}{2}$	(-2, -5)	(4, 4)	A	D	3
--	--	--	C	B	4
--	--	--	A	C	5
--	--	--	C	A	6

ٽيبل ۾ ٻڇيل چوڪنڊا پري ٽيبل مڪمل ڪريو. اِن مان ليڪ l مٿان ٻين ٽٻڪن جون جوڙيون ڪٽو ۽ هرهڪ جوڙي ۾ $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ جاچيو

اِن مشغوليءَ مان ظاهر آهي تہ ليڪ l ۾ (x_1, y_1) ۽ (x_2, y_2)
اِنهن ڪهڙن بہ ٻن ٽٻڪن جي موجودگيءَ ۾ $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ ريشو مقرر آهي

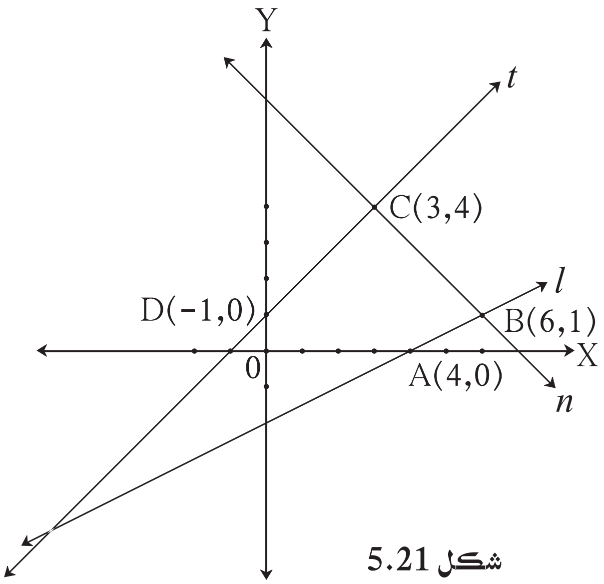
ليڪ l ۾ (x_1, y_1) ۽ (x_2, y_2) ٻہ ٽٻڪا هوندا $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ کي ليڪ جو لاهہ چئبو آهي. اِهو m اکر وسيلي ڏيکاربو آهي.

$$\therefore \quad m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

اچو تہ چرچا ڪريون

مشغولي II :

ليڪ l ليڪ t ۽ ليڪ n تي ڪجھہ ٽيڪا ڏنل آهن اُنهن ٽپڪن وسيلي ليڪن جا لاهہ لهو توهان کي ڏيان ۾ رکڻو آهي.



شڪل 5.21

(1) ليڪ l ۽ ليڪ t جو لاهہ واڌو آهي.

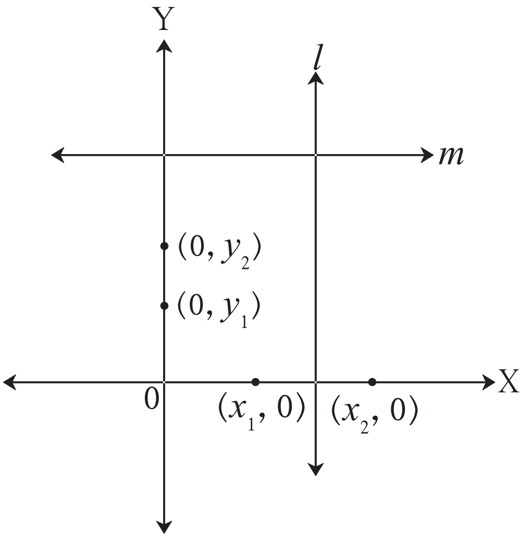
(2) ليڪ n جو لاهہ ڪاٿو آهي.

(3) ليڪ t جو لاهہ ليڪ l کان وڌيڪ آهي.

(4) X- محور جي واڌو طرف سوڙهي ڪنڊ ٺاهڻ وارين ليڪن l ۽ t جا لاهہ واڌو آهن.

(5) X- محور جي واڌو طرف ويڪري ڪنڊ ٺاهيندڙ ليڪ n جو لاهہ ڪاٿو آهي

X- محور، Y-محور ۽ محورن جي پورويڇوٽ ليڪن جو لاهہ



شڪل 5.22

شڪل 5.22 ۾ ، $(x_1, 0)$ ۽ $(x_2, 0)$ اِهي X-محور جا بہ ٽپڪا آهن.

X-محور جو لاهہ $= 0 = \dfrac{0 - 0}{x_2 - x_1}$

ساڳئي نموني، $(0, y_1)$ ۽ $(0, y_2)$ اِهي Y-محور جا بہ ٽپڪا آهن.

$= \dfrac{y_2 - y_1}{0} = \dfrac{y_2 - y_1}{0 - 0} =$ Y- محور جو لاهہ

پر O سان ونڊ نہ ٿي ڪري سگھجي اِنڪري Y-محور جو لاهہ مقرر ڪري نہ ٿو سگھجي اَهڙي نموني f ليڪ l وانگر X محور جي پورويڇوٽ ليڪن جو لاهہ ڪڍو. ليڪ m وانگر Y محور جي پورويڇوٽ ليڪن جو لاهہ لهي نٿو سگھجي.

ليڪ جو لاهہ :

ٽڪنڊن جي هڪ جهڙائي ريشو واپرائي : پر واري شڪل ۾ $P(x_1, y_1)$ $Q(x_2, y_2)$

اهي ليڪ l مٿان آهن ليڪ l اِها Xمحور کي ٽپڪي T وٽ ڪپي ٿي X- محور ⊥ ٽڪر QS ٽڪر PR ⊥ ٽڪر QS

∴ ٽڪر TS || ٽڪر PR

$\therefore\ QR = y_2 - y_1$ ۽ $PR = x_2 - x_1$

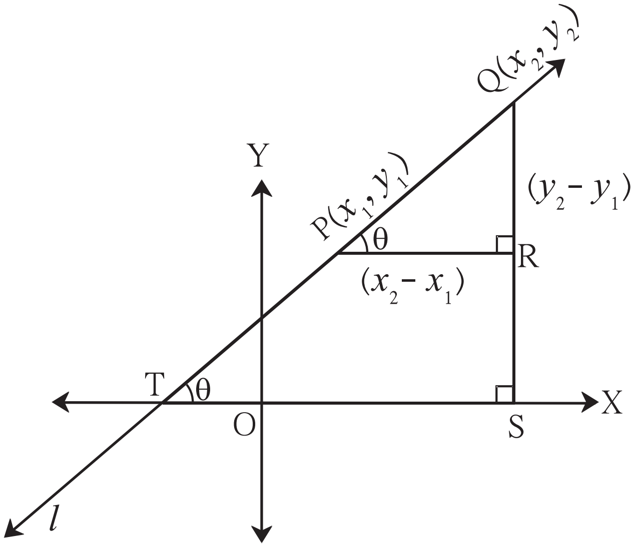
$$\therefore \quad \frac{QR}{PR} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \; .... \; (I)$$

ليڪ TQ اِها X- محور تي θ ڪنڊ ٺاهي ٿي

$$\therefore \quad \frac{QR}{PR} = \tan\theta \; .... \; (II)$$

$\therefore$ (I) ۽ II) مان , $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \tan\theta$

$\therefore \quad m = \tan\theta$



شڪل 5.23

نسبتي ڪنڊون .... $\therefore \quad \angle QPR = \angle QTS$

ان مان ليڪ جيڪا واڌو طرف X- محور جي ڪنڊ ٺاهي ٿي اُن جو ٽئن ريشو اُن ليڪ جو لاهه آهي اِها لاهه جي وصف آهي ۽ ليڪون جن جو لاهه ساڳيو هجي اُهي X- محور جي واڌو طرف برابر ڪنڊون ٺاهين ٿيون اُهي ليڪون پورچوٽ هونديون آهن.

پورچوٽ ليڪن جو لاهه (Slope of parallel lines)

مشغولي: شڪل 5.24 ۾ ليڪ l ليڪ t اِهي ٻيئي ليڪون X- محور جي واڌو طرف θ ڪنڊ ٺاهين ٿيون.

$\therefore$ ليڪ t || ليڪ l (نسبتي ڪنڊون)

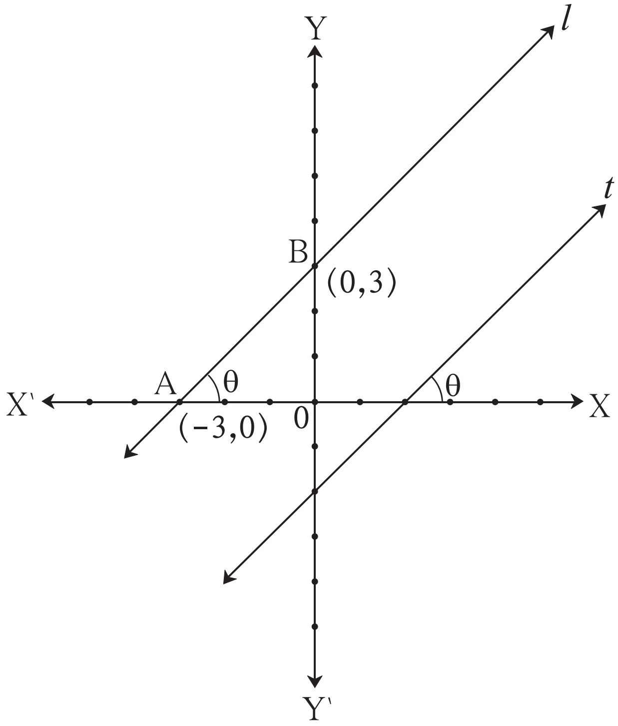
ليڪ l مٿان ٽٻڪو A(-3,0) ۽ B(0,3)

آهي سوچيو ليڪ AB جو لاهه ڪيو.

ليڪ AB جو لاهه $= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$$= \frac{\square - \square}{\square - \square} = \frac{\square}{\square}$$

$= \square$



شڪل 5.24

اهڙي نموني ليڪ l مٿان سولو ٽٻڪو ڪٽي اُن جو لاهه لهو. اَهڙي نموني پورچوٽ ليڪن جو لاهه ساڳيو هوندو آهي توهان چڪاس ڪري سگهندا.

هاڻي هتي $\theta = 45^\circ$

لاهہ : $m = \tan\theta$ استعمال ڪري ٻنهي پورروچوٽ ليڪن جو لاهہ ساڳيو آهي. اِهو جاچي ڏسو اَهڙي نموني $\theta = 30^\circ$ ۽ $\theta = 60^\circ$ ڪٽي پورروچوٽ ليڪن جا لاهہ ساڳيا هوندا آهن. اِن جي چڪاس ڪريو.

اِهو ڌيان ۾ رکو

X- محور يا X- محور جي پورروچوٽ ليڪ جو لاهہ ٻڙي هوندو آهي.
Y- محور يا Y- محور جي پورروچوٽ ليڪ جو لاهہ اڻ وصفيل آهي.

حل ٿيل مثال

مثال (1) $A(-3, 5)$ ۽ $B(4, -1)$ اِنهن ٽيڪن مان لنگهندڙ ليڪ جو لاهہ لهو.

حل : سمجهو $y_2 = -1$ ، $y_1 = 5$ ، $x_2 = 4$ ، $x_1 = -3$ ،

$$\therefore \frac{-6}{7} = \frac{-1-5}{4-(-3)} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \text{ليڪ AB جو لاهہ}$$

مثال (2) $P(-2, 3), Q(1, 2), R(4, 1)$ هم ليڪ آهن ثابت ڪريو.

حل : $P(-2, 3)$، $Q(1, 2)$ ۽ $R(4, 1)$

$$\text{ليڪ PQ جو لاهہ} = -\frac{1}{3} = \frac{2-3}{1-(-2)} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\text{ليڪ QR جو لاهہ} = -\frac{1}{3} = \frac{1-2}{4-1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

ليڪ PQ ۽ ليڪ QR جا لاهہ ساڳيا آهن . پر ٽيڪوQٻنهي ليڪن تي آهي ٻئي ليڪون هڪ ئي آهن R,Q,P هم ليڪ آهن .

مثال(3) جيڪڏهن $P(k, 0)$ ۽$Q(-3, -2)$، ٻنهي ٽيڪن مان لنگهندڙ ليڪ جو لاهہ $\frac{2}{7}$ جو لاهہ k جو ملهہ

حل : $Q(-3, -2)$ ۽ $P(k, 0)$

$$\text{ليڪ PQ جو لاهہ} = \frac{-2}{-3-k} = \frac{-2-0}{-3-k}$$

$$\therefore \frac{-2}{-3-k} = \frac{2}{7} \qquad \therefore k = 4$$

مثال **(4)** A (6, 1), B (8, 2), C (9, 4) ۽ D (7, 3) اهي ABCD □ جا نوڪي ٽڪا اهن ثابت ڪريو ABCD □ پوروچوٽ پاسو چوڪندو آهي.

حل : توهان کي ڄاڻ آهي ليڪ جو الاهه = $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

ليڪ AB جو لاهه = $\frac{2-1}{8-6} = \frac{1}{2}$ .... (I) ليڪ AB جو لاهه

ليڪ BC جو لاهه = $\frac{4-2}{9-8} = 2$ .... (II) ليڪ BC جو لاهه

ليڪ CD جو لاهه = $\frac{3-4}{7-9} = \frac{1}{2}$ .... (III) ليڪ CD جو لاهه

ليڪ DA جو لاهه = $\frac{3-1}{7-6} = 2$ .... (VI) ليڪ DA جو لاهه

AB جو لاهه = ليڪ CD جو لاهه .... (I) ۽ (III) مان

∴ليڪ AB || ليڪ CD

ليڪ BC جو لاهه = ليڪ DA جو لاهه .... (II) ۽ (VI) مان

∴ليڪ BC || ليڪ DA

∴ ABCD □ هڪ پوروچوٽ پاسو چوڪندو

اَپياس 5.3

1. X- محور جي واڌو طرف ليڪن جي تهيل ڪنڊ ڏنل اهي. اُنهن ليڪن جو لاهه لهو

(1) 45° (2) 60° (3) 90°

2. هيٺ ڏنل ٽڪن مان لنگهندڙ ليڪ جو لاهه لهو.

(1) A (2, 3) ۽ B (4, 7) (2) P (−3, 1) ۽ Q (5, −2)

(3) C (5, −2) ۽ D (7, 3) (4) L (−2, −3) ۽ M (−6, −8)

(5) E(−4, −2) ۽ F (6, 3) (6) T (0, −3) ۽ S (0, 4)

3. هيٺ ڏنل ٽڪا هم ليڪ آهن يا نہ لاهه ڪڍي چڪاس ڪريو.

(1) A(−1, −1), B(0, 1), C(1, 3) (2) D(−2, −3), E(1, 0), F(2, 1)

(3) L(2, 5), M(3, 3), N(5, 1) (4) P(2, −5), Q(1, −3), R(−2, 3)

(5) R(1, −4), S(−2, 2), T(−3, 4) (6) A(−4, 4), K(−2, $\frac{5}{2}$), N(4, −2)

4. ٽڪنڊي جا ٽي ٽڪا A (1, −1),B (0, 4),C (−5, 3) آهن تہ هرهڪ پاسي جو لاهه لهو.

5. D (5, −4), A (−4, −7),B (−1, 2), C (8, 5) ثابت ڪريو اهي ABCD پوروچوٽ پاسي چوڪندي جا نوڪي ٽڪا آهن.

6. $R(1, -1)$ ۽ $S(-2, k)$ ۾ ليڪ RS جو لاهه 2- آهي تہ k جو ملهہ لهو.

7. $B(k, -5)$ ۽ $C(1, 2)$ اِن ليڪ جو لاهه 7 آهي تہ k جو ملهہ لهو.

8. ليڪ PQ || ليڪ RS $P(2, 4), Q(3, 6), R(3, 1)$ ۽ $S(5, k)$ آهي تہ k جو ملهہ لهو.

گڏيل اڀياس 5

1. مناسب متبدل چونڊي خال ڀريو

(1) ليڪ AB، Y محور جي پوروچوٽ آهي $A(1,3)$ آهي تہ B جا مساوا .... ٿيندا.

(A)(3,1) (B)(5,3) (C)(3,0) (D)(1,−3)

(2) هيٺين مان ....ٽپڪو X-محور جي واڌو طرف آهي.

(A)(−2,0) (B)(0,2) (C)(2,3) (D)(2,0)

(3) (-3,4)ٽپڪي جو منڍ ٽپڪي کان مفاصلو ...... آهي

(A)7 (B) 1 (C) 5 (D)−5

(4) هڪ ليڪ X- جي واڌو طرف $30°$ ڪنڊ ٺاهي ٿي اُن ليڪ جو لاهه ..... ٿيندو.

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (C) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (D) $\sqrt{3}$

2. هيٺ ڏنل ٽپڪا هم ليڪ آهن يا نہ

(1) $A(0,2)$, $B(1,-0.5)$, $C(2,-3)$

(2) $P(1, 2)$, $Q(2, \frac{8}{5})$, $R(3, \frac{6}{5})$

(3) $L(1,2)$, $M(5,3)$, $N(8,6)$

3. (0,6) ۽ (12,20) کي جوڙيندڙ ٽڪر جي مڌيہ ٽپڪي جا مساوا لهو.

4. A(3,8) ۽ B(-9,3) جوڙيندڙ ٽڪر کي Y محور تي ڪهڙي ريشي ۾ ورهائي ٿو؟

5. X- محور تي هڪ ٽپڪو ڳولهيو جيئن اُهو P(2,3) ۽ Q(-2,9) کان هم مفاصلي هجي.

6. هيٺ ڏنل ٽپڪن وچ ۾ مفاصلو لهو.

(1) $A(a, 0)$, $B(0, a)$ (2) $P(-6, -3)$, $Q(-1, 9)$ (3) $R(-3a, a)$, $S(a, -2a)$

7. هڪ ٽڪنڊي جا نوڪي ٽپڪا (3,1-),(0,-2),(1,3) آهن تہ ٽڪنڊي جو مرڪز جا مساوا لهو.

.8 هيٺ ڏنل ٽپڪن کي جوڙيندڙ ٽڪرن مان ٽڪنڊو تيار ٿي سگهي ٿو ڇا؟ ٽڪنڊو تيار ٿيڻ تي پاسن جي آڌار تي اُن جو قسم لکو.

(1) L (6,4) , M (−5,−3) , N (−6,8)

(2) P (−2,−6) , Q (−4,−2), R (−5,0)

(3) A ($\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$), B ($-\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}$), C ($-\sqrt{6}$, $\sqrt{6}$)

.9 جيڪڏهن (-12,-3) ۽ (4,k) اِن ليڪ جو لاهه $\frac{1}{2}$ ته k جو ملهه لهو.

.10 A(4, 8) ، B(5, 5) انهن ٽپڪن کي ملائيندڙ ليڪ C(2,4) ، D(1,7)
اِنهن ٽپڪن کي ملائيندڙ جي پوروچوٽ آهي اِهو ثابت ڪريو.

.11 ثابت ڪريو ته P(1,−2), Q(5,2), R(3,−1), S(−1,−5) پوروچوٽ پاسي چوڪنڊي جا نوڪي ٽپڪا آهن.

.12 P(2,1), Q(−1,3), R(−5,−3) ۽ S(−2,−5) آهي □PQRS ثابت ڪريو مستطيل آهي.

13. A (−1, 1), B (5, −3) ۽ C (3, 5) نوڪي ٽپڪن واري ٽڪنڊي جا مڌيان، اُنهن جا مساوا لهو.

★.14 D (−7, 6), E (8, 5) ۽ F (2, −2) اهي ٽڪنڊي جي پاسن جا مڌيه ٽپڪا آهن
ته اُن ٽڪنڊي جي مرڪزڪ جا مساوا لهو.

.15 A(4, −1), B(6, 0), C(7, −2) ۽ D(5, −3) ثابت ڪريو □ABCD چورس آهي.

.16 A(7, 1), B(3, 5) ۽ C(2, 0) ٽپڪن واري ٽڪنڊي جي گود مرڪز جا مساوا لهو.

.17 A(4,−3) ۽ B(8,5)، ٽڪرAB کي 3:1 ۾ ورهائيندڙ ٽپڪي جا مساوا لهو.

★.18 A(−4, −2), B(−3, −7) C(3, −2) ۽ D(2, 3) اِنهن ٽپڪن کي نمبروار جوڙڻ
سان تيار ٿيل ABCD چوڪنڊي جو قسم لکو.

★.19 ٽڪرAB ٽپڪا P, Q, R ۽ S کي پنجن برابر حصن ۾ ورهائين ٿا
A−P−Q−R−S−B ۽ Q(12, 14), S(4, 18) آهي ته A, P, R ۽ B جا مساوا لهو.

.20 P (6,−6), Q (3,−7) ۽ R (3,3) مان لنگهندڙ گول جي مرڪز جا مساوا ڪڍو.

★.21 پوروچوٽ پاسي چوڪنڊي جا ٽي نوڪي ٽپڪا A (5,6), B (1,−2) ۽ C (3,−2)
آهن ته چوٿين ٽپڪي جا ممڪن مساوان جون جوڙيون لکو.

.22 A (1,7), B (6,3) C (0,−3) ۽ D (−3,3) ۾ هرهڪ اُريب جا مساوا لهو.

RJ8TN7

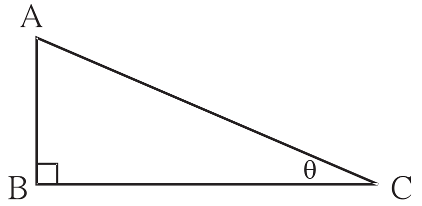
6 علم مثلث

اچو تہ سکون

- علم مثلث ريشا
- بلندي ۽ ترائي ڪنڊ
- علم مثلث سمانتا
- اوچائي ۽ مفاصلو - مثال

ذرا ياد ڪريو

.1 پرواري شڪل جاچي خال ڀريو



شڪل 6.1

$\sin\theta = \frac{\square}{\square}$ ، $\cos\theta = \frac{\square}{\square}$ ،

$\tan\theta = \frac{\square}{\square}$

.2 لاڳاپا پورا ڪريو

(i) $\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \square$

(ii) $\sin\theta = \cos(90 - \square)$

(iii) $\cos\theta = \sin(90 - \square)$

(iv) $\tan\theta . \tan(90 - \theta) = \square$

.3 مساوت پوري ڪريو

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = \square$

.4 مثلاتي ريشين جا ملهہ لکو

(i) $\sin 30^\circ = \frac{1}{\square}$ (ii) $\cos 30^\circ = \frac{\square}{\square}$ (iii) $\tan 30^\circ = \frac{\square}{\square}$

(iv) $\sin 60^\circ = \frac{\square}{\square}$ (v) $\cos 45^\circ = \frac{\square}{\square}$ (vi) $\tan 45^\circ = \square$

نائين درجي ۾ اسان گوني ڪنڊ تڪنڊي ۾ سوڙهي ڪنڊن جا مثلاتي ريشا سکيا آهن. هن سال اسان انهن ۾ اڳيا بہ وڌيڪ ريشا سکنداسين.

چاڻي وٺون

ڪوسيڪ، سيڪ ۽ ڪاٽ ريشا (cosec, sec and cot ratios)

سائين ڪندي جي ضرب اُبتڙ ريشو کي ڪو سيڪنٽ (cosecant) چئبو آهي اُن کي توري ۾ cosec لکبو اهي.

$$\therefore \ \text{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta}$$

ساڳئي نموني ڪو سائين ۽ ٽئنجنٽ جي ضرب اُبتڙن کي نمبروار سينڪٽ (seacant) ۽ ڪو ٽئنجنٽ (cotangent) ريشيا چئبو آهي توري ۾ اُنهن کي نمبروار sec ۽ cot لکبو آهي.

$$\therefore \ \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \text{ ۽ } \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$$

شڪل 6.2 ۾،

$$\sin\theta = \frac{AB}{AC}$$

$$\therefore \ \text{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta} = \frac{1}{\frac{AB}{AC}} = \frac{AC}{AB}$$

مطلب، $\text{cosec}\theta = \dfrac{\text{هئپاٽينيوز}}{\text{مخالف پاسو}}$

$$\tan\theta = \frac{AB}{BC}$$

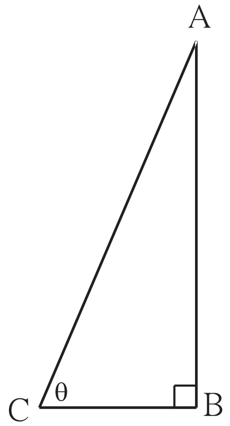
$$\therefore \quad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} = \frac{1}{\frac{AB}{BC}}$$

$$\frac{\text{پروارو پاسو}}{\text{مخالف پاسو}} = \cot\theta = \frac{BC}{AB}$$

$$\cos\theta = \frac{BC}{AC}$$

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = \frac{1}{\frac{BC}{AC}} = \frac{AC}{BC}$$

مطلب $\sec\theta = \dfrac{\text{هئپاٽينيوز}}{\text{پروارو پاسو}}$


شڪل 6.2

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

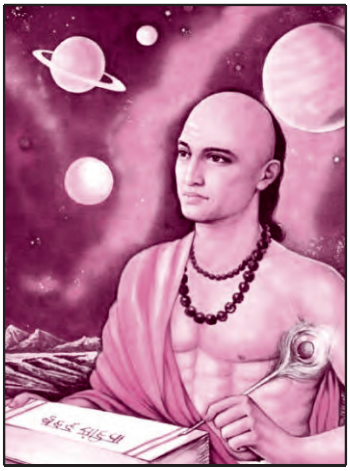
$$\therefore \ \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} = \frac{1}{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$\therefore \ \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

اهو ڌيان ۾ رکو

مثلاتي ريشا جو پاڻ ۾ لاڳاپو

- $\frac{1}{\sin\theta} = \operatorname{cosec}\theta \quad \therefore \sin\theta \times \operatorname{cosec}\theta = 1$
- $\frac{1}{\cos\theta} = \sec\theta \quad \therefore \cos\theta \times \sec\theta = 1$
- $\frac{1}{\tan\theta} = \cot\theta \quad \therefore \tan\theta \times \cot\theta = 1$



وڏيڪ ڄاڻ لاءِ

مشهور ڀارت جي رياضدان آريہ ڀٽ جو جنم 476ع ۾ ڪسمپور ۾ ٿيو اِهو اِستان بهار ۾ پاٽنا شهر ويجهو هو. هن عددي شاستر، آلجبرا ، جاميٽري اِنهن علم رياض جي شاخائن جو خوب اَڀياس ڪيو. ”آريہ ڀٽيس“ گرنٿ ۾ ڪيٽرائي حسابن جا نتيجا ۽ فارمولائون لکيل آهن. مثال

(1) ارٿ ميٽڪ ۾ سلسلي ۾ 'n' پد لکڻ ۽ پهريائين n پدن جو جوڙ

(2) $\sqrt{2}$ جو ملهہ لهڻ

(3) π 3.1416 جو ملهہ برابر لهڻ وغيرهہ ڪگول شاستر ۾ عام مثلث جو اِستعمال ڪيو. Sine Ratio جي ڪلپنا هن پهريائين اِستعمال ڪئي. جڳت ۾ حسابن جو گيان ڦهلجي، اُن جي گرنٿ جو ڀڃار سڄي ڀارت ۽ عربستان ذريعي يورپ ۾ ٿيو.

سج ڌرتيءَ جي چوگرد نہ پر ڌرتي سج جي چوگرد ڦري ٿي. اِهو ويچار ڪوپرنڪس پهريون ڀڌايو ائين مڃيو ويندو آهي پر اُن کان 1000 سال اڳ اِن هت بابت گرنٿ ۾ ڪيل آهي.

19 اپريل 1975 ۾ ڀارت پهريون اُپگرهہ پولار ۾ ڇڏيو. اُن جو نالو ”آريہ ڀٽ“ ڏئي ڀارت سرڪار برکہ رياضدان جو قدر ڪيو.

ماپن وارن ڪنڊن جا مثلاتي ريشا

✻ $0°, 30°, 45°, 60°, 90°$

مثلتي ريشو	ڪنڊن جي ماپ (θ)				
	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\theta$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	اڻ وصفِيل
$\text{cosec}\,\theta = \frac{1}{\sin\theta}$	اڻ وصفِيل	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1
$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	اڻ وصفِيل
$\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$	اڻ وصفِيل	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

جاچي وٺو

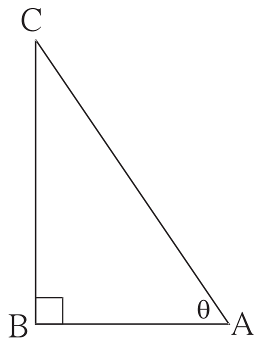
مثلاتي برابريون (Trigonometrical identities)

پرواري شڪل 6.3 ۾ Δ ABC ۾ ، $\angle B = 90°$

(i) $\sin\theta = \frac{BC}{AC}$ (ii) $\cos\theta = \frac{AB}{AC}$

(iii) $\tan\theta = \frac{BC}{AB}$ (iv) $\text{cosec}\theta = \frac{AC}{BC}$

(v) $\sec\theta = \frac{AC}{AB}$ (vi) $\cot\theta = \frac{AB}{BC}$



شڪل 6.3

پايٿاگورس سڏيان موجب

$$BC^2 + AB^2 = AC^2 \; .....(I)$$

(I) کي AC^2 سان ونڊ ڪرڻ

$$\frac{BC^2 + AB^2}{AC^2} = \frac{AC^2}{AC^2}$$

$\therefore \quad \frac{BC^2}{AC^2} + \frac{AB^2}{AC^2} = 1$

$\therefore \quad \left(\frac{BC}{AC}\right)^2 + \left(\frac{AB}{AC}\right)^2 = 1$

$\therefore (\sin\theta)^2 + (\cos\theta)^2 = 1 \ldots.$

$\mathbf{\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1} \ldots\ldots\ldots\ldots (II)$

$(\sin\theta)^2$ اِهو $\sin^2\theta$ ڪري لکبو آهي.

$(\cos\theta)^2$ اِهو $\cos^2\theta$ ڪري لکبو آهي.

$$\frac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta} + \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta} = \frac{1}{\sin^2\theta}$$

$\mathbf{1 + \cot^2\theta = \operatorname{cosec}^2\theta} \ldots\ldots\ldots\ldots (III)$

$$\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} + \frac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta}$$

$\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$

$\mathbf{1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta} \ldots\ldots\ldots (IV)$

(II), (III), ۽ (IV) اهي مثلاتي ريشا برابريون آهن

حل ڪيل مثال

مثال (1) جيڪڏهن $\sin\theta = \frac{20}{29}$ ته $\cos\theta$ لهو

حل :

پهريون طريقو

اسان کي ڄاڻ آهي

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$\left(\frac{20}{29}\right)^2 + \cos^2\theta = 1$

$\frac{400}{841} + \cos^2\theta = 1$

$\cos^2\theta = 1 - \frac{400}{841}$

$= \frac{441}{841}$

$\therefore \cos\theta = \frac{21}{29}$ (پيو مول ڪيندي)

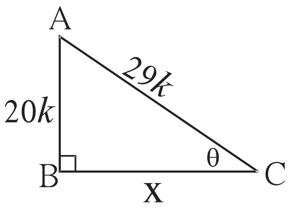
ٻيو طريقو

$\sin\theta = \frac{20}{29}$

شڪل ۾ $\sin\theta = \frac{AB}{AC}$

$\therefore AB = 20k$ ۽ $AC = 29k$

$BC = x$ (سمجهو)



شڪل 6.4

$AB^2 + BC^2 = AC^2$

$(20k)^2 + x^2 = (29k)^2$

$400k^2 + x^2 = 841k^2$

$x^2 = 841k^2 - 400k^2$

$= 441k^2$

$\therefore \quad x = 21k$

$\therefore \cos\theta = \frac{BC}{AC} = \frac{21k}{29k} = \frac{21}{29}$

مثال(2) جيڪڏهن $\sec\theta = \frac{25}{7}$ تہ $\tan\theta$ لهو

حل: طريقو I

اسان کي ڄاڻ آهي

$$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$$

$$\therefore \quad 1 + \tan^2\theta = \left(\frac{25}{7}\right)^2$$

$$\therefore \quad \tan^2\theta = \frac{625}{49} - 1$$

$$= \frac{625 - 49}{49}$$

$$= \frac{576}{49}$$

$$\therefore \quad \tan\theta = \frac{24}{7}$$

طريقو II

شڪل موجب

$$\sec\theta = \frac{PR}{PQ}$$

$$\therefore \quad PQ = 7k,\ PR = 25k$$

پايٿاگورس سڌيان موجب

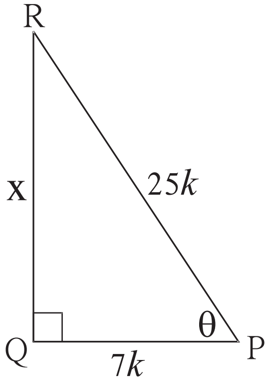
$$PQ^2 + QR^2 = PR^2$$

$$\therefore \quad (7k)^2 + QR^2 = (25k)^2$$

$$\therefore \quad QR^2 = 625k^2 - 49k^2 = 576k^2$$

$$\therefore \quad QR = 24k$$

هاڻي، $\tan\theta = \frac{QR}{PQ} = \frac{24k}{7k} = \frac{24}{7}$



شڪل 6.5

مثال (3) جيڪڏهن $5\sin\theta - 12\cos\theta = 0$ تہ $\sec\theta$ ۽ $\csc\theta$ جو ملهہ لهو.

حل: $5\sin\theta - 12\cos\theta = 0$

$$\therefore \quad 5\sin\theta = 12\cos\theta$$

$$\therefore \quad \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{12}{5}$$

$$\therefore \quad \tan\theta = \frac{12}{5}$$

اسان کي ڄاڻ آهي

$$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$$

$$\therefore 1 + \left(\frac{12}{5}\right)^2 = \sec^2\theta$$

$$\therefore \quad 1 + \frac{144}{25} = \sec^2\theta$$

$$\therefore \quad \frac{25+144}{25} = \sec^2\theta$$

$$\therefore \quad \sec^2\theta = \frac{169}{25}$$

$$\therefore \quad \sec\theta = \frac{13}{5}$$

$$\therefore \cos\theta = \frac{5}{13}$$

هاڻي، $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$$\therefore \quad \sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$$

$$\therefore \sin^2\theta = 1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2$$

$$= 1 - \frac{25}{169}$$

$$= \frac{144}{169}$$

$$\therefore \quad \sin\theta = \frac{12}{13}$$

$$\therefore \quad \text{cosec}\,\theta = \frac{13}{12}$$

مثال (4) $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ جو ملھہ لھو. $\frac{1-\sec\theta}{1+\operatorname{cosec}\theta}$

حل : طريقو I

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \therefore \sec\theta = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

$$\therefore \sin^2\theta + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1$$

$$\therefore \sin^2\theta = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

$$\therefore \sin\theta = \frac{1}{2} \qquad \therefore \operatorname{cosec}\theta = 2$$

$$\therefore \frac{1-\sec\theta}{1+\operatorname{cosec}\theta} = \frac{1-\frac{2}{\sqrt{3}}}{1+2}$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{3}-2}{\sqrt{3}}}{3}$$

$$= \frac{\sqrt{3}-2}{3\sqrt{3}}$$

طريقو II

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore \theta = 30^\circ$$

$$\therefore \sec\theta = \sec 30^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\operatorname{cosec}\theta = \operatorname{cosec} 30^\circ = 2$$

$$\therefore \frac{1-\sec\theta}{1+\operatorname{cosec}\theta} = \frac{1-\frac{2}{\sqrt{3}}}{1+2}$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{3}-2}{\sqrt{3}}}{3}$$

$$= \frac{\sqrt{3}-2}{3\sqrt{3}}$$

مثال(5) ثابت ڪريو. $\sec x + \tan x = \sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}$

حل : $\sec x + \tan x = \frac{1}{\cos x} + \frac{\sin x}{\cos x}$

$$= \frac{1+\sin x}{\cos x}$$

$$= \sqrt{\frac{(1+\sin x)^2}{\cos^2 x}}$$

$$= \sqrt{\frac{(1+\sin x)(1+\sin x)}{1-\sin^2 x}}$$

$$= \sqrt{\frac{(1+\sin x)(1+\sin x)}{(1-\sin x)(1+\sin x)}}$$

$$= \sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}$$

مثال (6) هيٺ مساواتن ۾ θ هٽايو

$$x = a\cot\theta - b\,\mathrm{cosec}\,\theta$$
$$y = a\cot\theta + b\,\mathrm{cosec}\,\theta$$

حل :

$$x = a\cot\theta - b\,\mathrm{cosec}\,\theta \quad \ldots\ldots\ldots\ (I)$$
$$y = a\cot\theta + b\,\mathrm{cosec}\,\theta \quad \ldots\ldots\ldots\ (II)$$

(I) ۽ (II) جوڙ ڪرڻ

$$x + y = 2a\cot\theta$$
$$\therefore \cot\theta = \frac{x+y}{2a} \quad \ldots\ldots\ldots\ (III)$$

(I) ۽ (II) ڪٽ ڪرڻ

$$y - x = 2b\,\mathrm{cosec}\,\theta$$
$$\therefore \mathrm{cosec}\,\theta = \frac{y-x}{2b} \quad \ldots\ldots\ldots\ (IV)$$

هاڻي، $\mathrm{cosec}^2\theta - \cot^2\theta = 1$

$$\therefore \left(\frac{y-x}{2b}\right)^2 - \left(\frac{y+x}{2a}\right)^2 = 1$$
$$\therefore \frac{(y-x)^2}{4b^2} - \frac{(y+x)^2}{4a^2} = 1$$
$$\left(\frac{y-x}{b}\right)^2 - \left(\frac{y+x}{a}\right)^2 = 4$$

اَڀياس 6.1

1. جيڪڏهن $\sin\theta = \frac{7}{25}$ ته $\cos\theta$ ۽ $\tan\theta$ ملھ لھو.
2. جيڪڏهن $\tan\theta = \frac{3}{4}$ ته $\sec\theta$ ۽ $\cos\theta$ ملھ لھو.
3. جيڪڏهن $\cot\theta = \frac{40}{9}$ ته $\mathrm{cosec}\theta$ ۽ $\sin\theta$ جا ملھ لھو.
4. جيڪڏهن $5\sec\theta - 12\mathrm{cosec}\theta = 0$ ته $\sec\theta$، $\cos\theta$ ۽ $\sin\theta$ جا ملھ لھو.
5. جيڪڏهن $\tan\theta = 1$ ته $\frac{\sin\theta+\cos\theta}{\sec\theta+\mathrm{cosec}\,\theta}$ ملھ لھو.
6. ثابت ڪريو

(1) $\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta} + \cos\theta = \sec\theta$

(2) $\cos^2\theta(1 + \tan^2\theta) = 1$

(3) $\sqrt{\dfrac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}} = \sec\theta - \tan\theta$

(4) $(\sec\theta - \cos\theta)(\cot\theta + \tan\theta) = \tan\theta \,.\, \sec\theta$

(5) $\cot\theta + \tan\theta = \operatorname{cosec}\theta \,.\, \sec\theta$

(6) $\dfrac{1}{\sec\theta - \tan\theta} = \sec\theta + \tan\theta$

(7) $\sec^4\theta - \cos^4\theta = 1 - 2\cos^2\theta$

(8) $\sec\theta + \tan\theta = \dfrac{\cos\theta}{1-\sin\theta}$

(9) جيڪڏهن $\tan\theta + \dfrac{1}{\tan\theta} = 2$ تہ ثابت ڪريو $\tan^2\theta + \dfrac{1}{\tan^2\theta} = 2$

(10) $\dfrac{\tan A}{(1+\tan^2 A)^2} + \dfrac{\cot A}{(1+\cot^2 A)^2} = \sin A \cos A$

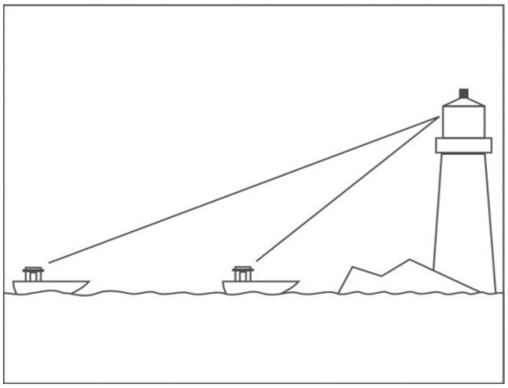
(11) $\sec^4 A\,(1 - \sin^4 A) - 2\tan^2 A = 1$

(12) $\dfrac{\tan\theta}{\sec\theta - 1} = \dfrac{\tan\theta + \sec\theta + 1}{\tan\theta + \sec\theta - 1}$

چاڻي وٺون

علم مثلث جو اُپيوگہ (Application of trigonometry)

گھڻيئي دفعا آسان منارا، عمارتون، وڻن وغيرهہ جي اوچائي يا جهاز جي روشني گھر کان مفاصلو يا ندي جي ويکر وغيرهہ جي ڄاڻ کپندي آهي. اِهي مفاصلا آسان ماپي نہ ٿا سگھون پر مثلاثون ريشا ڪم آڻي اوچائي ۽ مفاصلا لهي سگھون ٿا. اوچائي يا مفاصلا، ڏنل ڄاڻ موجب ڪچي شڪل ٺاهي ٺڪريون، منارا، آهڙيون جڳھيون زمين تي عمود ۾ آهن



شڪل 6.6

اهو ڏيکارڻ لاءِ شڪل ۾ ليڪ ٺڪرن جو اِستعمال ڪنداسين ڏسندڙ جي نظر برابر شڪل ڪيڏي آسان اوچائي ۽ مفاصلا لهي سگھون ٿا.

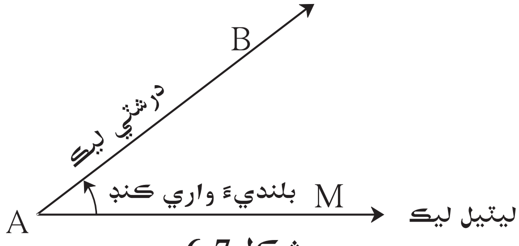
پهريان آسان ڪجهه پد سمجهنداسين

(i) درشتي ليڪ (Line of vision) :

درشتي ليڪ ٽپڪي Aوٽ بيٺل جاچيندڙ ٽپڪو B ڏسي ٿو تہ ليڪ ABاِها درشتي ليڪ آهي.

(ii) بلنديءَ واري ڪنڊ: (Angle of elevation)

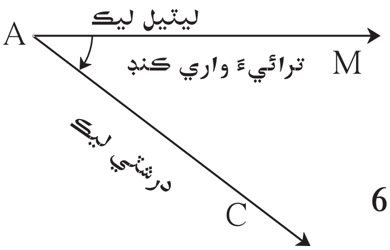
جيڪڏهن A ۽ B ٽپڪا آهڙي نموني آهن جو B جي اوچائي A کان وڌيڪ آهي ۽ Aمٿان ڪيڏيل سڌي ليڪ آهي تہAM, $\angle MAB$ کي بلنديءَ واري ڪنڊ چئجي ٿو.



شڪل 6.7

(iii) ترائيءَ واري ڪنڊ (Angle of depression) :

A ۽ B ٽپڪا اهڙي نموني آهن جو AC اوچائي کان وڌيڪ آهي. ۽ A ,ACوٽان نڪتل سڌي ليڪ $\angle MAC$ کي ترائيءَ واري ڪنڊ چئبو آهي.



شڪل 6.8

جڏهن آسان نظر مٿي ڪري نهاريون ٿا تہ بلنديءَ واري ڪنڊي نهي ٿي.

جڏهن آسان نظر هيٺ ڪري نهاريون ٿا تہ ترائيءَ واري ڪنڊ نهي ٿي.

حل ڪيل مثال

مثال (1) هڪ وڻ کان 10 م مفاصلي تي بيٺل جاچيندڙ جي وڻ جي چوٽيءَ تي نهارڻ سان 60° ماپ واري بلنديءَ واري ڪنڊ نهي ٿي تہ وڻ جي اوچائي لهو $(\sqrt{3} = 1.73)$

حل : شڪل 6.9 ۾ 'C'جاچيندڙ ۽ AB وڻ آهي

BC = 10م بلنديءَ واري ڪنڊ

$$(\theta)\angle BCA = 60^\circ$$

$$\tan\theta = \frac{AB}{BC} \quad \dots\dots\dots\dots (I)$$

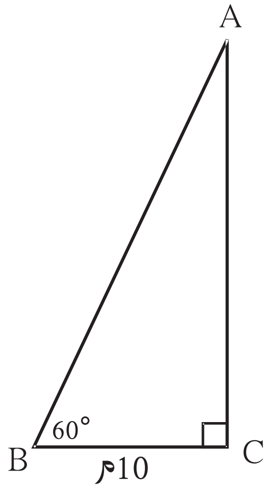
$$\tan 60^\circ = \sqrt{3} \quad \dots\dots\dots\dots (II)$$

$$\therefore \quad \frac{AB}{BC} = \sqrt{3} \quad \dots\dots\dots\dots (I) \text{ ۽ } (II) \text{ مان}$$

$$\therefore \quad AB = BC\sqrt{3} = 10\sqrt{3}$$

$$\therefore \quad AB = 10 \times 1.73 = 17.3 \text{ م}$$

∴ وڻ جي اوچائي 17.3 م.



شڪل 6.9

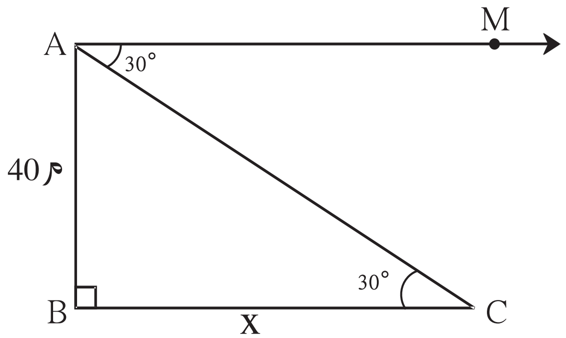
مثال (2) 40 م اوچائي عمارت جي ڇت کان، ڪجهہ ميٽر مفاصلي هڪ بيٺل اِسڪوٽر کي ڏسڻ سان 30° ماپ واري ترائيءَ واري ڪنڊ ٺهي ٿي تہ اِهو اِسڪوٽر عمارت کان ڪيترو پري آهي ($\sqrt{3} = 1.73$)

حل : شڪل ۾ A جاچيندڙ آهي.

AM ليٽيل ليڪ آهي

$\angle MAC$ اِها ترائيءَ واري ڪنڊ آهي

$\angle MAC$ ۽ $\angle ACB$ متبدل ڪنڊون



شڪل 6.10

سمجهو $\tan 30^\circ = \dfrac{AB}{BC}$

$$\therefore \quad \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{40}{x}$$

$$\therefore \quad x = 40\sqrt{3}$$

$$= 40 \times 1.73$$

$$= 69.20 \text{ م}$$

$\therefore$ اسڪوٽر عمارت کان 69.20 م پري آهي

مثال (3) نديءَ جي ويڪر جاچڻ لاءِ هڪ ماڻهو نديءَ جي ڪناري جي ڀرسان وڻ جي چوٽيءَ تي نهارڻ سان 61° ماپ واري بلندي واري ڪنڊ ٺاهي ٿو. اُتان وڌيڪ 50 م پري وڃڻ سان اُها ڪنڊ 35° بلنديءَ واري ڪنڊ ٺهي ٿي تہ نديءَ جي ويڪر ۽ وڻ جي اوچائي لهو.

($\tan 61^\circ \approx 1.8, \tan 35^\circ \approx 0.7$)

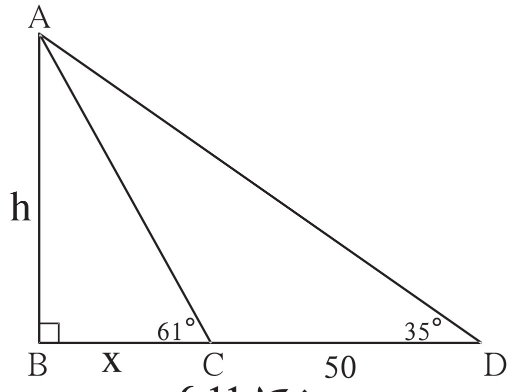
حل : A وڻ جي چوٽي آهي

BC نديءَ جي ويڪر آهي

وڻ جي اوچائي = h

نديءَ جي ويڪر = x

$$\tan 61^\circ = \frac{h}{x}$$



شڪل 6.11

$$\therefore\ 1.8 = \frac{h}{x}$$

$$h = 1.8 \times x$$

$$10h = 18x \text{ .... (I)..... }$$ (10 سان ضرب ڪرڻ)

$$\tan 35 = \frac{h}{x + 50}$$

$$0.7 = \frac{h}{x + 50}$$

$$\therefore\ h = 0.7\,(x + 50)$$

$$\therefore\ 10h = 7\,(x + 50) \text{ .... (II)}$$

[(I) ۽ (II) مان]

$$18x = 7(x + 50)$$

$$\therefore\ 18x = 7x + 350$$

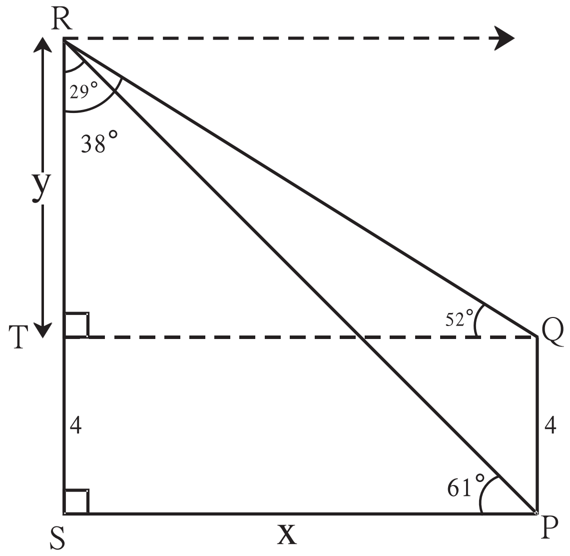
$$\therefore\ 11x = 350$$

$$\therefore\ x = \frac{350}{11} = 31.82$$

$$\therefore\ h = 1.8x = 1.8 \times 31.82 = 57.28$$

نديءَ جي ويڪر 31.82 م ۽ وڻ جي اوچائي 57.28 م

مثال(4) روشني گهر جي دروازي تي بيٺي هئي. گهر کان ٿورو پري هڪ وڻ جي چوٽيءَ تي ڪيس هڪ پکي نظر آيو. اُن جي نظر سان 61° بلنديءَ واري ڪنڊ هئي پکيءَ کي چڱيءَ طرح ڏسڻ لاءِ هو گهر کان مٿي 4 ميٽر دريءَ تان پکي ڏسڻ وقت بلنديءَ واري ڪنڊ 52° ٿي. ٻڌايو تہ پکي زمين کان مٿي ڪيتري اوچائي تي (جواب سڄڻ انگن ۾ لکو)



شڪل 6.12

$$(\tan 61^\circ = 1.80,\ \tan 52^\circ = 1.28,\ \tan 29^\circ = 0.55,\ \tan 38^\circ = 0.78)$$

مثال : سمجھو شڪل 6.12 ۾ PQ گھر ۽ SR وڻ

آھي تڪر RS⊥ تڪر QTڪيو

$\therefore$ TSPQ $\square$ مستطيل آھي.

سمجھو $TR = y,\ SP = x$

$\angle PRS = 90^\circ - 61^\circ = 29^\circ$ ۾، ΔRSP

$\angle QRT = 90^\circ - 52^\circ = 38^\circ$، ۾ ΔRTQ

$$\therefore \tan \angle PRS = \tan 29^\circ = \frac{SP}{RS}$$

$$\therefore 0.55 = \frac{x}{y+4}$$

$$\therefore x = 0.55(y+4) \text{ .... (I)}$$

$$\tan \angle QRT = \frac{TQ}{RT}$$

$$\therefore \tan 38^\circ = \frac{x}{y} \text{ .... } [\because SP = TQ = x]$$

$$\therefore 0.78 = \frac{x}{y}$$

$$\therefore x = 0.78y \text{ .... (II)}$$

مان (II) ۽ (I) .... $\therefore 0.78y = 0.55(y+4)$

$$\therefore 78y = 55(y+4)$$

$$\therefore 78y = 55y + 220$$

$$\therefore 23y = 220$$

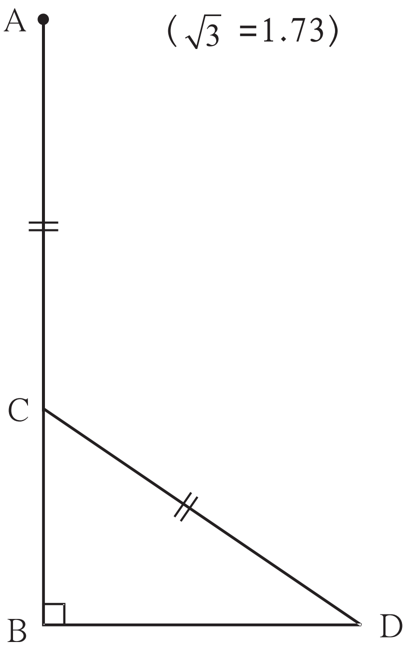
سڄن انگن ۾ $\therefore y = 9.565 = 10$

$$\therefore RS = y + 4 = 10 + 4 = 14$$

$\therefore$ پکي زمين کان 14 ميٽر اوچائي تي آھي

مثال (5) طوفان سبب ھڪ وڻ جي ڪرڻ سان اُن جو مٿيون حصو زمين تي ڪري، اُن سان 30 ڪنڊ ٺاھي ٿو وڻ جي ڀڳل چوٽي ۽ ٿُڙ ۾ مفاصلو 10 م آھي تہ سڄي وڻ جي اوچائي لھو.

حل : شڪل 6.13 ۾ AB وڻ جي A چوٽي آھي. طوفان سبب ‘C’ ٽڪي تان ڪري اِھو ھيٺ D ٽڪي تي پھتو.



6.13

$(\sqrt{3} = 1.73)$

$\angle CDB = 30°$, BD = 10 م , BC = x م

CA= CD = y

Δ CDB ۾ ,

$$\tan 30° = \frac{BC}{BD}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{x}{10}$$

$$x = \frac{10}{\sqrt{3}}$$

$$y = \frac{20}{\sqrt{3}}$$

$$x + y = \frac{10}{\sqrt{3}} + \frac{20}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{30}{\sqrt{3}}$$

$$x + y = 10\sqrt{3}$$

وڻ جي اوچائي $10\sqrt{3}$ ميٽر آهي

اَڀياس 6.2

1. هڪ ماڻهو هڪ چرچ کان 80 م مفاصلي تي آهي هن جي چرچ جي ڇت نهارڻ سان، بلنديءَ واري ڪنڊ 45° ٺهي ٿي تہ چرچ جي اوچائي لهو.

2. هڪ روشني گهر کان جهاز نهارڻ سان 60° ترائيءَ واري ڪنڊ ٺهي ٿي روشني گهر جي اوچائي 90م آهي تہ اُهو جهاز روشني گهر کان ڪيترو پري آهي $(\sqrt{3} = 1.73)$

3. 12 ميٽر ويڪر رستي جي ٻنهي پاسي آمهون سامهون ٻہ عمارتون آهن 10 م اوچائيءَ واري هڪ عمارت کان ٻئي عمارت جي ڇت نهارڻ سان 60° بلنديءَ واري ڪنڊ ٺهي ٿي تہ ٻي عمارت جي اوچائي ڪيتري؟

4. 18 م ۽ 7 م ٻہ ٿنڀا زمين تي اُڀا آهن. اُنهن جي چوٽين کي ملائيندڙ تار جي ڊيگهہ 22 م آهي تہ تار جي ليٽيل ليڪ سان ٺهندڙ ڪنڊ لهو.

5. طوفان سبب هڪ وڻ جي ڪرڻ سان ٿُڙ حصو زمين تي ڪري، زمين سان 60° ڪنڊ ناهي ٿو. اُهو ٿُڙ کان 20 م مفاصلي تي آهي تہ اصلي وڻ جي اوچائي لهو.

6. هڪ لغڙ زمين کان 60° م مفاصلي تي اُڏامي رهيو آهي لغڙ جي ڌاڳي جو هڪ ڇيڙ زمين تي ٿوري وقت لاءِ پڪو ٻڌو ويو اِن ڌاڳي جي زمين سان ٺهيل ڪنڊ 60° آهي تہ ڌاڳي جي ڊيگهہ لهو $(\sqrt{3} = 1.73)$

1. مناسب متبدل جواب چونڊيو

(1) $\sin\theta \,.\, \mathrm{cosec}\theta =$ ....

(A) 1 (B) 0 (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\sqrt{2}$

(2) $\mathrm{cosec}45^\circ$ جو ملهه ڪيترو؟

(A) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (B) $\sqrt{2}$ (C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (D) $\frac{2}{\sqrt{3}}$

(3) $1 + \tan^2\theta =$ ....

(A) $\cot^2\theta$ (B) $\mathrm{cosec}^2\theta$ (C) $\sec^2\theta$ (D) $\tan^2\theta$

(4) ليتيل ليڪ ڪان مٿي نهارڻ سان ....ڪنڊ نهي ٿي.

(A) بلنديءَ واري (B) تراڻيءَ واري (C) ٻڙي (D) سڌي

2. جيڪڏهن $\sin\theta = \frac{11}{61}$ تہ (مثلاثي برابريون ڪم آڻي $\cos\theta$ لهو.)

3. جيڪڏهن $\tan\theta = 2,$ تہ سڀ ريشا لهو

4. جيڪڏهن $\sec\theta = \frac{13}{12}$ تہ سڀ ريشا لهو

5. ثابت ڪريو

(1) $\sec\theta\,(1 - \sin\theta)\,(\sec\theta + \tan\theta) = 1$

(2) $(\sec\theta + \tan\theta)\,(1 - \sin\theta) = \cos\theta$

(3) $\sec^2\theta + \mathrm{cosec}^2\theta = \sec^2\theta \times \mathrm{cosec}^2\theta$

(4) $\cot^2\theta - \tan^2\theta = \mathrm{cosec}^2\theta - \sec^2\theta$

(5) $\tan^4\theta + \tan^2\theta = \sec^4\theta - \sec^2\theta$

(6) $\frac{1}{1-\sin\theta} + \frac{1}{1+\sin\theta} = 2\sec^2\theta$

(7) $\sec^6 x - \tan^6 x = 1 + 3\sec^2 x \times \tan^2 x$

(8) $\dfrac{\tan\theta}{\sec\theta+1}+\dfrac{\sec\theta-1}{\tan\theta}$

(9) $\dfrac{\tan^3\theta-1}{\tan\theta-1} = \sec^2\theta + \tan\theta$

(10) $\dfrac{\sin\theta-\cos\theta+1}{\sin\theta+\cos\theta-1}=\dfrac{1}{\sec\theta-\tan\theta}$

6. هڪ ڇوڪرو هڪ عمارت کان 48 م پري بيٺو آهي عمارت جي چوٽي نهارڻ سان ڇوڪرو 30 ماپ واري بلندي واري ڪنڊ ٺاهي ٿو تہ عمارت جي اوچائي لهو.

7. هڪ روشني گهر کان جهاز نهارڻ سان 30° جي ترائيءَ واري ڪنڊ ٺهي ٿي جيڪڏهن روشني گهر جي اوچائي 100 م آهي تہ اُهو جهاز روشني گهر کان ڪيترو پري آهي؟

8. 15 م ويڪر رستي جي ٻنهي طرف آمهون سامهون ٻہ عمارتون آهن 12 م اوچائيءَ واري عمارت جي ڇت تان ٻي عمارت جي ڇت ڏسڻ سان بلنديءَ واري ڪنڊ 30° ٺهي ٿي. تہ ٻي عمارت جي اوچائي لهو.

9. باهہ وسائڻ واري گاڏي ڏاڪڻ وڌ ۾ وڌ 70° متي وڃي سگهي ٿي اُن وقت اُنجي وڌ ۾ وڌ ڊيگهہ 20 م آهي آهي. ڏاڪڻ گاڏيءَ مٿان زمين کان 2 م اوچائي تي آهي ٻڌايو تہ ڏاڪڻ جو ٻيو ڇيڙو وڌ ۾ وڌ ڪيتري اوچائي تائين پهچندو. (Sin 70° ≈ 0.94)

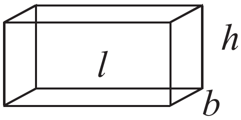
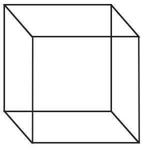
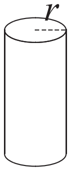
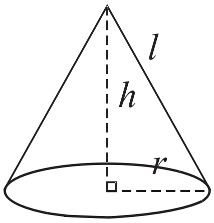
10. آسمان ۾ اُڏامندڙ جهاز ۾ پائليٽ ايئر پورٽ تي لهڻ وقت ترائيءَ واري ڪنڊ 20° ڪئي. اُن وقت جهاز جي سراسري رفتار 200 ڪ م في ڪلاڪ هئي اِهو جهاز 54 سيڪنڊن ۾ ايئرپورٽ تي لٿو لهڻ وقت اُها هوائي جهاز زمين کان مٿي ڪيتري اوچائي تي هو. ($\sin 20^\circ \approx 0.342$)

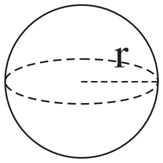
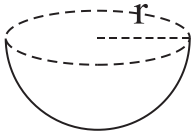
7 علم پئماش

ڄاڻي ونون

- جدا جدا شڪلين ڪعب جي متاچڙو ايراضي ۽ مقدار بابت ڳڏيل مثال
- گول ڪمان - ڊيگهه
- گول قطاع دائره ايراضي
- گول - ٽڪر ايراضي

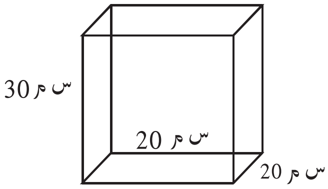
ذرا ياد ڪريو

سوتر	ٽ - ماپي شڪل	نمبر
اُڀن متاچڙن جي ايراضي = $2h(l+b)$ ڪل متاچڙو ايراضي = $2(lb+bh+hl)$ مقدار = lbh	مستطيل بلاڪ 	1 .
اُڀن متاچڙن جي ايراضي = $4l^2$ ڪل متاچڙو ايراضي = $6l^2$ مقدار = l^3	ڪعب 	2 .
اُڀن متاچڙن جي ايراضي = $2\pi rh$ ڪل متاچڙو ايراضي = $2\pi r(r+h)$ مقدار = πr^2h	سلينڊر 	3 .
اُڀن متاچڙن جي ايراضي $(l) = \sqrt{h^2+r^2}$ $\pi rl =$ $\pi r(r+l) =$ $\frac{1}{3} \times \pi r^2h =$	ڪون (مخروط) 	4 .

نمبر	ٽ - ماپي شڪل	سوتر
.5	گولو 	مٿاڇرو ايراضي = $4\pi r^2$ مقدار = $\frac{4}{3}\pi r^3$
.6	اڌ گولو 	وريل مٿاڇرو ايراضي = $2\pi r^2$ ڪل مٿاڇرو ايراضي = $3\pi r^2$ مقدار = $\frac{2}{3}\pi r^3$

هينيان مثال حل ڪريو

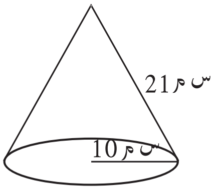
مثال (1)



شڪل 7.1

پرواري شڪل ۾ 30س م اوچائي، 20 س م ڊيگهه ۽ 20س م ويڪر هڪ تيل جو دٻو آهي اُن ۾ ڪيترا ليٽر تيل ماپندو؟ (1 لٽر = 1000 س م^3)

مثال (2)



شڪل 7.2

پرواري شڪل ۾ هڪ مسخري جي ٽوپي ڏيکاريل آهن اِن ٽوپيءَ کي تيار ڪرڻ ۾ ڪيترو ڪپڙو لڳندو.

ويچار ڪريو

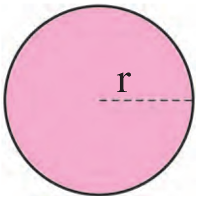
پرواري شڪل ۾ هڪ سلينڊر اَندر هڪ بال رکيل آهي اِهو بال سلينڊر جي تري ۽ پاسن کان ڇهي ٿو سلينڊر جو نيم قطر r آهي ته

(1) بال جو نيم قطر ڪيترو؟

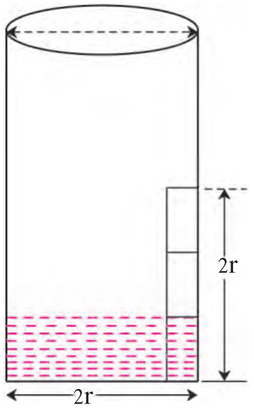
(2) سلينڊر ۽ بال جي وريل مٿاڇرن جي ايراضين جو ريشو ڪيترو؟

(3) سلينڊر ۽ بال جي مقدارن جو ريشو ڪيترو؟

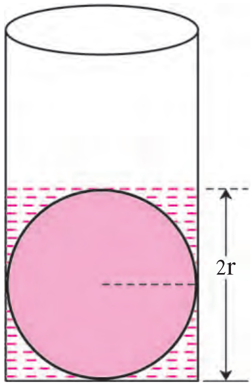
شڪل 7.3



شڪل 7.4



شڪل 7.5



شڪل 7.6

مٿي ڏنل شڪلين موجب هڪ بال ۽ بال جي نيم قطر برابر (r) هڪ بيڪر کڻو بيڪر جي قطر جي ڊيگهہ (2r) واري هڪ ڪاغذ جي پٽي کڻو اُن ڊيگهہ جا3 برابر حصا ڪندڙ ۾ ليڪون پٽيءَ تي ڪڍو. اُها پٽي بيڪر ۾ تري کان اُڀي چِپڪايو. بيڪر ۾ هيٺ پٽيءَ جي پهرين ڀاڱي تائين پاڻي ڀريو پوءِ اهستي آهستي بيڪر ۾ بال تريءَ تائين رکو. هاڻي بيڪر ۾ پاڻيءَ جي سنوت وڌندي اِهو جاچيو پاڻيءَ جي سنوت ڪاغذ جي ٽئين ڀاڱي تائين پهچي ٿي.

اِن مان اَسان بال جي مقدار بابت سوتر سکنداسين بيڪر سلينڊر شڪل جو آهي. سمجهو بيڪر جو مقدار V آهي.

(پاڻيءَ اوچائي) $\therefore\ V = \pi \times r^2 \times 2r = 2\pi r^3$

$$\frac{1}{3} \times 2\pi r^3$$

$\therefore$ اَڳہ وارو پاڻيءَ جو مقدار $= V - \frac{1}{3} \times 2\pi r^3$

بال جو مقدار $= 2\pi r^3 - \frac{2}{3}\pi r^3$

بال جو مقدار $= \frac{4\pi r^3}{3} \qquad = \frac{6\pi r^3 - 2\pi r^3}{3}$

اَهڙي نموني گولي جو مقدار $\therefore\ V = \frac{4}{3}\pi r^3$

اِن سوتر جو اِستعمال ڪري شڪل 7.3سوال نمبر 3 جو جواب توهان لهي سگهو ٿا.

مثال (1) هڪ سلينڊر آڪار پاڻيءَ جي ٽانڪيءَ جو نيم قطر 2.8 م ۽ اوچائي 3.5 م آهي اُن ٽانڪيءَ ۾ ڪيترا ليٽر پاڻي ماپندو؟ هڪ ماڻهوءَ کي روز سراسري 70 ليٽر پاڻي گهرجي تہ سڄي پريل ٽانڪي ڪيترن ماڻهن لاءِ پوري ٿيندي. $\left(\pi = \frac{22}{7}\right)$

حل : نيم قطر (r)=2.8 م، اوچائي (h)=3.5 م $\pi = \frac{22}{7}$

سلينڊر ٽانڪيءَ جو مقدار = پاڻيءَ جي ٽانڪيءَ جي گنجايس

$= \pi r^2 h$

$= \frac{22}{7} \times 2.8 \times 2.8 \times 3.5$

$= 86.24$ م^3

$= 86.24 \times 1000$ ليٽر ($\because$ 1 م^3 = 1000 ليٽر)

$= 86240.00$ ليٽر

$\therefore$ ٽانڪيءَ ۾ 86240 ليٽر پاڻي آهي هڪ ماڻهوءَ لاءِ 70 ليٽر

$$\frac{86240}{70} = 1232$$

$\therefore$ ڪپت 1232 ماڻهن لاءِ

مثال (2) 30 س م نيم قطر واري نهري پريل گولي کي ڳاري 6 س م اوچائي ۽ 10 س م نيم قطر وارا نهرا پريل سلينڊر تيار ڪيا ويا. ٻڌايو تہ ڪل ڪيترا سلينڊر تيار ڪيا ويا.

حل :

30 س م = r گولي جو نيم قطر

10 س م = R سلينڊر جو نيم قطر

30 س م = h سلينڊر جي اوچائي

سمجهہ 'h' سلينڊر تيار ٿين ٿا.

ڪل 60 سلينڊر تيار ٿيندا.

$$n = \frac{\text{گولي جو مقدار}}{\text{هڪ سلينڊر جو مقدار}}$$

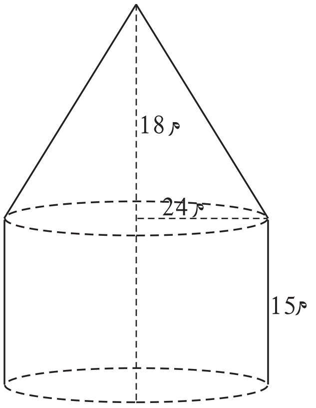
$$= \frac{\frac{4}{3}\pi(r)^3}{\pi(R)^2 H}$$

$$= \frac{\frac{4}{3}\times(30)^3}{10^2\times 6} = \frac{\frac{4}{3}\times 30\times 30\times 30}{10\times 10\times 6} = 60$$

$\therefore$ ڪل 60 سلينڊر تيار ٿيندا.

مثال (3) سرڪس جي تنبو جو هيٺيون حصو سلينڊر ۽ مٿيون حصو ڪون (مخروط) شڪل جو آهي تري جو قطر 48 م ۽ سلينڊر حصي جي اوچائي 15 م آهي تنبوءَ جي ڪل اوچائي 33 ميٽر آهي تہ تنبو ٺاهڻ لاءِ گهربل ڪپڙي جي ايراضي ۽ تنبوءَ اَندر هوا جو مقدار لهو.

حل : تنبوءَ جي ڪل اوچائي 33 م



شڪل 7.7

سلينڊر جي اوچائي $H = 15$

$\therefore$ ڪون حصي جي اوچائي $h = (33-15) = 18$

ڪون جي آڏاي اوچائي $(l) = \sqrt{r^2 + h^2}$

$= \sqrt{24^2 + 18^2}$

$= \sqrt{576 + 324}$

$= \sqrt{900}$

$l = 30$ م

ڪون جي حصي وريل مٿاڇري ايراضي+ سلينڊر حصي جي وريل ايراضي = سرڪس جي تنبوءَ ۾لڳندڙ ڪپڙو

$= 2\pi rH + \pi rl$

$= \pi r\,(2H + l)$

$= \frac{22}{7} \times 24\,(2 \times 15 + 30)$

$= \frac{22}{7} \times 24 \times 60$

$= 4525.71$ چورس ميٽر

ڪون حصي جو مقدار+ سلينڊر حصي جو مقدار= تنبوءَ اَندر هوا جو مقدار

$= \pi r^2H + \frac{1}{3}\pi r^2h$

$= \pi r^2 \left(H + \frac{1}{3}h\right)$

$= \frac{22}{7} \times 24^2\,(15 + \frac{1}{3} \times 18)$

$= \frac{22}{7} \times 576 \times 21$

$= 38,016$ م ڪعب

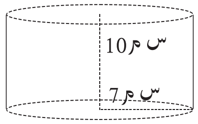
چورس ميٽر 4525.71 = تنبوءَ ۾لڳندڙ ڪپڙو

ڪعب م 38016 = هوا جو مقدار.

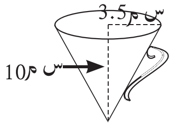
اَڀياس 7.1

1. هڪ ڪون جي تري جو نيم قطر 1.5س م آهي ۽ اُن جي عمودي اوچائي 5 س م تہ اُن ڪون جو مقدار لهو.
2. 6 س م قطر واري گولي جو مقدار لهو.
3. هڪ سلينڊر جو نيم قطر 5 س م ۽ اوچائي 40 س م تہ اُن جي ڪل متاچڙو ايراضي لهو.
4. هڪ گولي جو نيم قطر 7 س م آهي تہ اُن گولي جي وريل متاچڙو ايراضي لهو.
5. هڪ مستطيل بلاڪ شڪل ڏاتوءَ جي ڏيگهہ، ويڪر اوچائي نمبروار 44 س م 21 س م ۽ 12 س م آهي اُن مان 24 س م اوچائيءَ وارو ڪون (مخروط) تيار ڪيو تہ ڪون جو نيم قطر لهو.

6. شڪل 7.8 ۽ 7.9 ۾ برتنن جون ماپون ڏسي ٻڌايو تہ سلينڊر شڪل برتڻ مان ڪيترين جڳون پاڻيءَ جون ڀري سگهندا؟



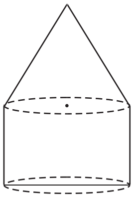
شڪل 7.8 سلينڊر شڪل پاڻيءَ جي جڳہ



شڪل 7.8 ڪون شڪل پاڻيءَ جي جڳہ

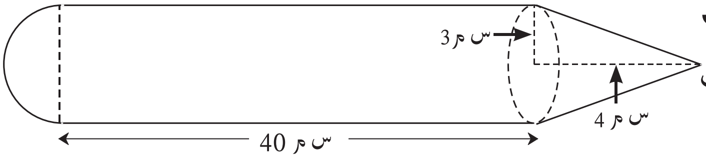
7. سلينڊر ۽ ڪون جا پايا

ساڳيا آهن سلينڊر حصي جي اوچائي 3 س م ۽ 400 ا پايي جي ايراضي 100 چ م آهي سڄي ڪعب شڪل جو مقدار 500 ڪعب س م تہ سڄي شڪل جي اوچائي لهو.



شڪل 7.10

8. ڀر واري شڪل ۾ ڏنل رانديڪي ۾ اڌ گولو، سلينڊر ۽ ڪون پاتا آهن اِن رانديڪي جي ڪُل متاچڙو ايراضي لهو.

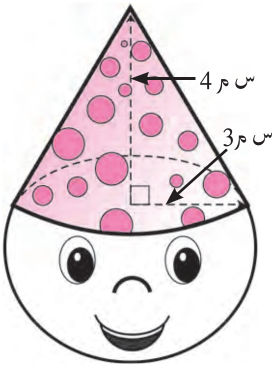


شڪل 7.11

9. شڪل 7.12 ۾ هڪ سلينڊر شڪل 10 س م ڊيگهہ جو ڪئپسول آهي هڪ گوريءَ جو نيم قطر 7mm ۽ اوچائي 5mm آهي تہ اُن ۾ ڪيترين گورين ماپينديون؟

شڪل 7.12

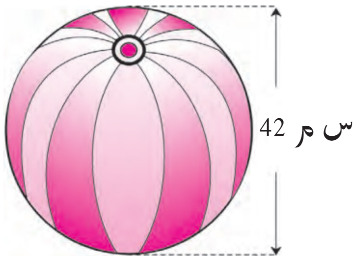
10. شڪل 7.13 ۾ هڪ اَڌ گول ۽ ڪون جي مدد سان ٺهيل رانديڪو آهي ڏنل ماپن موجب رانديڪي جو مقدار ۽ متاچڙو ايراضي لهو.



شڪل 7.13

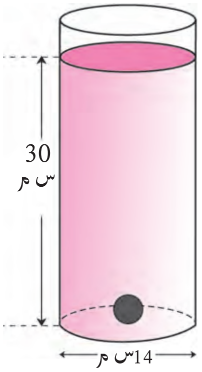
$(\pi = 3.14)$

11 شڪل 7.14 ۾ ڏيکاريل بال جو مٿاڇرو ايراضي ۽ مقدار لهو.



شڪل 7.14

12. شڪل ۾ ڏيکاريل هڪ سلينڊر آڪار واري گلاس ۾ پاڻي آهي اُن ۾ 2س م نيم قطر واري گولو ٻڏل آهي ته پاڻيءَ جو مقدار لهو.

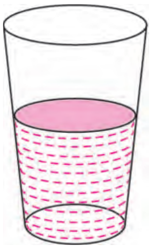


شڪل 7.15

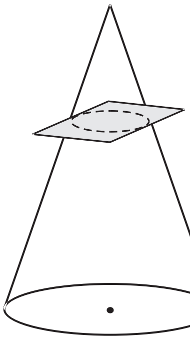
چاڻي وٺون

ڪون - ٽُڪر (frustum of the cone)

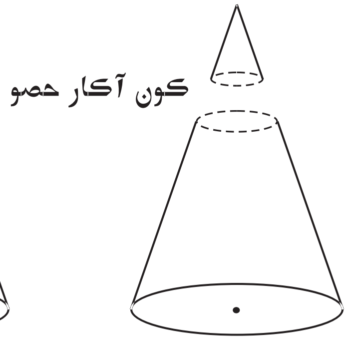
اَسان پاڻي پيئڻ لاءِ گلاس اِستعمال ڪندا آهيون اِن گلاس جو آڪار ڪون - ٽڪر آهي.



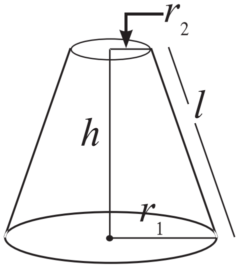
شڪل 7.16



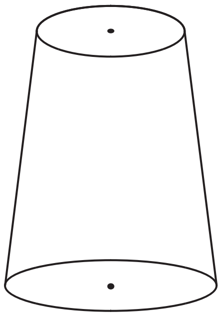
شڪل 7.17



شڪل 7.18



شڪل 7.19



شڪل 7.20

شڪل ۾ هڪ ڪون اُبتو رکيل اهي اِن ڪون جي پايي جي پورروچوٽ ڪپڻ سان اُنجا ٻه حصا تيار ٿيا هڪ حصو ڪون آڪار آهي ٻئي رهيل حصي کي ڪون - ٽڪر چئبو آهي. اِهو لفظ لاطني ٻولي جي (frustum) مان نڪتل آهي .مطلب ”ڪپيل حصو“ ڪون وانگر ئي ڪون - ٽڪر جي مٿاڇرو ايراضي ۽ مقدار ڪيڏي پوندي آهي. اُن لاءِ اڳتي سوترن جو اِستعمال ڪرڻ وارا آهيون.

اِهو ڌيان ۾ رکو

h = ڪون ٽڪر جي اوچائي l = ڪون ٽڪر جي آڏي اوچائي

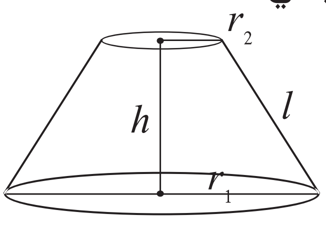
r_1 ۽ r_2 = گولاڪار متاچڙي جا نيم قطر $(r_1 > r_2)$

آڏي اوچائي = $l = \sqrt{h^2 + (r_1 - r_2)^2}$

وريل متاچڙو ايراضي = $\pi l (r_1 + r_2)$

ڪل متاچڙو اوچائي = $\pi l (r_1 + r_2) + \pi r_1^2 + \pi r_2^2$

مقدار = $\frac{1}{3} \pi h (r_1^2 + r_2^2 + r_1 \times r_2)$



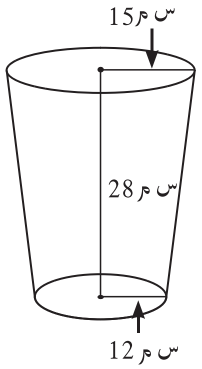
شڪل 7.21

حل ڪيل مثال

مثال (1) 1 هڪ ڪون - ٽڪر جي بالٽيءَ جي اوچائي 28 س م آهي. بالٽيءَ جي ٻنهي گولاڪار پاسن جا نيم قطر 12 س م ۽ 15 س م ته بالٽيءَ ۾ ڪيترا ليٽر پاڻي ماپندو؟ $(\pi = \frac{22}{7})$

حل : $h = 15 \quad r_2 = 12 \quad r_1 = 15$

ڪون ٽڪر جو مقدار بالٽيءَ جي گنجائش



شڪل 7.22

$$= \frac{1}{3} \pi h (r_1^2 + r_2^2 + r_1 \times r_2)$$
$$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 28 (15^2 + 12^2 + 15 \times 12)$$
$$= \frac{22 \times 4}{3} \times (225 + 144 + 180)$$
$$= \frac{22 \times 4}{3} \times 549$$
$$= 88 \times 183$$
$$= 16104 \text{ س م}^3 = 16.104 \text{ ليٽر}$$

بالٽيءَ ۾ 16.104 ليٽر پاڻي ماپندو

مثال (2) ڪون ٽڪر جي گولاڪار حصن جا نيم قطر 14س م ۽ 8 س م آهي جي اُن جي اوچائي 8 س م آهي ته هيٺ ڏنل ملهه لهو $(\pi = 3.14)$

(i)وريل متاچڙو ايراضي (ii) ڪل متاچڙو ايراضي (iii) مقدار

حل : $r_1 = 14, r_2 = 8, h = 8$

$$l = \sqrt{h^2 + (r_1 - r_2)^2}$$
$$l = \sqrt{8^2 + (14 - 8)^2}$$
آڏي اوچائي $l = \sqrt{64 + 36} = 10$ س م

ڪون ٽڪر جي وريل متاچڙو ايراضي $= \pi(r_1 + r_2)\, l$

$= 3.14 \times (14 + 8) \times 10$

ڪون ٽڪر جي $= 690.8$ چورس ميٽر

ڪل متاچڙو ايراضي $= \pi(r_1 + r_2)l + \pi r_1^{\,2} + \pi r_2^{\,2}$

$= 3.14 \times 10\ (14 + 8) + 3.14 \times 14^2 + 3.14 \times 8^2$

$= 690.8 + 615.44 + 200.96$

$= 690.8 + 816.4$

$= 1507.2$ چورس ميٽر

مقدار $= \frac{1}{3}\ \pi h(r_1^{\,2} + r_2^{\,2} + r_1 \times r_2)$

$= \frac{1}{3} \times 3.14 \times 8\ (14^2 + 8^2 + 14 \times 8)$

$= 3114.88$ چورس ميٽر

اَڀياس 7.2

1. 30 س م اوچائي واري ڪون ٽڪر آڪار واري بالٽيءَ جا گولاڪار پاسن جا نيم قطر 14 س م ۽ 7 س م آهن ته اِن بالٽيءَ ۾ ڪيترا ليٽر پاڻي ماپندو؟
(1 ليٽر = 1000 ڪعب س م)
2. ڪون ٽڪر جي گولاڪار حصن جا نيم قطر 14 س م ۽ 6 س م آهن اُن جي اوچائي 6 س م آهي ته هيٺ ڏنل ملهه لهو. $(\pi = 3.14)$

(i) ڪون ٽڪر جي وريل متاچڙو ايراضي (ii) ڪل متاچڙو ايراضي (iii) مقدار

3. شڪل 7.23 ۾ هڪ ڪون ٽڪر جي گولاڪار پاين جا گهيرا 132 س م ۽ 88 س م آهن سندس اوچائي 24 س م آهي ته اُن جثي وريل متاچڙو ايراضي لهڻ لاءِ هيٺ ڏنل مشغولي پوري ڪريو $(\pi = \frac{22}{7})$

گهيرو$_1 = 2\pi r_1 = 132$

$r_1 = \frac{132}{2\pi} = \square$ س م

گهيرو$_2 = 2\pi r_2 = 88$

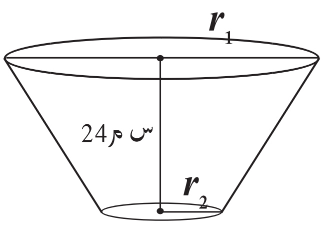
$r_2 = \frac{88}{2\pi} = \square$ س م

وريل متاچڙو ايراضي $= l$

$l = \sqrt{h^2 + (r_1 - r_2)^2}$

$l = \sqrt{\square^2 + \square^2}$

$l = \square$ س م



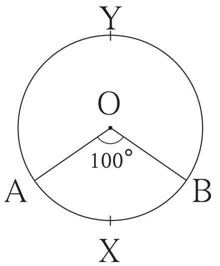
شڪل 7.23

آڏي اوچائي $= \pi(r_1 + r_2)l$

$= \pi \times \square \times \square$

چورس ميٽر $= \square$

ذرا ياد ڪريو



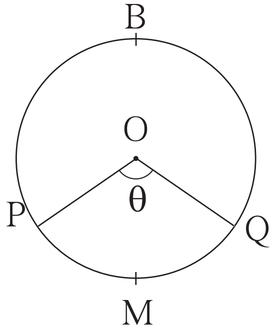
شڪل 7.24

پر واري شڪل موجب خاڪو پورو ڪريو

ڪمان جو قسم	ڪمان جو نالو	ڪمان جي ماپ
ننڍي ڪمان	ڪمان AXB	....
....	ڪمان AYB	....

ڄاڻي وٺو

گول جو قطاع دائرهه (Sector of a circle)



شڪل 7.25

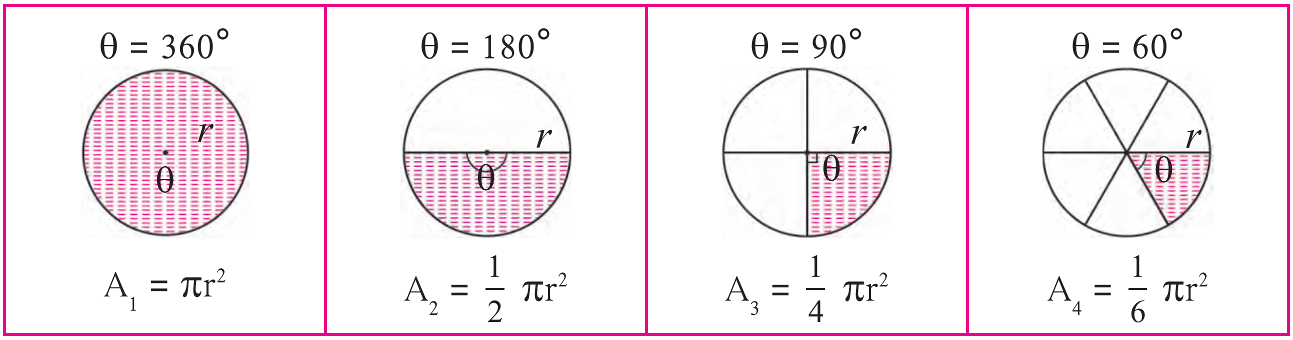
شڪل ۾ مرڪزي ڪنڊ سبب گول جي ايراضيءَ جا ٻه ڀاڱا تيار ٿين ٿا هرهڪ کي گول جو قطاع دائرهه چئبو آهي. گول جي ٻن نيم قطرن ۽ اُنهن جي ڇيڙن ملائيندڙ ڪمان جي محدود ايراضيءَ کي قطاع دائرهه چئبو آهي. شڪل ۾ O-PMQ ۽ O-PBQ اِهي ٻه قطاع دائرا آهن.

ننڍو قطاع دائره : ٻن نيم قطرن ۽ اُنهن جي نسبتي وڏي ڪمان جي محدود ايراضي وڏو قطاع دائرهه آهي شڪل ۾ اِهو O-PMQ آهي.

وڏو قاع دائرهه : ٻن نيم قطرن ۽ اُنهن جي نسبتي وڏي ڪمان جي محدود ايراضي وڏو قطاع دائرهه آهي شڪل ۾ اِهو O-PMQ آهي.

قطاع دائرهه جي ايراضي (Area or a sector)

هيٺ ڏنل شڪلين ۾ برابر نيم قطر وارن گولن ۾ ڏنڊليل حصن کي جاچيو ۽ خاڪو پورو ڪريو.



شڪل 7.26

گول جي مرڪزي ڪند جي ماپ°360پوري ڪند

گول جي مرڪزي ڪند = 360° ، گول جي ايراضي = πr^2			
قطاع دائره	نسبتي ڪمان ماپ	$\frac{\theta}{360}$	قطاع دائره ايراضي A
A_1	360°	$\frac{360}{360}=1$	$1 \times \pi r^2$
A_2	180°	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} \times \pi r^2$
A_3	90°	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4} \times \pi r^2$
A_4	60°	....	....
A	θ	$\frac{\theta}{360}$	$\frac{\theta}{360} \times \pi r^2$

خاڪي مان ظاهر آهي ته گول جي ايراضي کي $\frac{\theta}{360}$ سان ضرب ڪرڻ سان ڪمان جي ماپ θ هوندي، قطاع دائره جي ايراضي ملي ٿي.

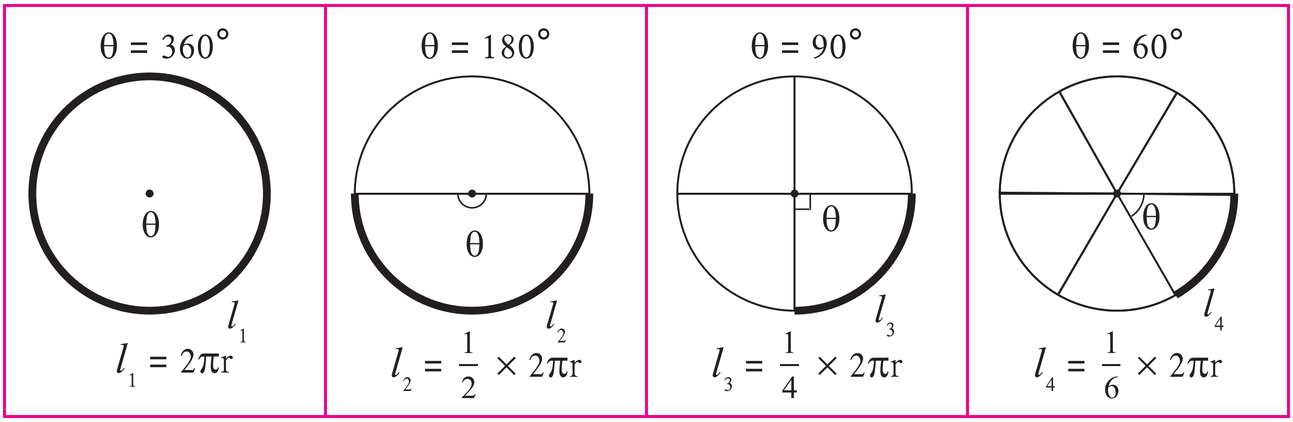
قطاع دائره جي ايراضي $(A) = \frac{\theta}{360} \times \pi r^2$

اِن سوتر موجب

$\frac{A}{\pi r^2} = \frac{\theta}{360}$ ؛ $\frac{\text{قطاع دائره ايراضي}}{\text{گول جي ايراضي ڪ}} = \frac{\theta}{360}$

ڪمان جي ڊيگهه (Length of an arc)

هيٺ ڏيکاريل برابر نيم قطرن وارن گولن جي گهاٽي ڪيل ڪمانن جي ڊيگهه چڪاس ڪريو ۽ هيٺ ڏنل خاڪو پورو ڪريو



شڪل 7.27

ڪمان جي ڊيگهه	ڪمان جي ماپ (θ)	$\frac{\theta}{360}$	ڪمان جي ڊيگهه (l)
l_1	360°	$\frac{360}{360}=1$	$1 \times 2\pi r$
l_2	180°	$\frac{180}{360} = \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} \times 2\pi r$
l_3	90°	$\frac{90}{360} = \frac{1}{4}$	$\frac{1}{4} \times 2\pi r$
l_4	60°	....	....
l	θ	$\frac{\theta}{360}$	$\frac{\theta}{360} \times 2\pi r$

مٿي ڏنل چارٽ مان ڏيان ڀراچي تو گول جي گهيري کي $\frac{\theta}{360}$ سان ضرب ڪرڻ سان، ڪمان جي ماپ θ هوندي آسان کي ڪمان جي ڊيگهه ملي ٿي.

$$\text{ڪمان جي ڊيگهه } (l) = \frac{\theta}{360} \times 2\pi r$$

اِن سوتر موجب

$$\therefore \frac{l}{2\pi r} = \frac{\theta}{360}$$

$$\frac{\text{ڪمان جي ڊيگهه}}{\text{گهيرو}} = \frac{\theta}{360}$$

كمان جي ڊيگهه ۽ قطاع دائره ايراضي وچ ۾ لاڳاپو

$$A = \frac{\theta}{360} \times \pi r^2 \text{ .... I}$$ قطاع دائره ايراضي

$$(l) = \frac{\theta}{360} \times 2\pi r$$ كمان جي ڊيگهه

$$\therefore \frac{\theta}{360} = \frac{l}{2\pi r} \text{ .... II}$$

$$A = \frac{l}{2\pi r} \times \pi r^2 \text{ .... I ۽ II}$$ مان

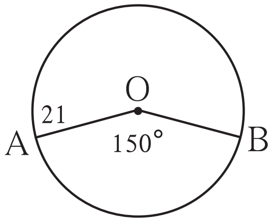
$$A = \frac{1}{2} lr = \frac{lr}{2}$$

∴ قطاع دائره جي ايراضي = $\frac{\text{نيم قطر كمان جي ڊيگهه}}{2}$

ساڳئي نموني $\frac{A}{\pi r^2} = \frac{l}{2\pi r} = \frac{\theta}{360}$

حل كيل مثال

مثال (1) 21 س م نيم قطر واري گول ۾ قطاع دائره جي كنڊ $150°$ آهي اِن جي ايراضي ۽ نسبتي كمان جي ڊيگهه لهو



شكل 7.28

حل : $r = 21, \theta = 150, \pi = \frac{22}{7}$

قطاع دائره جي ايراضي $(A) = \frac{\theta}{360} \times \pi r^2$

$$= \frac{150}{360} \times \frac{22}{7} \times 21 \times 21$$

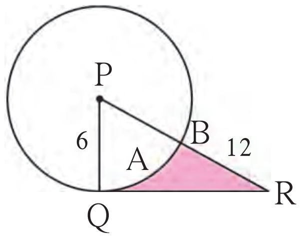
$$= \frac{1155}{2} \text{ س م}^2 \quad = 577.5 \text{ س م}^2$$

كمان جي ڊيگهه = $l = \frac{\theta}{360} \times 2\pi r$

$$= \frac{150}{360} \times 2 \times \frac{22}{7} \times 21$$

$$= 55 \text{ س م}$$

مثال (2) شڪل ۾ گول جو مرڪز P ۽ نيم قطر 6 س م آهي ٽڪر QR اِها گول جي ڇهڻي آهي.
PR=12cm ته ڏنڊيل حصي جي ايراضي لهو ($\sqrt{3} = 1.73$)



شڪل 7.29

حل : ڇهڻي سڏيان موجب

$\therefore \Delta PQR$ ۾ , $\angle PQR = 90°$, $PQ = 6$ س م, $PR = 12$ س م

$\therefore PQ = \frac{PR}{2}$

گوني ڪنڊ ٽڪنڊي ۾ هڪ پاسو هئپاٽيوز جي اَڌ هوندو ته اُنجي سامهون واري ڪنڊ 30° هوندي آهي

$\therefore \angle R = 30°$ $\quad \angle P = 60°$

$30°-60°-90°$ سڏيان موجب , $QR = \frac{\sqrt{3}}{2} \times PR = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 12 = 6\sqrt{3}$

$QR = 6\sqrt{3}$ س م

$\therefore A(\Delta PQR) = \frac{1}{2} QR \times PQ$

$= \frac{1}{2} \times 6\sqrt{3} \times 6$

$= 18\sqrt{3} = 18 \times 1.73$

$= 31.14$ چ س م^2

چ س م ΔPQR ۾ ,

$PQ = \frac{1}{2}(PR)$

$\therefore \angle PRQ = 30°$

$\therefore \angle QPR = 60°$

قطاع دائرھ جي ايراضي $= \frac{\theta}{360} \times \pi r^2$

$\therefore A(P-QAB) = \frac{60}{360} \times 3.14 \times 6^2$

ڏنڊيل حصي جي ايراضي $= \frac{1}{6} \times 3.14 \times 6 \times 6 \quad = 3.14 \times 6$

$= 18.84$ س م ^{2}

$= A(\Delta PQR) - A(P-QAB)$

$= 31.14 - 18.84$

$= 12.30$ س م ^{2}

ڏنڊيل حصي جي ايراضي = 12.30 چ س م

مشغولي : شڪل ۾ ABCD چورس جو هرهڪ پاسو 7 س م آهي مرڪز D ۽ نيم قطر DA ڪٽي نڪتل قطاع دائره D-AXC آهي ڈنڈيل حصي جي ايراضي لهڻ خال ڀري مثال حل ڪريو

چورس جي ايراضي

حل : چورس جي ايراضي = ______ سوتر

= ______

= 49 چورس س م

قطاع دائره ايراضي (D- AXC) = ______ سوتر

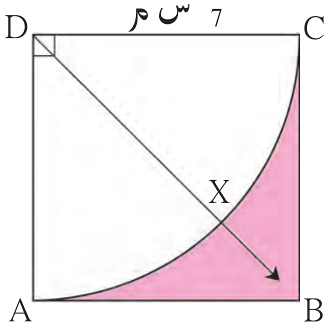
$= \frac{___}{360} \times \frac{22}{7} \times ___$

= 38.5 چورس س م

ڈنڈيل حصي جي ايراضي = ______ - ______

= ______ - ______

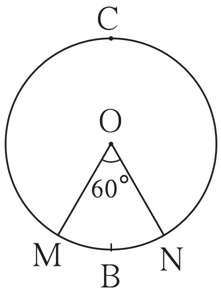
= ______



شڪل 7.30

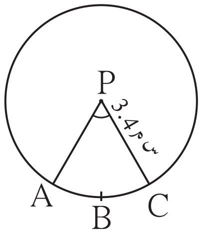
اَڀياس 7.3

1. گول جو نيم قطر 10 س م ۽ ڪمان جي ماپ 54° آهي تہ اُن ڪمان جي محدود ڪيل قطاع دائري جي ايراضي لهو $(\pi = 3.14)$
2. هڪ گول ۾ ڪمان جي ماپ 80 ۽ نيم قطر 18 س م آهي تہ اُن ڪمان جي ڊيگهہ لهو. $(\pi = 3.14)$
3. گول جو نيم قطر 3.5 س م ۽ ڪمان جي ڊيگهہ 2.2 س م تہ اُن قطاع دائره جي ايراضي لهو.
4. گول جو نيم قطر 10 س م آهي اُن جي قطاع دائره جي ايراضي 100 چ س م تہ اُنجي نسبتي وڏي قطاع دائره ايراضي لهو. $(\pi = 3.14)$
5. 15 س م نيم قطر واري گول ۾ هڪ قطاع دائري جي ايراضي 30 چ س م آهي تہ اُن جي نسبتي ڪمان جي ڊيگهہ لهو.
6. ڀرواري شڪل ۾ گول جو نيم قطر 7 س م ۽ $m(\text{arc MBN}) = 60^\circ$ تہ
   (1) گول جي ايراضي لهو
   (2) $A(O - MBN)$ لهو.
   (3) $A(O - MCN)$ لهو.



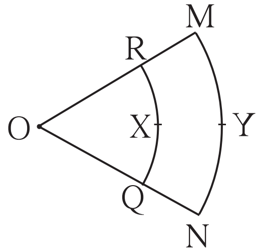
شڪل 7.31

.7 3.4 س م نيم قطر واري گول جي قطاع دائره جو گهيرو 12.8 س م آهي ته اُن قطاع دائره ايراضي لهو.



شڪل 7.32

.8 شڪل 7.33 ۾ O مرڪز آهي $\angle ROQ = \angle MON = 60°$, $OR = 7$ س م، $OM = 21$ س م ڪمان RXQ ۽ ڪمان MYN جي ڊيگهه لهو $(\pi = \frac{22}{7})$

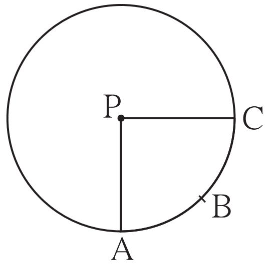


شڪل 7.33

.9 شڪل ۾ $A(P-ABC) = 154$ آهي نيم قطر 14 س م آهي ته

(1) $\angle APC$ جي ماپ لهو

(2) ڪمان ABC جي ڊيگهه لهو



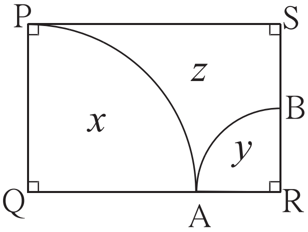
شڪل 7.34

.10 گول جو نيم قطر 7 س م آهي ڪمانن جي ماپون هيٺ ڏنل آهن هرهڪ ۾ قطاع دائره ايراضي لهو

(1) 30° (2) 210° (3) 3 گوني ڪنڊون

.11 ننڍي قطاع دائره جي ايراضي 3.85 چ س م ۽ نسبتي مرڪزي ڪنڊ جي ماپ 36° آهي ته اُن گول جو نيم قطر لهو.

.12 □PQRS هڪ مستطيل آهي PQ 14 س م، QR= 21 س م ته شڪل ۾ x,y,z مان هرهڪ حصي جي ايراضي لهو.



شڪل 7.35

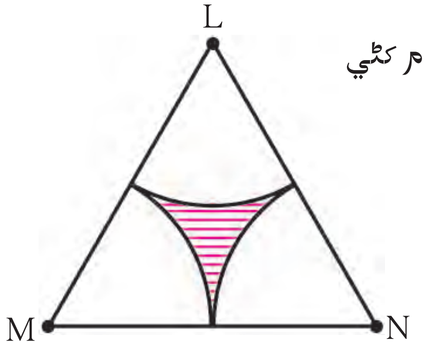
.13 △LMN هڪ ٽپور پاسو ٽڪنڊو آهي LM= 14 س م هرهڪ نوڪي ٽڪو مرڪز ۽ نيم قطر 7 س م ڪٽي ٽي قطاع دائره ڪڍيا ويا آهن ته

(1) $A(\Delta LMN) = ?$

(2) هرهڪ قطاع دائره ايراضي لهو

(3) ٽنهي قطاع دائره جي ايراضي لهو

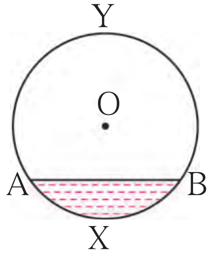
(4) ڏنڏيل حصي جي ايراضي لهو.



شڪل 7.36

ڄاڻي وٺون

گول ٽڪر (segment of a circle)



شڪل 7.37

گول - ٽڪر مطلب لهہ ۽ ڪمان جي محدود ڪيل ايراضي

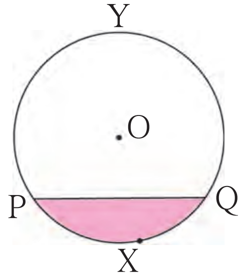
ننڍو - گول ٽڪر : زهہ ۽ ننڍي ڪمان پاران محدود ڪيل ايراضي کي ننڍو گول - ٽڪر چئبو آهي.

شڪل ۾ AXB اِهو ننڍو گول ٽڪر آهي.

وڏو گول ٽڪر : زهہ ۽ وڏي ڪمان پاران محدود ڪيل حصي کي وڏو گول - ٽڪر چئبو آهي شڪل ۾ AYB اِهو وڏو گول ٽڪر آهي.

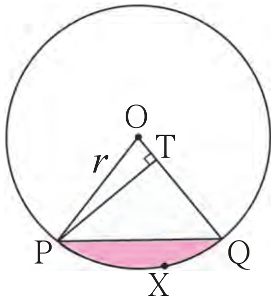
BT گول : قطر پاران تيار ٿيل ٽڪر کي اَڌ گول چئبو آهي.

گول ٽڪر جي ايراضي (Area of a Segment)



شڪل 7.38

شڪل ۾ (O-PXQ) اِهو ننڍو گول - ٽڪر آهي ۽ (O-PYQ) اِهو وڏو گول - ٽڪر آهي.



شڪل 7.39

ننڍي گول - ٽڪر جي ايراضي ڪيئن لهبي؟

گول جو مرڪز O کان OP ۽ OQ بہ نيم قطر ڪيو. توهان کي قطاع دائرهہ جي ايراضي O-PXQ ڪيئن خبر اهي. ساڳئي وقت ΔOPQ جي ايراضي بہ لهي سگهجي ٿي. قطاع دائرهہ جي ايراضي مان ٽڪنڊي جي ايراضي ڪيو ڪرڻ سان گول - ٽڪر جي ايراضي ملندي.

$$(O - PXQ) - \Delta\, OPQ$$

گول - ٽڪر PXQ جي ايراضي $\Delta\, OPQ - \pi r^2 \times \frac{\theta}{360} =$ ---------- (I)

شڪل ۾ ΔOPQ ۾ ٽڪر PT اهو پاسو OQ تي عمود ڪيو.

گوني ڪنڊ ٽڪنڊي Δ OTP ۾ $\sin\theta = \frac{PT}{OP}$

$\therefore PT = OP \times \sin\theta$

$PT = r\sin\theta \qquad (\because OP = r)$

$\Delta OPQ \quad = \frac{1}{2} \times$ پايو × اوچائي

$= \frac{1}{2} \times OQ \times PT$

$= \frac{1}{2} \times r \times r\sin\theta$

$= \frac{1}{2} \times r^2 \sin\theta$ ---------------- (ii)

(I) ۽ (II) مان ,

گول ٽڪر جي ايراضي $PXQ = \frac{\theta}{360} \times \pi r^2 - \frac{1}{2} r^2 \sin\theta$

$$= r^2 \left[\frac{\pi\theta}{360} - \frac{\sin\theta}{2} \right]$$

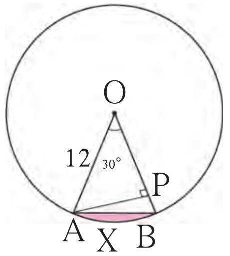
اسان سوڙهي ڪنڊ جو سائين ريشو سکيا آهيون θ اِها 90° يا اُن کان گهٽ ماپ لاءِ اِهو سوتر ڪم آڻبو آهي اِهو ڌيان ۾ رکو)

حل ڪيل حساب

مثال (1) شڪل ۾ $\angle AOB = 30°, OA = 12$ س م

گول - ٽڪر جي ايراضي لهو

$(\pi = 3.14)$



شڪل 7.40

طريقو I :

$r = 12, \theta = 30°, \pi = 3.14$

O−AXB

$= \frac{\theta}{360} \times \pi r^2$

$= \frac{30}{360} \times 3.14 \times 12^2$

$= 3.14 \times 12$

$= 37.68$ چورس س م

$A(\Delta OAB) = \frac{1}{2} r^2 \times \sin\theta$

$= \frac{1}{2} \times 12^2 \times \sin 30$

$= \frac{1}{2} \times 144 \times \frac{1}{2}$

$\ldots\ldots (\because \sin 30 = \frac{1}{2})$

$= 36$ چورس س م

AXB چ س م $(O - AXB) - A(\Delta OAB)$

$= 37.68 - 36$

$= 1.68$ چ س م

طريقو II :

گول ٽڪرAXB جي ايراضي $= r^2\left[\frac{\pi\theta}{360} - \frac{\sin\theta}{2}\right]$

$= 12^2\left[\frac{3.14\times30}{360}-\frac{\sin 30}{2}\right]$

$= 144\left[\frac{3.14}{12}-\frac{1}{2\times2}\right]$

$= \frac{144}{4}\left[\frac{3.14}{3}-1\right]$

$= 36\left[\frac{3.14-3}{3}\right]$

$= \frac{36}{3}\times0.14 = 12 \times 0.14$

$= 1.68$ چ س م

مثال (2) P مرڪز واري گول جو نيم قطر 10 س م آهي ۽ AB طرفان ٺهيل ننڍو گول ٽڪر ۽ وڏو گول ٽڪر جي ايراضي لهو. $(\pi = 3.14)$

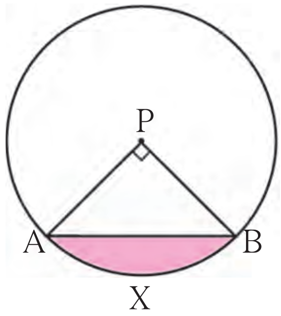
حل : $r = 10, \theta = 90, \pi = 3.14$

قطاع دائري ايراضي $= \frac{\theta}{360} \times \pi r^2$

$= \frac{90}{360} \times 3.14 \times 10^2$

$= \frac{1}{4} \times 314$

$= 78.5$ چ س م



شڪل 7.41

$A(\Delta APB) = \frac{1}{2} \times$ پايو $\times$ اوچائي

$= \frac{1}{2} \times 10 \times 10$

$= 50$ چ س م

گول - ٽڪر جي ايراضي لهو

$= 78.5 - 50$

$= 28.5$ چ س م

ننڍو گول ٽڪر ايراضي ـ گول جي ايراضي = وڏي گول ٽڪر جي ايراضي

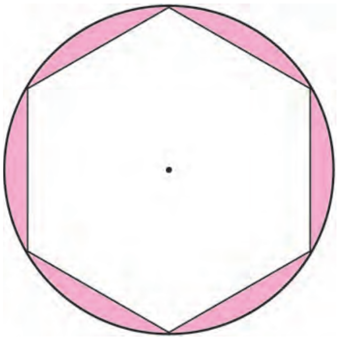
$= 3.14 \times 10^2 - 28.5$

$= 314 - 28.5$

$= 285.5$ چورس س م

مثال (3) 14 س م نيم قطر گول ۾ هڪ پور ڇهڪنڊو اِرديل آهي اِن ڇهه ڪنڊي ڪان ٻاهر ۽ گول جي اَندرين حصي جي ايراضي لهو $(\pi = \frac{22}{7}, \sqrt{3} = 1.732)$

ڇهه ڪنڊي جي گرد گول جو نيم قطر = ڇهه ڪنڊي پاسي ۾ ديگهه



شڪل 7.42

∴ پور ڇهه ڪنڊي جي ايراضي = 14 س م

$= 6 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times$ (پاسو)^2

$= 6 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times 14^2$

$= 509.208$ س م

گول جي ايراضي $= \pi r^2$

$= \frac{22}{7} \times 14 \times 14$

$= 616$ چورس س م

پورچوٽ ڪنڊي جي ايراضي - گول جي ايراضي = پورڇهڪنڊي ايراضي

$616 - 509.208 =$

$106.792 =$ چورس س م

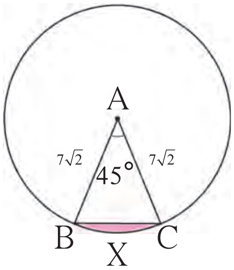
اَڀياس 7.4

.1 شڪل ۾ A مرڪز واري گول ۾

$\angle ABC = 45°, AC = 7\sqrt{2}$

تہ ننڍو - ٽڪر BXC جي ايراضي لهو.

$(\pi = 3.14, \sqrt{2} = 1.41)$



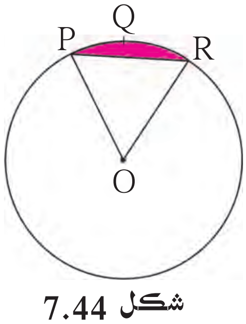
شڪل 7.43

.2 شڪل 7.44 ۾ گول جو مرڪز O آهي

OP=10cm m(arc PQR)=60

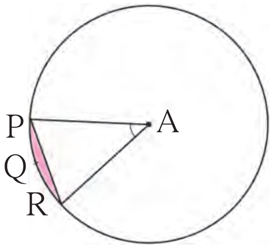
تہ ڇنڍيل حصي جي ايراضي لهو

$(\pi = 3.14, \sqrt{3} = 1.73)$



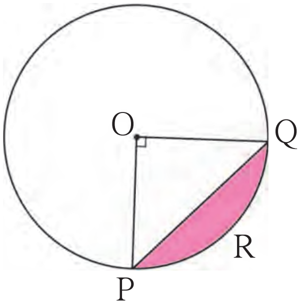
شڪل 7.44

3. مرڪز A واري گول ۾ $\angle PAR = 30^\circ$ ۽ $AP = 7.5$ ته ٽڪر جي ايراضي لهو. $(\pi = 3.14)$



شڪل 7.45

4. O مرڪز واري گول ۾ PQ هڪ زهه آهي. $\angle POQ = 90^\circ$، ڊنڊيل حصي جي ايراضي 114 چ س م آهي گول جو نيم قطر لهو. $(\pi = 3.14)$



شڪل 7.46

5. 1.5 س م نيم قطر واري گول ۾ زهه PQ جي مرڪزي ڪنڊ 60° آهي. اِن زهه طرف سان ٺهيل وڏو گول ٽڪر ۽ ننڍو گول - ٽڪر جي ايراضي لهو. $(\pi = 3.14, \sqrt{3} = 1.73)$

گڏيل اَڀياس 7

1. مناسب متبدل چونڊيو

(1) جيڪڏهن گول جو گهيرو ۽ گول جي ايراضي جو ريشو 2:7 ته گول جو گهيرو ڪيترو؟

(A) 14π (B) $\frac{7}{\pi}$ (C) 7π (D) $\frac{14}{\pi}$

(2) 44 س م ديگهه واري ڪمان جي ماپ 160 ته گول جو گهيرو ڪيترو؟

(A) 66 س م (B) 44 س م (C) 160 س م (D) 99 س م

(3) ڪمان جي ماپ 90 ۽ نيم قطر 7 س م ته قطاع دائرهه جي گرد ماپ لهو.

(A) 44 س م (B) 25 س م (C) 36 س م (D) 56 س م

س م سلينڊر

(4) پايي جو نيم قطر 7 س م ۽ اوچائي ڪون جي وريل متاڇڙو ايراضي ڪيتري

(A) 440 س م^2 (B) 550 س م^2 (C) 330 س م^2 (D) 110 س م^2

(5) 5 س م نيم قطر سلينڊر جي وريل متاڇڙو ايراضي 440 س م^2 اُن سلينڊر جي اوچائي ڪيتري؟

(A) $\frac{44}{\pi}$ (B) 22π (C) 14 (D) $\frac{22}{\pi}$

(6) هڪ ڪون کي ڳاري اُنجي نيم قطر برابر سلينڊر تيار ڪيل آهي جيڪڏهن سلينڊر جي اوچائي 5 س م ته ڪون جي اوچائي ڪيتري؟

(A) 15 س م (B) 10 س م (C) 18 س م (D) 5 س م

(7) 0.01 س م پاسي واري ڪعب جو مقدار ڪيترو؟

(A) 1 (B) 0.001 (C) 0.0001 (D) 0.000001

(8) هڪ ڪعب ميٽر مقدار واري ڪعب جي پاسي جي ڊيگهه ڪيتري؟

(A) 1 س م (B) 10 س م (C) 100 س م (D) 1000 س م

.2 هڪ ڪون - ٽڪر آڪار ڪپڙي ڌوئڻ جي ٽب جي اوچائي 21 س م ٽب جي ٻنهي گولاڪار پاسن جا نيم قطر 20س م ۽ 15 س م آهي ته اُن ٽب ۾ ڪيترا ليٽر پاڻي ماپندو $(\pi = \frac{22}{7})$

★ .3 پلاسٽڪ جا اسم نيم قطر وارا گولا ڀاري هڪ سلينڊر آڪار جو ڊبو تيار ڪيو ڊبي جي ٿولهه 2 س م ۽ اوچائي 90س م ۽ ٻاهريون نيم قطر 30 س م آهي ته اُن ڊبي ڀاڻڻ لاءِ ڪيترا گولا ڀاريا ويا؟

.4 16 س م ڊيگهه، ويڪر 11س م ۽ اوچائي 10 س م واري هڪ مستطيل بلاڪ ڌاتوءَ مان 2 م م ٿولهه ۽ قطر 2 س م وارا سڪا تيار ڪيا ويا. ٻڌايو ته ڪيترا سڪا تيار ٿيندا؟

.5 هڪ رولر جو قطر 120 س م ۽ ڊيگهه 84 س م آهي هڪ ميدان کي سڌو ڪرڻ ۾ رولر 200 چڪر پورا ڪري ٿو. ٻڌايو ته 10 ر في چورس ميٽر حساب سان ميدان سڌو ڪرڻ ۾ ڪيترو خرچ ايندو؟

.6 قطر 12 س م ۽ ٿولهه 0. 01 م وارو هڪ گولو آهي ته اُن گولي جي ٻاهرين مٿاڇري ايراضي لهو. جيڪڏهن ڌاتوءَ جي گهاٽائي 8.88 گرام في ڪعب س م آهي ته گولي جو مادو (وزن) لهو.

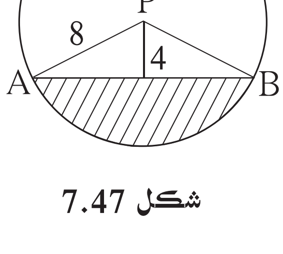
.7 هڪ گوني گولائون سلينڊر آڪار بالٽيءَ جي پايي جو قطر 28 س م ۽ اوچائي 20 س م آهي اِها بالٽي ريتيءَ سان ڀريل آهي اِها ريتي زمين مٿان اَهڙي نموني اوتي ويئي جو ريتيءَ جو ڪون تيار ٿيو. ريتيءَ جي ڪون جي اوچائي 14 س م ته ريتي جي ڪون جي پايي جي ايراضي لهو.

.8 هڪ ڌاتوءَ جو گولو 9 س م نيم قطر وارو آهي ته گولو ڀاري 4 م م قطر ڌاتوءَ جي تار ٺاهي ويئي آهي ته تار جي ڊيگهه ڪيتري؟

.9 6 س م نيم قطر گول ۾ هڪ قطاع دائرهه جي ايراضي 15π آهي ته اُن قطاع دائرهه جي ڪمان جي ماپ ۽ ڪمان جي ڊيگهه لهو.

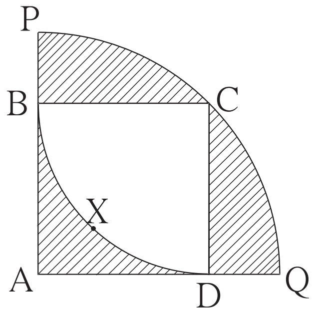
10. شڪل ۾ P گول جو مرڪز آهي ٽڪر AB اِهو زهه آهي 8 س م =PA زهه AB اِهو مرڪز کان 4 س م مفاصلي تي آهي ته ڊنڊليل حصي جي ايراضي لهو.

$(\pi = 3.14, \quad \sqrt{3} = 1.73)$



شڪل 7.47

11. قطاع دائرهہ A-PCQ اَندر □ABCD چورس آهي C-BXD قطاع دائرهہ جو نيم قطر 20 س م آهي تہ ڊنڊيل حصي جي ايراضي لهو. اها ايراضي لهڻ لاءِ مشغولي پوري ڪريو



شڪل 7.48

حل : □ABCD جو پاسو = قطاع دائرهہ جو نيم قطر C − BXD = $\square$

چورس جي ايراضي = پاسو² = $\square^2$ = $\square$ ..... (I)

چورس اندر اِرڊيل حصي جي ايراضي

$= (\square ABCD) = A\ (C\text{-}BXD)$

$= \square - \frac{\theta}{360} \times \pi r^2$

$= \square - \frac{90}{360} \times \frac{3.14}{1} \times \frac{400}{1}$

$= \square - 314$

$= \square$

□ABCD جو اُريب = وڏي قطاع دائرهہ نيم قطر

$= 20\sqrt{2}$

وڏي قطاع دائرهہ ايراضي $= A(A - PCQ) - A(\square\ ABCD)$

$= \left(\frac{\theta}{360} \times \pi \times r^2\right) - \square^2$

$= \frac{90}{360} \times 3.14\ (20\sqrt{2}\,)^2 - (20)^2$

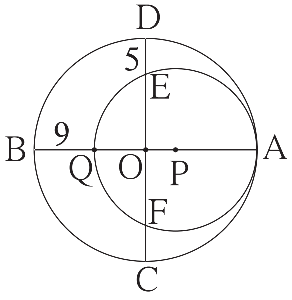
$= \square - \square$

$= \square$

∴ ڪل ڊنڊيل حصي جي ايراضي = 314 چ س م = 228 + 86

12. O ۽ P مرڪزن وارا گول هڪ ٻئي کي A وٽ اَندريان ڇهن ٿا. تہ گولن جا نيم قطر لهڻ لاءِ هيٺ ڏنل مشغولي پوري ڪريو.

$BQ = 9, DE = 5$



شڪل 7.49

حل : سمجهو تہ وڏي گول جو قطر R ۽ ننڍي گول جو قطر r آهي

OA, OB, OC,OD وڏي گول جا نيم قطر r $\therefore\ OA = OB = OC = OD = R$

$PQ = PA = r$

$OQ = OB - BQ = \square$

$OE = OD - DE = \square$ .... $(\because\ OE = OF)$

مرڪز P واري گول ۾ اندروني ورچ سڌيان موجب

$OQ \times OA = OE \times OF$

$\square \times R = \square \times \square$ $(\because\ OE = OF)$

$R^2 - 9R = R^2 - 10R + 25$

$R = \square$

$AQ = 2r = AB - BQ$

$2r = 50 - 9 = 41$

$r = \square = \square$

جواب

باب 1 هڪ جهڙائي

اَڀياس 1.1

1. $\frac{3}{4}$ 2. $\frac{1}{2}$ 3. 3 4. 1:1 5. (1) $\frac{BQ}{BC}$, (2) $\frac{PQ}{AD}$, (3) $\frac{BC}{DC}$, (4) $\frac{DC \times AD}{QC \times PQ}$

اَڀياس 1.2

1. (1) اَڏڪ آهي (2) اَڏڪ نہ آهي (3) اَڏڪ آهي

2. $\frac{PN}{NR} = \frac{PM}{MQ} = \frac{3}{2}$, انڪري NM || پاسو RQ 3. QP = 3.5 5. BQ = 17.5

6. QP = 22.4 7. x = 6 ; AE = 18 8. LT = 4.8 9. x = 10

10. ڏنل, XQ, PD, ڏنل, $\frac{\boxed{XR}}{\boxed{RF}} = \frac{\boxed{XQ}}{\boxed{QE}}$, بنياد تناسبيت سڌيان, $\frac{\boxed{XP}}{\boxed{PD}} = \frac{\boxed{XR}}{\boxed{RF}}$

اَڀياس 1.3

1. Δ ABC ~ Δ EDC ڪنڊ - ڪنڊ آزمائش 2. Δ PQR ~ Δ LMN ; پاسو - پاسو - پاسو آزمائش

3. 12 ميٽر 4. AC = 10.5 6. OD = 4.5

اَڀياس 1.4

1. ايراضين جو ريشو = 9 : 25 2. $\boxed{PQ^2}$, $\frac{\boxed{4}}{\boxed{9}}$ 3. $\boxed{A(\Delta\ PQR)}$, $\frac{16}{25}$, $\frac{4}{5}$

4. MN = 15 5. 20 س م 6. $4\sqrt{2}$

7. $\boxed{PF}$; $\boxed{x}$ + $\boxed{2x}$; $\boxed{\angle FPQ}$; $\boxed{\angle FQP}$; $\frac{DF^2}{PF^2}$; $\boxed{20}$; $\boxed{45}$; $\boxed{45}$ − $\boxed{20}$; $\boxed{\text{25 چورس ايڪا}}$

گڏيل اَڀياس 1

1. (1) (B), (2) (B), (3) (B), (4) (D), (5) (A)

2. $\frac{7}{13}$, $\frac{7}{20}$, $\frac{13}{20}$ 3. 9 س م 4. $\frac{3}{4}$ 5. 11 س م 6. $\frac{25}{81}$ 7. 4

8. PQ = 80, QR = $\frac{280}{3}$, RS = $\frac{320}{3}$ 9. $\frac{\boxed{PM}}{\boxed{MQ}} = \frac{\boxed{PX}}{\boxed{XQ}}$, $\frac{\boxed{PM}}{\boxed{MR}} = \frac{\boxed{PY}}{\boxed{YR}}$,

10. $\frac{AX}{XY} = \frac{3}{2}$ 12. $\frac{\boxed{3}}{\boxed{2}}$, $\frac{\boxed{3}+\boxed{2}}{\boxed{2}}$, $\frac{\boxed{5}}{\boxed{3}}$, $\boxed{\text{ڪنڊ-ڪنڊ}}$, $\frac{\boxed{5}}{\boxed{3}}$, $\boxed{15}$

باب 2 پائٿاگورس جو سڌيان

اَڀياس 2.1

1. پائٿاگورس جا ٽپڙا ; (1), (3), (4), (6) 2. NQ = 6 3. QR = 20.5

4. RP = 12, PS = $6\sqrt{3}$ **5.** ڈنل , 45°, $\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\frac{1}{\sqrt{2}}$, 2

6. پاسو = $5\sqrt{2}$ س م, گرد ماپ = $20\sqrt{2}$ س م **7.** (1) 18 (2) $4\sqrt{13}$ (3) $6\sqrt{13}$ **8.** 37 س م
10. 8.2 م

آپياس 2.2

1. 12 **2.** $2\sqrt{10}$ **4.** 18 س م

گڏيل آپياس 2

1. (1) (B), (2) (B), (3) (A), (4) (C), (5) (D), (6) (C), (7) (B), (8) (A).
2. (1) $a\sqrt{3}$, (2) گوني کنڊ ٽڪنڊو (3) 61 س م، (4) 15 س م، (5) $x\sqrt{2}$, (6) ∠PRQ.
3. RS = 6 س م, ST = $6\sqrt{3}$ س م **4.** 20 س م **5.** پاسو = 2 س م, گرد ماپ = 6 س م
6. 7 **7.** AP = $2\sqrt{7}$ س م **10.** 7.5 ڪ م / ڪلاڪ **12.** 8 س م **14.** 8 س م
15. 192 چورس ايڪا **17.** 58 **18.** 26

باب 3 گول

آپياس 3.1

1. (1) 90°, چھٽي نيم قطر سڌيان (2) 6 س م ; عمودي مفاصلو (3) $6\sqrt{2}$ س م (4) 45°
2. (1) $5\sqrt{3}$ س م (2) 30° (3) 60° **4.** 9 س م

گڏيل آپياس 3.2

1. 1.3 س م **2.** 9.7 س م **4.** (3) 110° **5.** $4\sqrt{6}$ س م

آپياس 3.3

1. m(arc DE) = 90°, m(arc DEF) = 160°

آپياس 3.4

1. (1) 60° (2) 30° (3) 60° (4) 300° **2.** (1) 70° (2) 220° (3) 110° (4) 55°
3. ∠R = 92°; ∠N = 88° **7.** 44° **8.** 121°

آپياس 3.5

1. PS = 18; RS = 10, **2.** (1) 7.5 (2) 12 يا 6
3. (1) 18 (2) 10 (3) 5 **4.** 4

گڏيل آپياس 3

1. (1) D (2) B (3) B (4) C (5) B (6) D (7) A (8) B (9) A (10) C.
2. (1) 9 س م (2) گول جي اندر (3) 12 س م, 2 ٽيڪا
3. (1) 6 (2) ∠K = 30°; ∠M = 60° **5.** 10 **6.** (1) 9 س م (2) 6.5 س م

(3) 90° ; MS : SR = 2 : 1   **9.** $4\sqrt{3}$ س م

13. (1) 180° (2) $\angle AQP \cong \angle ASQ \cong \angle ATQ$

(3) $\angle QTS \cong \angle SQR \cong \angle SAQ$ (4) $65^\circ, 130^\circ$ (5) 100° **14.**(1) 70°

(2) 130° (3) 210° **15.** (1) 56° (2) 6   (3) 16 يا 9   **16.** (1) 15.5°

(2) 3.36   (3) 6   **18.** (1) 68° (2) OR = 16.2, QR = 13   (3) 13   **21.** 13

باب 4 جاميٽريءَ جا جوڙجڪ

گڏيل اَڀياس 4

1. (1) C   (2) A   (3) A

باب 5 مساوي جاميٽري

اَڀياس 5.1

1. (1) $2\sqrt{2}$ (2) $4\sqrt{2}$ (3) $\frac{11}{2}$ (4) 13   (5) 20   (6) $\frac{29}{2}$

2. (1) هم ليڪي آهن (2) هم ليڪي نہ آهن (3) هم ليڪي آهن   (4) هم ليڪي آهن

3. $(-1, 0)$ **7.** 7 يا -5

اَڀياس 5.2

1. (1, 3)   **2.** (1) $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$ (2) $\left(\frac{4}{7}, -\frac{11}{7}\right)$ (3) $\left(0, \frac{13}{3}\right)$ **3.** 2:7   **4.** (−6, 3

5. 2:5, $k = 6$ **6.** (11, 18)   **7.** (1) (1, 3)   (2) (6, −2)   (3) $\left(\frac{19}{3}, \frac{22}{3}\right)$

8. (−1, −7)   **9.** $h = 7, k = 18$ **10.** (0, 2) ; (−2, −3)

11. (−9, −8), (−4, −6), (1, −4)   **12.** (16, 12), (12, 14), (8, 16), (4, 18)

اَڀياس 5.3

1. (1) 1   (2) $\sqrt{3}$ (3) لاھہ اَڻ وصفيل

2. (1) 2   (2) $-\frac{3}{8}$ (3) $\frac{5}{2}$ (4) $\frac{5}{4}$ (5) $\frac{1}{2}$ (6) لاھہ اَڻ وصفيل

3. (1) هم ليڪي آهن (2) هم ليڪي آهن   (3) هم ليڪي نہ آهن   (4) هم ليڪي آهن
(5) هم ليڪي آهن (6) هم ليڪي آهن

4. $-5; \frac{1}{5}; -\frac{2}{3}$ 6. $k = 5$ 7. $k = 0$ 8. $k = 5$

گڏيل اَڀياس 5

1. (1) D   (2) D   (3) C   (4) C

2. (1) هم ليڪي آهن   (2) هم ليڪي آهن   (3) هم ليڪي نہ آهن   **3.** (6, 13)   **4.** 3:1

5. (-7, 0)   6. (1) $a\sqrt{2}$ (2) 13   (3) $5a$ 7. $\left(-\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$

8. (1) ها، آڏپور پاسو ٽڪنڊو (2) نہ   (3) ٽپور پاسو ٽڪنڊو   9. $k = 5$

13. $5,\ 2\sqrt{13},\ \sqrt{37}$ 14. (1, 3)   16. $\left(\frac{25}{6},\frac{13}{6}\right)$, نيم قطر $= \frac{13\sqrt{2}}{6}$ 17. (7, 3)

18. پوروچوٽ پاسو چوڪنڊو 19. A(20, 10), P(16, 12), R(8, 16), B(0, 20).   20. (3, -2)

21. (7, 6) (3, 6)   22. 10 ۽ 0

باب 6 علم مثلث

آيياس 6.1

1. $\cos\theta = \frac{24}{25}$; $\tan\theta = \frac{7}{24}$ 2. $\sec\theta = \frac{5}{4}$; $\cos\theta = \frac{4}{5}$

3. $\text{cosec}\theta = \frac{41}{9}$; $\sin\theta = \frac{9}{41}$ 4. $\sec\theta = \frac{13}{5}$; $\cos\theta = \frac{5}{13}$; $\sin\theta = \frac{12}{13}$

5. $\frac{\sin\theta + \cos\theta}{\sec\theta + \text{cosec}\,\theta} = \frac{1}{2}$

آيياس 6 2

1. چرچ جي اوچائي 80 ميٽر
2. جهاز جو روشن گهر کان مفاصلو 51.60 ميٽر
3. ٻي عمارت جي اوچائي $(10 + 12\sqrt{3})$ ميٽر
4. تار جي ليٽيل ليڪ سان ڪنڊ 30°
5. وڻ جي اوچائي $(40 + 20\sqrt{3})$ ميٽر
6. ڏاڪڻ جي ڊيگهہ 69.20 ميٽر

گڏيل آيياس 6

1. (1) A   (2) B   (3) C   (4) A

2. $\cos 60 = \frac{60}{61}$ 3. $\sin\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$; $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$; $\text{cosec}\theta = \frac{\sqrt{5}}{2}$; $\sec\theta = \sqrt{5}$; $\cot\theta = \frac{1}{2}$

4. $\sin\theta = \frac{5}{13}$; $\cos\theta = \frac{12}{13}$; $\text{cosec}\theta = \frac{13}{5}$; $\tan\theta = \frac{5}{12}$; $\cot\theta = \frac{12}{5}$

6. عمارت جي اوچائي $16\sqrt{3}$ ميٽر

7. جهاز جو روشن گهر کان مفاصلو $\frac{100\sqrt{3}}{3}$ ميٽر

8. عمارت جي اوچائي $(12 + 15\sqrt{3})$ ميٽر

9. ڏاڪڻ جو ٻيو چيڙو وڏ ۾ روڊ زمين 20.80 م کان مٿي ٠

10. جهاز زمين کان 1026م مٿي.

باب 7 علم پئماش

آپياس 7.1

1. 11.79 ڪعب س م 2. 113.04 ڪعب س م 3. 1413 چ· س·م (π = 3.14 کڻو) 4. 616 چ· س·م
5. 21 س م 6. 12 س م 7. 5 س م 8. 273π چ· س·م 9. 20 گولا
10. 94.20 ڪعب س م, 103.62 چ· س·م 11. 5538.96 چ· س·م , 38772.72 ڪعب س م
12. 1468.67π ڪعب س م

آپياس 7.2

1. 10.780 ليٽر 2. (1) 628 چ· س·م (2) 1356.48 چ· س·م (3) 1984.48 ڪعب س م

آپياس 7.3

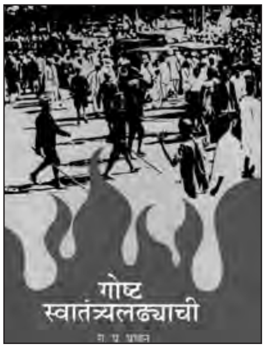
1. 47.1 چ· س·م 2. 25.12 س م 3. 3.85 چ· س·م 4. 214 چ· س·م 5. 4 س م
6. (1) 154 چ· س·م (2) 25.7 چ· س·م (3) 128.3 چ· س·م 7. 10.2 چ· س·م
8. 7.3 س م ; 22 س م 9. (1) 90° (2) 22 س م
10. (1) 12.83 چ· س·م (2) 89.83 چ· س·م (3) 115.5 چ· س·م 11. 3.5 س م
12. x = 154 چ· س·م ; y = 38.5 چ· س·م ; z = 101.5 چ· س·م
13. (1) 84.87 چ· س·م (2) 25.67 چ· س·م (3) 77.01 چ· س·م (4) 7.86 چ· س·م

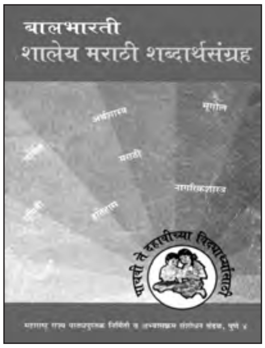
آپياس 7.4

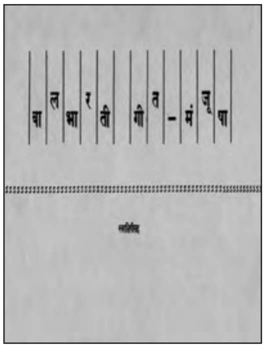
1. 3.72 چ· س·م 2. 9.08 چ· س·م 3. 0.65625 چورس ايڪا 4. 20 س م
5. 20.43 چ· س·م ; 686.07 چ· س·م

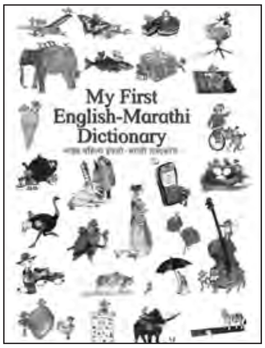
گڏيل آپياس 7

1. (1) A, (2) D, (3) B, (4) B, (5) A, (6) A, (7) D, (8) C.
2. 20.35 ليٽر 3. 7830 گولا 4. 2800 سڪا ($\pi = \frac{22}{7}$ کڻو) 5. 6336 ر
6. 452.16 چ س م ; 3385.94 گرام 7. 2640 چ س م 8. 108 ميٽر
9. 150° ; 5π س م 10. 39.28 چ س م









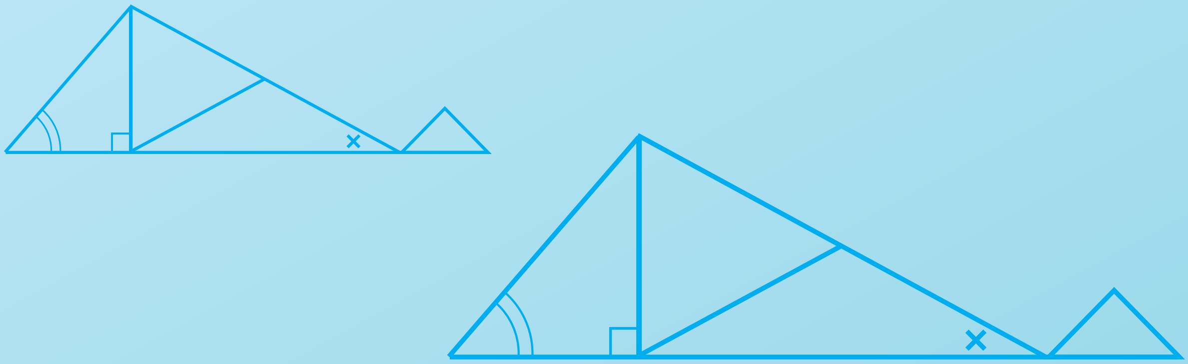
- पाठ्यपुस्तक मंडळाची वैशिष्ट्यपूर्ण पाठ्येत्तर प्रकाशने.
- नामवंत लेखक, कवी, विचारवंत यांच्या साहित्याचा समावेश.
- शालेय स्तरावर पूरक वाचनासाठी उपयुक्त.

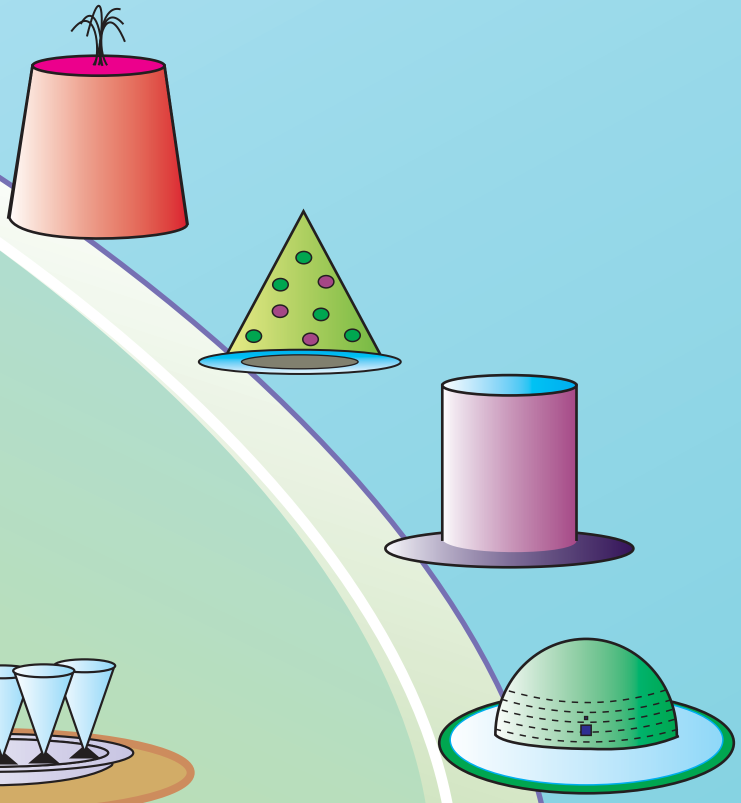
पुस्तक मागणीसाठी www.ebalbharati.in, www.balbharati.in संकेत स्थळावर भेट द्या.

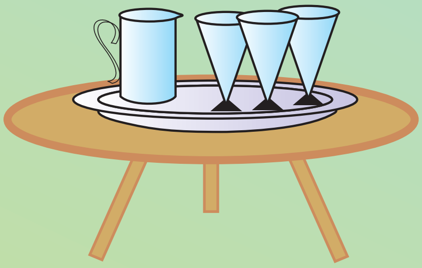
साहित्य पाठ्यपुस्तक मंडळाच्या विभागीय भांडारांमध्ये विक्रीसाठी उपलब्ध आहे.

ebalbharati

विभागीय भांडारे संपर्क क्रमांक : पुणे - ☎ २५६५९४६५, कोल्हापूर- ☎ २४६८५७६, मुंबई (गोरेगाव) - ☎ २८७७१८४२, पनवेल - ☎ २७४६२६४६५, नाशिक - ☎ २३९१५११, औरंगाबाद - ☎ २३३२१७१, नागपूर - ☎ २५४७७१६/२५२३०७८, लातूर - ☎ २२०९३०, अमरावती - ☎ २५३०९६५







مهاراشٽر راجيه پاٺيه پُستڪ نرمتي
وَ اڀياسڪرم سنشوڌن منڊل، پُڻي

सिंधी (अरे.) गणित इ.१० वी भाग-२ ₹ 77.00