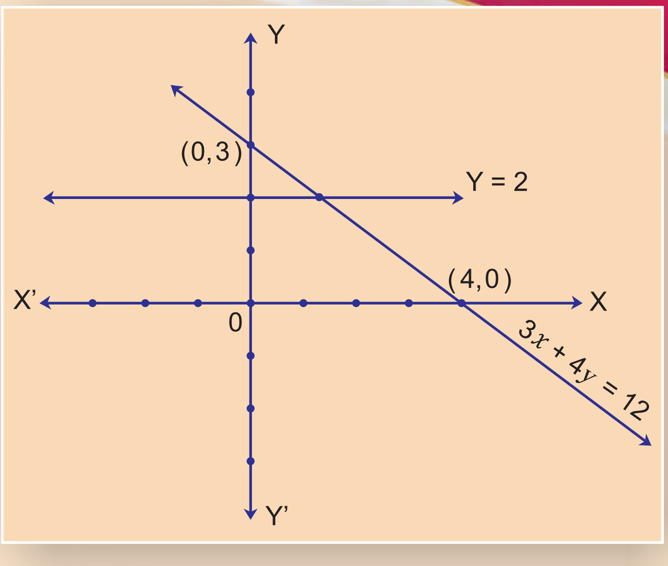
حساب ڀاڱو - I

درجو ڏهون



$$1 + 2 + 3 + \cdots \cdots + 78 + 79 + 80$$
$$= (1 + 80) + (2 + 79) + \cdots + (39 + 42) + (40 + 41)$$

ڀارتيه سنوڌان

باب - چوٿون الف

بنيادي فرض

قلم 51A

بُنيادي فرض : ڀارت جي هرهڪ ناگرڪ جو فرض آهي تہ :

(الف) هوُ ڀارت جي سنوڌان کي مڃيندو، اُن جي قومي جهنڊي، قومي تراني، آدرشن ۽ سنستا جي عزت ڪندو.

(ب) آدرش ويچارن، جن آزاديءَ جي لڙائيءَ لاءِ همٿايو ۽ اُتساهہ ڦوڪيو، اُنهن جي سنڀال ۽ ڀوئواري ڪندو.

(ٻ) ڀارت جي ايڪتا، اکنڊتا ۽ سمپورڻتا جي رکشا ڪندو.

(پ) ديش جي حفاظت ڪندو ۽ وقت پوڻ تي ديش سيوا ۾ ٽپي پوندو.

(ڀ) سيني ماڻهن ۾ هڪ ايڪتا جي ڀاونا پيدا ڪندو، جيڪا ڌرم، ڀاشا، کيتروار جي ڀيدڀاءُ کان پري هوندي. اَهڙيون رسمون جيڪي عورت ذات خلاف هونديون، اُنهن جو بهشڪار ڪندو.

(ت) ڀارت جي جامع سنسڪرتي ۽ شاندار ورثي جي حفاظت ڪندو ۽ مُلهہ سمجهندو.

(ٽ) قدرتي ماحول جهڙوڪ جهنگل، ڍنڍون، نديون، جهنگلي-زندگي اِنهن جو بچاءُ ڪندو ۽ سيني پراڻين لاءِ دردمندي رکندو.

(ٿ) وگيانڪ درشٽي، اِنساني مُلهہ، جاچ جوُچ ۽ سڌاري جي ڀاونا کي اَهميت ڏيندو.

(ث) عام ملڪيت کي سلامت رکندو ۽ هنسا کان پري رهندو.

(ٺ) شخصي ۽ گڏيل مشغولين جي سيني کيترن ۾ اَڳتي وڌڻ جي لڳاتار ڪوشش ڪندو جيئن ملڪ اَڳتي وڌندو رهي ۽ ڪاميابيءَ جي اوچاين کي ڇُهي.

(ڪ) ماءُ يا پيءُ يا پالڪ آهي تہ اُهو ضرور ڏسي تہ پنهنجي ٻار کي تعليم حاصل ڪرڻ جو موقعو ڏيندو. جنهن جي عمر ڇهن ۽ چوڏهن سالن وچ ۾ هجي.

سرڪاري فيصلو نمبر : اَپيپاس ٢١١٦ (پر.ڪر ٤٣/١٦)ايس.ڊي ٤ تاريخ ٢٥-٤-٢٠١٦
موجب اسٽاپٽ ڪيل ڪو آرڊينيٽنگ ڪاميٽيءَ جي تاريخ ٢٩.١٢.١٧ جي ميٽنگ ۾ هن
درسي ڪتاب کي سنه ٢٠١٨-١٩ کان مختصر طور منظوري ڏني ويئي آهي.

حساب

پاڱو - I

درجو ڏهون

مهاراشٽر راجيه پاٺيه پُستڪ نرمتي واڀياسڪرم سنشوڌن منڊل، پڻي

پنهنجي سمارٽ فون ۾ DIKSHA APP ذريعي درسي ڪتاب جي پهرين صفحي واري Q.R. Code ذريعي Digital درسي ڪتاب ۽ هرهڪ سبق ۾ آيل Q.R. Code ذريعي ان سبق بابت پڙهڻ / پڙهائڻ لاءِ ڪارائتيون لنڪس ملنديون.

PD296P

چاپو پهريون : 2018
سڌاريل چاپو : 2022

© مهاراشٽرراجيہ پاٺيہ پُستڪ نرمتي وَ اڀياس ڪرم سنشوڌن منڊل،
پُڻي- ۴۱۱۰۰۴.
مهاراشٽر راجيہ پاٺيہ پُستڪ نرمتي وَ اڀياس ڪرم سنشوڌن منڊل، هن ڪتاب جا سڀ حق واسطا محفوظ ٿو رکي. منڊل جي ڊائريڪٽر جي لکيل اجازت کانسواءِ هن ڪتاب جو ڪوبہ ٽڪر ڇپائي نٿو سگهجي.

حساب وشيہ ماهر ڪاميٽي

ڊاڪٽر منگلا نارڙيڪر (اَڌيڪش)
ڊاڪٽر جئشري اَترِي (ميمبر)
شري رماڪانت سرودي (ميمبر)
شري ونائڪ گوڙ بولي (ميمبر)
شريمتي پراجڪتا گوکلي (ميمبر)
شري سنديپ پنچ ڀائي (ميمبر)
شريمتي پوجا جاڌو (ميمبر)
شريمتي اُجولا گوڙبولي (ميمبر-سيڪريٽري)

حساب وشيہ ڪاريہ گٽ ميمبر

شري اُميش ريڙي
شري سنيل شريواستو
شريمتي جيشري پُرندڙ
شريمتي تروبين پوپٽ
شري اَٽپا پريت
شري انساري عبدل حميد
شري سنديش سوناوڻي
شري وسنت شيواڙي
شري مليشام بيٿي
شري شريپاد ديشپانڊي
شري پرتاپ ڪاشد
شريمتي سواتي ڌرم اَڌڪاري
ڊاڪٽر پارتي شهستربڌي
شري انسار شيخ
شري راما وهنياڙڪر
شري پرمود ڊومبري
شري پرڪاش جهينڊي
شري شريڪانت رتنپارکي
شري اروند ڪمار تواري
شري سريش داتي
شريمتي سوُرنا ديشپانڊي
شري پرڪاش ڪاپسي
شريمتي آريا ڀڙي
شري ملند ڀاڪري
شري گيانيشور ماشاڙڪر
شري لڪشمڻ داوڻڪر
شري سڌيرپاٽيل
شري گڻيش ڪولتي
شريمتي روهڻي شِرڪي
شري بنسي هوالي
شري رويندرکنداري
شري راجيندر چوڌري

مُکيہ سنيوجڪ : شريمتي اُجوالا شريڪانت گوڙبولي
انچارج آفيسرحساب،
پاٺيہ پُستڪ منڊل پُڻي

ٻاهريون صفحو ۽ ڪمپيوٽر آريکن :
شري سنديپ ڪوڙي
ممبئي

سنيوجڪ : شريمتي ڪيتڪي جاني
انچارج آفيسر سنڌي.
سنيوجن : شريمتي گيتا گڻيش ٺاڪر

ڪاپي رائيٽر سنڌي
شري سچيتانند آڦڙي، مکيہ نرمتي اڌڪاري
شري سنجيہ ڪانبلي، نرمتي اڌڪاري
شري پرشانت هرڻي، نرمتي سهايڪ اڌڪاري
ترجمو ڪندڙ : شري اشوڪ ڪملداس مکتا
ڇڪاس ڪندڙ : شري وجيہ راجڪمار منگلاڻي.
ڪاغذ : 70 جي. ايس. ايم ڪريمِوو.
ڇاپيندڙ :
پرنٽنگ آرڊر :

ٽائيپسيٽنگ :
شريمتي شوڀا لالچنداڻي

پرڪاشڪ
وويڪ اُتم گوساوي، ڪنٽرولر
پاٺيہ پُستڪ نرمتي منڊل،
پرڀاديوي، ممبئي - ۲۵.

ڀارت جو سنوڌان

ديباچو

اسين ڀارت جا لوڪ، ڀارت کي هڪُ مڪمل طور خودمُختيار سماجوادي سَرو ڌرم ۽ سم-ڀاوَ وارو لوڪشاهي گڻراجيہ بڻائڻ لاءِ گنڀيرتا سان فيصلو ڪري ۽ انهيءَ جي سڀني ناگرڪن کي :

سماجڪ، آرٿڪ ۽ راڄنيتڪ نياءُ، ويچار، اظهار، وشواس، شرڌا ۽ اُپاسنا جي آزادي؛ درجي ۽ موقعي جي سمانتا؛ خاطريءَ سان حاصل ڪرائڻ ۽ اُنهن سڀني ۾ شخصي سؤمان ۽ راشٽر جي ايڪتا توڙي اکنڊتا جي خاطري ڏيندڙ ڀائيچارو وڌائڻ لاءِ.

اسان جي هن سنوڌان سڀا ۾ اڄ تاريخ چويهين نومبر، ١٩٤٩ جي ڏينهن، هن ذريعي هيءُ سنوڌان سويڪار ڪري، اُن کي قانون جي روپ ۾ پاڻ کي ارپڻ ڪريون ٿا.

راشٽر گيت

جَنَ گَڻَ مَنَ اَڌيناۡيَڪ جَيَہ هي،
ڀارَت ڀاڳِيہ وڌاتا
پَنجابَ، سِنڌ، گُجراتَ، مَراٺا،
دراوڙَ، اُتڪلَ، بَنگَ،
وِنڌيَہ، هِماچَلَ، يَمُنا، گَنگا،
اُڇَلَ، جل ڌِ تَرَنگَ،
تَوَ شُڀَ نامي جاڳي،
تَوَ شُڀَ آشيس ماڳي،
گاهي تَوَ جَيَہ - گاٿا،
جَنَ گَڻَ - مَنگَلَ دايَڪ جَيَہ هي
ڀارت ڀاڳِيَہ وِڌاتا،
جَيَہ هي، جَيَہ هي، جَيَہ هي،
جَيَہ جَيَہ جَيَہ جَيَہ هي،

پرتِگيا

’ڀارت منهنجو ديش آهي. سڀ ڀارتواسي منهنجا ڀائر ۽ ڀينر آهن.

مونکي پنهنجي ديش لاءِ پيار آهي ۽ مونکي ان جي شاندار ۽ طرح طرح جي ورثي تي گَوُرو آهي. مان سدائين ان جي لائق ٿيڻ جو جتن ڪندو رهندس.

مان پنهنجن مٽن مائٽن، اُستادن ۽ سڀني بزرگن جو سنمان ڪندس ۽ هر ڪنهن سان فضيلت ڀريو ورتاءُ ڪندس .

مان پرتگيا ٿو ڪريان تہ مان پنهنجي ديش ۽ ديشواسين سان سچو ٿي رهندس. انهن جي ڪلياڻ ۽ آسودگيءَ ۾ ئي منهنجو سک سمايل آهي.‘

پرستاونا

شاگرد دوستو

ڏهين درجي ۾ توهان جو سواگت حساب ڀاڱو - I ۽ حساب ڀاڱو - II اِهي ڪتاب توهان کي هن سال اَڀياس ڪرڻا آهن.

حساب ڀاڱو - I ۾ آلجبرا، اَرٿ - يوجنا ۽ عدد شاستر اِهي مکيه ڪيتر آهن نائين درجي ۾ اِنهن يونٽن جي سڃاڻپ ڏنل آهي. اِنهن بابت وڌيڪ اَڀياس هن سال ٿيندو. مالي - يوجنا ۾ GST اِهو هڪ نئون باب، اُن بابت سڃاڻپ ڏنل آهي. جتي نوان ڀاڱا، سوتر يا اُپيوجن ڏنل هرهڪ باب ۾ حل ڪيل مثال، اَڀياس لاءِ مثال اِن کان سواءِ هوشيار ٻارن لاءِ خاص للڪاري سوال ڏنل آهن. جيڪي خاص تاري نشانيءَ سان ڏنل آهن. جيڪي شاگرد ڏهين درجي بعد حسابن جو اَڀياس نه ڪرڻ وارا آهن اُنهن لاءِ هن ڪتاب ۾ حسابن جون بنيادي ويچار ڌارائون، ڀين ڪيترن ۾ ڪم ڪرڻ لاءِ حسابن جو اِستعمال وغيره ڏنل آهي. ’’ وڌيڪ ڄاڻ لاءِ اِن سري هيٺ ڏنل مسودو، اُنهن شاگردن لاءِ ڪارگر ٿيندو جيڪي اَڳتي، اوچي تعليم ۾ حسابن جو اَڀياس ڪرڻ وارا آهن. اَهڙن شاگردن کي اِن مسودي جو اَڀياس ڪرڻ گهرجي. اَئپ جي ماڌيم وسيلي ڪيو. آر. ڪوڊ ذريعي هرهڪ سبق جي وڌيڪ ڄاڻ توهانکي ملندي. اُنجو اَڀياس توهانکي اُپيوگ ٿيندو.

ڏهين درجي جو اِمتحان اَهميت وارو سمجهو ويندو آهي. اِن ڳالهه کي تناو سان نه ڪٽي شاگرد چڱيءَ طرح ڪتاب جو اَڀياس ڪري جس حاصل ڪندا.

ان لاءِ شڀ ڪامنائون.

(ڊا. سُنيل مگر)
سنچالڪ
مهاراشٽر راجيه پاٺيه پُستڪ
نرمتي و اڀياسڪرم سنشوڌن منڊل پڻي.

پڻي
١٨ مارچ ٢٠١٨، گُڙي پاڙوا
ڀارتيه سوُريه تاريخ : ٢٧ ڦاڳڻ ١٩٣٩

درجي ڏهين حساب ڀاڱو I- اَڀياس ڪري شاگرد هيٺ ڏنل لياقتون حاصل ڪندا

ڪيتر	يونٽ	لياقت
1. عدد گيان	1.1 اَنگي پروگريشن	• اَنگي پروگريشن اُپيوگ ڪري مثال حل ڪرڻ • مستقبل ۾ ڪنهن خاص مسئلو حل ڪرڻ لاءِ ڏاڪيوار نيوجن ڪرڻ
2. آلجبرا	2.1 ٻسگهي مساوتون 2.2 ٻن ڦيرائتن ۾ ليڪي مساوت	• وهنوار ۾ جيڪو مسئلو ٻه سگهي مساوت وسيلي پيش ڪري حل ڪرڻ • لفظي مثال سمجهي، مساوت ٺاهي حل ڪرڻ (هڪ ڦيرائتو يا ٻه ڦيرائتو) • لفظي مثالن کي ٻن ڦيرائتن ۾ پيش ڪري، حل ڪرڻ
3. وهنواري حساب	3.1 وهنواري، حساب	• بچت، سيڙپ اِنهن مُدن بابت سمجهڻ • واپار وڻج ۾ مالي وهنوار ۾ زباني - سڃاڻپ
4. عدد شاستر اِمڪان	4.1 اِمڪان 4.2 گراف مرڪزي	• راند، ووٽنگ وغيره ۾ اِمڪان جو اُپيوگ • خاص حاصل ٿيل ڄاڻ جي ليکا روپ ۾ گراف - گول گراف وغيره روپ ۾ پيشڪش • گروهيل ڪلاس مان سراسري، اَڌڪ ۽ ڍنگ لهڻ

ماسترن لاءِ سوچنا

ڀرياڻين ڪتاب جو سمورو اَڀياس ڪري سمجهو. جدا جدا رونٽن جي سمجهاڻي ۽ سوترن جي چڪاس ڪري، مشغوليون پوري ڪرڻ ۾ مدد ڪريو.
عملي ڪم وسيلي ملهه ماپڻ ڪرڻو آهي. شاگردن کي خود - اِظهار لاءِ همٿايو. ڪنهن شاگرد ڪو حساب. علحدي نموني حل ڪيو آهي ته اُن شاگرد کي شاباسي ڏيو.

عملي ڪم (لسٽ)

1. گراف پني تي X- محور يا Y - محور جي پوروچوٽ ليڪون ڪڍي، اُن ليڪ تي کھڙا بہ چار ٽُڪرا ڪٽي مساوا لھو. مساون مان ليڪي مساوت ڪيئن تيار ٿئي ٿي، اُھو لکو (پوروچوٽ ليڪن بدران منڊ - ٽُڪي مان بہ ليڪون ڪڍي سگھجن ٿيون.)

2. ڪوبہ بہ - اَنگي عدد من ۾ سوچيو اُن کي حل ڪرڻ لاءِ جدا جدا پروليون تيار ڪريو. عدد جي انگن ۾ جدا جدا لاڳاپا تيار ڪريو ۽ اُن عدد تائين پھچو. (مٿي ڏنل عملي ڪم ۾ ٽ - اَنگي عدد ڪٽي مشغولي ڪريو)

3. کاڌي جي پدارٿن جي پئڪيٽ مٿان لکيل تفصيل درج ڪري، مناسب گراف ڪڍو. مثال بسڪوٽ جي پئڪيٽ مٿان ڪاربوھئڊريٽ، پروٽين، سٽيپ، وٽامن وغيرھ يونٽن جو چجرو ڏسو. اِھو پئڪيٽ ڪيتري وزن جو آھي، اِھو جاچيو، وزنن جو گراف ڪڍو. اَھڙي نموني ڪاربوھئڊريٽ، پروٽين سٽيپ ۽ ٻين يونٽن جا چار حصا ڪري سگھجن ٿا.

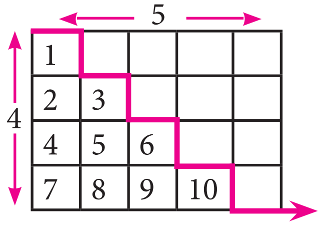
4. ماسترن طرفان ڏنل جھجھائي، ورھاست چجرو، ڪمپيوٽر تي Excel Sheet تيار ڪريو. اِن چجري مان جھجھائي گھٽڪندو ۽ ڪالم گراف Excel ۾ تيار ڪريو.

5. ھڪ ڊارو ڇھ دفعا ڦٽي ڪري، حاصل ٿيل نتيجا نوٽ ڪري چجرو ٺاھيو.

6. ماسترن طرفان سمجھايل جي. ايس. ٽي. وھنوار جو اِنوائز ڏسو. سيني مُدن کي درج ڪريو. اُن تي ٽئڪس ڪيئن ڪيجي اِھو ڪٿڻ ڪانپوءِ خاطري ڪريو.

7. ماسترن طرفان ٻڌايل پھريان 'n' سلسلي ۾ قدرتي عددن جو جوڙ ڪري ڏسو. مثال 1 کان 4 تائين قدرتي عددن جو جوڙ 4x5 ھڪ چوڪندو تيار ڪريو.

شڪل اَنوسار اَھڙو ڪاغذ ڪپيو (ھتي n=4) تہ اِن سوتر ۾ $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$



$$S_n = \frac{n(n+1)}{2} \quad \therefore \; S_4 = \frac{4\ (4+1)}{2} = \frac{4 \times 5}{2} = \frac{20}{2} = 10$$

(ٽپ : ھتي a=1 ، d=1 آھي اَھڙي نموني جدا جدا ملھ ۾ بدلائي، اڪي ۽ ٻڌي عدد ڪٽي مشغولي ڪريو.

8. ھڪ ڪارڊ جي پنيان $\alpha = 6$ ۽ $\alpha = -6$ ٻئي ڪارڊ تي $\beta = -3$ ۽ $\beta = -7$ اِئين لکو جدا جدا ملھ ڪٽي بہ سگھي مساوتون تيار ڪريو.

فهرست

باب	صفحو

1. ٻن ڦيرائٽن ۾ ليڪي مساواتون	1 کان 29
2. پسگهي مساواتون	30 کان 54
3. انگي پروگريشن	55 کان 80
4. مالي رٿا	81 کان 112
5. اِمڪان	113 کان 128
6. عدد شاستر	129 کان 168
• جواب	169 کان 176

1 ٻن ڦيرائن ۾ ليڪي مساوتون

اچو تہ سکون

- ٻن ڦيرائتن ۾ ليڪي مساوتن کي حل ڪرڻ جا طريقا - گرافتي طريقو ڪريمرس طريقو
- ٻن ڦيرائتن وارين ليڪي مساوتن ۾ بدلائڻ جوڳيون مساوتون
- هم وقتي مساوتن جا حل

ذرا ياد ڪريوُن

ٻن ڦيرائتن ۾ ليڪي مساوتون (Linear equation in two variables)

جن مساوتن ۾ ٻہ ڦيرائتا ڪم آندل هجن ۽ ڦيرائتن جي سگهہ 1 آهي اِنهن مساوتن کي ٻن ڦيرائتن واريون ليڪي مساوتون چوندا آهن اَهڙين مساوتن جو اَڀياس اَسان نائين درجي ۾ ڪري چڪا آهيون.

$ax+by+c=0$ اِهو ٻن ڦيرائتن ۾ ليڪي مساوت جو عام روپ آهي. اسانکي ڄاڻ آهي تہ هنن مساوتن ۾ a ۽ b جو ملهہ 0 (ٻڙي) نہ هئڻ گهرجي.

مثال : $3x=4y-12$ هن مساوت جو عام روپ (پرماڻڪ روُپ) $3x-4y+12=0$ آهي.

مشغولي : هيٺ ڏنل فهرست پوري ڪريو

نمبر	مساوت	ٻن ڦيرائتن ۾ ليڪي مساوت آهي يا نہ؟
1	$4m + 3n = 12$	آهي
2	$3x^2 - 7y = 13$	
3	$\sqrt{2}x - \sqrt{5}y = 16$	
4	$0x + 6y - 3 = 0$	
5	$0.3x + 0y - 36 = 0$	
6	$\frac{4}{x} + \frac{5}{y} = 4$	
7	$4xy - 5y - 8 = 0$	

هم وقتي مساوتون (Simultaneous linear equations)

جڏهن ٻن ڦيرائتن وارين ٻن ليکي مساوتن جو هڪ وقت تي عام حل ملي تو تہ اِنهن مساوتن کي هم وقتي مساوتون چئجي ٿو.

نائين درجي ۾ ڦيرائتو رد ڪرڻ وارو طريقو ڪم آڻي مساوتون حل ڪرڻ جو طريقو آسان سکيو آهي. اَچو تہ اُن جو ٿورو اَڀياس ڪريون.

مثال (1) هيٺ ڏنل هم وقتي مساوتون حل ڪريو :

$$5x - 3y = 8;\ 3x + y = 2$$

سمجهاڻي (حل)

طريقو I :

$$5x - 3y = 8 \ldots \quad (\mathrm{I})$$

$$3x + y = 2 \ldots \quad (\mathrm{II})$$

مساوت (II) کي ٻنهي پاسي 3 سان ضرب ڪريو

$$9x + 3y = 6 \ldots \quad (\mathrm{III})$$

$$5x - 3y = 8 \ldots \quad (\mathrm{I})$$

هاڻي مساوت (I) ۽ (III) جوڙ ڪريو

$$\begin{array}{r} 5x - 3y = 8 \\ +\ 9x + 3y = 6 \\ \hline 14x = 14 \end{array}$$

$$\therefore x = 1$$

هاڻي x=1 جو اِهو ملهہ مساوت (II) ۾ رکو

$$3x + y = 2$$

$$\therefore 3 \times 1 + y = 2$$

$$\therefore 3 + y = 2$$

$$y = -1$$

$$\therefore x = 1,\ y = -1$$

$(x, y) = (1, -1)$ اِهو مساوتن جو حل آهي.

طريقو (II)

$$5x - 3y = 8 \ldots \quad (\mathrm{I})$$

$$3x + y = 2 \ldots \quad (\mathrm{II})$$

مساوت (II) ۾ y جو ملهہ x جي نسبت ۾ لکو

$$y = 2 - 3x \ldots \quad (\mathrm{III})$$

هاڻي y جو اِهو ملهہ مساوت (I) ۾ رکو

$$5x - 3y = 8$$

$$\therefore 5x - 3(2 - 3x) = 8$$

$$\therefore 5x - 6 + 9x = 8$$

$$\therefore 14x - 6 = 8$$

$$\therefore 14x = 8 + 6$$

$$\therefore 14x = 14$$

$$\therefore x = 1$$

هاڻي $x=1$ جو اِهو ملهہ مساوت III ۾ رکو

$$y = 2 - 3x$$

$$\therefore y = 2 - 3 \times 1$$

$$\therefore y = 2 - 3$$

$$\therefore y = -1$$

$$\therefore x = 1,\ y = -1$$

(1,-1) اِهو مساوتن جو حل آهي.

مثال (2) حل ڪريو : $3x + 2y = 29;\ 5x - y = 18$

حل : $3x + 2y = 29 \ldots \text{(I)} \qquad 5x - y = 18 \ldots \text{(II)}$

ڏنل مساوتن کي y قيرائتي کي رد ڪرڻ واري طريقي سان حل ڪريو. اِن لاءِ هيٺ ڏنل چوڪنڊن ۾ صحيح اَنگ لکو. مساوت (II) کي 2 سان ضرب ڪرڻ سان

$$\therefore\ 5x \times \square - y \times \square = 18 \times \square$$

$$\therefore\ 10x - 2y = \square \ldots \text{(III)}$$

مساوت (I) ۾ مساوت (III) جوڙ ڪرڻ سان

$$\begin{array}{r} 3x + 2y = 29 \\ + \ \square - \square = \square \\ \hline \square = \square \end{array} \qquad \therefore\ x = \square$$

$x=5$ اِهو ملهه مساوت (I) ۾ رکڻ سان

$$3x + 2y = 29$$

$$\therefore\ 3 \times \square + 2y = 29$$

$$\therefore\ \square + 2y = 29$$

$$\therefore\ 2y = 29 - \square$$

$$\therefore\ 2y = \square \qquad \therefore\ y = \square$$

$(x, y) = (\square, \square)$ اِهو حل آهي

مثال (3) $15x + 17y = 21;\ 17x + 15y = 11$

حل : $15x + 17y = 21 \ldots \text{(I)}$

$$17x + 15y = 11 \ldots \text{(II)}$$

هنن ٻن مساوتن ۾ x ۽ y جا ضربيندڙ اَدل بدل ٿيل آهن. اَهڙين مساوتن کي حل ڪرڻ لاءِ اِنهن کي جوڙ ڪرڻ ۽ ڪٽ ڪرڻ سان ٻه نيون سؤليون مساوتون ملن ٿيون. اِنهن مساوتن کي حل ڪرڻ سان حل سؤلائيءَ سان ملي ٿو.

مساوت I ۽ II جوڙ ڪرڻ سان

$$\begin{array}{r} 15x + 17y = 21 \\ + \quad 17x + 15y = 11 \\ \hline 32x + 32y = 32 \end{array}$$

مساوت جي ٻنهي پاسي 32 سان ونڊ ڪريو

$$x + y = 1 \quad . \; . \; . \quad (III)$$

مساوت (I) مان مساوت (II) ڪٽ ڪريو

$$\begin{array}{r} 15x + 17y = 21 \\ -\;\; \underline{-17x \pm 15y = -11} \\ -2x + 2y = 10 \end{array}$$

مساوت جي ٻنهي پاسي 2 سان ونڊ ڪريو.

$$- \quad x + y = 5 \quad . \; . \; . \quad (IV)$$

مساوت (III) ۽ (IV) کي جوڙ ڪريو

$$\begin{array}{r} x + y = 1 \\ \underline{\pm \;\; x + y = 5} \end{array}$$

$$\therefore \; 2y = 6 \qquad \therefore \; y = 3$$

y=3 اِهو ملهه مساوت (III) ۾ رکو

$$x + y = 1$$

$$\therefore \; x + 3 = 1$$

$$\therefore \; x = 1 - 3 \qquad \therefore \; x = -2$$

(x,y) =(-2,3) اِهو مساوتن جو حل آهي.

اَڀياس 1.1

1. هيٺين مشغولي پوري ڪري هم وقتي مساوتن کي حل ڪريو.

$$5x + 3y = 9 \;\text{-----}\; (I)$$

$$2x - 3y = 12 \;\text{-----}\; (II)$$

مساوت (I) ۽ (II) کي جوڙ ڪريو

$$\begin{array}{r} 5x + 3y = 9 \\ + \;\; \underline{2x - 3y = 12} \\ \square \; x = \square \end{array}$$

$$x = \frac{\square}{\square} \qquad x = \square$$

x=3 ملهه پهرين مساوت ۾ رکو

$$5 \times \square + 3y = 9$$

$$3y = 9 - \square$$

$$3y = \square$$

$$y = \frac{\square}{3}$$

$$y = \square$$

$(x, y) = (\square, \square)$ اهو مساوتن جو حل آهي.

2. هيٺيون هم وقتي مساوتون حل ڪريو :

(1) $3a + 5b = 26;\ a + 5b = 22$ (2) $x + 7y = 10;\ 3x - 2y = 7$

(3) $2x - 3y = 9;\ 2x + y = 13$ (4) $5m - 3n = 19;\ m - 6n = -7$

(5) $5x + 2y = -3;\ x + 5y = 4$ (6) $\frac{1}{3}x + y = \frac{10}{3}$ $2x + \frac{1}{4}y = \frac{11}{4}$

(7) $99x + 101y = 499;\ 101x + 99y = 501$

(8) $49x - 57y = 172;\ 57x - 49y = 252$

ذرا ياد ڪريون

ٻن ڦيرائتن وارين ليڪي مساوتن جو گراف (Graph of a linear equation in two variables)

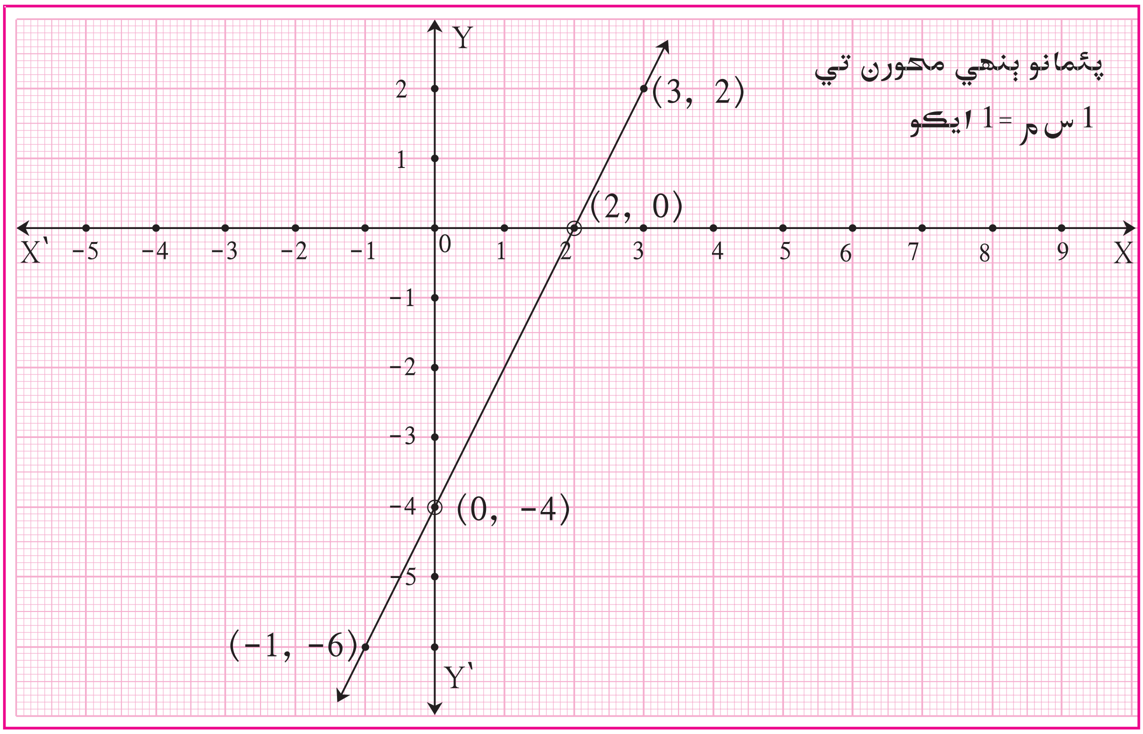
اڳ واري درجي ۾ توهان سکيا آهيو ته ٻن ڦيرائتن ۾ ليڪي مساوت، هڪ ليڪ ڏيکاري ٿي. جيڪو اَنگن جو جوڙو ڏنل مساوتن کي صحيح جو حل آهي. گراف ۾ اِهو اَنگن جو جوڙو هڪ ٽِڪي وسيلي ڏيکاري سگهجي ٿو.

مثال : $2x - y = 4$ هن مساوت جو گراف ڪيو.

حل : $2x - y = 4$ هن مساوت جو گراف ڪيڻ لاءِ (x, y) جا 4 جوڙا حاصل ڪريو.

x	0	2	3	−1
y	−4	0	2	−6
(x, y)	(0, −4)	(2, 0)	(3, 2)	(−1, −6)

اَنگن جا جوڙا ٺاهڻ وقت x ۽ y جا ملهه 0 (ٻڙي) کڻڻ سهوليت پريا ٿيندا آهن.



ٻن ڦيرائتن ۾ليڪي مساوتن جا گراف ڪڍڻ وقت هيٺين ڏاکن تي ڌيان ڏيو.

ڏنل مساوت لاءِ گهٽ ۾ گهٽ 4 اَنگن جا جوڙا ڳولهيو

↓

گراف پني تي x- محور ۽ y- محور ڪڍي ٽٻڪا نشان ڪريو.

↓

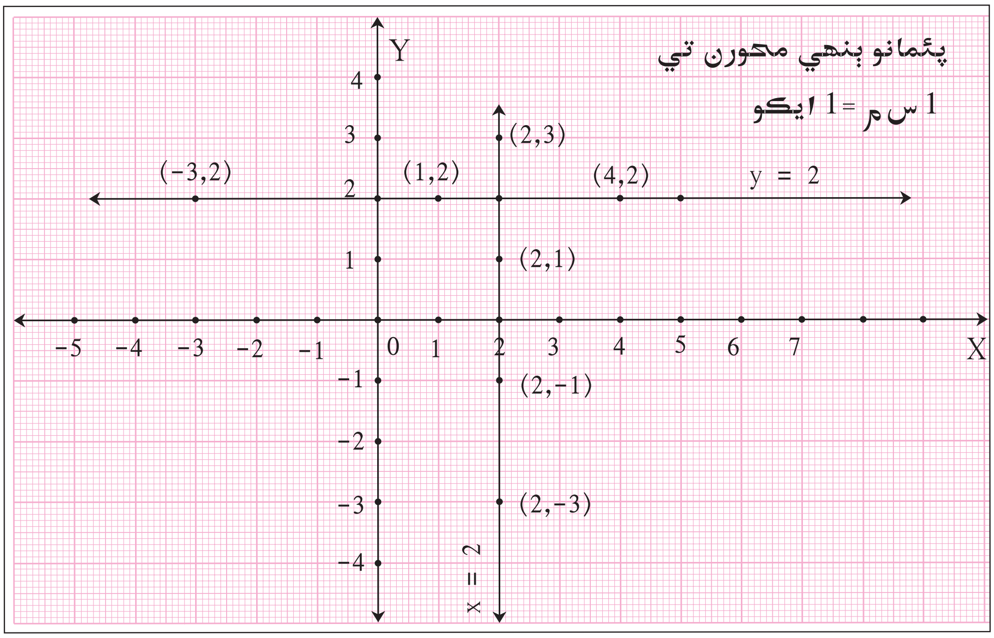
سڀ ٽٻڪا هڪ ليڪ ۾ هئڻ گهرجن. اِنهن سڀني ٽٻڪن مان هڪ ليڪ ڪڍو.

ليڪ ڪڍڻ لاءِ ٻه ٽٻڪا ڪافي آهن پر اُنهن مان هڪ ٽٻڪو غلط نشان ڪرڻ سان، ليڪ ڪڍڻ ۾ ڪي غلط تي ويندي آهي. ٽي ٽٻڪا نشان ڪرڻ سان جيڪڏهن هڪ ٽٻڪو غلط نشان ڪيل آهي ته ٽيئي ٽٻڪا هڪ ليڪ ۾ نه ايندا. اِن مان آسانکي ڄاڻ ملندي ته هڪ ٽٻڪو غلط نشان ٿيل آهي. پر ڪهڙو ٽٻڪو غلط طريقي نشان ڪيل آهي، اِهو ڳولهڻ ۾ وقت لڳي ويندو آهي. چار ٽٻڪا نشان ڪرڻ سان جيڪڏهن هڪ ٽٻڪو غلط نشان ٿيل آهي ۽ باقي ٽي ٽٻڪا هڪ ليڪ ۾ آهن ته غلطي ڪهڙو ٽٻڪو نشان ڪرڻ ۾ ٿي آهي، اِهو ڳولهڻ سؤلو تي پوندو آهي. اِن ڪري چار ٽٻڪا نشان ڪرڻ فائديمند ٿيندو آهي.

$0x+y=2$ اِها مساوت $y=2$ اِن طريقي لکڻ وڌيڪ سهوليت ڀري آهي. هن مساوت جو گراف x- محور سان پورو چوٽ هوندو آهي. ڇاڪاڻ ته x ٻڌائيندڙ اَنگن ڪهڙو به هجي، y ٻڌائيندڙ اَنگ سڀني ٽٻڪن جو ساڳيو ئي هوندو 2.

x	1	4	-3
y	2	2	2
(x, y)	(1, 2)	(4, 2)	(-3, 2)

ساڳي ۽ طرح $x+0y=2$ اِها مساوت $x=2$ اِن طريقي لکڻ وڌيڪ سهوليت ڀري آهي ۽ هن مساوت جو گراف y- محور سان پورو چوٽ هوندو آهي.



چاڪي وٺون

هم وقتي مساوتن حل ڪرڻ جو گرافي طريقو
(Solution of simultaneous equations by Graphical method)

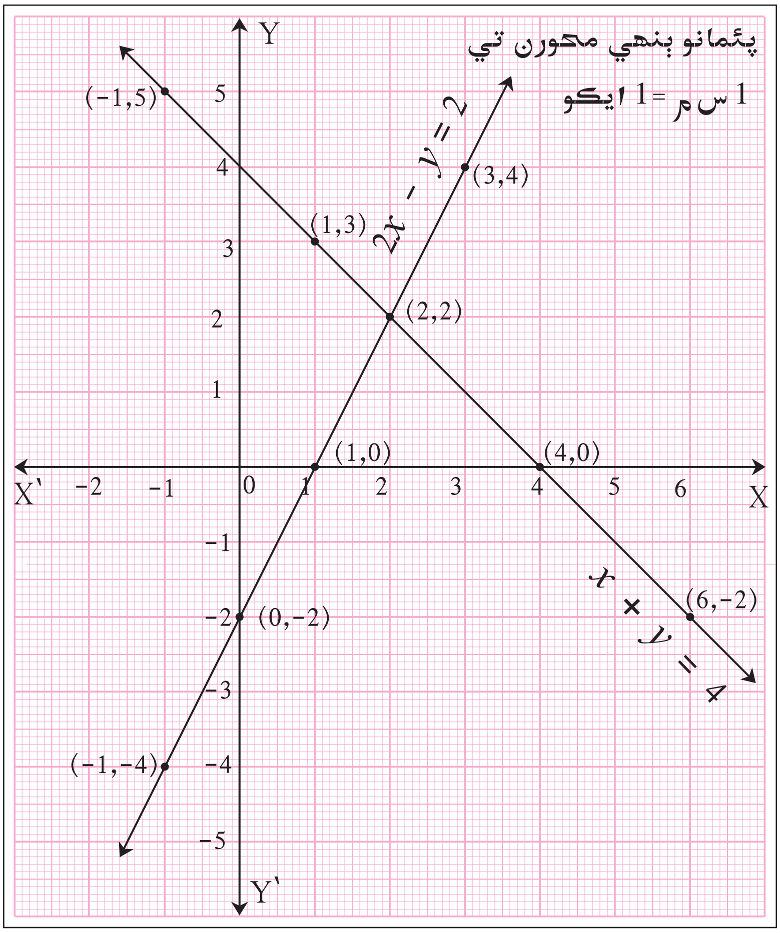
مثال $x + y = 4$ ۽ $2x - y = 2$ مساوتن جا گراف ڪڍي اِنهن جي چڪاس ڪريو.

$x + y = 4$

x	-1	4	1	6
y	5	0	3	-2
(x,y)	$(-1,5)$	$(4,0)$	$(1,3)$	$(6,-2)$

$2x - y = 2$

x	0	1	3	-1
y	-2	0	4	-4
(x,y)	$(0,-2)$	$(1,0)$	$(3,4)$	$(-1,-4)$



گراف ۾ هرهڪ ٽبڪو جنهن مساوت جو گراف آهي اُن کي نهڪائي ٿو. ٻئي ليڪون هڪ ٻئي کي .. هن ٽبڪي وٽ ڪپن ٿيون.

اِنڪري (2,2) اهو اَنگن جو جوڙو يعني ته $x=2$ ۽ $y=2$ اِهي ملهه $x+y=4$ ۽ $2x-y=2$ اِنهن ٻنهي مساوتن کي نهڪائن ٿا.

ڏنل هم وقتي مساوتن کي جيڪو ملهه نهڪائي ٿو اُهو ملهه ٻنهي مساوتن جو حل آهي :

$x = 2$ ۽ $y = 2$ آهي

اهي مساوتون ڦيرائڻ رد ڪرڻ واري طريقي سان حل ڪري اِنهن جي چڪاس ڪريون.

$x + y = 4 \ldots$ (I)

$2x - y = 2 \ldots$ (II)

مساوتون (I) ۽ (II) جو جوڙ ڪريو.

$3x = 6 \therefore x = 2$

$x=2$ اهو ملهه مساوت (I) ۾ رکو

$x + y = 4$

$\therefore 2 + y = 4$

$\therefore y = 2$

مشغولي I : $5x - 3y$ $x - y = 1;$ اهي هم وقتي مساوتون گرافي طريقي حل ڪرڻ لاءِ هيٺيان چڄرا (ٽيليفون) پوريون ڪريو ۽ ٻڌائيندڙ اَنگ پڻ حاصل ڪريو.

$5x - 3y = 1$

x	2			−4
y		8	−2	
(x, y)				

$x - y = 1$

x	0		3	
y		0		−3
(x, y)				

- گراف پني تي ٻڌائيندڙ (مساووي) طريقي سان ٽٻڪا نشان ڪريو.
- مساوتن جا گراف ڪڍو.
- ليڪن جي ڪپيندڙ ٽٻڪي جا مساو جاچيو. اُنهن تان هم وقتي مساوتن جو حل لکو.

مشغولي II : اِهي مساوتون ڦيرائتو رد ڪرڻ واري طريقي سان حل ڪري اِنهن جي چڪاس ڪريو.

ذرا سوچيو

$5x - 3y = 1$ مساوت جو گراف ڪڍڻ لاءِ هيٺين هڪ ٽيبل ۾(چڄري ۾) ٻڌائيندڙ اَنگ (مساو) ڏنل آهن اِنهن کي ڏسو.

x	0	$\frac{1}{5}$	1	−2
y	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{4}{3}$	$-\frac{11}{3}$
(x, y)	$\left(0, -\frac{1}{3}\right)$	$\left(\frac{1}{5}, 0\right)$	$\left(1, \frac{4}{3}\right)$	$\left(-2, -\frac{11}{3}\right)$

- ٽٻڪا نشان ڪرڻ لاءِ اِهي مساو سهوليت پريا آهن چا ؟
- مساوو ڳولهڻ وقت ڪهڙي ڳالهه تي ڌيان ڏيڻ گهرجي جيئن ٽٻڪا نشان ڪرڻ سهوليت پريا ٿي سگهن.

اَڀياس 1.2

1. هيٺيون مساوتون گرافي طريقي حل ڪرڻ لاءِ هيٺيون ٽيبلون پوريون ڪريو

$$x + y = 3 \; ; \; x - y = 4$$

$x + y = 3$

x	3	□	□
y	□	5	3
(x, y)	(3, 0)	□	(0, 3)

$x - y = 4$

x	□	−1	0
y	0	□	−4
(x, y)	□	□	(0, −4)

2. هيٺيون مساوتون گرافي طريقي حل ڪريو

(1) $x + y = 6 \; ; \; x - y = 4$

(2) $x + y = 5 \; ; \; x - y = 3$

(3) $x + y = 0 \; ; \; 2x - y = 9$

(4) $3x - y = 2 \; ; \; 2x - y = 3$

(5) $3x - 4y = -7 \; ; \; 5x - 2y = 0$

(6)★ $2x - 3y = 4 \; ; \; 3y - x = 4$

اچو چرچا ڪريون

$x + 2y = 4$; $3x + 6y = 12$ هم وقتي مساوتون ڏنل آهن، اِنهن کي گرافي طريقي حل ڪرڻ لاءِ مقرر ڪيل اَنگن جا جوڙا هينئين چجرن ۾ ڏنل آهن.

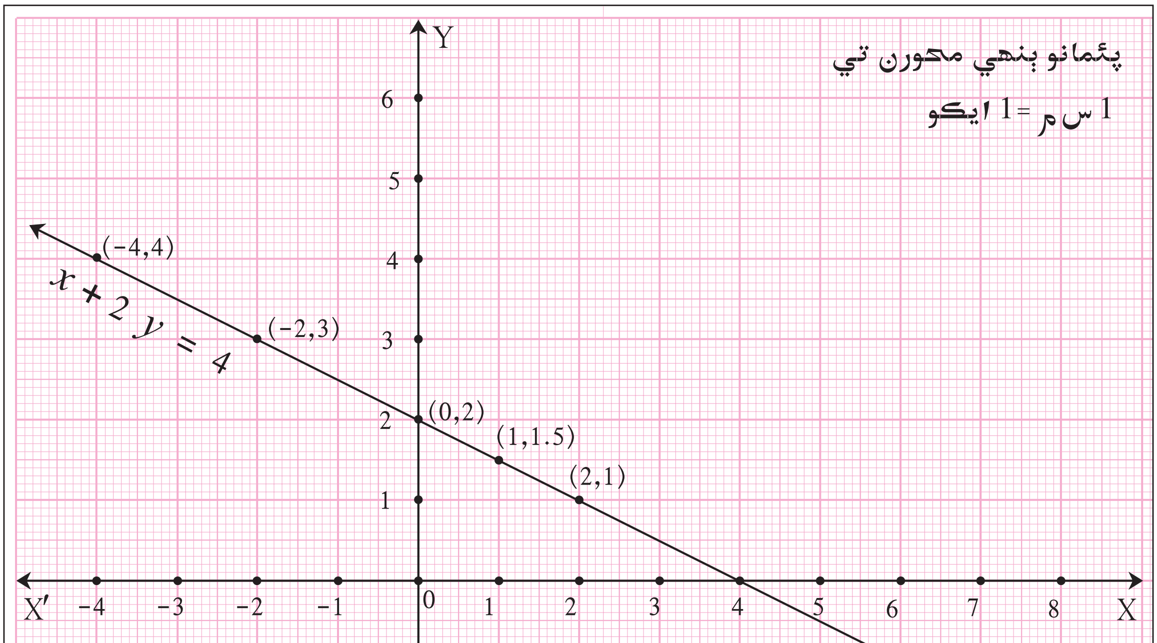
$3x + 6y = 12$

x	-4	1	8
y	4	1.5	-2
(x, y)	$(-4, 4)$	$(1, 1.5)$	$(8, -2)$

$x + 2y = 4$

x	-2	0	2
y	3	2	1
(x, y)	$(-2, 3)$	$(0, 2)$	$(2, 1)$

اِنهن اَنگن جا جوڙا هيٺ ڏنل گراف ۾ نشان ڪيل آهن. اِنهن کي جاچيو ۽ گراف جي هيٺيان ڏنل سوالن جي باري ۾ چرچا ڪريو.



(1) متين ٻنهي مساوتن جو گراف ساڳيو آهي يا اَلڳ الڳ آهي؟

(2) $x+2y=4$ ۽ $3x+6y=12$ اِنهن هم وقتي مساوتن جا حل ڪهڙا آهن؟ اُهي ڪيترا آهن؟

(3) متين ٻنهي مساوتن ۾ x جي ضربيندڙ y جي ضربيندڙ ۽ اِستر پدن ۾ ڪهڙو لاڳاپو نظر اَچي ٿو؟

(4) ٻن قيراتن ۾ ليکي مساوتون ڏنل آهن ته اُنهن مساوتن جي گراف هڪ ليڪ ڪڏهن ٿيندي آهي اِهو آسان ڪيئن ڳولهيندا اسين؟

هاڻي ٻيو مثال ڏسو

$x+2y=4$ ۽ $2x+4y=12$ اِنهن مساوتن جو گراف مٿين طريقي وانگر هڪ ٻئي گراف پني تي ڪڍو گرافن جي جاچ ڪريو $x+2y=4$ ۽ $2x+4y=12$ اِنهن هم وقتي مساوتن جي حل جي باري ۾ ويچار ڪريو. y ۽ x جي ضربيندڙ ۽ اِستر پدن اِنهن جي وچ ۾ لاڳاپي جو ويچار ڪري نتيجو ڪڍو.

ICT Tools or Links

Geogebra software جي مدد سان X-محور، Y- محور ڪڍو. جدا جدا هم وقتي مساوتن جا گراف ڪڍي اُنهن جا حل جاچيو.

ڄاڻي وٺون

مقرر ڪندڙ (Determinant)

$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ اهو چار عددن جو مقرر ڪندڙ آهي. (a, b), (c, d) اِهي آڏيون قطارون آهن،

ساڳي ءَ طرح $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ اِهي اُڀا عالم آهن. اِنهن ٻن پدن وارا مقرر آهن، چاڪاڻ ته هرهڪ آڏي قطار ۾ 2 پد (عدد) آهن. اِهو مقرر هڪ عدد ليکيو ويندو آهي. اِهو عدد ad-bc آهي.

يعني ته $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad-bc$

$ad-bc$ اِهو $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ مقرر جو ملهه آهي.

مقرر کي نالو ڏيڻ لاءِ عام طور A,B,C,D... آهڙا انگريزي اَلفابيٽس ڪم آندا ويندا آهن.

حل ڪيل مثال

مثال : هيٺين مقررن جا ملهه لهو

$(1)\ A = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix}$ $(2)\ N = \begin{vmatrix} -8 & -3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$ $(3)\ B = \begin{vmatrix} 2\sqrt{3} & 9 \\ 2 & 3\sqrt{3} \end{vmatrix}$

حل :

$$(1)\,A = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = (5 \times 9) - (3 \times 7) = 45 - 21 = 24$$

$$(2)\,N = \begin{vmatrix} -8 & -3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = [(-8) \times (4)] - [(-3\ ) \times 2] = -32 - (-6)$$

$$= -32 + 6 = -26$$

$$(3)\,B = \begin{vmatrix} 2\sqrt{3} & 9 \\ 2 & 3\sqrt{3} \end{vmatrix} = [2\sqrt{3} \times 3\sqrt{3}] - [2 \times 9] = 18 - 18 = 0$$

چاڪي ونون

مقرر وارو طريقو (ڪرئمر جو قاعدو) Determinant method (Crammer`s Method)

ڏنل هم وقتي مساواتون سؤلي طريقي سان ۽ گهٽ ۾ گهٽ جڳهه ڪم آڻي مقرر طريقي سان حل ڪري سگهجن ٿيون. اِن ڪي هم وقتي مساواتن ڪي حل ڪرڻ جو مقرر طريقو چئجي ٿو. اِهو طريقو سِوس (Swiss) ۾ رهندڙ آلجبرا جي ڄاڻ ٻڌو گيبريل ڪرئمر ڳولهي ڪڍيو. اِنڪري هن طريقي کي ڪرئمر جو طريقو چئجي ٿو.

اِها ٻن ڦيرائتن واري ليکي مساوت سهوليت جي خيال کان $a_1x + b_1y = c_1$

آهڙي طريقي لکجي ٿي. $a_2x + b_2y = c_2$

سمجهو تہ، $a_1x + b_1y = c_1 \quad . . . \quad (I)$

۽ $a_2x + b_2y = c_2 \quad . . . \quad (II)$

اهي $a_1,\ b_1,\ c_1$ ۽ $a_2,\ b_2,\ c_2$ ڦيرائتن وارا هم وقتي مساواتون آهن.

اَسان اهي هم وقتي مساواتون حل ڪنداسين.

مساوت (I) کي b_2 سان ضرب ڪريو

$$a_1 b_2 x + b_1 b_2 y = c_1 b_2 \quad . . . \quad (III)$$

مساوت (II) کي b_1 سان ضرب ڪريو

$$a_2 b_1 x + b_2 b_1 y = c_2 b_1 \quad . . . \quad (IV)$$

مساوت (III) مساوت (IV) ڪٽ ڪريو :

$$\begin{array}{r} a_1 b_2 x + b_1 b_2 y = c_1 b_2 \\ -\ a_2 b_1 x \pm b_2 b_1 y = -c_2 b_1 \\ \hline (a_1 b_2 - a_2 b_1)\ x = c_1 b_2 - c_2 b_1 \end{array}$$

$$x = \frac{c_1 b_2 - c_2 b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} \quad . . . \quad (V)$$

ساڳيءَ طرح ،

$$y = \frac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} \quad . . . \quad (VI)$$

متين حل ۾ $c_1 b_2 - c_2 b_1,\ a_1 b_2 - a_2 b_1,\ a_1 c_2 - a_2 c_1$ اهي ملهه ياد رکڻ لاءِ ٿوري جڳهه ۾ لکڻ لاءِ مقرر طريقي ۾ لکو.

هينين مساوتن جا ضربيندڙ (ڳڻڪ) ءِ اِستر پد ڏسو

$$a_1 x + b_1 y = c_1$$
$$a_2 x + b_2 y = c_2$$ ءِ

هاڻي $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ اِهي ٽي ڪالم ملندا.

مساوت (V) ءِ مساوت(VI) ۾ x ءِ y جا ملهه مقرر طريقي جي مدد سان لکو.

$$x = \frac{c_1 b_2 - c_2 b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

ءِ $$y = \frac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, \qquad (a_1 b_2 - a_2 b_1) \neq 0$$

اِهي ياد رکڻ لاءِ $\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = D_y,\ \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = D_x,\ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = D$

سان ڏيکاريو $x = \frac{D_x}{D}$ ءِ $y = \frac{D_y}{D}$ يعني تہ ٿوري ۾

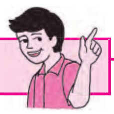
D, D_x, D_y اهي مقرر لکڻ لاءِ $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$

اِنهن ڪالمن کي سلسليوار لکڻ جو طريقو ڏيان ۾رکو.

$$a_1x + b_1y = c_1$$
$$a_2x + b_2y = c_2$$

اِنهن مساوتن مان $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ اِهي ٽي ڪالم ملندا آهن.

- D ۾ $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ اِهو ڪالم ڇڏيو ويو آهي
- D_x لاءِ D ۾ $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ x جي ضربيندڙن جو ڪالم ڇڏي اُن جي بدران اِستر پدن جو ڪالم ڪنيو ويو آهي.
- D_y لاءِ D ۾ $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ y جي ضربيندڙن جو ڪالم ڇڏي اُن جي بدران اِستر پدن جو ڪالم ڪنيو ويو آهي.



ياد رکو

ڪرئمر جو طريقو ڪم آڻي هم وقتي مساوتن کي حل ڪرڻ جو طريقو

ڏنل مساوت $ax + by = c$ جي روپ ۾ لکو

↓

D، D_x ۽ D_y انهن مقررن جا ملهه لهو.

↓

$x = \frac{D_x}{D}$ ۽ $y = \frac{D_y}{D}$

جي مطابق x ۽ y جا ملهه لهو.

گيبريل ڪرئمر (Gabriel Cramer)

(31 جولاءِ 1704 - 4 جنوري 1752)

هن سِوز آلجبرا جي ڇاڱن جو جنم جنيوا ۾ ٿيو. حسابن جي وشيه ۾ هو ننڍپڻ کان هوشيار هو ارڙهن سالن عمر ۾ هن کي ڊاڪٽريٽ جي پدوي ملي. هو جنيوا ۾ پروفيسر هو.

حل ڪيل مثال

مثال : ڪرئمر جي طريقي سان هيٺيون هم وقتي مساوتون حل ڪريو :

$$5x + 3y = -11 \;;\; 2x + 4y = -10$$

حل : ڏنل مساوتون

$$5x + 3y = -11$$
$$2x + 4y = -10$$

$$D = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = (5 \times 4) - (2 \times 3) = 20 - 6 = 14$$

$$D_x = \begin{vmatrix} -11 & 3 \\ -10 & 4 \end{vmatrix} = (-11) \times 4 - (-10) \times 3 = -44 - (-30)$$
$$= -44 + 30 = -14$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 5 & -11 \\ 2 & -10 \end{vmatrix} = 5 \times (-10) - 2 \times (-11) = -50 - (-22)$$
$$= -50 + 22 = -28$$

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-14}{14} = -1 \qquad\qquad y = \frac{D_y}{D} = \frac{-28}{14} = -2$$

$\therefore \; (x, y) = (-1, -2)$ اهو ڏنل هم وقتي مساوتن جو حل آهي.

مشغولي 1 : ڏنل هم وقتي مساوتن کي مقرر طريقي سان حل ڪرڻ لاءِ هيٺ ڏنل چوڪنڊا پورا ڪريو

$$y + 2x - 19 = 0 \;;\; 2x - 3y + 3 = 0$$

حل : ڏنل مساوتون $ax + by = c$ هن طريقي سان لکون

$$2x + y = 19$$
$$2x - 3y = -3$$

$$D = \begin{vmatrix} \square & \square \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = \square \times (-3) - 2 \times (\square) = \square - (\square)$$
$$= \square - \square = \square$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 19 & \square \\ \square & -3 \end{vmatrix} = 19 \times (\square) - (\square) \times (\square) = \square - \square$$
$$= \square$$

$$D_y = \begin{vmatrix} \square & 19 \\ 2 & \square \end{vmatrix} = [(\square) \times (\square)] - [(\square) \times (\square)]$$

$$= \square - \square = \square$$

$$x = \frac{D_x}{D}$$

$$\therefore\ x = \frac{\square}{\square} = \square$$

$$y = \frac{D_y}{D}$$

$$y = \frac{\square}{\square} = \square$$

$\therefore (x, y) = (\square, \square)$ اِهو ڏنل هم وقتي مساوتن جو حل آهي.

مشغولي 2 : هيٺين مشغولي پوري ڪريو :-

$3x-2y=3$ ، $2x+y=16$

متين مساوتن جو مقررن جو ملهه

$D = \begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix} = \square$ ، $D_x = \begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix} = \square$ ، $D_y = \begin{vmatrix} & \\ & \end{vmatrix} = \square$

ڪرئمر جي طريقي سان حل اَچي ٿو.

$$x = \frac{\square}{\square} = \square \qquad y = \frac{\square}{\square} = \square$$

$\therefore (x, y) = (\square, \square)$ حل آهي.

ذرا سوچيو

- جيڪڏهن $D = 0$ آهي ته حل ڪهڙو ٿيندو؟
- گڏيل حل ممڪن نه هجي ته اُن مساوت جي ليڪ ڪهڙي روپ ۾ هوندي؟

آڀياس 1.3

.1
$$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 3 \times \square - \square \times 4$$
$$= \square - 8$$
$$= \square$$

.2 هيٺين مقررن جا ملهه لهو

(1) $\begin{vmatrix} -1 & 7 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$ (2) $\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -7 & 0 \end{vmatrix}$ (3) $\begin{vmatrix} \frac{7}{3} & \frac{5}{3} \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix}$

.3 هيٺيون هم وقتي مساوتون ڪرئمر جي طريقي سان حل ڪريو:

(1) $3x - 4y = 10 \;;\; 4x + 3y = 5$ (2) $4x + 3y - 4 = 0 \;;\; 6x = 8 - 5y$

(3) $x + 2y = -1 \;;\; 2x - 3y = 12$ (4) $6x - 4y = -12 \;;\; 8x - 3y = -2$

(5) $4m + 6n = 54 \;;\; 3m + 2n = 28$ (6) $2x + 3y = 2 \;;\; x - \frac{y}{2} = \frac{1}{2}$

ٻن ڦيرائتن وارين ليڪي مساوتن ۾ بدلائڻ جوڳيون مساوتون
(Equations reducible to a pair of linear equations in two variables)

مشغولي : هيٺيون چجرو پورو ڪريو :

مساوتون	ڦيرائتن جو انداز	ليڪي آهي يا نه
$\frac{3}{x} - \frac{4}{y} = 8$	2	نه
$\frac{6}{x-1} + \frac{3}{y-2} = 0$	$\square$	$\square$
$\frac{7}{2x+1} + \frac{13}{y+2} = 0$	$\square$	$\square$
$\frac{14}{x+y} + \frac{3}{x-y} = 5$	$\square$	$\square$

ذرا سوچيو

متين چجري ۾ ٻن ڦيرائتن واريون ڪيتريون ئي مساوتون ڏنيون ويون آهن. اُهي ليڪي نہ آهن پر اُنهن کي ليڪي مساوتن ۾ بدلائي سگهجي ٿو ڇا؟

ياد رکو

ڏنل ڦيرائتن ۾ ٺهڪندڙ ملهہ رکي اَهڙين مساوتن کي ليڪي مساوتن ۾ بدلائي سگهجي ٿو. اِهي ملهہ واپرائي مساوت کي ليڪي مساوت ۾ لکو. ڪھڙو بہ $\frac{m}{n}$ اڻپور جو ڇيد 0 ٿي سگهي ٿو. اِهو نہ وساريو.

حل ڪيل مثال

مثال (1) حل ڪريو : $\frac{4}{x} + \frac{5}{y} = 7; \frac{3}{x} + \frac{4}{y} = 5$

حل : $\frac{4}{x} + \frac{5}{y} = 7; \frac{3}{x} + \frac{4}{y} = 5$

$$4\left(\frac{1}{x}\right) + 5\left(\frac{1}{y}\right) = 7 \quad . . . \quad (I)$$

$$3\left(\frac{1}{x}\right) + 4\left(\frac{1}{y}\right) = 5 \quad . . . \quad (II)$$

مساوت (I) ۽ (II) ۾ $\left(\frac{1}{x}\right) = m$ ۽ $\left(\frac{1}{y}\right) = n$ ملهہ رکڻ سان هيٺيون مساوتون ملنديون

$$4m + 5n = 7 \quad . . . \quad (III)$$

$$3m + 4n = 5 \quad . . . \quad (IV)$$

اِهي مساوتون حل ڪرڻ سان

$m = 3, n = -1$ اهي حل ملن ٿا.

هاڻي ، $m = \frac{1}{x}$ $\quad \therefore x = \frac{1}{3} \quad \therefore 3 = \frac{1}{x}$

ساڳيءَ طرح ، $n = \frac{1}{y}$ $\quad \therefore y = -1 \quad \therefore -1 = \frac{1}{y}$

$\therefore (x, y) = (\frac{1}{3}, -1)$ اِهي ڏنل مساوتن جا حل آهن.

مثال (2) حل ڪريو : $\frac{4}{x-y} + \frac{1}{x+y} = 3 \ ; \ \frac{2}{x-y} - \frac{3}{x+y} = 5$

حل : $\frac{4}{x-y} + \frac{1}{x+y} = 3 \ ; \ \frac{2}{x-y} - \frac{3}{x+y} = 5$

$$4\left(\frac{1}{x-y}\right) + 1\left(\frac{1}{x+y}\right) = 3 \ . \ . \ . \quad (I)$$

$$2\left(\frac{1}{x-y}\right) - 3\left(\frac{1}{x+y}\right) = 5 \ . \ . \ . \quad (II)$$

مساوات (I) ۽ (II) ۾ $a = \left(\frac{1}{x-y}\right)$ ۽ $b = \left(\frac{1}{x+y}\right)$ ملهه رکڻ سان هيٺيون مساواتون ملنديون

$$4a + b = 3 \ . \ . \ . \quad (III)$$

$$2a - 3b = 5 \ . \ . \ . \quad (IV)$$

مساواتون (III) ۽ (IV) حل ڪرڻ سان $a = 1$ ۽ $b = -1$ اِهي حل ملن ٿا.

پر $b = \left(\frac{1}{x+y}\right)$ ۽ $a = \left(\frac{1}{x-y}\right)$

$$\left(\frac{1}{x+y}\right) = -1 \ ۽ \ \left(\frac{1}{x-y}\right) = 1$$

$$x - y = 1 \ . \ . \ . \quad (V)$$

$$x + y = -1 \ . \ . \ . \quad (VI)$$

مساواتون (V) ۽ (VI) حل ڪرڻ سان $x = 0$ ۽ $y = -1$ اِهي حل ملن ٿا.

$\therefore$ $(x, y) = (0, -1)$ اهي ڏنل مساواتن جا حل آهن.

ياد رکو

متين مثالن ۾ بدلاءِ ڪري آندل هم وقتي مساواتن کي ڦيرائتو رد ڪرڻ واري طريقي حل ڪيل آهن. اِهي مساواتون ڪرئمر طريقي يا گرافي طريقي حل ڪري اُنهن جو حل ملندو ڇا؟ ڪري ڏسو.

مشغولي : چؤڪنڊي ٻڌنل مساوتن جو حل حاصل ڪرڻ لاءِ هيٺين مشغولي ڪريو.

$$\frac{5}{x-1} + \frac{1}{y-2} = 2 \;;\; \frac{6}{x-1} - \frac{3}{y-2} = 1$$

ملهه ڪٽي $\left(\frac{1}{x-1}\right) = m$ ۽ $\left(\frac{1}{y-2}\right) = n$

نيون مساوتون

مساوتون حل ڪري

$6m - 3n = 1$ | $\square$

$m = \square$ ۽ $n = \square$

m ۽ n جو ملهه رکڻ سان ملندڙ مساوتون

$\left(\frac{1}{x-1}\right) = \frac{1}{3}$ | $\square$

مساوتون حل ڪرڻ سان

$x = \square$ ۽ $y = \square$

$\therefore$ $(x,\ y) = (\ \ ,\ \ \ )$ مساوتون حل ڪرڻ سان

اڀياس 1.4

1. هيٺيون هم وقتي مساوتون حل ڪريو :

(1) $\frac{2}{x} - \frac{3}{y} = 15 \;;\; \frac{8}{x} + \frac{5}{y} = 7$

(2) $\frac{10}{x+y} + \frac{2}{x-y} = 4 \;;\; \frac{15}{x+y} - \frac{5}{x-y} = -2$

(3) $\frac{27}{x-2} + \frac{31}{y+3} = 85 \;;\; \frac{31}{x-2} + \frac{27}{y+3} = 89$

(4) $\frac{1}{3x+y} + \frac{1}{3x-y} = \frac{3}{4} \;;\; \frac{1}{2(3x+y)} - \frac{1}{2(3x-y)} = -\frac{1}{8}$

ذرا ياد رکو

هم وقتي مساواتون جا اُپيوگ Application of simultaneous equations

مشغولي : هيٺ ڇؤکنڊي جي هيٺيان ڪجهه هدايتون ڏنل آهن. اُنهن مان ملندڙ مساواتون ڇؤکنڊن ۾ لکو.

سارڌڪ جي عمر ساڪشيءَ جي عمر جي ٻيڻ کان ٨ سال گهٽ آهي

مان سارڌڪ

منهنجي هاڻوڪي عمر x سال آهي

مان ساڪشي

منهنجي هاڻوڪي عمر y سال آهي.

سارڌڪ ۽ ساڪشيءَ جي هاڻوڪي عمر جو جوڙ 25 سال آهي.

4 سال اڳ ساڪشيءَ جي عمر سارڌڪ جي عمر کان 3 سال گهٽ هئي.

مثال (1) هڪ مستطيل جي گرد ماپ 40 س م آهي. مستطيل جي ڊيگهه، مستطيل جي ويڪر جي ٻيڻ کان 2 س م وڌيڪ آهي. مستطيل جي ڊيگهه ۽ ويڪر لهو.

حل سمجهو ته مستطيل جي ڊيگهه x س م ۽ ويڪر y س م آهي.

پهرين شرط موجب –

$$2(x + y) = 40$$

$$x + y = 20 \quad . . . \quad (I)$$

ٻئين شرط موجب –

$$x = 2y + 2$$

$$\therefore \quad x - 2y = 2 \quad . . . \quad (II)$$

مساواتون (I) ۽ (II) کي مقرر طريقي سان حل ڪريو

$$x + y = 20$$

$$x - 2y = 2$$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = [1 \times (-2)] - (1 \times 1) = -2 - 1 = -3$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 20 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = [20 \times (-2)] - (1 \times 2) = -40 - 2 = -42$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 20 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = (1 \times 2) - (20 \times 1) = 2 - 20 = -18$$

$$x = \frac{D_x}{D} \text{ ۽ } y = \frac{D_y}{D}$$

$$\therefore \quad x = \frac{-42}{-3} \text{ ۽ } y = \frac{-18}{-3}$$

$$\therefore \quad x = 14 \text{ ۽ } y = 6$$

∴ مستطيل جي ڊيگهه 14 س م ۽ ويڪر 6 س م آهي.

مثال (2)

سيل! سيل!! سيل!!! فقط ٻه ڏينهن

مون وٽ ڪجهه ڪانٽن وارين ۽ ڪجهه ڊجيٽل واچون آهن. اُهي مان سستي اَگهه تي وڪڻ وارو آهيان.

پهرين ڏينهن جو وڪرو

ڪانٽن وارين واچون = 11

ڊجيٽل واچون = 6

مونکي مليا 4330 رپيا.

ٻين ڏينهن جو وڪرو

ڪانٽن وارين واچون = 22

ڊجيٽل واچون = 5

مونکي مليا 7330 رپيا.

ته مون دواران وڪٽيل هرهڪ واچ جي قيمت ڪيتري؟

حل : سمجھو تہ کاتن واري ھڪ واچ جي قيمت آھي x رپيا ۽ ھڪ ڊجيٽل واچ جي قيمت آھي y رپيا

پھرين شرط مطابق ،

$$11x + 6y = 4330 \quad . \; . \; . \quad (I)$$

ٻين شرط مطابق ،

$$22x + 5y = 7330 \quad . \; . \; . \quad (II)$$

مساوت 1 کي 2 سان ضرب ڪرڻ سان

$$22x + 12y = 8660 \quad . \; . \; . \quad (III)$$

مساوت (II) مان (III) مساوت ڪٽ ڪرڻ سان

$$\begin{array}{r} 22x + 5y = 7330 \\ -22x \underline{+} 12y = \underline{\ }8660 \\ \hline -7y = -1330 \end{array}$$

$$\therefore \quad y = 190$$

y=190 اِھو ملھہ مساوت (I) ۾ رکڻ سان

$$11x + 6y = 4330$$

$$\therefore \quad 11x + 6(190) = 4330$$

$$\therefore \quad 11x + 1140 = 4330$$

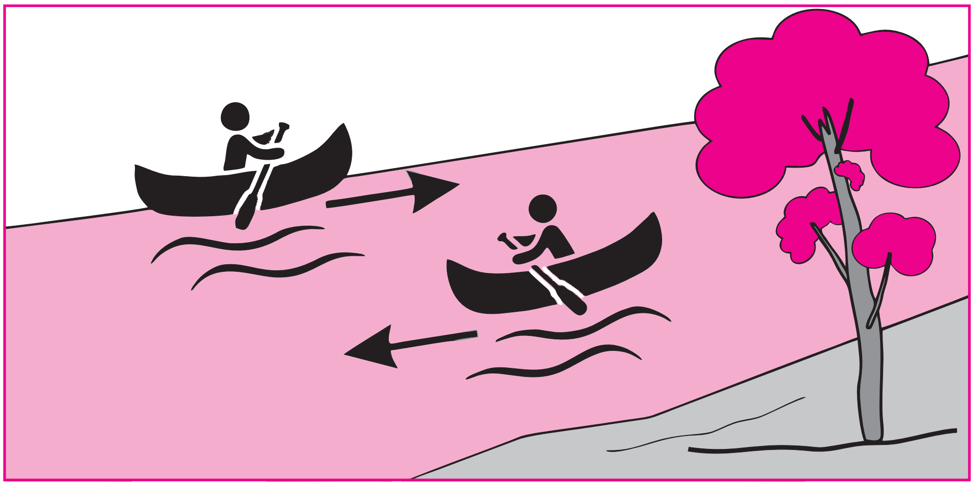
$$\therefore \quad 11x = 3190$$

$$\therefore \quad x = 290$$

$\therefore$ کاتن واري ھڪ واچ جي قيمت 290 رپيا

۽ ھڪ ڊجيٽل واچ جي قيمت 190 رپيا آھي.

مثال (3)



هڪ ٻيڙي 6 ڪلاڪن ۾ مٿاهين وهڪري ۾ 16 ڪ م ۽ هيٺياهين وهڪري ۾ 24 ڪ م مفاصلو طيءِ ڪري ٿي.

اها ئي ٻيڙي 13 ڪلاڪن ۾ مٿاهين وهڪري ۾ 36 ڪ م ۽ هيٺائين وهڪري ۾ 48 ڪ م مفاصلو طيءِ ڪري ٿي.

ٻڌايو! بيٺل پاڻيءَ ۽ وهندڙ پاڻيءَ ۾ ٻيڙيءَ جي رفتار ڪيتري آهي؟

حل : سمجهو تہ ٻيڙيءَ جي بيٺل پاڻيءَ ۾ رفتار x ڪ م / ڪلاڪ ۽ وهڪري جي رفتار y ڪ م / ڪلاڪ

ٻيڙيءَ جي هيٺياهين وهڪري ۾ رفتار $(x+y)$ ڪ م / ڪلاڪ آهي.

ٻيڙيءَ جي مٿاهين وهڪري ۾ رفتار $(x-y)$ ڪ م / ڪلاڪ آهي.

رفتار = وقت ∴ وقت x رفتار = مفاصلو

ٻيڙيءَ کي مٿاهين وهڪري ۾ 16 ڪ م مفاصلو پورو ڪرڻ ۾ لڳندڙ وقت $\frac{16}{x-y}$ ڪلاڪ

ٻيڙيءَ کي هيٺياهين وهڪري ۾ 24 ڪ م مفاصلو پورو ڪرڻ ۾ لڳندڙ وقت $\frac{24}{x+y}$ ڪلاڪ

پهرين شرط مطابق

$$\frac{16}{x-y} + \frac{24}{x+y} = 6 \quad . . . \quad (I)$$

ٻين شرط مطابق

$$\frac{36}{x-y} + \frac{48}{x+y} = 13 \quad . . . \quad (II)$$

مساوت (I) ۽ (II) ۾ $\frac{1}{x-y} = m$ ۽ $\frac{1}{x+y} = n$ ملهہ رکڻ سان هيٺيون مساوتون ملن ٿيون

$$16m + 24n = 6 \quad . . . \quad (III)$$

$$36m + 48n = 13 \quad . . . \quad (IV)$$

مساوت (III) ۽ (IV) کي حل ڪرڻ سان $m = \frac{1}{4}, \; n = \frac{1}{12}$ ملهه ملي ٿو.

m ۽ n جا ملهه واپس رکڻ سان هيٺيون مساوتون ملن ٿيون.

$$x - y = 4 \; . \; . \; . \quad (V)$$

$$x + y = 12 \; . \; . \; . \quad (VI)$$

مساوتون (V) ۽ (VI) حل ڪرڻ سان $x = 8, \; y = 4$ ملهه ملن ٿيون.

∴ بيڙيءَ جي بيٺل پاڻيءَ ۾ رفتار 8 ڪ م / ڪلاڪ ۽ پاڻيءَ جي وهڪري جي رفتار 4 ڪ م / ڪلاڪ آهي.

مثال 4 : ڪا رقم ڪجهه ٻارن ۾ هڪجيتري ورهائي ويئي جيڪڏهن 10 ٻار وڌيڪ آهن ته هرهڪ ٻار کي 2 رپيا گهٽ ملن ٿا ۽ جيڪڏهن 15 ٻار گهٽ آهن ته هرهڪ ٻار کي 6 رپيا وڌيڪ ملن ٿا، ته ٻڌايو ته ڪل رقم ڪيتري آهي؟ اِها رقم ڪيتري ٻارن ۾ ورهائي ويئي؟

حل : سمجهو ته ٻارن جو اَندازو x آهي ۽ هرهڪ ٻار کي ملندڙ رقم y آهي

∴ ڪل ورهايل رقم xy رپيا آهي.

پهرين شرط مطابق ،

$$(x + 10)\,(y - 2) = xy$$

$$\therefore \; xy - 2x + 10y - 20 = xy$$

$$\therefore \; -2x + 10y = 20$$

$$\therefore \; -x + 5y = 10 \; . \; . \; . \quad (I)$$

ٻين شرط مطابق ،

$$(x - 15)\,(y + 6) = xy$$

$$\therefore \; xy + 6x - 15y - 90 = xy$$

$$\therefore \; 6x - 15y = 90$$

$$\therefore \; 2x - 5y = 30 \; . \; . \; . \quad (II)$$

مساوتون (I) ۽ (II) جوڙ ڪرڻ سان

$$\begin{array}{rr} & -x + 5y = 10 \\ + & 2x - 5y = 30 \\ \hline & x = 40 \end{array}$$

x=40 اِهو ملهه مساوت (I) ۾ رکڻ سان

$$-x + 5y = 10$$

$$\therefore \; -40 + 5y = 10$$

$$\therefore \; 5y = 50$$

$\therefore \quad y = 10$

رپيا $400 = 10 \times 40 = xy$ = ڪل رقم

∴ 40 ٻارن ۾ 400 رپيا هڪجيترا ورهايا ويا

مثال (5) هڪ ٽن اَنگن وارا عدد اَنگن جي جوڙ جي سترهوڻ (17) آهي اِن عدد ۾ 198 جوڙڻ سان اِنهن جي جوڙ اُپت، اَصلي عدد تي اَنگن جي ادل بدل ڪرڻ سان ملندڙ عدد آهي. ساڳيءَ طرح ايڪن واري اَنگ ۽ سوَن واري اَنگ جي جوڙ اُپت وچين اَنگ کان 1 گھٽ آهي. اِهو ٽن اَنگن وارو ان عدد لهو.

حل : سمجھو ته سون وارو اَنگ x آهي ۽ ايڪن وارو اَنگ y آهي.

ڏهاڪن وارو اَنگ (وچون اَنگ) باقي ٻن اَنگن جي جوڙ اُپت کان 1 وڌيڪ آهي.

ايڪا	ڏاڪا	سؤ
y	$x + y + 1$	x

∴ ٽن اَنگن وارو عدد = $100x + 10(x + y + 1) + y$

$= 100x + 10x + 10y + 10 + y = 110x + 11y + 10$

انهن اَنگن جي جوڙ اُپت = $x + (x + y + 1) + y = 2x + 2y + 1$

∴ پهرين شرط مطابق ،

ٽن اَنگن وارو عدد = 17 × (اَنگن جي جوڙ اُپت)

$\therefore \quad 110x + 11y + 10 = 17 \times (2x + 2y + 1)$

$\therefore \quad 110x + 11y + 10 = 34x + 34y + 17$

$\therefore \quad 76x - 23y = 7 \; . \; . \; . \quad (I)$

ڏنل عدد ۾ اَنگن جي اَدل بدل ڪرڻ سان ملندڙ عدد

$= 100y + 10(x + y + 1) + x = 110y + 11x + 10$

ڏنل عدد = $110x + 11y + 10$

ڏنل ٻين شرط مطابق ، اَنگن جي اَدل بدل ڪرڻ سان ملندڙ عدد = 198+ ڏنل عدد

$\therefore \quad 110x + 11y + 10 + 198 = 110y + 11x + 10$

$\therefore \quad 99x - 99y = -198$

$\therefore \quad x - y = -2$

يعني $x = y - 2 \; . \; . \; . \quad (II)$

مساوات (II) ۾ مليل x جو ملهه مساوات (I) ۾ رکڻ سان ،

$\therefore \quad 76(y - 2) - 23y = 7$

$\therefore \quad 76y - 152 - 23y = 7$

$53\,y = 159$

$\therefore \quad y = 3 \qquad \therefore$ ايڪن وارو اَنگ $= 3$

$3 \;=\; y$ ملهه مساوات (II) ۾ رکي

$x \;=\; y - 2$

$\therefore \quad x = 3 - 2 \;=\; 1$

$\therefore$ سوَن وارو اَنگ $= 1 \qquad \therefore\; x = 1$

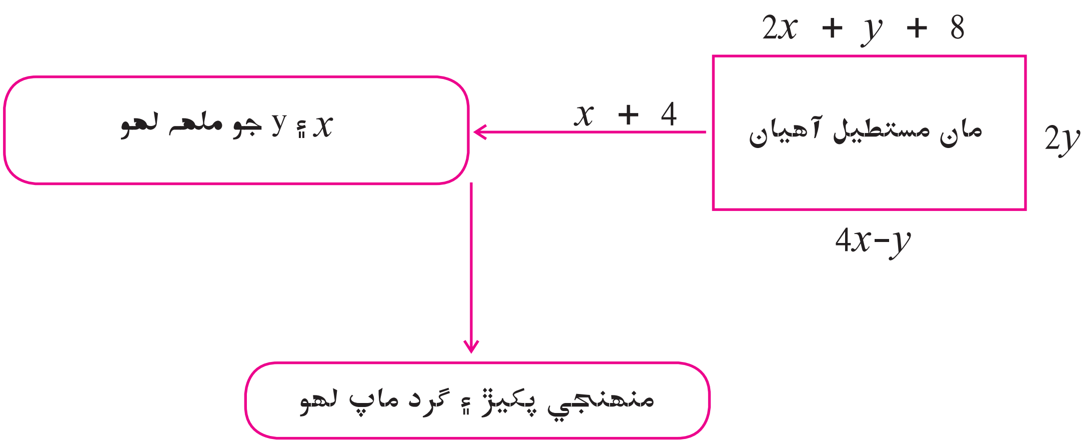
وچون اَنگ = ڏهاڪن وارو اَنگ $= x + y + 1 = 1 + 3 + 1 = 5$

$\therefore$ ڏنل ٽن اَنگن وارو عدد $= 153$.

اَڀياس 1.5

1. ٻن طددن ۾ تفاوت 3 آهي وڏي عدد جي ٽيڻ ۽ ننڍي عدد جي ٻيڻ جي جوڙ اُپٽ 19 آهي تہ اُهي عدد لکو.

2. مشغولي پوري ڪريو



3. پيءُ جي عمر ۽ پٽ جي ٻيڻ جوڙڻ سان جوڙ اُپٽ 70 ٿئي ٿي ۽ پٽ جي عمر ۾ پيءُ جي عمر جي ٻيڻ جوڙڻ سان جوڙ اُپٽ 95 ٿئي ٿي تہ ٻنهي جي عمر لکو.

4. هڪ اَڪيور جو ڇيد، اَنس جي ٻيڻ کان 4 وڌيڪ آهي. جيڪڏهن اَنس ۽ ڇيد ٻنهي مان 6 گهٽائجن تہ ڇيد، اَنس جي ٻارهوڻ جي برابر آهي. تہ اَڪيور لکو.

5. 10 ٽن کٽي سگهندڙ مال کڻندڙ ٽرڪ ۾ A ۽ B اَهڙيون ٻن قسمن جون پيٽيون پريون ويون آهن جيڪڏهن A قسم جون150 پيٽيون ۽ B قسم جون 100 پيٽيون پريون وڃن تيون تہ ٽرڪ جي 10 ٽن کٽي سگهڻ جي جڳهہ پوري پرجي وڃي ٿي. جيڪڏهن A قسم جون 260 پيٽيون پرجن تيون تہ ٽرڪ جي 10 ٽنن جي جڳهہ پرڻ لاءِ B قسم جون 40 پيٽيون لڳنديون تہ هرهڪ قسم جي پيٽي ۽ جو وزن ڪيترو آهي؟

6.★ وشال 1900 ڪ م جي ياترا جو ڪجهہ مفاصلو بس رستي ۽ باقي مفاصلو جهاز رستي پورو ڪيو. بس جي سراسري رفتار 60 ڪ م في ڪلاڪ آهي ۽ جهاز جي سراسري رفتار 700 ڪ م في ڪلاڪ آهي جيڪڏهن هيءَ ياترا هن 5 ڪلاڪن ۾ پوري ڪئي آهي تہ وشال بس رستي ڪيترو مفاصلو ياترا ڪئي؟

گڏيل اَڀياس 1

.1 هيٺين سوالن جا صحيح جواب چونڊيو

(1) $4x + 5y = 19$ جو گراف ڪڍڻ لاءِ x=1 ملهه ڪڍڻ وقت y جو ملهه ڪيترو ٿيندو؟

(A) 4 (B) 3 (C) 2 (D) -3

(2) x ۽ y ڦيرائتن وارن هم وقتي مساوتن ۾ جيڪڏهن $D_x = 49$، $D_y = -63$ ۽ $D = 7$ آهي x = ڪيترو ؟

(A) 7 (B) -7 (C) $\frac{1}{7}$ (D) $\frac{-1}{7}$

(3) $\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -7 & -4 \end{vmatrix}$ ڏنل مقرر جو ملهه ڪيترو آهي؟

(A) −1 (B) −41 (C) 41 (D) 1

(4) $3x-2y-4=0, x+y=3$ اِهي هم وقتي مساوتون حل ڪرڻ وقت D جو ملهه ڪيترو آهي؟

(A) 5 (B) 1 (C) -5 (D) -1

(5) $ax + by = c$; ۽ $mx + ny = d$ انهن ٻنهي هم وقتي مساوتن ۾ جيڪڏهن $an \neq bm$ آهي تہ ڏنل مساوتن جو

(A) فقط هڪ حل آهي (B) ڪوبہ حل نہ آهي

(C) ٻيڪڙ حل آهن (D) فقط ٻہ حل آهن.

.2 $2x - 6y = 3$ مساوت جو گراف ڪڍڻ لاءِ هيٺ ڏنل چجرو پورو ڪريو

x	-5	☐
y	☐	0
(x, y)	☐	☐

.3 هيٺ ڏنل هم وقتي مساوتون گرافي طريقي حل ڪريو :

(1) $2x + 3y = 12$; $x - y = 1$

(2) $x - 3y = 1$; $3x - 2y + 4 = 0$

(3) $5x - 6y + 30 = 0$; $5x + 4y - 20 = 0$

(4) $3x - y - 2 = 0$; $2x + y = 8$

(5) $3x + y = 10$; $x - y = 2$

.4 هيٺين مقررن جو ملهه لهو

(1) $\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}$ (2) $\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}$ (3) $\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$

.5 هينيون هم وقتي مساوتون ڪرئمر طريقي حل ڪريو :

(1) $6x - 3y = -10 \;;\; 3x + 5y - 8 = 0$

(2) $4m - 2n = -4 \;;\; 4m + 3n = 16$

(3) $3x - 2y = \frac{5}{2} \;;\; \frac{1}{3}x + 3y = -\frac{4}{3}$

(4) $7x + 3y = 15 \;;\; 12y - 5x = 39$

(5) $\frac{x+y-8}{2} = \frac{x+2y-14}{3} = \frac{3x-y}{4}$

.6 هينيون هم وقتي مساوتون حل ڪريو :

(1) $\frac{2}{x}+\frac{2}{3y}=\frac{1}{6} \;;\; \frac{3}{x}+\frac{2}{y}=0$ (2) $\frac{7}{2x+1}+\frac{13}{y+2}=27 \;;\; \frac{13}{2x+1}+\frac{7}{y+2}=33$

(3) $\frac{148}{x}+\frac{231}{y}=\frac{527}{xy} \;;\; \frac{231}{x}+\frac{148}{y}=\frac{610}{xy}$ (4) $\frac{7x-2y}{xy}=5 \;;\; \frac{8x+7y}{xy}=15$

(5) $\frac{1}{2(3x+4y)}+\frac{1}{5(2x-3y)}=\frac{1}{4} \;;\; \frac{5}{(3x+4y)}-\frac{2}{(2x-3y)}=-\frac{3}{2}$

.7 هينيان لفظي مثال حل ڪريو :

(1) هڪ ٻن اَنگن واري عدد ۽ اُنهن اَنگن جي اَدل بدل ڪري ملندڙ عدد جي جوڙ اُپٽ 143 آهي. جيڪڏهن ڏنل عدد ۾ ڏهاڪن واري جاءِ جو ملهہ، ايڪن واري جاءِ جي ملهہ کان 3 وڌيڪ آهي تہ ڏنل اَصلي عدد ڪهڙو آهي؟

سمجهو تہ ايڪن واري جاءِ وارو اَنگہ $= x$

ڏهاڪن واري جاءِ وارو اَنگہ $= y$

$\therefore$ اَصلي عدد $= \Box\, x + y$

اَنگن جي اَدل بدل ڪرڻ سان ملندڙ عدد $= \Box\, y + x$

پهرين شرط مطابق

اَنگن جي اَدل بدل ڪرڻ سان ملندڙ عدد ڏنل عدد

$\boxed{10y+x} + \Box = 143$

$\Box\, x + \Box\, y = 143$

$x + y = \Box \quad \ldots\ldots (\mathrm{I})$

ٻين شرط مطابق،

3 + ايڪن وارو اَنگہ = ڏهاڪن وارو اَنگہ

$y = \Box + 3$

$-x + y = 3 \quad \ldots\ldots (\mathrm{II})$

(I) ۽ (II) مساواتن جو جوڙ ڪرڻ سان

$2x = \square$ $\quad\quad \therefore \; x = 8$

$x = 8$ جو ملهه مساوات (I) ۾ رکڻ سان

$x + y = 13$

$8 + \square = 13$

$\therefore \; y = \square$

$= 10y + x$

$= \square + 8 = 58$

(2) ڪانتاٻائيءَ هڪ دڪان تان ڏيڍ ڪلو چانهہ ۽ 5 ڪلو کنڊ ورتي. دڪان تي وڃڻ لاءِ هن 50 ر رڪشا جو ڀاڙو ڀريو. اِن لاءِ هن جو ڪل خرچ 700 رپيا ٿيو. پوءِ هن کي خبر پيئي تہ اِهي شيون آن لائين آرڊر ڪرڻ سان گهر پهچائي ملي سگهن ٿيون. ٻئي مهني هن 2 ڪلو چانهہ ۽ 7 ڪلو کنڊ آن لائين گرائي ، اِن لاءِ هن جو 880 رپيا خرچ ٿيو. تہ چانهہ ۽ کنڊ جي هرهڪ ڪلو جي قيمت ٻڌايو.

(3) اَنوشڪا وٽ 100 رپين وارا x ۽ 50 رپين وارا y نوٽ آهن.

انوشڪا کي آنند متين نوٽن جي روپ ۾ ڪل 2500 ر رقم ڏني

- - - - - - - - مساوات I

آنند هن کي نوٽ اَدل بدل ڪري پئسا ڏنا تہ ڏنل رقم پهرين رقم کان 500 ر گهٽ آهي.

- - - - - - - - مساوات II

مساواتون حل ڪري جواب ٻڌايو

100 رپين وارا نوٽ $\square$ $\quad$ 50 رپين وارا نوٽ $\square$

4. منيشا ۽ سويتا جي هاڻوڪين عمر جي جوڙ اُپٽ 31 سال آهي. 3 سال اَڳہ منيشا جي عمر، سويتا جي اُن وقت جي عمر جي چوڻ جيتري هئي، تہ ٻنهي جي هاڻوڪي عمر لهو.

★ 5. هڪ ڪارخاني ۾ چاڻو ۽ اَڻچاڻو ڪاريگرن جي روزاني ڪمائي جو ريشو 5:3 آهي. اُنهن جي هڪ ڏينهن جي پگهار 720 رپيا آهي تہ هرهڪ چاڻو ڪاريگر ۽ اَڻچاڻو ڪاريگر جي پگهار لهو.

★ 6. هڪ سڌي رستي تي A ۽ B ٻہ جڳهيون آهن اُنهن جي وچ ۾ مفاصلو 30 ڪ م آهي. حميد موٽر سائيڪل تي A کان B ڏانهن وڃڻ لاءِ نڪتو. ساڳئي وقت جوسيف B کان A ڏانهن وڃڻ لاءِ نڪتو. اُهي ٻئي 20 منٽن کانپوءِ هڪ ٻئي سان گڏيا. جوسيف جيڪڏهن اُن وقت نڪري اُبتڙ طرف ۾ وڃي ها، تہ هن سان حميد ٽن ڪلاڪن کان پوءِ ملي ها ، تہ هرهڪ جي رفتار ڪيتري آهي؟

P0858C

2 ٻسگهي مساوتون

اَچو تہ سکون

- ٻسگهي مساوتون سڃاڻڻ
- ٻسگهي مساوتن کي حل ڪرڻ جو طريقو
- ٻسگهي مساوتن جي حلن جا قسم
- حل (جزا) ۽ ضربيندڙن جي وچ ۾ لاڳاپو
- ٻسگهي مساوتن جو اُپيوگ

ذرا ياد ڪريون

وديارٿي دوستو، نائين درجي ۾ اَسان گهٽپدن جي باري ۾ سکيا آهيون. اُنهن ۾ سگهہ جي آڌار تي هوندڙ گهٽپدن جو پڻ اَسان اَڀياس ڪيو آهي. هڪ ڦيرائتي ۾ جيڪو گهٽپدو هڪ سگهہ وارو هوندو آهي، اُن کي ليڪي گهٽپدو ۽ جنهن جي سگهہ ٻہ هوندي آهي اُن کي ٻسگهي گهٽپدو چئبو آهي.

مشغولي : هيٺين گهٽپدن کي ليڪي گهٽپدن ۽ ٻسگهي گهٽپدن ۾ ورهايو.

$5x^2$, $3x^2 - 5x$, $3x - 7$, $x^2 + 3x - 5$, $5x + 9$

ليڪي گهٽپدا	ٻسگهي گهٽپدا

هاڻي اَسان ٻسگهي گهٽپدن جو ملهہ 0 ڪٺي جيڪي مساوتون ملنديون اُنهن جو اَڀياس ڪنداسين.
اَهڙين مساوتن کي ٻسگهي مساوتون چئبو آهي.

اَسان روزمرهہ جي زندگيءَ ۾ ڪيترائي دفعا اُنهن ٻسگهي مساوتن جو اُپيوگ ڪندا آهيون.

مثال : سنکيت 200 چورس ميٽر پکيڙ وارو هڪ مستطيل پلاٽ خريد ڪيو. پلاٽ جي ڊيگهہ سندس ويکر کان 10 ميٽر وڌيڪ هئي تہ اُن پلاٽ جي ڊيگهہ ۽ ويکر ڪيتري هئي؟

سمجهو تہ پلاٽ جي ويکر x ميٽر آهي.

$\therefore$ ڊيگهہ = $(x + 10)$ ميٽر

ويکر x ڊيگهہ = مستطيل پلاٽ جي پکيڙ

$\therefore \; 200 = (x + 10) \times x$

$\therefore \; 200 = x^2 + 10x$

يعني تہ $x^2 + 10x = 200$

$\therefore \; x^2 + 10x - 200 = 0$

هاڻي $x^2+10x-200=0$ اِها ٻسگهي مساوت حل ڪري آسان پلاٽ جي ڊيگهه ۽ ويڪر ٻڌائي سگهون ٿا.

ٻسگهي مساوتون ڪيئن حل ڪجن اِنهن جو آسان آپياس ڪنداسين.

ذرا ياد ڪريون

> **مشغولي:** $x^2 + 3x - 5,\ 3x^2 - 5x,\ 5x^2$ اِهي گهٽپدا سگهه واري روپ ۾ لکي اُنهن پدن جي ضربيندڙن (گُڻڪ) جي جاچ ڪري اُنهن کي خالي چؤڪنڊن ۾ صحيح طريقي لکو.
>
> $x^2 + 3x - 5\ ,\quad 3x^2 - 5x + 0\ ,\quad 5x^2 + 0x + 0$
>
> ✦ x^2 جا گُڻڪ نمبر وار [1]، [3] ۽ [5] يعني 0 نہ آهن آهن
>
> ✦ x جا گُڻڪ نمبروار 3، [ ] ۽ [ ] آهن.
>
> ✦ اِستر پد نمبر وار [ ]، [ ] ۽ [ ] آهن.
>
> هتي ٻين ۽ ٽين گهٽپدن ۾ اِستر پد 0 آهي.

ٻسگهي مساوت جو پرماڻڪ روپ (Standard form of quadratic equation)

هڪ قيرائتي ۾ جنهن مساوت جي قيرائتي جي سگهه وڌ ۾ وڌ 2 آهي. اُنهن مساوتن کي ٻسگهي مساوت چئجي ٿو.

اُهي پرماڻڪ روپ ۾ $ax^2 + bx + c = 0$ جي روپ ۾ لکجن ٿا. $ax^2 + bx + c = 0$, ۾ a, b ۽ c حقيقي عدد آهن ۽ a جو ملهہ 0 نہ هئڻ گهرجي.

$ax^2 + bx + c = 0$ اِن روپ ۾ مساوت کي ٻسگهي مساوت جو پرماڻڪ روپ چئجي ٿو.

مشغولي : هيٺيون تختو پورو ڪريو

ٻسگهي مساوت	پرماڻڪ روپ	a	b	c
$x^2 - 4 = 0$	$x^2 + 0x - 4 = 0$	1	0	−4
$y^2 = 2y - 7$	. . . .	. . .	. . .	. . .
$x^2 + 2x = 0$	. . . .	. . .	. . .	. . .

حل ڪيل مثال

مثال (1) ٻڌايو تہ هيٺين مساوتن مان ڪهڙيون مساوتون ٻسگهي مساوتون آهن.

(1) $3x^2 - 5x + 3 = 0$ (2) $9y^2 + 5 = 0$

(3) $m^3 - 5m^2 + 4 = 0$ (4) $(l + 2)(l - 5) = 0$

حل : (1) $3x^2 - 5x + 3 = 0$ هن مساوت ۾ قيرائتي جي وڌ ۾ وڌ سگهه 2 آهي

∴ اِها مساوت ٻہ سگهي مساوت آهي.

(2) $9y^2 + 5 = 0$ □ هن مساوات ۾ ڦيرائتي جي وڌ ۾ سگهه □ آهي .

∴ اها مساوات ٻہ سگهي مساوات □ .

(3) $m^3 - 5m^2 + 4 = 0$ هن مساوات ۾ ڦيرائتي جي وڌ ۾ وڌ سگهه 2 نہ آهي.

∴ اِها مساوات ٻہ سگهي مساوات □ .

(4) $(l + 2)(l - 5) = 0$

$\therefore \quad (l - 5) + 2(l - 5)l = 0$

$\therefore \; l^2 - 5l + 2l - 10 = 0$

$\therefore \; l^2 - 3l - 10 = 0$ □ هن مساوات ۾ ڦيرائتي جي وڌ ۾ وڌ □ آهي.

∴ ڏنل مساوات ٻہ سگهي مساوات □ .

چاڪي وٺون

ٻسگهي مساوتن جا جزا (حل) (Roots of a quadratic equation)

اسان اَڳين درجن ۾ ڏٺو آهي تہ x جو ملهہ a ڪٽي گهٽپدي جو ملهہ 0 هجي تہ $(x\text{-a})$ گهٽپدي جو جزو آهي. يعني $p(x)$ هڪ گهٽپدو آهي ۽ $p(\text{a})=0$ آهي تہ $(x\text{-a})$ اِهو $p(x)$ جو جزو آهي. اَهڙي حالت ۾ a اِهو $p(\text{a})=0$ جو هڪ حل (جزو) آهي يا a اِهو $p(x)=0$ جو جزو آهي ائين چئجي سگهجي ٿو.

مثال طور :

$x^2 + 5x - 6$ هن گهٽپدي ۾ $x = -6$ ڪٽي ،

$x^2 + 5x - 6 = (-6)^2 + 5 \times (-6) - 6$

$= 36 - 30 - 6 \quad = 0$

∴ $x = -6$ اِهو هن مساوات جو حل آهي

يعني -6 اِهو عدد $x^2 + 5x - 6 = 0$

هن مساوات جو جزو آهي.

$x^2 + 5x - 6$ هن گهٽپدي ۾ $x = 2$ ڪٽي ،

$x^2 + 5x - 6 = 2^2 + 5 \times 2 - 6$

$= 4 + 10 - 6$

$= 8 \quad \neq 0$

∴ $x = 2$ اِهو $x^2 + 5x - 6 = 0$

هن مساوات جو حل نہ آهي.

حل ڪيل مثال

مثال $2x^2 - 7x + 6 = 0$ هن مساوات جا (i) $x = \frac{3}{2}$ ۽ (ii) $x = -2$ اِهي حل آهن چا اِهو ٻڌايو

حل (i) $2x^2 - 7x + 6$ هنن گهٽپدي ۾ $x = \frac{3}{2}$ اهو ملهہ ڪٽي گهٽپدي جو ملهہ لهو.

$$2x^2 - 7x + 6 = 2\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 7\left(\frac{3}{2}\right) + 6$$

$$= 2 \times \frac{9}{4} - \frac{21}{2} + 6$$

$$= \frac{9}{2} - \frac{21}{2} + \frac{12}{2} = 0$$

$\therefore\ x = \frac{3}{2}$ هن مساوت جو حل آهي

(ii) $2x^2 - 7x + 6$ هنن گهٽپدي ۾ $x = -2$ اِهو ملهه ڪٽي گهٽپدي جو ملهه لهو.

$$2x^2 - 7x + 6 = 2(-2)^2 - 7(-2) + 6$$

$$= 2 \times 4 + 14 + 6$$

$$= 28 \neq 0$$

$\therefore\ x = -2$ اِهو $2x^2 - 7x + 6$ هن مساوت جو حل نہ آهي.

مشغولي : جيڪڏهن $x = 5$ اِهو $kx^2 - 14x - 5 = 0$ هن مساوت جو هڪ جزو آهي تہ k جو ملهه لهڻ لاءِ هيٺين مشغولي پوري ڪريو :

حل : $kx^2 - 14x - 5 = 0$ هن مساوت جو هڪ جزو $\square$ آهي .

$\therefore\ x = \square$ اِهو ملهه متين ٻسگهي مساوت ۾ رکي.

$$\therefore\ k\boxed{5}^2 - 14\boxed{5} - 5 = 0$$

$$\therefore\ 25k - 70 - 5 = 0$$

$$\therefore\ 25k - \square = 0$$

$$\therefore\ 25k = \square$$

$$\therefore\ k = \frac{\square}{\square} = 3$$

ياد رکو

(1) $ax^2 + bx + c = 0$ اهو ٻسگهي مساوت جو پرماڻڪ روپ آهي. جتي a، b ۽ c حقيقي عدد آهن ۽ a جو ملهه 0 نہ آهي.

(2) ڦيرائتي جي جنهن ملهه ۾ ٻسگهي مساوت جا ٻيئي پاسا هڪجهڙا آهن (يعني ٻسگهي مساوت حل ٿي سگهي ٿي) اُهو ملهه ٻسگهي مساوت جو حل يا ٻسگهي مساوت جو جزو آهي.

اَڀياس 2.1

1. ڪهڙيون به ٻه ٻيگهي مساوتون لکو.

2. هيٺين مساوتن مان ڪهڙيون مساوتون ٻيگهي مساوتون آهن ٻڌايو.

(1) $x^2 + 5x - 2 = 0$ (2) $y^2 = 5y - 10$ (3) $y^2 + \frac{1}{y} = 2$

(4) $x + \frac{1}{x} = -2$ (5) $(m + 2)(m - 5) = 0$ (6) $m^3 + 3m^2 - 2 = 3m^3$

3. هيٺيون مساوتون $ax^2 + bx + c = 0$ جي روپ ۾ لکو هرهڪ مساوت ۾ c,b,a جو ملهه ٻڌايو.

(1) $2y = 10 - y^2$ (2) $(x - 1)^2 = 2x + 3$ (3) $x^2 + 5x = -(3 - x)$

(4) $3m^2 = 2m^2 - 9$ (5) $p(3 + 6p) = -5$ (6) $x^2 - 9 = 13$

4. ٻيگهي مساوت جي پاسي ۾ ڏنل ملهه اُن مساوت جا جزا آهن يا نه ٻڌايو.

(1) $x^2 + 4x - 5 = 0$, $x = 1, -1$ (2) $2m^2 - 5m = 0$, $m = 2, \frac{5}{2}$

5. جيڪڏهن $x = 3$ اِهو $kx^2 - 10x + 3 = 0$ هن مساوت جو هڪ جزو آهي ته k جو ملهه ڪيترو آهي؟

6. $5m^2 + 2m + k = 0$ هن ٻيگهي مساوت جو هڪ جزو $\frac{-7}{5}$ ته k جو ملهه لهڻ لاءِ هيٺين مشغولي پوري ڪريو.

حل : $5m^2 + 2m + k = 0$ هن مساوت جو هڪ جزو ☐ آهي.

$\therefore m =$ ☐ مٿين مساوت ۾ رکڻ سان

$\therefore 5 \times$ ☐$^2 + 2 \times$ ☐ $+ k = 0$

$\therefore$ ☐ + ☐ $+ k = 0$

$\therefore$ ☐ $+ k = 0$

$\therefore k =$ ☐

ذرا ياد ڪريون

اسان گذريل سال گهٽپدا باب ۾ $x^2 - 4x - 5$, $2m^2 - 5m$, $a^2 - 25$ اَهڙن ٻيگهي گهٽپدن جا جزا ڪڍڻ جو طريقو سکي چڪا آهيون. هيٺين مشغولي ڪري اُن جو دؤر ڪريو.

مشغولي : هيٺين ٻيگهي گهٽپدن جا جزا ڪڍو.

(1) $x^2 - 4x - 5$

$= \underline{x^2 - 5x} + \underline{1x - 5}$

$= x(\ldots\ldots) + 1(\ldots\ldots)$

$= (\ldots\ldots)(\ldots\ldots)$

(2) $2m^2 - 5m$

$= \ldots\ldots\ldots$

(3) $a^2 - 25$

$= a^2 - 5^2$

$= (\ldots\ldots)(\ldots\ldots)$

چاڪي وٺون

جزا لهڻ واري طريقي سان ٻسگهي مساوات حل ڪرڻ
(Solution of a quadratic equation by factorisation)

آسان ڦيراڦيري ڪي اَلڳ اَلڳ ملهه ڏيئي ٻسگهي مساوات جا جزا مقرر ڪيا پر اِهو وڏيڪ وقت لڳڻ وارو طريقو آهي. اِنڪري آسان هن حصي ۾ ٻسگهي مساواتن جا حل جزا لهڻ واري طريقي سان حاصل ڪرڻ جو اَڀياس ڪرڻ وارا آهيون.

$$x^2 - 4x - 5 = (x - 5)(x + 1)$$

هتي $(x - 5)$ ۽ $(x + 1)$ اِهي $x^2 - 4x - 5$ ٻه سگهي گهٽپدي جا ٻه ليڪي جزا آهن يعني $x^2 - 4x - 5$ اهو ٻه سگهي گهٽپدو ملندڙ $x^2 - 4x - 5 = 0$ اها ٻه سگهي مساوات هيٺين طريقي سان لکي سگهجي ٿي.

$$(x - 5)(x + 1) = 0$$

جيڪڏهن ٻن عددن جي ضرب اُپت 0 آهي ته اِنهن ٻنهي عددن مان گهٽ ۾ گهٽ هڪ عدد 0 آهي.

$\therefore \quad x - 5 = 0$ يا $x + 1 = 0$

$\therefore \quad x = 5$ يا $x = -1$

$\therefore$ ڏنل ٻسگهي مساوات جا جزا 5 ۽ -1 آهن.

اهو مثال حل ڪرڻ لاءِ آسانڪي ٻسگهي پد جا ٻه ليڪي جزا مليا آهڙي طريقي ٻسگهي مساواتن کي حل ڪرڻ جي طريقي کي جزا لهڻ واري طريقي سان مساواتون حل ڪرڻ چئجي ٿو.

حل ڪيل مثال

هيٺيون مساواتون جزا لهڻ واري طريقي سان حل ڪريو.

(1) $m^2 - 14m + 13 = 0$ (2) $3x^2 - x - 10 = 0$

(3) $3y^2 = 15y$ (4) $x^2 = 3$ (5) $6\sqrt{3}x^2 + 7x = \sqrt{3}$

(1) $m^2 - 14m + 13 = 0$

$\therefore \quad \underline{m^2 - 13m} - \underline{1m + 13} = 0$

$\therefore \quad m(m - 13) - 1(m - 13) = 0$

$\therefore \quad (m - 13)(m - 1) = 0$

$\therefore \quad m - 13 = 0$ يا $m - 1 = 0$

$\therefore \quad m = 13$ يا $m = 1$

$\therefore$ ڏنل ٻسگهي مساوات جا جزا 13 ۽ 1 آهن.

(2) $3x^2 - x - 10 = 0$

$\therefore \quad \underline{3x^2 - 6x} + \underline{5x - 10} = 0$

$\therefore \quad 3x(x - 2) + 5(x - 2) = 0$

$\therefore \quad (3x + 5)(x - 2) = 0$

$\therefore \quad 3x + 5 = 0$ يا $x - 2 = 0$

$\therefore \quad x = -\frac{5}{3}$ يا $x = 2$

$\therefore$

ڏنل ٻسگهي مساوات جا جزا $-\frac{5}{3}$ ۽ 2 آهن.

(3) $3y^2 = 15y$

$\therefore\ 3y^2 - 15y = 0$

$\therefore\ 3y(y - 5) = 0$

$\therefore\ 3y = 0$ يا $y - 5 = 0$

$\therefore\ y = 0$ يا $y = 5$

$\therefore$ ڏنل ٻسگهي مساوت جا جزا 0 ۽ 5 آهن.

(4) $x^2 = 3$

$\therefore\ x^2 - 3 = 0$

$\therefore\ x^2 - (\sqrt{3})^2 = 0$

$\therefore\ (x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3}) = 0$

$\therefore\ x + \sqrt{3} = 0$ يا $x - \sqrt{3} = 0$

$\therefore\ x = -\sqrt{3}$ يا $x = \sqrt{3}$

$\therefore$ ٻسگهي مساوت جا جزا $\sqrt{3}$ ۽ $-\sqrt{3}$ آهن.

(5) $6\sqrt{3}x^2 + 7x = \sqrt{3}$

$6\sqrt{3} \times -\sqrt{3} = -18$

-18: 9, -2

$9 = 3\sqrt{3} \times \sqrt{3}$

$\therefore\ 6\sqrt{3}x^2 + 7x - \sqrt{3} = 0$

$\therefore\ 6\sqrt{3}x^2 + 9x - 2x - \sqrt{3} = 0$

$\therefore\ 3\sqrt{3}x(2x + \sqrt{3}) - 1(2x + \sqrt{3}) = 0$

$\therefore\ (2x + \sqrt{3})(3\sqrt{3}x - 1) = 0$

$\therefore\ 2x + \sqrt{3} = 0$ يا $3\sqrt{3}x - 1 = 0$

$\therefore\ 2x = -\sqrt{3}$ يا $3\sqrt{3}x = 1$

$\therefore\ x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ يا $x = \frac{1}{3\sqrt{3}}$

$\therefore$ ٻسگهي مساوت جا جزا $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ۽ $\frac{1}{3\sqrt{3}}$ آهن.

اَڀياس 2.2

1. هيٺيون ٻسگهي مساوتون جزا لهڻ واري طريقي سان حل ڪريو :

(1) $x^2 - 15x + 54 = 0$ (2) $x^2 + x - 20 = 0$ (3) $2y^2 + 27y + 13 = 0$

(4) $5m^2 = 22m + 15$ (5) $2x^2 - 2x + \frac{1}{2} = 0$ (6) $6x - \frac{2}{x} = 1$

(7) $\sqrt{2}x^2 + 7x + 5\sqrt{2} = 0$ اها ٻسگهي مساوت جزا لهڻ واري طريقي سان حل ڪرڻ لاءِ هيٺين مشغولي پوري ڪريو.

حل (7) $\sqrt{2}x^2 + 7x + 5\sqrt{2} = 0$

$\therefore\ \sqrt{2}x^2 + \square + \square + 5\sqrt{2} = 0$

$\therefore\ x(\ldots\ldots) + \sqrt{2}(\ldots\ldots) = 0$

$\therefore \quad (\ldots\ldots)(x + \sqrt{2}) = 0$

$\therefore \quad (\ldots\ldots) = 0$ يا $(x + \sqrt{2}) = 0$

$\therefore \quad x = \boxed{}$ يا $x = -\sqrt{2}$

$\therefore$ ٻسگهي مساوات جا جزا $\boxed{}$ ۽ $-\sqrt{2}$ آهن.

(8)★ $3x^2 - 2\sqrt{6}\,x + 2 = 0$ (9) $2m(m - 24) = 50$

(10) $25m^2 = 9$ (11) $7m^2 = 21m$ (12) $m^2 - 11 = 0$

چاڪي وٺون

پورن ٻين سگهه ڪرڻ واري طريقي سان ٻسگهي مساواتون حل ڪرڻ

(Solution of a quadratic equation by completing the square)

ماستر : $x^2 + 10x + 2 = 0$ اِها ٻسگهي مساوات آهي يا نه؟

يوگيش : ها سر چاڪاڻ ته اِها $ax^2 + bx + c = 0$ اِن روپ ۾ آهي. هتي x قيرائتي جي وڌ ۾ وڌ سگهه آهي. a جو ملهه 0 نه آهي.

ماستر : اِها مساوات توکي حل ڪرڻ ايندي ڇا؟

ورشا : نه سر چاڪاڻ ته 2 هن عدد جا جزا نه ٿا ڳڌائي سگهجن، جن جي ضرب اُپت 10 ٻڌجي.

ماستر : يعني اَهڙا مثال حل ڪرڻ لاءِ ٻيو طريقو ڪم آڻڻو پوندو اهو طريقو سمجهي وٺو.

$x^2 + 10x$ اِن ملهه ۾ ڪو نهڪندڙ پد جوڙي هڪ پوري ٻي سگهه وارا پد حاصل ڪريو.

$x^2 + 10x + k = (x + a)^2$ جيڪڏهن

$x^2 + 10x + k = x^2 + 2ax + a^2$ ته

$\therefore$ ساڳين پدن جي ڀيٽ ڪري، $10 = 2a$ ۽ $k = a^2$

$\therefore \quad a = 5$ ۽ انڪري $k = a^2 = (5)^2 = 25$

هاڻي، $x^2 + 10x + 2 = (x + 5)^2 - 25 + 2 = (x + 5)^2 - 23$

$x^2 + 10x + 2 = 0$ اِها مساوات هاڻي توهان حل ڪري سگهو ٿا ڇا؟

ريهانا : ها سر، مساوات جو ساڄو پاسو ٻن پوري ٻي سگهه جي تفاوت جي روپ ۾ آڻي ڪري اِن جا جزا ڪڍي سگهجن ٿا.

$$(x + 5)^2 - (\sqrt{23})^2 = 0$$

$$\therefore \quad (x + 5 + \sqrt{23})(x + 5 - \sqrt{23}) = 0$$

$\therefore \quad x + 5 + \sqrt{23} = 0$ يا $x + 5 - \sqrt{23} = 0$

$\therefore \quad x = -5 - \sqrt{23}$ يا $x = -5 + \sqrt{23}$

حميد : سِرُ حل ڪرڻ جو ٻيو طريقو مون سوچيو آهي.

$$(x + 5)^2 - (\sqrt{23})^2 = 0$$

$$\therefore\ (x + 5)^2 = (\sqrt{23})^2$$

$$\therefore\ x + 5 = \sqrt{23} \quad \text{يا} \quad x + 5 = -\sqrt{23}$$

$$\therefore\ x = -5 + \sqrt{23} \quad \text{يا} \quad x = -5 - \sqrt{23}$$

حل ڪيل مثال

مثال (1) حل ڪريو : $5x^2 - 4x - 3 = 0$

: مساوت کي پوري ٻي سگهه واري روپ ۾، ٻن پوري ٻي سگهه وارن پد جي تفاوت ۾ آڻڻ لاءِ x2 جو گڏڪ 1 ڪرڻ سان سهوليت پريو ٿيندو يعني ڏنل مساوت کي 5 سان ونڊ ڪريو.

$$x^2 - \frac{4}{5}x - \frac{3}{5} = 0$$

$x^2 - \frac{4}{5}x + k = (x - a)^2$ ته $x^2 - \frac{4}{5}x + k = x^2 - 2ax + a^2.$ هاڻي جيڪڏهن

$x^2 - 2ax$ جي ڀيٽ $x^2 - \frac{4}{5}x$ سان ڪري

$$-2ax = -\frac{4}{5}x \quad \therefore\ a = \frac{1}{2} \times \frac{4}{5} = \frac{2}{5}$$

$$\therefore\ k = a^2 = \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{4}{25}$$

هاڻي، $x^2 - \frac{4}{5}x - \frac{3}{5} = 0$

$$\therefore\ x^2 - \frac{4}{5}x + \frac{4}{25} - \frac{4}{25} - \frac{3}{5} = 0$$

$$\therefore\ \left(x - \frac{2}{5}\right)^2 - \left(\frac{4}{25} + \frac{3}{5}\right) = 0$$

$$\therefore\ \left(x - \frac{2}{5}\right)^2 - \left(\frac{19}{25}\right) = 0$$

$$\therefore\ \left(x - \frac{2}{5}\right)^2 = \left(\frac{19}{25}\right)$$

$$\therefore\ x - \frac{2}{5} = \frac{\sqrt{19}}{5} \quad \text{يا} \quad x - \frac{2}{5} = -\frac{\sqrt{19}}{5}$$

$$\therefore\ x = \frac{2}{5} + \frac{\sqrt{19}}{5} \quad \text{يا} \quad x = \frac{2}{5} - \frac{\sqrt{19}}{5}$$

$$\therefore\ x = \frac{2+\sqrt{19}}{5} \quad \text{يا} \quad x = \frac{2-\sqrt{19}}{5}$$

ٻسگهي مساوت جا جزا $\frac{2-\sqrt{19}}{5}$ يا $\frac{2+\sqrt{19}}{5}$ آهن.

مساوت $x^2 + bx + c = 0$
هن روپ ۾ هوندي آهي اُن کي
$$x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 + c = 0$$
هن روپ ۾ يعني
$$\left(x + \frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - c$$
هن روپ ۾ ليکبو آهي.

مثال (2) حل ڪريو $x^2 + 8x - 48 = 0$

طريقو I : پوري ٻين سگهه وارو طريقو

$$x^2 + 8x - 48 = 0$$

$$\therefore\ x^2 + 8x + 16 - 16 - 48 = 0$$

$$\therefore\ (x + 4)^2 - 64 = 0$$

$$\therefore\ (x + 4)^2 = 64$$

$\therefore\ x + 4 = 8$ يا $x + 4 = -8$

$\therefore\ x = 4$ يا $x = -12$

∴ ٻسگهي مساوت جا جزا 4 ۽ 12-

طريقو II : جزا لهڻ وارو طريقو

$$x^2 + 8x - 48 = 0$$

$$\therefore\ x^2 + 12x - 4x - 48 = 0$$

$$\therefore\ x(x + 12) - 4(x + 12) = 0$$

$$\therefore\ (x + 12)(x - 4) = 0$$

$\therefore\ x + 12 = 0$ يا $x - 4 = 0$

$\therefore\ x = -12$ يا $x = 4$

اَڀياس 2.3

هيٺين ٻسگهي مساوتون پوري ٻين سگهه واري طريقي حل ڪريو

(1) $x^2 + x - 20 = 0$ (2) $x^2 + 2x - 5 = 0$ (3) $m^2 - 5m = -3$

(4) $9y^2 - 12y + 2 = 0$ (5) $2y^2 + 9y + 10 = 0$ (6) $5x^2 = 4x + 7$

چاڪي وٺون

ٻسگهي مساوتون حل ڪرڻ جو سوتر (Formula for solving a quadratic equation)

$ax^2 + bx + c$ هن حساب کي a سان ون ڪريون $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}$ $(\because\ a \neq 0)$ اِهو حساب ملي ٿو.

$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}$ کي ٻن پوري سگهه وارن پد جي تفاوت واري روپ ۾ ٺاهي $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$ هن مساوت کي يعني $ax^2 + bx + c = 0$ هن مساوت جو سؤلو حل ۽ جزا ملن ٿا.

$$ax^2 + bx + c = 0 \ldots \text{(I)}$$

ٻنهي پاسي a سان ونڊ ڪري ..... $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$

$$\therefore\ x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} = 0$$

$$\therefore\ \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0$$

$$\therefore \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2-4ac}{4a^2} \qquad \therefore \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2} = 0$$

$$\therefore\ x+\frac{b}{2a} = \sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}} \quad \text{يا} \quad x+\frac{b}{2a} = -\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$$

$$\therefore\ x = -\frac{b}{2a}+\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}} \quad \text{يا} \quad x = -\frac{b}{2a}-\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$$

$$\therefore\ x = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad \text{يا} \quad x = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

تہ اِهو حل ٽوري ۾ $x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ ائين لکجي ٿو ۽ α (اَلفا)، β (بيٽا)

$\ldots\ldots (I)$ $\beta = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ ۽ $\alpha = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ $\therefore$ انهن اَکرن جي روپ ۾ ڏيکارجن ٿا.

$ax^2 + bx + c = 0$ هن مساوات ۾ a, b, c جا ملهہ $\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ هن روپ ۾ لکي،

حساب کي سؤلو روپ ڏنو، جيئن مساوات جو حل ملي. اِن کري $x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

کي ٻسگهي مساواتن کي حل کرڻ جو سوتر چئجي ٿو.

(ٻسگهي مساوات جي ٻن ملن مان کنهن بہ حل کي کھڙي بہ ڏيکاري سگھجي ٿي)

پھرين (I) وڏان بدران $\alpha = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ ۽ $\beta = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ ائين بہ مڃي سگھجي ٿو.

$\alpha = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ $\alpha = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, \alpha > \beta$ تہ $\alpha < \beta$ اِهو ڌيان ڏيو

حل کيل مثال

سوتر کم آڻي هيٺين ٻسگهي مساوات حل کريو

مثال (1) $m^2 - 14m + 13 = 0$

حل : $m^2 - 14m + 13 = 0$ کي

$ax^2 + bx + c = 0$ سان ڀيٽ کري

$a = 1,\ b = -14,\ c = 13,$

$\therefore\ b^2 - 4ac = (-14)^2 - 4\times 1\times 13$

$= 196 - 52$

$= 144$

$m = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$= \frac{-(-14)\pm\sqrt{144}}{2\times 1}$

$= \frac{14\pm 12}{2}$

$\therefore\ m = \frac{14+12}{2}$ يا $m = \frac{14-12}{2}$

$\therefore\ m = \frac{26}{2}$ يا $m = \frac{2}{2}$

$\therefore\ m = 13$ يا $m = 1$

$\therefore$ ٻسگهي مساوات جا جزا 1 ۽ 13 آهن.

مثال (2) $x^2 + 10x + 2 = 0$

حل : $x^2 + 10x + 2 = 0$ جي

$ax^2 + bx + c = 0$ سان پيٽ ڪري

$$a = 1,\ b = 10,\ c = 2,$$

$$\therefore\ b^2 - 4ac = (10)^2 - 4 \times 1 \times 2$$

$$= 100 - 8$$

$$= 92$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-10 \pm \sqrt{92}}{2 \times 1}$$

$$= \frac{-10 \pm \sqrt{4 \times 23}}{2}$$

$$= \frac{-10 \pm 2\sqrt{23}}{2}$$

$$= \frac{2(-5 \pm \sqrt{23})}{2}$$

$$\therefore\ x = -5 \pm \sqrt{23}$$

$\therefore\ x = -5 + \sqrt{23}$ يا $x = -5 - \sqrt{23}$

$\therefore$ پسگهي مساوت جا جزا $-5 + \sqrt{23}$ ۽ $-5 - \sqrt{23}$ آهن.

مثال (3) $x^2 - 2x - 3 = 0$

حل $ax^2 + bx + c = 0$ جي پيٽ ڪري

$$a = 1,\ b = -2,\ c = -3,$$

$$\therefore\ b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 4 + 12 = 16$$

$\therefore\ x = \dfrac{-(-2) + \sqrt{16}}{2}$ يا $x = \dfrac{-(-2) - \sqrt{16}}{2}$

$= \dfrac{2+4}{2}$ يا $\dfrac{2-4}{2}$

$= 3$ يا -1

وڌيڪ ڄاڻ لاءِ

$x^2 - 2x - 3 = 0$ اها ٻيگهي مساوت هيٺ گرافي طريقي حل ڪئي ويئي آهي، اِهو سمجهي وٺو

$x^2 - 2x - 3 = 0$ معني $x^2 = 2x + 3$

x جي جنهن ملهه سان $x^2 = 2x + 3$ هن مساوت جو حل نڪرندو، اُهو ملهه ئي مساوت جو حل آهي.

$y = x^2 = 2x + 3$ سمجهو ته $y = x^2$ ۽ $y = 2x + 3$ اِنهن مساوتن جو گراف ڪيو.

$y = x^2$

x	3	2	1	0	−1	−2	−3
y	9	4	1	0	1	4	9

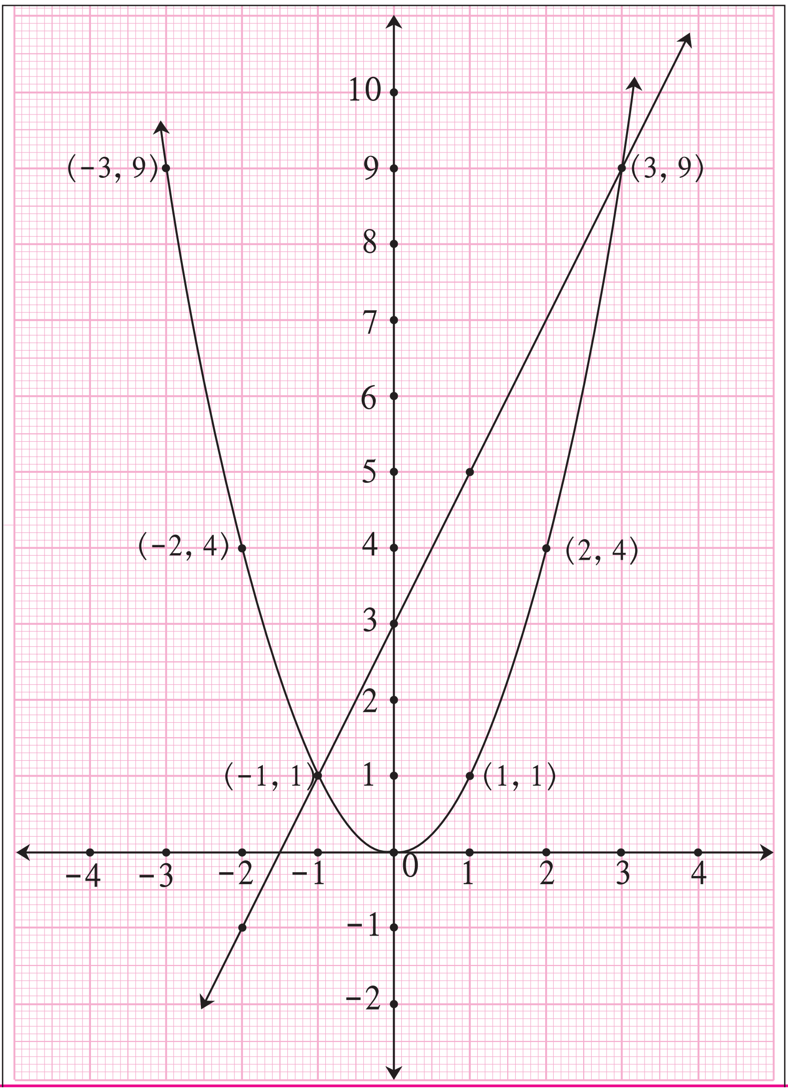
$y = 2x + 3$

x	−1	0	1	−2
y	1	3	5	−1

اِهي گراف هڪ ٻئي کي (-1,1) ۽ (3,9) اِنهن ٽٻڪن وٽ ڪپين ٿا.

$\therefore$ $x^2 = 2x + 3$ هن مساوت جو، يعني $x^2 - 2x - 3 = 0$ جو حل $x = -1$ ۽ $x = 3$ آهي.

گڏ ڏنل شڪل ۾ $y=x^2$ ۽ $y=2x+3$ اِنهن مساوتن جو گراف ڪڍيو ويو آهي. اِنهن جي ڪپيندڙ ٽٻڪي وٽ $x^2=2x+3$ هن مساوت جو، يعني $x^2-2x-3=0$ جو حل ڪيئن ملندو، اِهو سمجهي وٺو.



مثال (4) $25x^2 + 30x + 9 = 0$

حل $25x^2 + 30x + 9 = 0$ جي

$ax^2 + bx + c = 0$ سان ڀيٽ ڪري

$a = 25,\ b = 30,\ c = 9,$

$\therefore\ b^2 - 4ac = (30)^2 - 4 \times 25 \times 9$

$= 900 - 900 = 0$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-30 \pm \sqrt{0}}{2 \times 25}$$

$\therefore\ x = \frac{-30+0}{50}$ يا $x = \frac{-30-0}{50}$

$\therefore\ x = -\frac{30}{50}$ يا $x = -\frac{30}{50}$

$\therefore\ x = -\frac{3}{5}$ يا $x = -\frac{3}{5}$

ڏيان ڏيو، $25x^2 + 30x + 9 = 0$

ھن مساوت جا ٻيئي جزا ھڪجھڙا آھن.

ساڳيءَ طرح $25x^2 + 30x + 9 = 0$.

يعني $(5x + 3)^2 = 0$ اِھو ڏيان ڏيو.

مثال (5) $x^2 + x + 5 = 0$

حل $x^2 + x + 5 = 0$ جي

$ax^2 + bx + c = 0$ سان ڀيٽ ڪري

$a = 1,\ b = 1,\ c = 5,$

$\therefore\ b^2 - 4ac = (1)^2 - 4 \times 1 \times 5$

$= 1 - 20$

$= -19$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{-19}}{2 \times 1}$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{-19}}{2}$$

پر $\sqrt{-19}$ اِھو حقيقي عدد نہ آھي يعني ڏنل ٻسگھي مساوت جا جزا حقيقي عدد نہ آھن.

مشغولي : $2x^2 + 13x + 15 = 0$ اھاٻسگھي مساوت جزا ڪيڏڻ واري طريقي، پوري ٻي سگھہ وارو طريقو ۽ ٻسگھي سوتر کي ڪم آڻي حل ڪريو. جواب ساڳيا اَچن ٿا ڇا، اِھا جاچ ڪريو.

اَڀياس 2.4

1. ھيٺين ٻسگھي مساوتن کي پرماڻڪ روپ سان ڀيٽ ڪري c,b,a جو ملھہ لھو.

(1) $x^2 - 7x + 5 = 0$ (2) $2m^2 = 5m - 5$ (3) $y^2 = 7y$

2. ھيٺين ٻسگھي مساوتن کي سوتر ڪم آڻڻ واري طريقي سان حل ڪريو.

(1) $x^2 + 6x + 5 = 0$ (2) $x^2 - 3x - 2 = 0$ (3) $3m^2 + 2m - 7 = 0$

(4) $5m^2 - 4m - 2 = 0$ (5) $y^2 + \frac{1}{3}y = 2$ (6) $5x^2 + 13x + 8 = 0$

.3 $x^2 + 2\sqrt{3}x + 3 = 0$ اها ٻسگهي مساوت سوتر کم آڻڻ واري طريقي سان هيٺ ڏنل هڪ شڪل ۾ ڏنل چاڻ وسيلي حل ڪريو.

حل :

$x^2 + 2\sqrt{3}x + 3 = 0$ جي $ax^2 + bx + c = 0$ سان ڀيٽ ڪري a,b,c جا ملهه لهو. →	$b^2 - 4ac$ جو ملهه ڪڍو. →	ٻسگهي مساوت حل ڪرڻ جو سوتر →	سوتر ۾ ملهه وجهي حل ڪڍو

چاڪي وٺون

ٻسگهي مساوتن جي حلن جا قسم (Nature of roots of a quadratic equation)

ٻسگهي مساوت $ax^2 + bx + c = 0$ جا جزا $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ اِهي هوندا آهن،
اِهو آسان اَپياس ڪيو آهي.

(1) جيڪڏهن $b^2 - 4ac = 0$ آهي $\therefore$ $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{0}}{2a}$ $x = \dfrac{-b + 0}{2a}$ ۽ $x = \dfrac{-b - 0}{2a}$

$\therefore$ ٻسگهي مساوت جا جزا حقيقي ۽ برابر آهن.

(2) جيڪڏهن $b^2 - 4ac > 0$ آهي تہ $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

يعني $x = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ۽ $x = \dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$\therefore$ ٻسگهي مساوت جا جزا حقيقي ۽ اڻ ساڳيا آهن.

(3) جيڪڏهن $b^2 - 4ac < 0$ آهي تہ $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
اهو حقيقي عدد نہ آهي يعني هنن ٻسگهي مساوت جا جزا حقيقي نہ آهن.

ٻسگهي مساوت $ax^2 + bx + c = 0$ جي جزن جو قسم $b^2 - 4ac$ جي ملهہ تي مقرر ٿيندو آهي.
اِنڪري $b^2 - 4ac$ کي ٻسگهي مساوت جو ڊسڪريمينٽ (discriminant) چئجي ٿو اِهو Δ
(ڊيلٽا) نشاني ۽ سان ڏيکاريو آهي (Δ اِهو هڪ تريڪ اَکر آهي)

مشغولي: هيٺ ڏنل چاڻ وسيلي خال ڀريو :

ڊسڪريمينٽ جو ملهہ		جزن جو قسم
(1) 50	←	
(2) -30	←	
(3) 0	←	

حل ڪيل مثال

مثال **(1)** $x^2 + 10x - 7 = 0$ اِن ٻسگهي مساوت جي ڊسڪريميننٽ جو ملهه لهو

حل : $x^2 + 10x - 7 = 0$ جي ڀيٽ $ax^2 + bx + c = 0$ سان ڪرڻ سان

$$a = 1,\ b = 10,\ c = -7,$$

$$\therefore\ b^2 - 4ac = 10^2 - 4 \times 1 \times (-7)$$

$$= 100 + 28$$

$$= 128$$

مثال **(2)** ڊسڪريميننٽ مان ٻسگهي مساوتن جي جزن جو قسم ٻڌايو.

(i) $2x^2 - 5x + 7 = 0$

حل : $2x^2 - 5x + 7 = 0$ ڀيٽ سان

$ax^2 + bx + c = 0$ ڪري هتي

$a = 2,\ b = -5,\ c = 7$

$\therefore\ b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \times 2 \times 7$

$\therefore\ \Delta = 25 - 56$

$= -31$

$\therefore\ b^2 - 4ac < 0$

$\therefore$ ٻسگهي مساوت جا جزا حقيقي ۽ اڻ سا ڳيا آهن.

(ii) $x^2 + 2x - 9 = 0$

حل : $x^2 + 2x - 9 = 0$ ڀيٽ سان

$ax^2 + bx + c = 0$ ڪري هتي

$a = \square,\ b = 2,\ c = \square$

$\therefore\ b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \times \square \times \square$

$\therefore\ \Delta = 4 + \square$

$= 40$

$\therefore\ b^2 - 4ac > 0$

$\therefore$ ٻسگهي مساوت جا جزا حقيقي عدد نہ آهن.

(iii) $\sqrt{3}x^2 + 2\sqrt{3}x + \sqrt{3} = 0$

حل : $\sqrt{3}x^2 + 2\sqrt{3}x + \sqrt{3} = 0$ ڀيٽ سان

$ax^2 + bx + c = 0$

$a = \sqrt{3},\ b = 2\sqrt{3},\ c = \sqrt{3},$ ڪري هتي

$$\therefore\ b^2 - 4ac = (2\sqrt{3})^2 - 4 \times \sqrt{3} \times \sqrt{3}$$

$$= 4 \times 3 - 4 \times 3$$

$$= 12 - 12$$

$$= 0$$

$\therefore$ ٻسگهي مساوت جا جزا حقيقي ۽ سا ڳيا آهن.

جاڳي وٺون

ٻسگهي مساوات جي جزن ۽ ڳڻڪن جي وچ ۾ لاڳاپو
(Relation between roots and coefficients of a quadratic equation)

جيڪڏهن $ax^2 + bx + c = 0$ هن ٻسگهي مساوات جا جزا α ۽ β هجن ته

$$\alpha + \beta = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} + \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$= -\frac{2b}{2a}$$

$$\therefore \alpha + \beta = -\frac{b}{a}$$

$$\alpha \times \beta = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \times \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$= \frac{\left(-b+\sqrt{b^2-4ac}\right)\times\left(-b-\sqrt{b^2-4ac}\right)}{4a^2}$$

$$= \frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2}$$

$$= \frac{4ac}{4a^2}$$

$$= \frac{c}{a}$$

$$\therefore \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

مشغولي : هيٺ ڏنل چوڪنڊن ۾ مناسب انگ لکو

$10x^2 + 10x + 1 = 0$ ۾ $\alpha + \beta =$ ☐ ۽

$\alpha \times \beta =$ ☐

حل ڪيل مثال

مثال (1) α ۽ β هن $2x^2 + 6x - 5 = 0$ ٻسگهي مساوات جا جزا آهن، ته $\alpha + \beta$ ۽ $\alpha \times \beta$ جا ملهه لهو.

حل : $2x^2 + 6x - 5 = 0$ جي ڀيٽ $ax^2 + bx + c = 0$ سان ڪرڻ سان

$$\therefore\ a = 2,\ b = 6,\ c = -5$$

$$\therefore\ \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -\frac{6}{2} = -3$$

$$\text{۽}\ \alpha \times \beta = \frac{c}{a} = \frac{-5}{2}$$

مثال (2) $x^2 - 13x + k = 0$ هن ٻسگهي مساوت جي جزن ۾ فرق 7 آهي، تہ k جو ملهہ لهو.

حل : $x^2 - 13x + k = 0$ جي ڀيٽ $ax^2 + bx + c = 0$ ڪرڻ سان

$$a = 1,\ b = -13\ ,\ c = k$$

سمجهو تہ α ۽ β اِهي ڏنل ٻسگهي مساوت جا جزا آهن. $\alpha > \beta$

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -\frac{(-13)}{1} = 13 \quad \cdots\cdots\cdots \text{(I)}$$

پر $\alpha - \beta = 7$ .... (ڏنل آهي) (II)

$2\alpha = 20$ .... (مساوت (I) ۽ (II) جوڙ ڪرڻ سان)

$$\therefore\ \alpha = 10$$

$\therefore\ 10 + \beta = 13$ ...... ((I) ۾)

$$\therefore\ \beta = 13 - 10$$

$$\therefore\ \beta = 3$$

پر $\alpha \times \beta = \frac{c}{a}$

$$\therefore\ 10 \times 3 = \frac{k}{1}$$

$$\therefore\ k = 30$$

مثال (3) α ۽ β اِهي $x^2 + 5x - 1 = 0$ ٻسگهي مساوت جا جزا آهن تہ

ملهہ لهو $\text{(i)}\ \alpha^3 + \beta^3 \quad \text{(ii)}\ \alpha^2 + \beta^2$

حل : $x^2 + 5x - 1 = 0$

هتي $a = 1,\ b = 5\ ,\ c = -1$

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a} = \frac{-5}{1} = -5$$

$$\alpha \times \beta = \frac{c}{a} = \frac{-1}{1} = -1$$

(i)
$$\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta)$$
$$= (-5)^3 - 3 \times (-1) \times (-5)$$
$$= -125 - 15$$
$$\alpha^3 + \beta^3 = -140$$

(ii)
$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$$
$$= (-5)^2 - 2 \times (-1)$$
$$= 25 + 2$$
$$\alpha^2 + \beta^2 = 27$$

چاڪي وٺون

جزا ڏنل هجڻ تہ ٻسگهي مساوت ڪيئن حاصل ڪجي؟
(To obtain a quadratic equation having given roots)

سمجهو تہ α ۽ β اِهي x قيرائتي واري ٻسگهي مساوت جا جزا آهن.

$\therefore\ x = \alpha$ يا $x = \beta$

$\therefore\ x - \alpha = 0$ يا $x - \beta = 0$

$\therefore\ (x - \alpha)(x - \beta) = 0$

$\therefore\ x^2 - \alpha x - \beta x + \alpha\beta = 0$

$\therefore\ x^2 - (\alpha + \beta) x + \alpha\beta = 0$

يعني α ۽ β جزا هوندڙ مساوت

x^2 – جزن جي ضرب اُپٽ x + (جزن جي جوڙ اُپٽ) = 0 اهو سوترملي ٿو.

مشغولي (I) : جزن جي جوڙ اُپٽ 10 ۽ جزن جي ضرب اُپٽ 9 هوندڙ ٻسگهي مساوت لکو.

$x^2 - \square x + \square = \square$ ٻسگهي مساوت

مشغولي (II) : $\alpha = 2$ ۽ $\beta = 5$ اِهي جزا هوندڙ ٻسگهي مساوت ڪهڙي آهي؟

ائين لکي سگهجي ٿو $x^2 + (\square + \square)x + \square \times \square = 0$

معني $x^2 - \square x + \square = 0$

هن مساوت کي ڪهڙي بہ ٻڙي انگہ سان ضرب ڪرڻ ملندڙ مساوت جا جزا α ۽ β هوندا، اهو ڌيان تي رکو.

حل ڪيل مثال

مثال : جنهن ٻسگهي مساوت جا جزا 3- ۽ 7- آهن، اُها ٻسگهي مساوت تيار ڪريو.

حل : سمجهو تہ $\alpha = -3$ ۽ $\beta = -7$

$\therefore\ \alpha + \beta = (-3) + (-7) = -10$ ۽ $\alpha \times \beta = (-3) \times (-7) = 21$

$\therefore$ ملندڙ ٻسگهي مساوت $x^2 - (\alpha + \beta) x + \alpha\beta = 0$

$\therefore\ x^2 - (-10) x + 21 = 0$

$\therefore\ x^2 + 10x + 21 = 0$

ياد رکو

(1) $ax^2 + bx + c = 0$ هن ٻسگهي مساوات جا جزا α ۽ β آهن تہ

(i) $\alpha = \dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ ۽ $\beta = \dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

(ii) $\alpha + \beta = -\dfrac{b}{a}$ ۽ $\alpha \times \beta = \dfrac{c}{a}$

(2) $ax^2 + bx + c = 0$ ٻسگهي مساوات جي جزن جو قسم $b^2 - 4ac$ جي ملهہ تي مدار رکي ٿو هن ملهہ کي ڊسڪريمينَنٽ (discriminant) چئجي ٿو. Δ گريڪ اَکر سان ڏيکاربو آهي.

(3) جيڪڏهن $\Delta=0$ آهي تہ ٻسگهي مساوات جا ٻيئي جزا ساڳيا حقيقي عدد هوندا
آهن جيڪڏهن $\Delta > 0$ آهي تہ ٻسگهي مساوات جا ٻيئي جزا اَڻ ساڳيا حقيقي عدد
هوندا آهن جيڪڏهن $\Delta < 0$ تہ ٻسگهي مساوج جا جزا حقيقي عدد نہ هوندا آهن.

(4) جنهن ٻسگهي مساوات جا جزا β ۽ α آهن تہ $x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$ آهي.

اَڀياس 2.5

1. مشغولي : هيٺيان چؤکنڊا ڀريو.

(1) ٻسگهي مساوات $ax^2 + bx + c = 0$ → $b^2 - 4ac = 5$ / $b^2 - 4ac = -5$ → جزن جو قسم

(2) جزن جي جوڙ اُپت $= -7$ ← ٻسگهي مساوات . . . . → جزن جي ضرب اُپت $= 5$

(3) جيڪڏهن α ۽ β هيٺين ٻسگهي مساوات جا جزا آهن تہ

$2x^2 - 4x - 3 = 0$ → $\alpha + \beta = ...$ ؛ $\alpha \times \beta = ...$

2. هيٺين ٻسگهي مساوتن جي ڊسڪريمينَنٽ جو ملهہ لهو

(1) $x^2 + 7x - 1 = 0$ (2) $2y^2 - 5y + 10 = 0$ (3) $\sqrt{2}x^2 + 4x + 2\sqrt{2} = 0$

3. هيٺين مساوتن جي ڊسڪريمينَنٽس مان جزن جا قسم ٻڌايو :

(1) $x^2 - 4x + 4 = 0$ (2) $2y^2 - 7y + 2 = 0$ (3) $m^2 + 2m + 9 = 0$

4. ٻسگهي مساواتون ٺاهيو جڏهن مساواتن جا جزا هيٺيان آهن.

(1) 0 ۽ 4 (2) 3 ۽ −10 (3) $\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$ (4) $2-\sqrt{5}, 2+\sqrt{5}$

★5. $x^2 - 4kx + k + 3 = 0$ ٻسگهي مساوات جي جزن جي جوڙ اُپ اِنجي ضرب اُپت جي ٻيڻ آهي تہ k جو ملهہ لهو.

★6. جيڪڏهن α ۽ β اِهي $y^2 - 2y - 7 = 0$ ٻسگهي مساوات جا جزا آهن تہ (1) $\alpha^3 + \beta^3$ (2) $\alpha^2 + \beta^2$ جا ملهہ لهو.

7. هيٺين ٻہ سگهي مساوات جا جزا حقيقي ۽ ساڳيا آهن تہ k جو ملهہ لهو.

(1) $3y^2 + ky + 12 = 0$ (2) $kx(x - 2) + 6 = 0$

چاڪي وٺون

ٻسگهي مساواتن جو اُپيوگ (Application of quadratic equation)

روز مرهہ جي زندگيءَ ۾ ڪيترن وشين ڪي حل ڪرڻ لاءِ ٻسگهي مساواتن جي ضرورت پوندي آهي. اِهو باب آسان هن حصي ۾ سکڻ وارا آهيون.

مثال (1) تُوسا ۾ شري رتناڪر راو جي کيتيءَ ۾ گوني ڪنڊ واري چؤڪنڊي بصر رکڻ جي پيٽيءَ جي تري جي ڊيگهہ، ويڪر کان 7 ميٽر وڌيڪ آهي ۽ اُريب ڊيگهہ کان 1 ميٽر وڌيڪ آهي تہ اِن بصر رکڻ واري پيٽيءَ جي ڊيگهہ ۽ ويڪر لهو.

∴ ڊيگهہ = $(x + 7)$ ميٽر اُريب $= x + 7 + 1 = (x + 8)$ ميٽر

پئٿاگورس جو نيم ڪم آهي

$$x^2 + (x + 7)^2 = (x + 8)^2$$

$$x^2 + x^2 + 14x + 49 = x^2 + 16x + 64$$

$$\therefore x^2 + 14x - 16x + 49 - 64 = 0$$

$$\therefore x^2 - 2x - 15 = 0$$

$$\therefore \underline{x^2 - 5x} + \underline{3x - 15} = 0$$

$$\therefore x(x - 5) + 3(x - 5) = 0$$

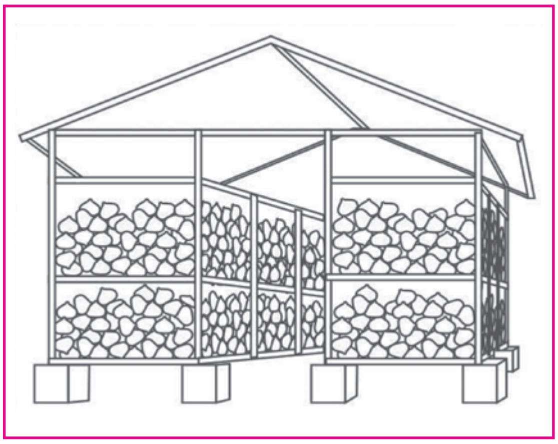
$$\therefore (x - 5)(x + 3) = 0$$

∴ $x - 5 = 0$ يا $x + 3 = 0$

∴ $x = 5$ يا $x = -3$

∴ $x \neq -3$ پر ويڪر ڪاٿو نٿي ٿي سگهي

∴ $x = 5$ ۽ $x + 7 = 5 + 7 = 12$



بصر رکڻ جي پيٽي

∴ بصر جي پيٽيءَ جي تري جي ڊيگهہ 12ميٽر ۽ ويڪر 5 ميٽر آهي.

مثال : (2) هڪ ريل گاڏي يڪسان رفتار سان 360 ڪ م مفاصلوطيءِ ڪري ٿي. پر هن جي رفتار 5 ڪ م في ڪلاڪ وڌائڻ سان هن کي ساڳيو مفاصلو طيءِ ڪرڻ ۾ 48 منٽ گهٽ لڳندا, تہ ريل گاڏيءَ جي شروعاتي رفتار لهو.

حل : سمجهو تہ ريل گاڏيءَ جي شروعاتي رفتار x ڪ م في ڪلاڪ آهي.

∴ رفتار وڌائڻ کانپوءِ هن جي رفتار $(x+5)$ ڪ م في ڪلاڪ آهي.

360 ڪ م مفاصلو طيءِ ڪرڻ لاءِ شروعاتي لڳندڙ وقت = $\frac{\text{مفاصلو}}{\text{رفتار}} = \frac{360}{x}$ ڪلاڪ

رفتار وڌائڻ کانپوءِ اُهو مفاصلو طيءِ ڪرڻ لاءِ لڳندڙ وقت ڪلاڪ = $\frac{360}{x+5}$

ڏنل شرط مطابق

$$\frac{360}{x+5} = \frac{360}{x} - \frac{48}{60} \quad \text{-----} \; (\because \; 48 \text{ منٽ} = \frac{48}{60} \text{ ڪلاڪ})$$

$$\therefore \frac{360}{x} - \frac{360}{x+5} = \frac{48}{60}$$

$$\therefore \frac{1}{x} - \frac{1}{x+5} = \frac{48}{60\times 360} \quad \text{-----} \; (\text{ٻنهي پاسي 360 سان ونڊ ڪري})$$

$$\therefore \frac{x+5-x}{x(x+5)} = \frac{4}{5\times 360}$$

$$\therefore \frac{5}{x^2+5x} = \frac{1}{5\times 90}$$

$$\therefore \frac{5}{x^2+5x} = \frac{1}{450}$$

$$\therefore x^2 + 5x = 2250$$

$$\therefore x^2 + 5x - 2250 = 0$$

$$\therefore \underline{x^2 + 50x} - \underline{45x - 2250} = 0$$

$$\therefore x\underline{(x + 50)} - 45\,\underline{(x + 50)} = 0$$

-2250 → $+50$, -45

$$\therefore (x + 50)(x - 45) = 0$$

$$\therefore x + 50 = 0 \;\; \text{يا} \;\; x - 45 = 0$$

$$\therefore x = -50 \;\; \text{يا} \;\; x = 45$$

$x \neq -50$ ∴ پر رفتار ڪاٽو نہ ٿي ٿئي سگهي

$$\therefore x = 45$$

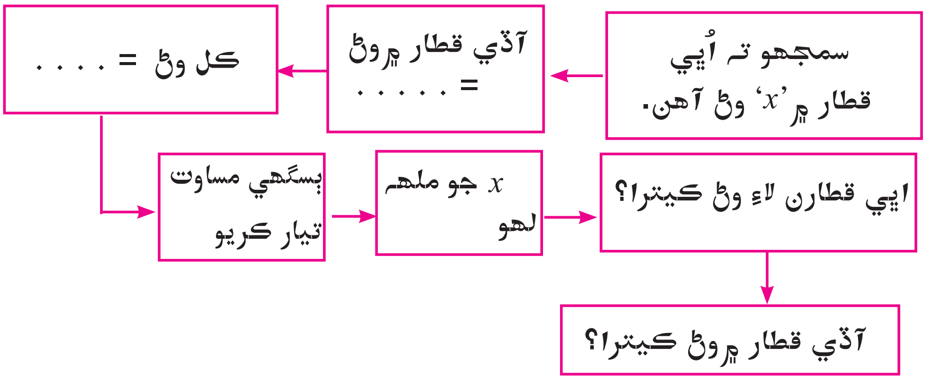
∴ ريل گاڏيءَ جي شروعاتي رفتار 45 ڪ م في ڪلاڪ آهي.

اڀياس 2.6

1. پرگتيءَ جي 2 سال اڳ جي ۽ 3 سال پوءِ جي عمرن جي ضرب اُپت 84 آهي، تہ هن جي هاڻوڪي عمر ڪيتري آهي؟

2. ٻن لاڳيتن قدرتي ٻڌي عددن جي ٻي سگهہ جي جوڙ اُپت 244 آهي تہ اِهي عدد لهو.

3. شري مدوُسوُدن جي نارنگين جي باغ ۾ آڌي قطار ۾ وڻن جو انداز اُڀي قطار ۾ وڻن جي اَنداز کان 5 وڌيڪ آهي. جيڪڏهن نارنگين جي باغ ۾ ڪل 150 وڻ آهن تہ آڌي ۽ اُڀي قطار ۾ وڻن جو انداز لهو.



4. وويڪ، ڪشور کان 5 سال وڏو آهي، اُنهن جي عمر جي ضرب موجب اُبتڙ اَنگن جو جوڙ $\frac{1}{6}$ آهي تہ اُنهن جي هاڻوڪي عمر لهو.

5. سوپن کي حسابن ۾ پهرين ٽيسٽ ۾ ٻين ٽيسٽ کان 10 مارڪون وڌيڪ مليون. ٻين ٽيسٽ جي مارڪن جي پنجوُڻ پهرين ٽيسٽ جي مارڪن جي ٻي سگهہ جيتريون آهن، تہ هن جون پهرين ٽيسٽ ۾ مارڪون ڪيتريون آهن؟

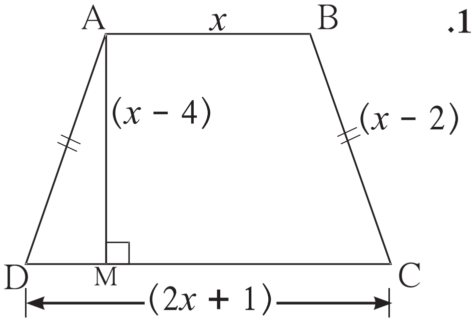
★6. شري قاسم کي مٽيءَ جا برتن ٺاهڻ جو گهرو ڌنڌو آهي. هوُ هرروز مقرر اَنداز ۾ برتن ٺاهيندو آهي. هرهڪ برتن جي ٺاهڻ جي قيمت ۽ هڪ ڏينهن ۾ ٺاهيل برتنن جو اَنداز لهو.

★7. پرتيڪ کي ٻيڙيءَ رستي 36 ڪم نديءَ ۾ متاهين طرف ۽ واپس اُنهيءَ جڳهہ تي پهچڻ لاءِ 8 ڪلاڪ لڳن ٿا. جيڪڏهن بيٺل پاڻيءَ ۾ ٻيڙيءَ جي رفتار 12 ڪم في ڪلاڪ آهي تہ نديءَ جي وهڪري جي رفتار لهو.

★8. پنٽوءَ کي هڪ ڪم ڪرڻ لاءِ نشوءَ کان 6 ڏينهن وڌيڪ لڳن ٿا. ٻيئي گڏجي ڪم ڪن ٿا تہ ڪم ڪرڻ لاءِ کين 4 ڏينهن لڳن ٿا. تہ اُهو ڪم اَڪيلي سِر پوري ڪرڻ لاءِ هرهڪ کي ڪيترا ڏينهن لڳندا؟

★9. 460 عدد کي هڪ قدرتي اَنگہ سان ونڊ ڪرڻ سان ونڊ اُپت، ونڊيندڙ جي پنجوڻ کان 6 وڌيڪ ٿئي ٿي ۽ باقي 1 بچي ٿي تہ ونڊ اُپت ۽ ونڊيندڙ لهو.

★10. ڏنل ٻيپور پاسي ٽرٽيپرنريم □ABCD ۾ AB || CD آهي ۽ اِن جي پکيڙ 33 چورس س م آهي، تہ شڪل ۾ ڏنل ڄاڻ وسيلي چؤڪنڊي جي چئني پاسن جي ڊيگهہ لهو.



حل : $\square ABCD$ پيور پاسو ٽرئپريزيم آهي $AB \parallel CD$

$A(\square ABCD) = \frac{1}{2}(AB + CD)$ $\square$

$\therefore\ 33 = \frac{1}{2}(x + 2x + 1) \times$ $\square$

$\therefore$ $\square$ $= (3x + 1) \times$ $\square$

$\therefore\ 3x^2 +$ $\square$ $-$ $\square$ $= 0$

$\therefore\ 3x(\ldots\ldots) + 10(\ldots\ldots) = 0$

$\therefore\ (3x + 10)(----) = 0$

$\therefore\ (3x + 10) = 0$ يا $\square = 0$

$\therefore\ x = -\frac{10}{3}$ يا $x =$ $\square$

پر ڊيگهه ڪاٿو نه ٿي ٿي سگهي.

$\therefore\ x \neq -\frac{10}{3}$ $\quad \therefore\ x =$ $\square$

$AB = ---,\ CD = ---,\ AD = BC = ---$

گڏيل اَڀياس 2

1. هيٺين سوالن ۾صحيح جواب چونڊيو :

(1) هيٺين مان ڪهڙي ٻسگهي مساوت آهي؟

(A) $\frac{5}{x} - 3 = x^2$ (B) $x(x + 5) = 2$ (C) $n - 1 = 2n$ (D) $\frac{1}{x^2}(x + 2) = x$

(2) هيٺين مان ڪهڙي ٻسگهي مساوت نه آهي؟

(A) $x^2 + 4x = 11 + x^2$ (B) $x^2 = 4x$ (C) $5x^2 = 90$ (D) $2x - x^2 = x^2 + 5$

(3) $x^2 + kx + k = 0$ جا جزا حقيقي ۽ ساڳيا آهن ته هيٺين ملهن مان k جو ملهه ڪهڙو آهي؟

(A) 0 (B) 4 (C) 0 يا 4 (D) 2

(4) $\sqrt{2}x^2 - 5x + \sqrt{2} = 0$ ۾هيٺين مان ڊسڪريمينٽ جو ملهه ڪهڙو آهي؟

(A) -5 (B) 17 (C) $\sqrt{2}$ (D) $2\sqrt{2} - 5$

(5) هيٺين مان ڪهڙي مساوت جا جزا 3 ۽ 5 آهن؟

(A) $x^2 - 15x + 8 = 0$ (B) $x^2 - 8x + 15 = 0$

(C) $x^2 + 3x + 5 = 0$ (D) $x^2 + 8x - 15 = 0$

(6) هيٺين مان ڪهڙي مساوت جي جزن جي جوڙ اُپٽ 5- آهي؟

(A) $3x^2 - 15x + 3 = 0$ (B) $x^2 - 5x + 3 = 0$

(C) $x^2 + 3x - 5 = 0$ (D) $3x^2 + 15x + 3 = 0$

(7) $\sqrt{5}m^2 - \sqrt{5}m + \sqrt{5} = 0$ لاءِ هيٺين وڌانن مان ڪهڙو وڌان لاڳو ٿئي ٿو؟

(A) حقيقي۽ اڻ ساڳيا جزا (B) حقيقي ۽ ساڳيا جزا

(C) جزا حقيقي اَنگ نه آهن (D) ٽي جزا

(8) $x^2 + mx - 5 = 0$ ٻسگهي مساوت جو هڪ جزو 2 آهي ته هيٺين مان m جو ملهه ڪيترو آهي.

(A) -2 (B) $-\frac{1}{2}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) 2

.2 هيٺين مان ڪهڙيون مساواتون ٻسگهي مساواتون آهن؟

(1) $m^2 + 2m + 11 = 0$ (2) $x^2 - 2x + 5 = x^2$ (3) $(x + 2)^2 = 2x^2$

.3 هيٺين مان هرهڪ مساوات جي ڊسڪريمينٽ جو ملهه لهو

(1) $2y^2 - y + 2 = 0$ (2) $5m^2 - m = 0$ (3) $\sqrt{5}x^2 - x - \sqrt{5} = 0$

.4 $2x^2 + kx - 2 = 0$ ٻسگهي مساوات جو هڪ جزو 2- آهي، تہ k جو ملهہ ڪيترو آهي؟

.5 اهڙيون ٻسگهي مساواتون ڳوليو جن جا جزا هيٺيان آهن

(1) 10 ۽ -10 (2) $1-3\sqrt{5}$ ۽ $1+3\sqrt{5}$ (3) 0 ۽ 7

.6 هيٺ ڏنل ٻسگهي مساوات جي جزن جو قسم ٻڌايو

(1) $3x^2 - 5x + 7 = 0$ (2) $\sqrt{3}x^2 + \sqrt{2}x - 2\sqrt{3} = 0$ (3) $m^2 - 2m + 1 = 0$

.7 هيٺيون ٻسگهي مساواتون حل ڪريو :

(1) $\frac{1}{x+5} = \frac{1}{x^2}$ $(x \neq 0, x + 5 \neq 0)$ (2) $x^2 - \frac{3x}{10} - \frac{1}{10} = 0$ (3) $(2x + 3)^2 = 25$

(4) $m^2 + 5m + 5 = 0$ (5) $5m^2 + 2m + 1 = 0$ (6) $x^2 - 4x - 3 = 0$

★.8 $(m - 12)x^2 + 2(m - 12)x + 2 = 0$ ٻسگهي مساوات جا جزا حقيقي ۽ ساڳيا آهن تہ m جو ملهہ لهو.

★.9 هڪ ٻسگهي مساوات جي ٻن جزن جي جوڙ اُپت 5 ۽ اُنهن جي ٽيِن سگهہ جي جوڙ اُپت 35 آهي، تہ اُها ٻسگهي مساوات ڪهڙي آهي؟

★.10 اهڙي ٻسگهي مساوات ڳوليو جنهن جا جزا $2x^2 + 2(p + q)x + p^2 + q^2 = 0$ مساوات جي جزن جي جوڙ اُپت جي ٻي سگهہ ۽ تفاوت جي ٻي سگهہ آهن.

★.11 مڪند وٽ ساگر کان 50 رپيا وڌيڪ آهن. اُنهن وٽ جيڪي رقمون آهن اُنهن جي ضرب اُپت 15000 آهي تہ هرهڪ وٽ ڪيتري رقم آهي؟

★.12 ٻن عددن جي ٻي سگهہ ۾ تفاوت 120 آهي ننڍي عددن جي ٻي سگهہ، وڏي عدد جي ٻيڻ جيترو آهي تہ اِهي عدد لهو.

★.13 رنجنا کي جنم ڏينهن تي 540 نارنگيون ڪجهہ وديارٿين ۾ ورهائڻيون آهن جيڪڏهن 30 شاگرد وڌيڪ ٿي وڃن ٿا تہ هرهڪ ٿي نارنگيون گهٽ ملن ٿيون تہ وديارٿين جو اَنداز لهو.

★.14 تڙويل ۾ هڪ ڪسان شري دنيش جي مستطيل ڪيتي جي ڊيگهہ، ويڪر جي ٻيڻ کان 10 ميٽر وڌيڪ آهي هن اُن کيت ۾ برسات جو پاڻي ڪٺو ڪري رکڻ لاءِ کيتي جي ويڪر جي $\frac{1}{3}$ حصي پاسي واري چورس شڪل واري کيت جو ترو ٺاهيو آهي هتي اَصلي کيت جي پکيڙ کيت جي کوهہ جي تري جي پکيڙ جي ويهڻ آهي تہ اُن کيت جي ڊيگهہ ۽ ويڪر ۽ چورس جي پاسي جي ڊيگهہ لهو.

★.15 هڪ ٽانڪي ٻن نلڪن وسيلي ٻن ڪلاڪن ۾ پوري ڀر جي ٿي فقط ننڍي نلڪي سان ٽانڪي ڀرڻ ۾ لڳندڙ وقت، فقط وڏي نلڪي سان ٽانڪي ڀرڻ جي لڳندڙ وقت کان 3 ڪلاڪ وڌيڪ آهي تہ هرهڪ نلڪي سان ٽانڪي ڀرڻ ۾ ڪيترو وقت لڳي ٿو؟ □□□

PDK192

3 اَنگي پروگريشن

اچو تہ سکون

- سلسلو
- اَنگي پروگريشن سلسلي جو n پد
- اَنگي پروگريشن سلسلو
- اَنگي پروگريشن جي سلسلي جي n پدن جي جوڙ اُپٽ

چاڻي وٺون

سلسلو (Sequence)

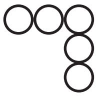
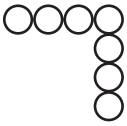
اَسان 1،2،3،4 ..... اِهي عدد سلسليوار لکندا آهيون. اِها عددن جي قطار آهي اِنهن عددن ۾ کهڙو عدد کهڙي جاءِ تي آهي اِهو ٻڌائي سگهون ٿا جيئن 13 اِهو عدد تيرهين نمبر جاءِ تي آهي.

عددن جي ٻي قطار ڏسو. هتي 1،4،9،16،25،36،49..... اِهي عدد خاص سلسلي ۾ لکيل آهن هتي $16=4^2$ اِهو عدد چوٿين نمبر جاءِ تي، تہ $25=5^2$ اِهو عدد 5 نمبر جاءِ تي آهي. $49=7^2$ اِهو عدد ستين نمبر جاءِ تي آهي يعني هن قطار ۾، کهڙو عدد کهڙي جاءِ تي آهي، اِهو ٻڌائي سگهجي ٿو.

کنهن خاص قاعدي اَنوسار، خاص نموني بندوبست کيل اَنگن جي ميڙ کي **سلسلو** چئجي ٿو.

سلسلي ۾ خاص جاءِ تي خاص عدد لکيا وڃن ٿا. اِهي عدد $a_1, a_2, a_3, a_4 . . ., a_n$ اهڙي سلسلي ۾ لکڻ سان a_1 اِهو پهريون a_2 اِهو ٻيو، . . . اَهڙيءَ طرح a_n اِهو n پد آهي اِها ڄاڻ ملي ٿي عددن جو سلسلو f_1, f_2, f_3، . . . اهڙن اَکرن سان ڏيکاريو ويندو آهي. اِهي مقرر سلسلي ۾ لکيل عدد آهن اِهو سمجهيو ويندو آهي.

کنهن ڪلاس جا ٻار قواعد لاءِ ميدان تي وڃي هڪ قطار ۾ بيٺا هئا اُنهن جو سلسلو مقرر ڪيو ويو هو اُن وقت اُنهن جو سلسلو تيار هو. کيترا ئي سلسما خاص نموني ۾ هوندا آهن اِهو اَسان اَڀياس ڪري چڪا هينئيون خاص نمونو وارو سلسلو پورو ڪريو :

خاص سلسلو									
گولن جو انداز	1	3	5	7					

خاص سلسلو	ΔΔ Δ ΔΔ	ΔΔΔ Δ Δ ΔΔΔ	ΔΔΔΔ Δ Δ Δ ΔΔΔΔ				
تڪندن جو انداز	5	8	11				

عددن جو خاص سلسلو ڏسو پهرين عدد ۾ڪهڙي ڪاروائي ڪجي جيئن اُن ڪان پوءِ وارو عدد ملي؟ اِن نيم اَنوسار اُن ڪانپوءِ ايندڙ سڀ عدد ٻڌائي سگهجن ٿا.

هينين عددن جو سلسلو ڏسو 2, 11, -6, 0, 5, -37, 8, 2, 61

هتي $a_1 = 2,\ a_2 = 11,\ a_3 = -6$ . . . اِها عدد جي ياداشت بہ هڪ سلسلو آهي پر خاص پد اُن جاءِ تي آهن يا نہ اِهو ٻڌائي نہ ٿو سگهجي ساڳيءَ طرح اِنهن اَلڳہ اَلڳہ پدن ۾ڪهڙو ماڳاپو آهي، اِهو چڱيءَ طرح ٻڌائي نہ ٿو سگهجي.

رواجي طور جن سلسلن ۾پيو پد مقرر ڪري سگهجي ٿو. اَهڙا سلسلا ئي ڏيان هيٺ آندا ويا آهن.

مثال طور : (1) 4, 8, 12, 16, . . . (2) 2, 4, 8, 16, 32, . . .

(3) $\frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \frac{1}{15}, \frac{1}{20}$

سلسلي ۾پد (Terms in a sequence)

سلسلي ۾ $t_1, t_2, t_3, \ldots t_n$ پد اَهڙي طرح سلسليوار ڏيکاريا آهن. رواجي طور سلسلو $\{t_n\}$ اَهڙيءَ طرح لکبو آهي. اِن وقت هرهڪ n واڌو عدد هوندو آهي، اِن جو ملهہ ٻڌل يا مقرر آهي ائين سمجهيو ويندو آهي.

مشغولي I : هينيان سلسلا ڏسو اِنهن ۾پدن کي t_1, t_2, t_3 . . . جي طريقي ڏيکاريو.

(1) 9, 15, 21, 27, . . . هتي $t_1 = 9$, $t_2 = 15$, $t_3 = 21$, . . .

(2) 7, 7, 7, 7, . . . هتي $t_1 = 7$, $t_2 =$ ☐, $t_3 =$ ☐, . . .

(3) −2, −6, −10, −14, . . هتي $t_1 = -2$, $t_2 =$ ☐, $t_3 =$ ☐, . . .

مشغولي II : هيٺ ڪجهہ سلسلا ڏنل آهن. اُنهن جي پدن ۾ڪو نيم ملي ٿو ڇا اِهو ڏسو. ٻن لاڳيتن پدن ۾هڪجهڙائي ڳولهيو

اِن سلسلي جي پدن ۾ڪو نيم ملي ٿو ڇا اِهو ڏسڻ لاءِ هيٺ ڏنل بناوت ڏسو ۽ خالي چوڪنڊا

(1) 1, 4, 7, 10, 13, . . . (2) 6, 12, 18, 24, . . . (3) 3, 3, 3, 3, . . .

(4) 4, 16, 64, . . . (5) −1, −1.5, −2, −2.5, . . . (6) $1^3, 2^3, 3^3, 4^3$, . . .

اِنهن سلسلن ۾ لاڳاپو ڳولهي، اُن لاءِ ڪيل ويچار ڏسو

(1) 1, 4, 7, 10, □, □, . . .

1 (+3), 4 (+3), 7 (+3), 10 (+3), □

(2) 6, 12, 18, 24, □, □, . . .

6 + 6, 12 + 6, 18 + 6, □, □

(3) 3, 3, 3, 3, □, □, . . .

3 + 0, 3 + 0, 3 + 0, □, □

(4) 4, 16, 64, □, □, □, . . .

4×4, 16×4, 64×4, $□ \times 4$, $□ \times 4$

(5) −1, −1.5, −2, −2.5, □ . . .

(−1)+(−0.5), −1.5 +(−0.5), −2 + (−0.5), −2.5 + (−0.5)

(6) 1^3, 2^3, 3^3, . . .

مٿي ڏنل عددن جو هرهڪ ياداشت، سلسلو آهي. هتي سلسلن (1), (2), (3), (5) ۾ اَڳين پد ۾ مقرر ڪيل عدد ملائي، اِن ڪانپوءِ ايندڙ پد ملي ٿو. اِنهن ۾ هڪجهڙائي آهي. اَهڙي قسم جي سلسلن کي اَنگي

مٿيون (4) سلسلو اَنگي پروگريشن نہ آهي. هن سلسلي ۾ اَڳين پد ۾ مقرر ڪيل عدد سان ضرب ڪري. اِن ڪانپوءِ ايندڙ پد ملي ٿو. اَهڙي قسم جي سلسلي کي جاميٽرڪ پروگريشن چئجي ٿو.

مٿيون (6) سلسلو اَنگي پروگريشن نہ آهي، گڏوگڏ جاميٽرڪ پروگريشن پڻ نہ آهي.

هن سال اَسان اَنگي پروگريشن جو اَڀياس ڪرڻ وارا آهيون.

اَنگي پروگريشن (Arithmetic Progression)

هيٺ ڪجهہ عدد ڏنل آهن. هرهڪ سلسلي جا اَڳيان ٽي پد لکو.

(1) 100, 70, 40, 10, . . . (2) −7, −4, −1, 2, . . . (3) 4, 4, 4, . . .

ڏنل سلسلن ۾ اَڳلا پد لهڻ لاءِ ڇا ڪيو ويو آهي اِهو ڏسو

پهريون پد   ٻيون پد   ٽيون پد

(1) 100   70   40   10   -20   -50   . . .

100+(-30)   70+(-30)   40+(-30)   10+(-30)   (-20)+(-30)

(2) -7   -4   -1   2   5   8   . . .

-7+3   -4+3   -1+3   2+3   5+3

(3) 4   4   4   4   4   . . .

4 + 0   4 + 0   4 + 0   4 + 0

مٿين عددن ۾ هرهڪ ياداشت ۾ هرهڪ پد اِن ڪان اَڳ۾ آيل پد ۾ خاص عدد ملائڻ سان تيار ٿيو آهي. ٻن لڳاتار پدن جي وچ۾ فرق مقرر آهي.

مثال (1) ۾ فرق ڪاٽو آهي، (2) ۾ فرق واڌو آهي. (3) مو فرق 0 آهي.

لڳاتار پدن جي وچ۾ تفاوت مقرر آهي ۽ اِنکي **عام تفاوت** چئجي ٿو. اِهو فرق **(Common difference)** d اَکرن وسيلي ڏيکارجي ٿو.

ڏنل سلسلي جي ڪهڙن بہ ٻن لڳاتار پدن ۾ فرق $(t_{n+1} - t_n)$ مقرر هجي تہ اَهڙي سلسلي کي اَنگي پروگريشن (Arithmetic Progression) چئجي ٿو. $t_{n+1} - t_n = d$ اِهو عام تفاوت (Common difference) هوندو آهي. اَنگي پروگريشن ۾ پهريون پد a ۽ عام تفاوت d هوندڙ اَنگي پروگريشن آهي.

$$t_1 = a, \quad t_2 = a + d \quad , t_3 = (a + d) + d = a + 2d$$

پهريون پد a ۽ عام تفاوت d هوندڙ انگي پروگريشن

$$a, (a + d), (a + 2d), (a + 3d), \ldots\ldots$$

اَنگي پروگريشن سان لاڳاپو رکندڙ ڪجهہ مثال ڏسو.

مثال (1) اَرف هر مهني 100ر بچت ڪئي. هڪ سال ۾ هرهڪ مهني جي ڪل بچت هيٺين ريت آهي.

مهنا	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
بچت (رپين ۾)	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000	1100	1200

مثال (2) پراڻو دوست کان 10000ر اوڌارا ورتا ۽ هر مهيني 1000ر واپس ڏيڻ جو فيصلو ڪيو ته هرهڪ مهيني قرض جي باقي بچيل رقم هيٺين ريت ڏيکاريل آهي.

مهنا	1	2	3	4	5	...	...	...	...
قرض جي باري ۾ بچيل رقم ₹	10,000	9,000	8,000	7,000	...	...	2,000	1,000	0

(3) 5 جو ڪوڙو، يعني 5 سان ونڊبيندڙ عدد ڏسو

5, 10, 15, 20, . . . 50, 55, 60 . . . . . اِهو اَنگي پروگريشن وارو سلسلو آهي.

مٿيان (1) ۽ (2) مثال محدود اَنگي پروگريشن آهن. (3) اَنگي پروگريشن جو لاحد سلسلو آهي.

ياد رکو

(1) جيڪڏهن سلسلي ۾ $(t_{n+1} - t_n)$ اِهو فرق مقرر آهي ته سلسلي کي اَنگي پروگريشن چئجي ٿو.

(2) اَنگي پروگريشن ۾ ٻن لاڳيتن پدن ۾ عام تفاوت d اَکر وسيلي ڏيکارجي ٿو.

(3) d جو تفاوت، واڌو، ڪاٽو يا ٿي سگهي ٿو.

(4) اَنگي پروگريشن ۾ پهريون پد a ۽ عام تفاوت d آهي ته اُن سلسلي جا پد $a, (a+d), (a+2d), \dots$ هوندا آهن.

مشغولي : محدود اَنگي پروگريشن ۽ لاحد اَنگي پروگريشن جو هڪ هڪ مثال لکو.

حل ڪيل مثال

مثال (1) هيٺين مان ڪهڙا سلسلا اَنگي پروگريشن آهن؟ جيڪڏهن آهن ته اُنهن جا اَڳيان ٻه پد لکو.

(i) $5, 12, 19, 26, \dots$

(ii) $2, -2, -6, -10, \dots$

(iii) $1, 1, 2, 2, 3, 3, \dots$

(iv) $\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$

حل : (i) $5, 12, 19, 26, \dots$ هن سلسلي ۾

پهريون پد $t_1 = 5$, $t_2 = 12$, $t_3 = 19$, ...

$t_2 - t_1 = 12 - 5 = 7$

$t_3 - t_2 = 19 - 12 = 7$

هتي پهريون پد =5 ۽ عام تفاوت d=7 آهي ۽ اِهو مقرر آهي.

اِهو سلسلو اَنگي پروگريشن آهي. اِن سلسلي جا اَڳيان ٻه پد آهن

$26 + 7 = 33, \quad 33 + 7 = 40.$

هتي 33 ۽ 40 اِهي ڏنل سلسلي جا اَڳيان ٻه پد آهن.

(ii) $2, -2, -6, -10, \ldots$ هن سلسلي ۾

$t_1 = 2, \quad t_2 = -2, \quad t_3 = -6, \quad t_4 = -10 \ldots$

$t_2 - t_1 = -2 - 2 = -4$

$t_3 - t_2 = -6 - (-2) = -6 + 2 = -4$

$t_4 - t_3 = -10 - (-6) = -10 + 6 = -4$

انهن مان هرهڪ ٻن لڳاتار پد ۾ تفاوت يعني $t_{n+1} - t_n = -4$ آهي $\therefore \; d = -4$
اِهو ساڳيو فرق آهي. اِهو مقرر آهي.∴اِهو سلسلو اَنگي پروگريشن آهي.

هن سلسلي جا اَڳِلا ٻہ پد آهن. $(-10) + (-4) = -14$ ۽ $(-14) + (-4) = -18$

(iii) $1, 1, 2, 2, 3, 3, \ldots$ هن سلسلي ۾

$t_1 = 1, \quad t_2 = 1, \quad t_3 = 2, \quad t_4 = 2, \quad t_5 = 3, \quad t_6 = 3 \ldots$

$t_2 - t_1 = 1 - 1 = 0, \qquad t_3 - t_2 = 2 - 1 = 1$

$t_4 - t_3 = 2 - 2 = 0, \qquad t_3 - t_2 \neq t_2 - t_1$

هن سلسلي ۾ ٻن لڳاتار پدن ۾ فرق ساڳيو نہ آهي. ∴ ڏنل سلسلو اَنگي پروگريشن نہ آهي.

(iv) $\frac{3}{2} \quad \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \quad \frac{3}{2}$ هن سلسلي ۾

$t_1 = \frac{3}{2}, \quad t_2 = \frac{1}{2}, t_3 = -\frac{1}{2}, \quad t_4 = -\frac{3}{2}$

$t_2 - t_1 = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -\frac{2}{2} = -1$

$t_3 - t_2 = -\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} = -\frac{2}{2} = -1$

$t_4 - t_3 = -\frac{3}{2} - (-\frac{1}{2}) = -\frac{3}{2} + \frac{1}{2} = -\frac{2}{2} = -1$

هتي عام تفاوت d=-1 اِهو ساڳيو آهي

∴ ڏنل سلسلو اَنگي پروگريشن آهي.

هن سلسلي جا اَڳِلا ٻہ پد آهن.

$-\frac{3}{2} - 1 = -\frac{5}{2}, \qquad -\frac{5}{2} - 1 = -\frac{7}{2}$

∴ اَڳِلا ٻہ پد $\frac{5}{2}$ ۽ $-\frac{7}{2}$ آهن.

مثال (2) هيٺ پهريون پد a ۽ عام تفاوت d ڏنل آهن. اِنهن مطابق پهريان چار پد لهي اَنگي پروگريشن لکو.

(i) $a = -3, \quad d = 4$ (ii) $a = 200, \quad d = 7$

(iii) $a = -1, \quad d = -\frac{1}{2}$ (iv) $a = 8, \quad d = -5$

حل : (i) تان $a = -3, d = 4$

$a = t_1 = -3$

$t_2 = t_1 + d = -3 + 4 = 1$

$t_3 = t_2 + d = 1 + 4 = 5$

$t_4 = t_3 + d = 5 + 4 = 9$

$\therefore$ $-3, 1, 5, 9, \ldots$ اَنگي پروگريشن آهي.

(ii) $a = 200, d = 7$

$a = t_1 = 200$

$t_2 = t_1 + d = 200 + 7 = 207$

$t_3 = t_2 + d = 207 + 7 = 214$

$t_4 = t_3 + d = 214 + 7 = 221$

$\therefore$ $200, 207, 214, 221, \ldots$ اَنگي پروگريشن آهي.

(iii) $a = -1, d = -\frac{1}{2}$

$a = t_1 = -1$

$t_2 = t_1 + d = -1 + (-\frac{1}{2}) = -\frac{3}{2}$

$t_3 = t_2 + d = -\frac{3}{2} + (-\frac{1}{2}) = \frac{-4}{2} = -2$

$t_4 = t_3 + d = -2 + (-\frac{1}{2})$

$= -2 - \frac{1}{2} = -\frac{5}{2}$

$\therefore$ $-1, -\frac{3}{2}, -2, -\frac{5}{2}, \ldots$ اَنگي پروگريشن آهي.

(iv) $a = 8, d = -5$

$a = t_1 = 8$

$t_2 = t_1 + d = 8 + (-5) = 3$

$t_3 = t_2 + d = 3 + (-5) = -2$

$t_4 = t_3 + d = -2 + (-5) = -7$

$\therefore$ $8, 3, -2, -7, \ldots$ اَنگي پروگريشن آهي.

اَڀياس 3 1

1. هيٺين مان ڪهڙا سلسلا اَنگي پروگريشن آهن؟ جيڪو سلسلو اَنگي پروگريشن آهي. اُنهن ۾ عام تفاوت لهو.

(1) $2, 4, 6, 8, \ldots$ (2) $2, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}, \ldots$ (3) $-10, -6, -2, 2, \ldots$

(4) $0.3, 0.33, .0333, \ldots$ (5) $0, -4, -8, -12, \ldots$ (6) $-\frac{1}{5}, -\frac{1}{5}, -\frac{1}{5}, \ldots$

(7) $3, 3 + \sqrt{2}, 3 + 2\sqrt{2}, 3 + 3\sqrt{2}, \ldots$ (8) $127, 132, 137, \ldots$

2. جيڪي اَنگي پروگريشن جو پهريون پد a ۽ عام تفاوت d آهي ته اَنگي پروگريشن لکو

(1) $a = 10, d = 5$ (2) $a = -3, d = 0$ (3) $a = -7, d = \frac{1}{2}$

(4) $a = -1.25, d = 3$ (5) $a = 6, d = -3$ (6) $a = -19, d = -4$

.3 هيٺين اَنگي پروگريشن ۾هرهڪ جو پهريون پد ۽ عام تفاوت لکو.

(1) 5, 1, -3, -7, . . .   (2) 0.6, 0.9, 1.2, 1.5, . . .

(3) 127, 135, 143, 151, . . .   (4) $\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{5}{4}, \frac{7}{4}$ . . .

ذرا سوچيو

• اِهو سلسلو اَنگي پروگريشن آهي ڇا؟ جيڪڏهن آهي ته اِن 5, 8, 11, 14 سلسلي جو 100 پد ڪهڙو آهي؟ اِن سلسلي ۾عدد 62 آهي ڇا؟ عدد 61 آهي ڇا؟

چاڪي وٺون

اَنگي پروگريشن جو n پد (n^{th} term of an A. P.)

5, 8, 11, 14 هن سلسلي ۾ٻن لڳاتار پد ۾ تفاوت 3 آهيَ اِنڪري اِهو سلسلو انگي پروگريشن آهي. هن ۾پهريون پد 5 آهي.5 ۾3 جوڙڻ سان ٻيون پد 8 ملي ٿو. اَهڙي طرح 100 پد حاصل ڪرڻ لاءِ ڇا ڪرڻ گهرجي؟

	پهريون پد	ٻيون پد	ٽيون پد	. . .
عدد	5,	5 + 3 = 8,	8 + 3 = 11,	. . .

اهڙي طرح 100 پد تائين پهچڻ لاءِ ڏاڍو وقت لڳندو اِن لاءِ ڪو سوتر ملي ٿو ڇا اِهو ڏسو.

5	8	11	14	. . .	. . .	. . .	. . .
5	5 + 1 × 3	5 + 2 × 3	5 + 3 × 3	. . .	5 + (n − 1) × 3	5 + n × 3	. . .
پهريون پد t_1	ٻيون پد t_2	ٽيون پد t_3	چوٿون پد t_4	. . .	n پد t_n	$n + 1$ پد t_{n+1}	. . .

عام طور : t_1, t_2, t_3 . . . اِهي اَنگي پروگريشن ۾پهريون پد a ۽ عام تفاوت d آهي ته

$$t_1 = a$$

$$t_2 = t_1 + d = a + d = a + (2 - 1)\, d$$

$$t_3 = t_2 + d = a + d + d = a + 2d = a + (3 - 1)d$$

$$t_4 = t_3 + d = a + 2d + d = a + 3d = a + (4 - 1)d$$

$t_n = a + (n - 1)\,d$ سوٽر ملي ٿو.

هاڻي اِن سوتر جو پريوگ ڪري . . . ,14 ,11 ,8 ,5 اِن اَنگي پروگريشن جو 100 پد لهو.
هتي a=5 ۽ d=3

$$t_n = a + (n - 1)d$$

$$\therefore \quad t_{100} = 5 + (100 - 1) \times 3$$

$$= 5 + 99 \times 3$$

$$= 5 + 297$$

$$= 302$$

هن اَنگي پروگريشن جو 100 پد 302 آهي.

هاڻي عدد 61 اِن سلسلي ۾ آهي ڇا؟ اِن جو جواب حاصل ڪرڻ لاءِ اِهو سوٽر ڪم آڻيو

$$t_n = a + (n - 1)d$$

$$t_n = 5 + (n - 1) \times 3$$

جيڪڏهن 61 هي n پد معنيٰ t_n هوندو ته عدد

$$61 = 5 + 3n - 3$$

$$= 3n + 2$$

$$\therefore \quad 3n = 59$$

$$\therefore \quad n = \frac{59}{3}$$

پر n هڪ سچو اَنگ نه آهي.

$\therefore$ عدد 61 هن سلسلي ۾ نه آهي.

ويچار ڪريو

ڪبير جي ماءُ اُن جي هرهڪ جنم ڏن تي اوچائي لکي رکندڙ آهي. هو هڪ سال جو هو ته هن جي اوچائي 70 س.م هئي 2 سالن جو ٿيو ته 80 س.م هو، 3 سالن جو ٿيو ته 90 س.م ٿيو. هن جي ميران ماسي ڏهين درجي ۾پڙهندي هئي. اُن ڇيو ڪبير جي اوچائي انگي پروگريشن سلسلي انوسار وڌي ٿي. اِهو ڌيان ۾رکي ڪبير ڏهين درجي ۾ويندو ته اُنجي اوچائي ڪيتري هوندي اِهو ڪڍيو. اُنکي عجب لڳو توهان به ڪبير جي اوچائي اِنگي پروگريشن انوسار 15 سالن تائين ڪيتري هوندي اِهو لهو.

حل ڪيل مثال

مثال (1) هيٺين اَنگي پروگريشن لاءِ t_n لهو ۽ اُن وسيلي اِن سلسلي جو 30 پد لهو

$$3, 8, 13, 18, \ldots$$

حل : ڏنل اَنگي پروگريشن $3, 8, 13, 18, \ldots$

هتي $t_1 = 3,\ t_2 = 8, t_3 = 13, t_4 = 18, \ldots$

$d = t_2 - t_1 = 8 - 3 = 5, \quad n = 30$

اَسانکي ڄاڻ آهي تہ $t_n = a + (n-1)d$

$\therefore\ t_n = 3 + (n-1) \times 5 \because\ a = 3,\ d = 5$

$\therefore\ t_n = 3 + 5n - 5$

$\therefore\ t_n = 5n - 2$

$\therefore$ پد لاءِ $30 = t_{30} = 5 \times 30 - 2$

$= 150 - 2 = 148$

مثال (2) هيٺين اَنگي پروگريشن جو ڪهڙو پد 560 آهي؟

$$2, 11, 20, 29, \ldots$$

حل : ڏنل اَنگي پروگريشن $2, 11, 20, 29, \ldots$

هتي $a = 2, d = 11 - 2 = 9$

هن سلسلي جو n پد 560 آهي. $t_n = 560$

$$t_n = a + (n-1)d$$

$\therefore\ 560 = 2 + (n-1) \times 9$

$= 2 + 9n - 9$

$\therefore\ 9n = 567$

$\therefore\ n = \frac{567}{9} = 63$

$\therefore$ ڏنل اَنگي پروگريشن سلسلي ۾ 63 پد 560 آهي.

مثال (3) ڏنل سلسلي $5, 11, 17, 23, \ldots$ ۾ 301 اِهو عدد آهي ڇا؟

حل : $5, 11, 17, 23, \ldots$ سلسلي ۾

$t_1 = 5,\ t_2 = 11, t_3 = 17, t_4 = 23, \ldots$

$t_2 - t_1 = 11 - 5 = 6$

$t_3 - t_2 = 17 - 11 = 6$

$\therefore$ اِهو سلسلو اَنگي پروگريشن آهي هن سلسلي جو پهريون پد a=5 ۽ d=6 آهي.

جيڪڏهن 301هي n جو پد هجي تہ

$$t_n = a + (n-1)d = 301$$

$\therefore\ 301 = 5 + (n-1) \times 6$

$= 5 + 6n - 6$

$\therefore\ 6n = 301 + 1 = 302$

$\therefore\ n = \frac{302}{6}$, اِهو پد سچو انگ نہ آهي

تنهن ڪري ڏنل سلسلي ۾ عدد 301 ايندو.

مثال (4) ٻڌايو تہ 4 سان ونڊجندڙ ٻن اَنگن وارا عدد ڪيترا آهن؟

حل : 4 سان ونڊجندڙ ٻن اَنگن وارن عدد جي ياداشت

$12, 16, 20, 24, \ldots 96$ آهي.

اَهڙا عدد ڪيترا آهن اِهو لهو.

$t_n = 96, a = 12, d = 4, n = ?$

$\therefore$ سوتر وسيلي

$96 = 12 + (n-1) \times 4$

$= 12 + 4n - 4$

$\therefore\ 4n = 88$

$\therefore\ n = 22$

$\therefore$ 4 سان ونڊجندڙ ٻن اَنگن وارا عدد 22 آهن.

مثال (5) جيڪڏهن هڪ اَنگي پروگريشن جو 10 پد 25 ۽ 18 پد 41 آهي تہ اِن سلسلي جو 38 پد لهو. ساڳيءَ طرح n پد 99 آهي تہ n جو ملهہ لهو

حل : ڏنل اَنگي پروگريشن ۾ $t_{10} = 25$ ۽ $t_{18} = 41$ آهي.

اَسانکي ڄاڻ آهي تہ، $t_n = a + (n-1)d$

$\therefore \quad t_{10} = a + (10-1)\,d$

$\therefore \quad 25 = a + 9d \quad \dots\dots\dots\dots \text{(I)}$

ساڳيءَ طرح $t_{18} = a + (18-1)\,d$

$\therefore \quad 41 = a + 17d \quad \dots\dots\dots\dots \text{(II)}$

$25 = a + 9d \dots\dots\dots\dots \text{(I)}$

$a = 25 - 9d.$

اِهو ملهہ مساوت II ۾ رکڻ سان

مساوت $a + 17d = 41 \text{(II)}$ آهي.

$\therefore \quad 25 - 9d + 17d = 41$

$\therefore \quad 8d = 41 - 25 = 16$

$\therefore \quad d = 2$

اِهو ملهہ مساوت I رکڻ سان $d = 2$

$a + 9d = 25$

$\therefore \; a + 9 \times 2 = 25$

$\therefore \; a + 18 = 25$

$\therefore \; a = 7$

هاڻي، $t_n = a + (n-1)d$

$\therefore \quad t_{38} = 7 + (38-1) \times 2$

$= 7 + 37 \times 2$

$= 7 + 74$

$= 81$

n پد 99 آهي تہ n جو ملهہ ڪيڏو آهي

$t_n = a + (n-1)d$

$99 = 7 + (n-1) \times 2$

$99 = 7 + 2n - 2$

$99 = 5 + 2n$

$\therefore \quad 2n = 94$

$\therefore \quad n = 47$

$\therefore$ ڏنل سلسلي جو 38 پد 81 آهي ۽ 99 اِهو 47 پد آهي.

اَڀياس 3.2

1. هيٺ ڏنل اَنگي پروگريشن سلسلن ۾ ڇڏيل خانن ۾ صحيح عدد لکو.

(1) 1, 8, 15, 22, . . .

هتي $a = \square,\ t_1 = \square,\ t_2 = \square,\ t_3 = \square, \ldots$

$t_2 - t_1 = \square - \square = \square$

$t_3 - t_2 = \square - \square = \square \therefore\ d = \square$

(2) 3, 6, 9, 12, . . .

هتي $t_1 = \square,\ t_2 = \square,\ t_3 = \square,\ t_4 = \square, \ldots$

$t_2 - t_1 = \square,\ t_3 - t_2 = \square \qquad \therefore\ d = \square$

(3) −3, −8, −13, −18, . . .

هتي $t_1 = \square,\ t_2 = \square,\ t_3 = \square,\ t_4 = \square, \ldots$

$t_2 - t_1 = \square,\ t_3 - t_2 = \square \qquad \therefore\ a = \square,\ d = \square$

(4) 70, 60, 50, 40, . . .

هتي $t_1 = \square,\ t_2 = \square,\ t_3 = \square, \ldots$

$\therefore\ a = \square,\ d = \square$

2. ٻڌايو تہ هيٺيون سلسلو اَنگي پروگريشن آهي ڇا؟ جيڪڏهن آهي تہ اِن سلسلي جو ويهون پد لهو.

−12, −5, 2, 9, 16, 23, 30, . . .

3. ڏنل سلسلو اَنگي پروگريشن آهي ,24 ,20 ,16 ,12 . . . اِن سلسلي جو چوويهون پد لهو.

4. هيٺين اَنگي پروگريشن جو اُڻويهون پد لهو.

7, 13, 19, 25, . . .

5. هيٺين اَنگي پورگريشن جو ستاويهون پد لهو

9, 4, −1, −6, −11, . . .

6. ٻڌايو تہ 5 سان ونڊجندڙ ٽن اَنگن وارا قدرتي عدد ڪيترا آهن؟

7. هڪ اَنگي پروگريشن جو يارهون پد 16 ۽ ايڪويهون پد 29 آهي، تہ اِن سلسلي جو ايڪيتاليهون پد لهو

8. اَنگي پروگريشن ,2 ,5 ,8 ,11 . . . ۾ عدد 151- ڪائون پد آهي؟

9. 10 کان 250 تائين قدرتي اَنگن مان ڪيترن اَنگن کي 4 سان ونڊي سگهجي ٿو؟

10. هڪ اَنگي پروگريشن سلسلي ۾ 17 پد 10 پد کان 7 وڌيڪ آهي، تہ عام تفاوت لهو.

سياڻي ٽيچر (Wise Teacher)

هڪ راجا هو. هن پنهنجي ٻارن يشونت راجيءَ ۽ گيتا ديويءَ کي گهوڙيسواري سيکارڻ لاءِ نمبروار تارا ۽ ميرا نالي ٽيچرس کي مقرر ڪيو. اُنهن ٻنهي کي سال ۾ ڪيتري پگهار گهرجي اِن بابت پڇيو.

تارا چيو، ”مونکي پهرين مهني جي پگهار 100مهرون ڏيو ۽ اُن کانپوءِ هرمهني منهنجي پگهار 100 مهرون وڌائي وڃي.“ ميرا چيو، ”مونکي پهرين مهني جي پگهار 10 مهرون ڏيو ۽ پوءِ هر مهني، اُن کان اَڳين مهني جي پگهار کان ٻيڻي پگهار ڏيو.“

راجا اِها ڳالهه مڃي. ٽن مهنن کانپوءِ يشونت راجي پنهنجي ڀيڻ کي چيو، ”منهنجي ٽيچر تنهنجي ٽيچرکان وڌيڪ هوشيار آهي، هن وڌيڪ پگهار گهري آهي“ گيتا ديويءَ چيو ”مونکي ٻہ پهريون ائين ئي لڳو انڪري مان ميرا کان پڇيو تو ائين پگهار ڇو گهري؟“ تہ ڪِلي هن ٻڌايو تہ اَئن مهني جي پگهار لهي ڏني. تون پڻ لهي ڏس.

مهنو	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
تارا جي پگهار	100	200	300	400	500	600	700	800	900	-	-	-
ميرا جي پگهار	10	20	40	80	160	320	640	1280	2560	-	-	-

توهان اِهو چجرو پورو ڪريو

تارا جي پگهار $100, 200, 300, 400, \ldots$ اَنگي پروگريشن سلسلي ۾ آهي. ياد آيو؟

$$t_1 = 100, \quad t_2 = 200, \; t_3 = 300, \ldots \qquad t_2 - t_1 = 100 = d$$

اِهو عام تفاوت 100 آهي.

ميرا جي پگهار 10,20,40,80 .... اَنگي پروگريشن سلسلي ۾ نہ آهي. $20 - 10 = 10,\ 40 - 20 = 20,\ 80 - 40 = 40$ يعني عام تفاوت ساڳيو نہ آهي.

فقط هن سلسلي ۾ هرهڪ پد، اُن کان اَڳہ آيل پد کان ٻيڻو ٿئي ٿو.

$$\frac{t_2}{t_1} = \frac{20}{10} = 2, \quad \frac{t_3}{t_2} = \frac{40}{20} = 2, \quad \frac{t_4}{t_3} = \frac{80}{40} = 2$$

$\therefore$ $\frac{t_{n+1}}{t_n}$ ۾ يعني اَڳتي پد ۽ اُن کان اَڳہ وارا پد جي ونڊ اُپت ساڳي آهي. اَهڙي طرح $\frac{t_{n+1}}{t_n}$ سلسلي کي جاميٽرڪ پروگريشن چئجي ٿو. $\frac{t_{n+1}}{t_n}$ جي ونڊ اُپت 1 کان وڌيڪ هجي، تہ جاميٽرڪ پروگريشن اَنگي پروگريشن جي ڀيٽ ۾ وڌيڪ تيز رفتار سان وڌي ٿو، اِهو اَڀياس ڪريو.

جيڪڏهن اِها ونڊ اُپت 1 کان گهٽ هجي تہ سلسلو ڪيئن بدلجندو، اِن جو پڻ اَڀياس ڪريو.

هن سال اَسان فقط اَنگي پروگريشن جو اَڀياس ڪرڻ وارا آهيون. اَنگي پروگريشن جو .. پد ڪيئن سگهجي اِهو اَسان ڏٺو آهي هاڻي پهرين n پدن جي جوڙ اُپت ڪيئن لهجي اِهو اَسان ڏسڻ وارا آهيون.

ٽي سؤ سال پھريون جي ڳالھ آھي. جرمنيءَ ۾ بيوُٽنير (Buttner) نالي ھڪ اُستاد جو اِسڪول ھو. ھن اُستاد کي جوھان مارٽن بارٽيلس نالي ھڪ سھايڪ ھو ھن جو ڪم ھو ٻارن کي بنيادي سکيا ڏيڻ ۽ لکڻ سيکارڻ. بيوُٽنير ڏاڍو سخت سڀاءُ جو ھو. بيوٽنير سر کي ھڪ ڪم پورو ڪرڻو ھو ڪلاس ۾ ٻار جڳھڙو نہ ڪن اِنڪري ھن ڪم ۾ رڌل رکڻ لاءِ ٻارن کي اَنگي حساب ڏيڻ ۾ ويچار ڪريو. ھن ٻارن کي چيو 1 کان 100 تائين اَنگہ سليٽ تي لکو ۽ اُنھن جو جوڙ ڪريو. اُستاد پنھنجو ڪم شروع ڪيو. ٻارن اَنگن لکڻ شروع ڪيا. پنجن منٽن ۾ ھڪ سليٽ اُبتي ٽيڻ جو آواز آيو. ھن ڪارل گائوس ڏانکن نيھاريو ۽ چيو، اِھو ڇا آھي؟ مان توکي 1 کان 100 تائين اَنگہ لکي اُنھن کي جوڙ ڪرڻ لاءِ چيو آھي. سليٽ اُبتي ڪري ڇو رکي ٿي ۽ توکي ڪجھ ڪرڻو نہ آھي ڇا؟

ڪارل گائوس چيو ”مان جوڙ ڪيو آھي.“

اُستاد چيو ”ڇا؟ ايترو جلدي جوڙ ڪيئن ٿي ويو؟ اَنگہ بہ نہ لکيا اَٿئي، جواب ڪيترو آيو؟

ڪارل گائوس چيو ” پنج ھزار پنجاھہ“

اُستاد عجب ۾ پئجي ويو ۽ چيو ”جواب ڪيئن ڪڍيئہ؟

ڪارگل گائوس جي ترت جوڙ اُپت ڪرڻ جو طريقو

سبتي پاسي کان اَنگہ	1	2	3	4	…	100
اُبتي پاسي کان اَنگہ	100	99	98	97	…	1
جوڙ اُپت	101	101	101	101	…	101

ھرھڪ جوڙي جي جوڙ اُپت 101 اَچي ٿي اِھا جوڙ اُپت 100 دنفعا آئي. اِنڪري 100x101 اِنھن جي ضرب ڪئي. اِھو 10100 آيو. ھتي 1 کان 100 تائين اَنگن جو بہ دفعا ويچار ڪيو ويو. اِنڪري 10100 جو اَڌ ڪيو. اِھو 5050 آيو. اِن ڪري 1,2,3,......100 اِنھن اَنگن جي جوڙ اُپت 5050 آھي اُستاد ھنن کي شاباس ڏني.

ھاڻي گائوس جي جوڙ ڪرڻ جي طريقي کي ڪم آڻي اُن کي پروگريشن جي n پدن جي جوڙ اُپت ڪرڻ جو سوتر ملندو.

جوھان فريڊرچ ڪارل گائوس 30 اَپريل 1777 - 23 فيبروري 1855

ڪارل گائوس ھڪ مھان جرمن حساب جو ڄاڻو ھو. ھن جو جنم براڊن سوائيڪ ۾ ھڪ اَڻ پڙھيل پريوار ۾ ٿيو. بيوُٽنير جي اِسڪول ۾ ھن پنھنجي عقلمنديءَ جي جھلڪ ڏيکاري. اُن ڪانپوءِ بيوٽينر جي مدد سان جوھان مارٽن بارٽيلس جي گائوس سان دوستي ٿي ٻنھي گڏجي اَڌڪ شاستر جو ھڪ ڪتاب ڇپائي پڌرو ڪيو. بارٽيلس، گائوس جي اَساڌارڻ عقلمندي کي گھڻن ئي ماڻھن تائين پھچائي.

چاڪي وٺون

اَنگي پروگريشن جي پهرين n پدن جي جوڙ اُپٽ (Sum of first n terms of an A. P.)

اَنگي پروگريشن $a, a+d, a+2d, a+3d, \ldots \ a+(n-1)d$

هن پروگريشن ۾ پهريون پد آهي a ۽ عام تفاوت آهي d اِن پروگريشن ۾ پهرين n پدن جي جوڙ اُپٽ S_n سان ڏيکارجي ٿي.

$$S_n = [a] + [a+d] + \ldots + [a+(n-2)d] + [a+(n-1)d]$$

اهي پد اُبتي سلسلي ۾ بناوت ڪري رکڻ سان

$$S_n = [a+(n-1)d] + [a+(n-2)d] + \ldots + [a+d] + [a]$$

جوڙ ڪرڻ سان

$$2S_n = [a+a+(n-1)d] + [a+d+a+(n-2)d] + \ldots + [a+(n-2)d+a+d] + [a+(n-1)d+a]$$

$$2S_n = [2a+(n-1)d] + [2a+(n-1)d] + \ldots + [2a+(n-1)d] \ldots n \text{ دفعا}$$

$$2S_n = n\,[2a+(n-1)d]$$

$$S_n = na+\frac{n(n-1)}{2}d \quad \text{يا} \quad S_n = \frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$$

مثال طور $14, 16, 18, \ldots$ اَنگي پروگريشن جي پهرين 100 پدن جي جوڙ اُپٽ لهو.

هتي $a = 14,\ d = 2,\ n = 100$

$$S_n = \frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$$

$$\therefore\ S_{100} = \frac{100}{2}[2 \times 14+(100-1) \times 2]$$

$$= 50\,[28 + 198]$$

$$= 50 \times 226 = 11{,}300$$

$\therefore$ ڏنل سلسلي جي پهرين 100 پدن جي جوڙ اُپٽ 11,300 آهي.

ياد رکو

ڏنل اَنگي پروگريشن جو پهريون a ۽ عام تفاوت d هجي، تہ

$$t_n = a+(n-1)d$$

$$S_n = \frac{n}{2}[2a+(n-1)d] = na+\frac{n(n-1)}{2}d$$

انگي پروگريشن جي پهرين n پدن جو جوڙ ڪرڻ جو هڪ ٻيو سوتر پڻ ملي ٿو.

$a, a+d, a+2d, a+3d, \ldots [a+(n-1)d]$ هاڻي هن پروگريشن ۾

$n \; [a+(n-1)d]$ پد آهي ۽ $t_1 = a$ = پهريون پد آهي.

$S_n = \frac{n}{2} [\underline{a}+\underline{a+(n-1)d}]$ هاڻي

$\therefore \quad S_n = \frac{n}{2}[t_1 + t_n] = \frac{n}{2}$ [پهريون پد + آخري پد]

حل ڪيل مثال

مثال (1) پهرين n قدرتي اَنگن جي جوڙ اُپت ڪريو.

حل : پهريان n قدرتي اَنگ $1, 2, 3, \ldots, n$.

$a = 1, \quad d = 1, \quad n$ پد $= n$ هتي

$S_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + n$

$S_n = \frac{n}{2}$ [پهريون پد + آخري پد]

$= \frac{n}{2}[1+n] \quad = \frac{n(n+1)}{2}$

$\therefore$ پهرين n قدرتي اَنگن جي جوڙ اُپت $\frac{n(n+1)}{2}$ آهي.

مثال (2) پهرين n ٻڌي قدرتي اَنگن جي جوڙ اُپت ڪريو

حل : پهريان n ٻڌي قدرتي اَنگ $2, 4, 6, 8, \ldots, 2n$.

$t_1 =$ پهريون پد $= 2$, $t_n =$ آخري پد $= 2n$

طريقو I

$= \frac{n}{2}[t_1 + t_n]$

$= \frac{n}{2}[2+2n]$

$= \frac{n}{2} \times 2(1+n)$

$= n(1+n)$

$= n(n+1)$

طريقو II

$S_n = 2 + 4 + 6 \ldots + 2n$

$= 2(1+2+3+\ldots+n)$

$= \frac{2[n(n+1)]}{2}$

$= n(1+n)$

$= n(n+1)$

طريقو III

$S_n = \frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$

$= \frac{n}{2}[2\times 2+(n-1)2]$

$= \frac{n}{2}[4+2n-2]$

$= \frac{n}{2}[2+2n]$

$= \frac{n}{2} \times 2(1+n)$

$= n(1+n) = n(n+1)$

$\therefore$ پهرين n ٻڌي قدرتي اَنگن جي جوڙ اُپت $n(1+n)$ لڌو

مثال (3) پھرين n اِڪي قدرتي اَنگن جي جوڙ اُپت لھو.

حل : پھريان n اِڪي قدرتي اَنگ

$1, 3, 5, 7, \ldots, (2n - 1).$

$a = t_1 = 1$ ۽ $t_n = (2n - 1), d = 2$

طريقو I

$S_n = \frac{n}{2}[t_1 + t_n]$

$= \frac{n}{2}[1 + (2n - 1)]$

$= \frac{n}{2}[1 + 2n - 1]$

$= \frac{n}{2} \times 2n$

$= n^2$

طريقو II

$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$

$= \frac{n}{2}[2 \times 1 + (n-1) \times 2]$

$= \frac{n}{2}[2 + 2n - 2]$

$= \frac{n}{2} \times 2n$

$= n^2$

طريقو III

$S_n = 1 + 3 + \ldots + (2n-1)$

$= (1 + 2 + 3 + \ldots + 2n)$

$- (2 + 4 + 6 + \ldots + 2n)$

$= \frac{2n(2n+1)}{2} - \frac{2n(n+1)}{2}$

$= (2n^2 + n) - (n^2 + n)$

$= n^2$

$\therefore$ پھرين n اِڪي قدرتي اَنگن جي جوڙ اُپت n^2 آھي.

مثال (4) مشغولي : 1 کان 150 تائين سيني اِڪي اَنگن جي جوڙ اُپت لھو.

حل : 1 کان 150 تائين سيني $1, 3, 5, 7, \ldots, 149$ اِڪي اَنگن جي جوڙ اُپت لھو.

ھتي d=2 ۽ a=1 پھريون 1 کان 150 تائين اِڪي اَنگ ڪيترا آھن اِھو لھو.

$t_n = a + (n - 1)d$

$149 = 1 + (n - 1)2 \qquad \therefore\ 149 = 1 + 2n - 2$

$\therefore\ n = 75$

ھاڻي $1 + 3 + 5 + \ldots + 149$ 75 اَنگن جو جوڙ ڪريو

$d = 2, n = 75$ ۽ $a = 1$

طريقو I

$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$

$S_n = \square$

$S_n = \square \times \square$

$S_n = \square$

طريقو II

$S_n = \frac{n}{2}[t_1 + t_n]$

$S_n = \frac{75}{2}[1 + 149]$

$S_n = \square \times \square$

$S_n = \square$

اَڀياس 3.3

1. هڪ اَنگي پروگريشن جو پهريون پد 6 ۽ عام تفاوت 3 آهي تہ S_{27} لهو.

$$a = 6,\ d = 3,\ S_{27} = ?$$

$$S_n = \frac{n}{2}[\square + (n-1)\,d]$$

$$S_{27} = \frac{27}{2}[12 + (27-1)\square]$$

$$= \frac{27}{2} \times \square$$

$$= 27 \times 45 \quad = \square$$

2. پهرين 123 ٻڌي قدرتي اَنگن جي جوڙ اُپٽ لهو.

3. 1 ۽ 350 جي وچ ۾ سيني ٻڌي اَنگن جي جوڙ اُپٽ لهو.

4. هڪ اَنگي پروگريشن جو اُڻويهون پد 52 ۽ انٽيهون پد 128 آهي، تہ اُنجي پهرين 56 پدن جي جوڙ اُپٽ لهو.

5. 1 ۽ 140 جي وچ ۾ چئن سان ونڊجندڙ قدرتي اَنگ ڪيترا آهن، اِهو لهو اِنهن اَنگن جي جوڙ اُپٽ لهڻ لاءِ هيٺين مشغولي پوري ڪريو

1 ۽ 140 جي وچ ۾ ايندڙ چئن سان ونڊجندڙ اَنگ

↓

4, 8, ... , 136

↓

اِهي ڪل ڪيترا اَنگ آهن؟ $n = \square$

↓

$a = \square$, $d = \square$, $t_n = \square$

↓

$t_n = a + (n-1)d$

↓

$136 = \square + (n-1) \times \square$

↓

$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d] \leftarrow \square = n$

$S_{\square} = \frac{\square}{2}[\qquad] \quad = \square$

1 ۽ 140 جي وچ ۾ ايندڙ چئن سان ونڊجندڙ اَنگن جي جوڙ اُپٽ $= \square$

6.★ هڪ اَنگي پروگريشن جي پهرين 55 پدن جي جوڙ اُپٽ 3300 آهي، تہ اِن جو 28 پد لهو.

★7. هڪ اَنگي پروگريشن جي ٽن لڳاتار پدن جي جوڙ اُپٽ 27 آهي ۽ اُنهن جي ضرب اُپٽ 504 آهي، تہ اِهي پد لهو. (ٽي لڳاتار پد $a-d, a, a+d$ کڻو)

★8. هڪ انگي پروگريشن جي چئن لڳاتار پدن جي جوڙ اُپٽ 12 آهي ۽ اِنهن چئن لڳاتار پدن مان ٽئين ۽ چوٿين پد جي جوڙ اُپٽ 14 آهي، تہ چارئي پد لهو.
(چار لڳاتار پد $a-d, a, a+d, a+2d$ کڻو)

★9. هڪ اَنگي پروگريشن جو نائون پد ٻڙي آهي، تہ ثابت ڪريو تہ اُڻٽيهون پد، اُڻويهين پد کان ٽيڻو آهي.

چاڪي وٽون

اَنگي پروگريشن جو اُپيوگ (Application of A.P.)

مثال (i) هڪ مڪسر ٺاهيندڙ ڪمپنيءَ ٽئين سال 600 مڪسر ٺاهيا ۽ ستين سال 700 مڪسر ٺاهيا. هرهڪ سال ٺهندڙ مڪسرن ۾ واڌ هڪجيتري رکي هينيان اَنداز لهو. (i) پهرين سال جي پيدائش (ii) ڏهين سال جي پيدائش (iii) پهرين ستن سالن ۾ ڪل پيدائش.

حل : ڪمپنيءَ ۾ ٺهندڙ مڪسرن ۾ واڌ هر سال هڪجيتري رکي ويئي آهي.

اِنڪري لڳاتار سال ۾ ٺهندڙ مڪسرن جو اَنداز اَنگي پروگريشن جي روپ ۾ آهي.

(i) ڪمپنيءَ n سال ۾ t_n مڪسر ٺاهيا آهن. اِهو مڃي، ڏنل ڄاڻ انوسار

$$t_3 = 600, t_7 = 700$$

اَسانکي ڄاڻ آهي تہ $t_n = a+(n-1)d$

$$t_3 = a+(3-1)d$$

$$= 600 = a+2d \quad .... (I)$$

$$t_7 = a+(7-1)d$$

$$= a+6d = 700 \quad .... (II)$$

$a+2d = 600 \therefore a = 600 - 2d$ اِهو ملهہ مساوت (II) ۾ رکي

$$600 - 2d + 6d = 700$$

$$4d = 100 \quad \therefore \quad d = 25$$

$$a+2d = 600 \qquad \therefore \quad a + 2 \times 25 = 600$$

$$a + 50 = 600 \qquad \therefore \quad a = 550$$

∴ پهرين سال جي پيدائش 550 مڪسر آهي.

$$\text{(ii)} \quad t_n = a+(n-1)d$$

$$t_{10} = 550+(10-1) \times 25$$

$$= 550 + 225 = 775$$

∴ ڏهين سال ۾ پيدائش 775 آهي.

(iii) پهرين ستن سالن جي پيدائش لهڻ لاءِ S_n جو سوتر واپرائي

$$S_n = \frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$$

$$\therefore \; S_7 = \frac{7}{2}[1100 + 150] = \frac{7}{2}[1250] = 7 \times 625 = 4375$$

∴ پهرين ستن سالن جي ڪل پيدائش4375 آهي.

مثال (2) قرض ڪنيل 3,25,000 رپيا چڪائڻ لاءِ اَجيم شرما پهرين مهني 30,500 رپيا پريا اُنڪانپوءِ هر مهني اَڳين مهني کان 1500 رپيا گهٽ پرڻا پون ٿا ته قرض ڪنيل رقم چڪائڻ لاءِ ڪيس ڪيترا مهنا لڳندا؟

حل : سمجهو ته قرض ڪنيل پئسا چڪائڻ لاءِ n مهنا لڳن ٿا. 30,500 مان هر مهني 1500 ر گهٽائڻا آهن.

$$\therefore \; 30,500; \;\; 30,500 - 1500; \;\; 30,500 - 2\times 1500, \;\; . .$$

اهي چڪائيندڙ رقمون اَنگي پروگريشن ۾ آهن.

پهريون پد $= a = 30500, \; d = -1500 =$ قرض ڪنيل رقم $= S_n = 3,25,000$

$$S_n = \frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$$

$$3,25,000 = \frac{n}{2}[2\times 30500+(n-1)\times(-1500)]$$

$$= \frac{n}{2}[2\times 30500 - 1500n + 1500]$$

$$3,25,000 = 30500n - 750n^2 + 750n$$

$$\therefore \; 750n^2 - 31250n + 325000 = 0$$

$$\therefore \; 3n^2 - 125n + 1300 = 0$$ . . . . . (ٻنهي پاسي 250 سان ونڊ ڪري)

$$\therefore \; 3n^2 - 60n - 65n + 1300 = 0$$

$$\therefore \; 3n(n-20) - 65(n-20) = 0$$

$$\therefore \; (n - 20)(3n - 65) = 0$$

$\therefore \; n - 20 = 0,$ يا $3n - 65 = 0$

$n = 20$ يا $n = \frac{65}{3} = 21\frac{2}{3}$

اَنگي پروگريشن ۾ n پد قدرتي اَنگ هوندو آهي.

$$\therefore \; n \neq \frac{65}{3} \quad \therefore \; n = 20$$

∴ 20 مهنن ۾سڀي 3,25,000 رپيا رقم چڪائي ويندي.

مثال (3) اَنور هر مهني مقرر رقم جي بچت ڪري ٿو. پهرين مهني هو 200 ر بچت ڪري ٿو ٻئين مهني 250 ر بچت ڪري ٿو. ٽئين مهني 300 ر بچت ڪري ٿو ته 1000 ر بچت ڪائين مهني ۾ ٿيندي؟ اُن مهني تائين هن جي ڪل بچت ڪيتري ٿيندي؟

حل : پهرين مهني ۾ بچت 200 ر ٻئين مهني ۾ بچت 250 ر . . .

اهڙي طرح هر مهني ٿيندڙ بچت $200, 250, 300, \ldots$ اَنگي پروگريشن ۾ آهي.

هتي $a = 200, d = 50$ ، t_n جو سُوتر ڪم آڻي n جو ملهه لهو ۽ اُن مان S_n لهو.

$$t_n = a+(n-1)d$$

$$= 200 +(n-1)50$$

$$= 200 + 50n - 50$$

$$\therefore \quad 1000 = 150 + 50n$$

$$150 + 50n = 1000$$

$$50n = 1000 - 150$$

$$50n = 850$$

$$\therefore \quad n = 17$$

1000 ر بچت 17 مهني ۾ ٿيندي

17 مهنن جي ڪل بچت ڪيتري اِها لهو

$$S_n = \frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$$

$$= \frac{17}{2}[2 \times 200+(17-1) \times 50]$$

$$= \frac{17}{2}[400 + 800]$$

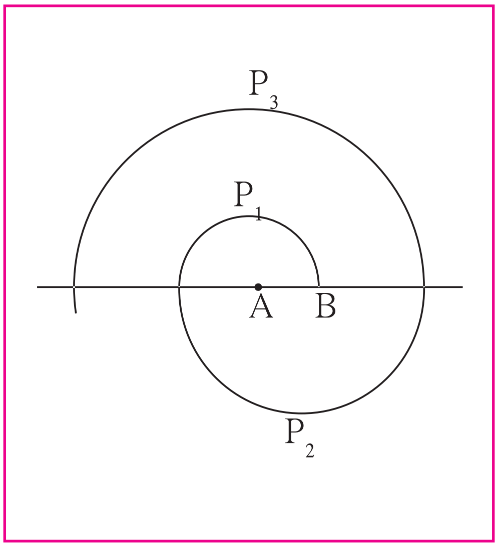
$$= \frac{17}{2}[1200]$$

$$= 17 \times 600$$

$$= 10200$$

17 مهنن جي ڪل بچت 10,200 ر آهي.

مثال (4) شڪل ۾ ڊيڪارٽيل طريقي هڪ ليڪ تي A مرڪز ڪٽي 0.5 س م نيم قطر وارو P_1 اَڌ گول ڪيو اِهو



ان ليڪ کي B تڪي وٽ ڪپي ٿو. هاڻي B مرڪز ڪٽي 1 س م نيم قطر وارو P2 اَڌ گول ليڪ جي ٻي پاسي ڪيو هاڻي وري A مرڪز ڪٽي 1.5 س م نيم قطر وارو P3 اَڌ گول ڪيو. اَهڙيءَ طرح A ۽ B مرڪز ڪٽي نمبروار 0.5 س م، 1 س م، 1.5 س م، 2 س م، اَهڙا نيم قطرن وارا اَڌ گول ڪيڻ ڪانپوءِ هڪ گول گهيري واري شڪل تيار ٿئي ٿي، ته اَهڙيءَ طرح 13 اَڌ گولن سان تيار ٿيل گول گهيري واري شڪل جي ڊيگهه ڪيتري آهي ($\pi = \frac{22}{7}$ ڪٽو)

حل : A, B, A, B, . . . ان سلسلي ۾ مرڪز ڪٽي ڪيڊيل اَڌ گول گهيرن جي ڊيگهه نمبر وار P_1, P_2, P_3، . . .

سمجهو پهرين اَڌ گول جو نيم قطر 0.5 س م آهي. ٻين اَڌ گول جو نيم قطر 1.0 س م آهي. اِن نموني چاڙ ڏنل آهي اِن وسيلي $P_1, P_2, P_3, \ldots P_{13}$ جو ملهه لهو.

پهرين اَڌ گول جي گهيري جي ڊيگهه = $P_1 = \pi r_1 = \pi \times \frac{1}{2} = \frac{\pi}{2}$

$$P_2 = \pi r_2 = \pi \times 1 = \pi$$

$$P_3 = \pi r_3 = \pi \times 1.5 = \frac{3}{2}\pi$$

$P_1, P_2, P_3, \ldots$ اَڌ گولن جا گهيرا يعني $\frac{1}{2}\pi, 1\pi, \frac{3}{2}\pi, \ldots$ اِهي عدد اَنگي پروگريشن ۾ آهن.

هتي $a = \frac{1}{2}\pi, d = \frac{1}{2}\pi,$ اِن مان S_{13} لهو

$$S_n = \frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$$

$$S_{13} = \frac{13}{2}\left[2 \times \frac{\pi}{2} + (13-1) \times \frac{\pi}{2}\right]$$

$$= \frac{13}{2}[\pi + 6\pi]$$

$$= \frac{13}{2} \times 7\pi$$

$$= \frac{13}{2} \times 7 \times \frac{22}{7}$$

= 143 س م

∴ 13 اَڌ گولن سان تيار ٿيل گول گهيري جي ڊيگهه 143س.م. هوندي.

مثال (5) هڪ ڳوٺ ۾ 2010 تائين 4000 ماڻهو پڙهيل هئا اِهو عدد هر سال 400 وڌي ٿو تہ 2020 سال ۾ ڪيترا ماڻهو پڙهيل هوندا؟

حل :

سال	2010	2011	2012	...	2020
پڙهيل ماڻهو	4000	4400	4800	...	

$a = 4000, \quad d = 400 \quad n = 11$

$$t_n = a+(n-1)d$$
$$= 4000 + (11-1)400$$
$$= 4000 + 4000$$
$$= 8000$$

2020 سال ۾ 8000 ماڻهو پڙهيل هوندا.

مثال (6) شريمتي شيخ کي 2015 سال ۾ ساليانِي 1,80,000 رپيا پگهار واري نوڪري ملي آفيس وارن هن تي هر سال 10,000 پگهار وڌائڻ قبول ڪيو تہ ڪهڙي سال ۾ هن جي ساليانِي پگهار 2,50,000 ر ٿيندي.

حل :

سال	پهرين سال (2015)	ٻين سال (2016)	ٽين سال (2017)	...
پگهار (رپيا)	[1,80,000]	[1,80,000 + 10,000]		...

$a = 1,80,000, \qquad d = 10,000 \qquad n = ? \qquad t_n = 2,50,000$ رپيا

$$t_n = a+(n-1)d$$
$$2,50,000 = 1,80,000 + (n-1) \times 10,000$$
$$(n-1) \times 10000 = 70,000$$
$$n-1 = 7$$
$$n = 8$$

$\therefore$ اَٺين سال هن جي ساليانِي پگهار 2,50,000 ر ٿيندي.

اَڀياس 3.4

1. سانڪا جنوري 2016 تي فيصلو ڪيو تہ پهرين ڏينهن10ر ٻين ڏينهن 11ر ، ٽين ڏينهن 12 ر اَهڙيءَ طرح بچت ڪندي رهندي تہ 31 ڊسمبر 2016 تائين هن ڪل بچت ڪيتري ٿي؟
2. هڪ ماڻهو 8000 ر قرض ڪنيو ۽ اُن تي1360 ر وياج ڏيڻ قبول ڪيو. هڪ قسط اَڳلي قسط کان 40 ر گهٽ ڏيئي سڄي رقم 12 ماهيانين قسطين ۾ ڀري، تہ هن پهرين ۽ آخري قسط ۾ ڪيتري رقم ڀري؟
3. سچن راشٽريہ پرماڻپتر ۾ پهرين سال 5000 ر، ٻين سال 7000 ر، ٽين سال 9000ر اِن سلسلي ۾ رقم سيڙائي تہ هن جي 12 سالن ۾ ڪل سيڙايل رقم ڪيتري آهي؟
4. هڪ سڀا گرهہ ۾ ڪل 27 قطارون آهن. پهرين قطار ۾ 20 ڪرسيون آهن، ٻين قطار ۾ 22 ڪرسيون، ٽين قطار ۾ 24 ڪرسيون تہ پنڌرهين قطار ۾ ڪل ڪيتريون ڪرسيون آهن ۽ سڀاگرهہ ۾ ڪل ڪيتريون ڪرسيون آهن؟
5. ڪارگل ۾ هڪ هفتي ۾ سومر کان ڇنڇر تائين سڀني ڏينهن جو گرمي پد ماپيو ويو. اِهي ماپون اَنگي پروگريشن ۾ آهن سومر ۽ ڇنڇر جي گرمي پد جي جوڙ اُپت منگل ۽ ڇنڇر جي گرمي پد جي جوڙ اُپت کي 5°c وڌيڪ آهي. جيڪڏهن ٻڌر جو گرمي پد -30°c آهي تہ هرهڪ ڏينهن جو گرمي پد لهو.
6. وشو پرياورڻ ڏينهن تي هڪ ٽڪنڊي شڪل واري پلاٽ تي وڻ پوکڻ جو ڪاريہ ڪرم رکيو ويو. پهرين قطار ۾ هڪ وڻ، ٻي قطار ۾ 2 وڻ، ٽين قطار ۾ 3 وڻ اَهڙيءَ طرح 25 قطارن ۾ وڻ پوکيا ويا، تہ ڪل ڪيترا وڻ پوکيا ويا؟

گڏيل اَڀياس 3

1. هيٺين سوالن ۾ صحيح جواب چونڊيو

(1) $-10, -6, -2, 2, \ldots$ اِهو سلسلو .....

(A) انگي پروگريشن آهي، چاڪاڻ تہ d=-16 آهي. (B) انگي پروگريشن آهي، چاڪاڻ تہ d=4 آهي.

(C) انگي پروگريشن آهي، چاڪاڻ تہ d=-4 آهي. (D) انگي پروگريشن نہ آهي.

(2) جنهن اَنگي پروگريشن جو پهريون پد -2 آهي ۽ عام تفاوت -2 آهي، اَهڙي اَنگي پروگريشن جا پهريان چار پد ....آهن.

(A) $-2, 0, 2, 4$ (B) $-2, 4, -8, 16$

(C) $-2, -4, -6, -8$ (D) $-2, -4, -8, -16$

(3) پهرين 30 قدرتي، اَنگن جي جوڙ اُپت هيٺين مان ڪهڙي آهي؟

(A) 464 (B) 465 (C) 462 (D) 461

(4) ڏنل اَنگي پروگريشن جو . . . $t_n = 4, d = -4$ $n=7$ تہ ‘a’ لهو.

(A) 6 (B) 7 (C) 20 (D) 28

(5) هڪ اَنگي پروگريشن ۾ $a = 3.5, d = 0,$ آهي تہ $t_n = . . .$

(A) 0 (B) 3.5 (C) 103.5 (D) 104.5

(6) هڪ اَنگي پروگريشن جا پهريان ٻہ پد 3-,4 آهن تہ ايڪويهون پد .... آهي.

(A) −143 (B) 143 (C) 137 (D) 17

(7) جيڪڏهن هڪ اَنگي پروگريشن ۾ $d = 5$ آهي تہ $t_{18} - t_{13} = . . .$

(A) 5 (B) 20 (C) 25 (D) 30

(8) 3 جي ڪوڙي ۾ پهرين پنجن اَنگن جي جوڙ اُپت ... آهي.

(A) 45 (B) 55 (C) 15 (D) 75

(9) . . . ,15, 10, 5 ان اَنگي پروگريشن جي پهرين 10 پدن جي جوڙ اُپت ... آهي.

(A) −75 (B) −125 (C) 75 (D) 125

(10) هڪ اَنگي پروگريشن جو پهريون پد 1 آهي، n پد 20 آهي. جيڪڏهن $S_n = 399$ آهي تہ $n =$

(A) 42 (B) 38 (C) 21 (D) 19

2. −49 , . . . ,−5 ,−8 ,−11 اَنگي پروگريشن آخري چوٿون پد لهو.

3. هڪ اَنگي پروگريشن جو ڏهون پد 46آهي. پنجين ۽ ستين پد جي جوڙ اُپت 52 آهي. تہ اِهو سلسلو لهو.

4. جنهن اَنگي پروگريشن جو چوٿون پد 15- ۽ نائون پد 30- آهي ۽ پهرين ڇهن پدن جي جوڙ اُپت 36 آهي، تہ پهرين ڏهن پدن جي جوڙ اُپت لهو.

5. ٻہ اَنگي پروگريشن ڏنل آهن 9,7,5........ ۽ 24,21,18....... جيڪڏهن ٻنهي اَنگي پروگريشن جو n پد ساڳيو آهي تہ n جو ملهہ لهو ۽ n پد لهو.

6. جيڪڏهن هڪ اَنگي پروگريشن جي ٽين ۽ اَٺين پد جي جوڙ اُپت 7 آهي ۽ ستين ۽ چوڏهين پد جي جوڙ اُپ 3- آهي تہ ڏهون پد لهو.

7. هڪ اَنگي پروگريشن جو پهريون پد 5- ۽ آخري پد 45 آهي جيڪڏهن اِنهن سيني پدن جي جوڙ اُپت 120 آهي تہ ڪيترا پد آهن؟ ۽ اِنهن جو عام تفاوت ڪيترو آهي؟

8. 1 کان n قدرتي اَنگن جي جوڙ اُپت 36 آهي تہ n جو ملهہ لهو.

9. 207 عدد جا ٽي حصا اَهڙيءَ طرح ڪريو جيئن اُهي عدد اَنگي پروگريشن ۾ هجن ۽ ننڍن ٻن حصن جي ضرب اُپت 4623 هجي.

10. هڪ اَنگي پروگريشن ۾ 37 پد آهن سينٽي جي وچوارن ٽن پدن جي جوڙ اُپت 225 آهي ۽ آخري ٽن پدن جي جوڙ اُپت 429 آهي تہ اَنگي پروگريشن ڪڍو.

11. ★ جن اَنگي پروگريشن جو پهريون پد a آهي ٻيون پد b آهي ۽ آخري پد c آهي تہ اِن سلسلي جي پدن جي جوڙ اُپت $\frac{(a+c)(b+c-2a)}{2(b-a)}$ آهي اِهو ثابت ڪري ڏيکاريو.

12. ★ جيڪڏهن اَنگي پروگريشن جي پهرين p پدن جي جوڙ اُپت، پهرين q پدن جي جوڙ اُپت جي برابر آهي تہ اِن جي پهرين (p+q) پدن جي جوڙ اُپت آهي اِهو ثابت ڪري ڏيکاريو $(p \neq q)$

13. ★ جيڪڏهن ڪنهن اَنگي پروگريشن جي m پد جو n دفعا ، n پد جي (n+m) دفعن جي برابر آهي تہ ثابت ڪريو تہ اِن اَنگي پروگريشن جو پد ٻڙي آهي.

14. 1000 ر رقم 10% سادي وياج تي سيڙائي ويئي تہ هر سال جي آخر ۾ ملندڙ وياج جي رقم اَنگي پروگريشن ۾ آهي تہ 20 سالن کان پوءِ ملندڙ وياج جي رقم لهو اِن لاءِ هيٺين مشظولي پوري ڪريو.

سادو وياج $= \frac{P \times R \times N}{100}$

پهرين سال ملندڙ سادو وياج $= \frac{1000 \times 10 \times 1}{100} = \square$

ٻن سالن ڪانپوءِ ملندڙ سادو وياج $= \frac{1000 \times 10 \times 2}{100} = \square$

ٽن سالن ڪانپوءِ ملندڙ سادو وياج $= \frac{\square \times \square \times \square}{100} = 300$

اهڙيءَ طرح 6,5,4 سال ڪانپوءِ ملندڙ سادو وياج نمبروار 400 ، □ ، □ آهي.

هن سلسلي ۾ $d = \square$ ، ۽ $a = \square$ آهي.

20 سالن ڪانپوءِ ملندڙ سادو وياج

$t_n = a + (n-1)d$

$t_{20} = \square + (20-1)\square$

$t_{20} = \square$

20 سالن ڪانپوءِ ملندڙ سادو وياج = □

4 مالي رٿا

اچو تہ سکي وٺون

- جي ايس ٽي واقفيت
- ٽئڪس اِنوائسز
- جي ايس ٽي ڪٽڻ ۽ اِن پٽ ٽئڪس ڪريڊٽ
- شيئرس، مچيوئل فنڊ ۽ ايس آءِ پي

اَچو تہ چرچا ڪريون

ماسترياڻي :- وديارٿي دوست، اَسان جي ديش ۾ واپار لاءِ ڪهڙي ٽئڪس ويوستا هلندڙ آهي؟

آيوش :- اَسان جي ديش ۾ جي ايس ٽي مطلب شيون ۽ سيوائون ٽئڪس ويوَستا هلندڙ آهي.

ماسترياڻي :- واهہ، اِن بابت توهان کي ڇا ڇا ڄاڻ آهي؟

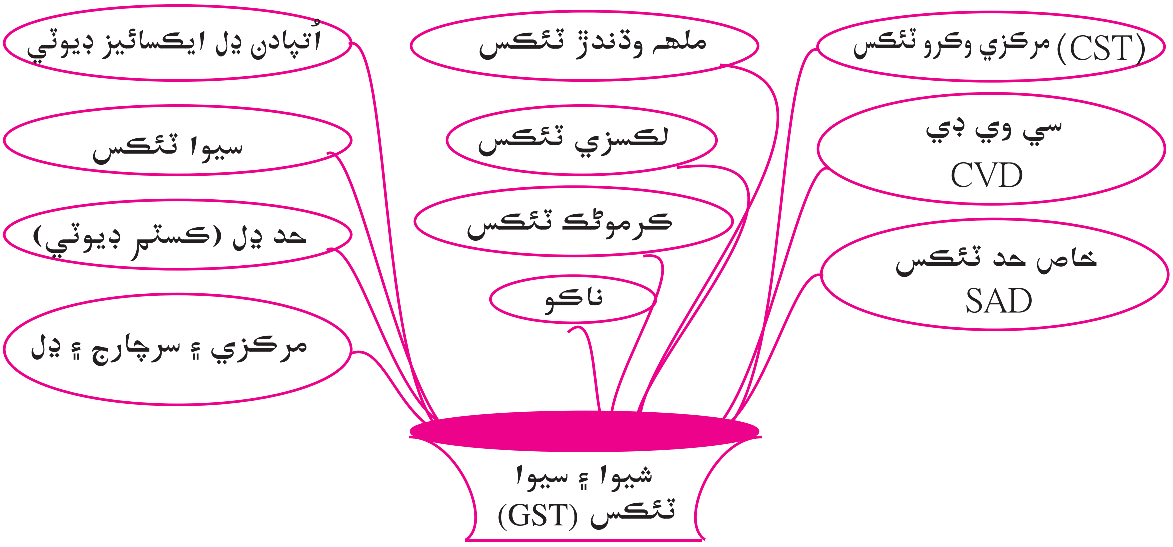
آيان :- جي ايس ٽي معني Goods and Service Tax.

آيشا :- سڄي ديش ۾ هڪ ئي ٽئڪس عمل ۾ آندل آهي.

ماسترياڻي :- برابر اَڳ ۾ جدا جدا راڄين ۾ جدا جدا ٽئڪس لڳندي هئي اَڳ وارين ٽئڪسن ۾ ڪهڙا ٽئڪس بدلايا ويا آهن اُهي هيٺ ڏنل چتر ۾ ڏسو

شفيق :- اُتپادن ڊيل، حد ڊيل، وئٽ مرڪزي ڊيل، سيوا ٽئڪس، ناڪو وغيرهہ

ماسترياڻي :- اِهي سڀ رد ڪري هاڻي فقط جي.ايس.ٽي خريدي - وڪرو تي لڳائي ويئي آهي. اِها 1 جولاءِ 2017ع کان عمل ۾ آئي. انکري چئجي ٿو هڪ ديش - هڪ ٽئڪس هڪ بازار.



چاڪي وٺون

Tax Invoice

شيءِ خريدي لاءِ ٽئڪس اِنوائز (نمونو)											
SUPPLIER : A to Z SWEET MART 143, Shivaji Rasta, Mumbai : 400001 Maharashtra Mob. No. 92636 92111 email : atoz@gmail.com							GSTIN :27ABCDE1234H1Z5				
Invoice No. GST/110							Invoice Date: 31-Jul-2017				
S. No.	HSN code	Name of Product	Rate	Quantity	Taxable Amount	CGST		SGST		Total
						Rate	Tax	Rate	Tax	Rs.
1	210690	پيزا	400 ر هرهڪ ڪلو	500 گرام	200.00	2.5%	5.00	2.5%	5.00	210.00
2	210691	چاڪليٽ	80 ر	1 پئڪ	80.00	14%	11.20	14%	11.20	102.40
3	2105	آئيسڪريم	200 ر	1 پئڪ (500 گرام)	200.00	9%	18.00	9%	18.00	236.00
4	1905	بريڊ	35ر	1 گرام	35.00	0%	0.00	0%	0.00	35.00
5	210690	لوٽي	500ر هرهڪ ڪلو	250 پئڪ	125.00	6%	7.50	6%	7.50	140.00
					ڪُل رقم		41.70		41.70	723.40

ويد : اِن ۾ بل ۾ اَسان کي ڪجهه نوان لفظ نظر اچن ٿا. اُنهن جو مطلب سمجهايو.

ماسترياڻي :- CGST ۽ SGST اِهي جي ايس ٽي جا ٻه ڀاڱا آهن. GST معنيٰ (Central Goods and Services Tax) مرڪزي شيون ۽ سيوا ٽئڪس اِها مرڪزي سرڪار خزاني ۾ جمع ٿئي ٿي.GST معنيٰ (State Goods & Services Tax) راجيه شيون ۽ سيوائون ٽئڪس اِها راجيه سرڪار خزاني ۾ جمع ٿئي ٿي.

ريبا :- مٿي نموني ۾ ساڄي پاسي اکرن ۽ اَنگن وڏي قطار آهي اِهو ڇا آهي؟

ماسترياڻي :- اِهو CGST آهي مطلب واپاريءَ جو سڃاڻپ نمبر (GSTIN - GST Identification Number) جن واپارين جي آرٿڪ سال ۾ ترن اوور 20 لکن کان وڌيڪ آهي اُنهن لاءِ اهو نمبر وٺڻ لازمي آهي PAN ۾ اَهڙا ڏهه اَنگ - اکر هوندا آهن. اهڙي نموني اِن GSTIN ۾ 15 انگ - اکر هوندا آهن. ان 15 اَنگ اَکرن ۾ اُن واپاري جو PAN سمايل هوندو آهي.

مثال : 27 A B C D E 1 2 3 4 H 1 Z (آخر وارو اَکهه يا اِنهن مان هڪ هوندو آهي)

- 27 → راجيه جو 2 اَنگي
- ABCDE1234 → 10اَنگه اَکري PAN
- H → رجسٽريشن نمبر
- 1 → سيني لاءِ ساڳيو (By default)
- Z → چيڪ سم ڊجٽ

(چيڪ سم ڊجٽ اِهو اِنٽرنيٽ ۾ GSTINوجهڻ سان ڄاڻ پوندي ته اِهو صحيح آهي يا غلط)

27 اهو مهاراشٽر جو ڪوڊ (State Code) آهي. اِن مان سمجهه ۾ ايندو ته واپاريءَ جو نالو مهاراشٽر ۾ درج ٿيل آهي.

جيني :- ٽئڪس انوائز ۾ HSN اِهو ڪوڊ ڇا آهي؟

ماسترياڻي :- HSN ڪوڊ مطلب اُن شيءِ جو ورگيڪرڻ ۾ خاص نمبر ڏنل آهي ٽئڪس اِنوائز ۾ اُن جو ملهه لڳائڻو هوندو آهي.

ايچ ايس اين معني Harmonized System of Nomenclature.

جوسف :- ٽئڪس اِنوائز ۾ دڪان جو نالو، ائڊريس، تاريخ، اِنوائز نمبر، موبائيل نمبر، ئي ميل آيڊي آهي.

ماسترياڻي :- هاڻي اِن اِنوائز ۾ شيون ۽ سيوائون ٽئڪس ڪهڙي سِوروپ ۾ آهن، اِهو ڏسون اِن لاءِ هيٺ ڏنل جملن ۾ خالي چوڪنڊا ڀريو. اِنوائز ۾ پيزن جو اَگهه 400 ر في ڪلو گرام آهي. اڌ ڪلو گرام پيزا ورتل آهن. اِنڪري اُنجو ملهه 200ر آهي.

- ر = 2.5% پيزن تي مرڪزي ٽئڪس ، اِن مثان راڄيه جي ٽئڪس ☐ اگهه سان 5 رپيا. ☐
- اِن مان پيزن تي 5% = 2.5%+2.5% 10 ر رپيا.
- ان نموني چاڪليٽ مثان ٽئڪس اَگهه ☐ % مطلب اُن تي ☐ ر ٽئڪس.
- آئيسڪريم مثان GST اَگهه ☐ % = اُن مثان ☐ رپيا ٽئڪس.
- ڍهيءَ مثان مرڪزي ☐ % ۽ راڄيه ☐ % ملائي ☐ % آهي.

آدتيہ :- ڊبل روٽيءَ مثان ٽئڪس 0% آهي ٻئي راڄيه توڙي مرڪزي ٽئڪسون ساڳيون آهن.

نتاد :- شيءِ جي قسم جي آڌار تي ٽئڪس جدا جدا آهن. 0%, 5%, 12%, 18% ۽ 28%.

ماسترياڻي :- هرهڪ شيءِ مثان اَگهه سرڪاري مقرر ڪندي آهي. هاڻي هڪ سيوا اِنوائز نمونو ڏسون ٿا ڏنل چاڙ موجب اِهو اِنوائز پورو ڪريو.

شيوا ٽئڪس اِنوائز (نمونو)								
Invoice No. 58 — آها سونيري ڪيٽر - شواپر - پٽي								
Mob. No. 7588580000 email - ahar.khed@yahoo.com								
GSTIN : 27 AAAAA5555B1ZA				Invoice Date : 25-Dec-2017				
S A Code (SAC)	Food items	Qty	Rate (in Rs.)	Taxable amount	CGST		SGST	
9963	Coffee	1	20	20.00	2.5%	0.50 رپيا	2.5%	. . .
9963	Masala Tea	1	10	10.00	. . . .	. . .	2.5%	. . .
9963	Masala Dosa	2	60	. . . .	2.5%	. . .	. . .	. . .
			Total	. . .		. . .		. . .
Grand Total = -------- رپيا								

ماسترياڻي :- شيوا ۽ سيوائون ٽئڪس جا ٻئي بل جاچي، ٻنهي بلن جي ڪوڊ ۾ فرق سمجهو.

هريش :- شين جي بل تي HSN ڪوڊ ڏنل آهي تہ وري ناستا گهر بل تي SA ڪوڊ ڏنل آهي.

ماسترياڻي :- SAC مطلب Service Accounting Code - SAC اِهو سيوائن جي ورگيڪرڻ ۾ خاص نمبر آهي SAC مطلب هيٺ ڏنل خاڪي ۾ ڪجهہ شين ۽ سيوائن جا اگهہ ڏيکاريل آهن.

نمبر	قسم	ٽئڪس جو اَگهہ	شيون ۽ سيوا قسم
I	ٻڙيءَ وارا (Nil rated)	0%	شيون : اَناج وغيرهہ زندگيءَ لاءِ ضروري شيون، پاچيون، ڦل، ڪير، لوڻ، مٽيءَ جا برتن وغيرهہ سيوائون : ڌارمڪ سنستائن جا پراجيڪٽ، پاڻيءَ جا واهڻ، رستا - پُلن جو اِستعمال، تعليم تندرستي سيوا، عام پبلڪ لئبرري، کيتي سيوا وغيرهہ.
II	گهٽ اگهہ	5%	شيون : عام ڪم ايندڙ شيوا، ايل پي جي سلينڊر، چانهہ، تيل، ماکي فروزن پاچين، لوڻنگہ، مصالحا، منائي. سيوائون: ريلوي، بس واهڻ، ٽئڪس سيوا، ومان (اڪنامي درجو) هاسٽل ۾ ڪاڏيہ پدارت وغيرهہ.
III	پرماڻ اگهہ (سطح I)	12%	شيون : گراهڪ اِستعمال شيون، لسي، ڏهي، سُڪل ميوو، پاچين ۽ ڦلن مان رسون، مُربو، جيلي، چٽڻي، موبائيل وغيرهہ. سيوائون: ڇپائي - ڪم، گيسٽ هائوس، ڪنسٽرڪشن وغيرهہ
IV	پرماڻ اَگهہ (سطح II)	18%	شيون : ماربل گرئنائيٽ، پرفيومس، ڌاتو، ڪمپيوٽر ، پرنٽر، مانيٽر سي سي ٽي وي وغيرهہ. سيوائون : ڪوريئر سيوا، آئوٽ ڊور ڪئٽرنگہ، سرڪس، ناٽڪ، نماءُ، سنيما، شيئر ٽريڊنگہ، دلالي وغيرهہ
V	وڏو اَگهہ	28%	شيون : لگزري شيون، موٽر سائيڪل، پرزا، ڪار، تماڪ، ٽڏا، پان، مصالحا، وئڪيوم ڪلينر، اي سي يونٽ، واشنگہ مشين وغيرهہ سيوائون : پنج تارا هوٽل، وندر -باغ، واٽر پارڪ، ٿيم پارڪ، ڪئسينو، روس ڪورن، آءِ پي ايل، ومان (اوچو)(وغيرهہ.

www.cbec.gov.in (Central Board of Excise & Customs) ان سائيٽ تي وڃي 0% کان 5% تائين شين مٿان جي ايس ٽي چڪاس ڪريو.

ٽپ : اها سڀ ڄاڻ سرڪار طرفان منظور ٿيل% تي آهي.

مٿي ڏنل لسٽ ۾ تبديل اَچي سگهي ٿي. بجلي، پيٽرول، ڊيزل اِهي جي ايس ٽي ۾ نہ اَچن.

مشغولي -I : توهان جي اِستعمال ۾ گهڻ ڌهن شين جي لسٽ تيار ڪريو اُنهن مٿان جي ايس ٽي اَگهه ڪيترو آهي اُهو لکو. اها ڄاڻ اخبارن، اِنٽرنيٽ، جي ايس ٽي ڪتابن يا شين جي خريدي بابت وسيلي حاصل ڪريو پوءِ دوستن سان اُنهن جي چڪاس ڪريو.

شيءِ	جي ايس ٽي اگهه	شيءِ	جي ايس ٽي اگهه
1. اِسڪيچ بُڪ		6. ------	
2. ڪمپاس		7.------	
3.------		8. ------	
4.------		9. ------	
5.------		10. ------	

مشغولي -II مشغولي -I وانگر ڏهه سيوائون (جهڙوڪ - ريلوي ۽ ايس. ٽي بس سيوا وغيره) ملڻ لاءِ جي ايس ٽي جو اَگهه ڳولهيو يا بل حاصل ڪري تختو پورو ڪريو.

سيوا	جي ايس ٽي اگهه	سيوا	جي ايس ٽي اگهه
1. ريلوي بُڪنگ		6. ------	
2. ڪوريئر سيوا		7.------	
3.------		8. ------	
4.------		9. ------	
5.------		10. ------	

مشغولي -III هيٺون تختو ڏسو ۽ ٻيون شيون ۽ سيوا ڪوڊ ڳولهي لکو.

سيوا	SAC	GST اَگهه	شيءِ	HSN Code	GST اَگهه
ريلوي سيوا	996511	--	ديوئلس رنگ	3208	28%
ومان (اڪانامي)	996411	--	بال بيئرنگ	84821011	28%
چلن سيوا	997157	--	اِسپيڊوميٽر	8714	28%
دلالي سيوا	997152	--	پٽاٽا	0701	0%
ٽئڪسي	996423	--	--	--	--
5 اِسٽار سيوا	--	--	--	--	--
--	--	--	--	--	--

مشغولي -IV : ڪي به 5 شيون ۽ 5 سيوائون اِنهن لاءِ HSN ۽ SAC ڪوڊ جا تختا تيار ڪريو شين ۽ سيوائن جا چٽر چپڪايو. اُن شيءِ ۽ سيوا لاءِ GST جو اَگهه ڳولهي لکو.

خاص ڳالهه شين ۽ سيوائن بابت HSN، SAC، اها مشغولي فقط ڄاڻ لاءِ آهي اِهو ياد ڪرڻ لاءِ نہ آهي.

پروجيڪٽ : جدا جدا قسمن جا بل حاصل ڪريو جيئن شيون سپلاءِ، سيوا بل وغيره اُنهن بلن ۾... حوالي جدا جدا نظريي کان اَڀياس ڪريو ۽ ڪلاس ۾ بحث ڪريو.

حل ڪيل مثال

مثال (1) آرتي گئس ايجنسي 545 ر ملهہ جو هڪ LPG سلينڊر هڪ گراهڪ کي وڪيو جي ايس ٽي جو اَگهہ 5% آهي تہ گراهڪ کي ڊٻل اِنوائز ۾ مرڪز ۽ راڄيہ جي ڪيتري ٽئڪس ڏيندي گراهڪ کي ڪل ڪيترا رپيا ڏيڻا پوندا؟ آرتي گئسي اجنسي کي ڪل ڪيترا روپيا ٽئڪس ڏيڻي پوندي؟

حل : جي ايس ٽي ٽئڪس اَگهہ = 5% ∴ راڄيہ 2.5% ، ۽ مرڪز = 2.5%.

سي جي ايس ٽي = $\frac{2.5}{100} \times 545 = 13.625 = 13.63$ روپيا

ايس جي ايس ٽي = ٽئڪس اَگهہ = 13.63 ر گراهڪن کي ڏيڻا پوندا

گراهڪن کي ڏيڻا پوندا = $545 + 13.63 + 13.63 = 572.26$ روپيا

27.26=13.63= مرڪز لاءِ + 13.63 راڄيہ لاءِ آرتيءَ کي ڏيڻا پوندا

آرتي گئس اجنسي کي سي جي ايس ٽي -13.63 رپيا ۽ ايس جي ايس ٽي 13.63ر پرڻا پوندا. معنيٰ ڪل ٽئڪس 27.26ر پرڻا پوندا.

مثال 2 : ڪور ۽ ر سيوا ڏيندڙ هڪ ايجنٽ هڪ پارسل ناسڪ کان ناگپور موڪلڻ لاءِ گراهڪ کان ڪل 590 ر ورتا اُن ۾ 500 رپيا ٽئڪس لائق رقم تي 45 رپيا مرڪز جي ۽ 45 رپيا راڄيہ جي ٽئڪس آهي تہ اِن وهنوار ۾ GST اگهہ لهو.

حل : 90 رپيا = 45+45 = ڪل GST

∴ GST اَگهہ = $\frac{90}{500} \times 100 = 18\%$

ڪوريئر سيوا ڏيندڙ ايجنٽ 18% سيوا ٽئڪس ورتي.

مثال (3) شريڌر 50000ر ڇپيل قيمت وارو هڪ لئپ ٽاپ ورتو جو سوچيو دڪاندار اِن قيمت تي 10% ڇوٽ ڏني لئپ ٽاپ مٿان جي ايس ٽي اگهہ 18% آهي تہ دوڪاندار GST جو حساب ٺپائي، اِهو لئپ ٽاپ شريڌر کي ڪيتري وڪيو؟

حل : پهريان ڇوٽ لهنداسين :

ڇوٽ = 50,000 ڇوٽ 10% = 5,000 رپيا

∴ لئپ ٽاپ جي ٽئڪس لائق رقم = 50,000 − 5,000 = 45,000 رپيا

∴ GST 18% =SGST 9% & CGST 9%

SGST = 9% OF 45000 = 4050 رپيا

∴ CGST = 4050 رپيا

∴ لئپ ٽاپ جي قيمت = 45000 + 4050 + 4050 = 53,100 رپيا

شريڌر 53,100 رپيا لئپ ٽاپ ورتو

خاص ڳالهہ : ٽئڪس لائق رقم معنيٰ جنهن قيمت تي ٽئڪس لڳائڻي آهي. اِنوائز ملهہ مطلب ٽئڪس جوڙيل رقم مثال ۾ ڪجهہ مليل نہ هجي تہ وڪرو قيمت ئي ٽئڪس لائق رقم سمجهڻ گهرجي جيڪا جي ايس ٽي مرڪز لاءِ آهي اُها ئي راجيہ لاءِ آهي.

اَڀياس 4.1

1. پاون ميڊيڪلس دوائون سپلائي ڪندڙ آهي اُن جي دڪان ۾ ڪجهہ دوائن مٿان GST اَگهہ 12% سيڪڙو آهي تہ CGST۽ SGST لهو.

2. هي شيءِ مٿان CGST 9% آهي تہ SGST لهو۽ GSTلهو.

3. ميسرس ريئل پينٽ، 2800 ر في دٻي ہہ دٻا لسٽر رنگہ جا وڪيا GST جو اگهہ 28% تہ انوائز ۾ CGST ۽ GST گهٽي لڳائڻي پوندي.

4. هڪ واچ جي ٽئڪس لاءِ رقم قيمت 586 ر آهي GSTاگهہ 18%آهي تہ اها واچ گراهڪ کي گهٽي ۾ پوندي؟

5. راند ڪندڙ هڪ رموٽ رڪار ڪنٽرول جي GST جوڙيل قيمت . 1770 ر آهي. GSTجو اَگهہ 18%آهي تہ اُن مٿان CGST ۽ SGST لهو.

6. ٽپ ٽاپ اليڪٽرانڪس هڪ ڪمپني کي ڊيڊ ٽن جي AC مٿان ٽئڪس جوڙيل قيمت 51200ر وڪي CGST جو اَگهہ 14% آهي تہ هيٺ ڏنل سوالن جا جواب انوائز موجب لکو.

(1) SGSTجو اَگهہ (2) ACمٿان GST جو اَگهہ

(3)AC جي ٽئڪس لائق رقم (4) SGST ڪل رقم (5) CGST (6) SGST

7. پرساد 'مهاراشٽر اليڪٽرانڪس گڊس' وٽان 40000 ر ڇپيل قيمت تي واشنگہ مشين ورتي. دڪاندار 5% ڇوٽ ڏني GST جو اَگهہ 28% آهي تہ پرساد گهٽڻ رپين ۾ اِها خريد ڪئي؟ CGST ۽ SGST لهو.

چاڙهي وٺون

واپاري - زنجير جي ايس ٽي (G.S.T .in Trading Chain)

اتپادڪ ← ٻڌو واپار ← ريزڪي واپاري ← گراهڪ

واپار - زنجير (Trading Chain)

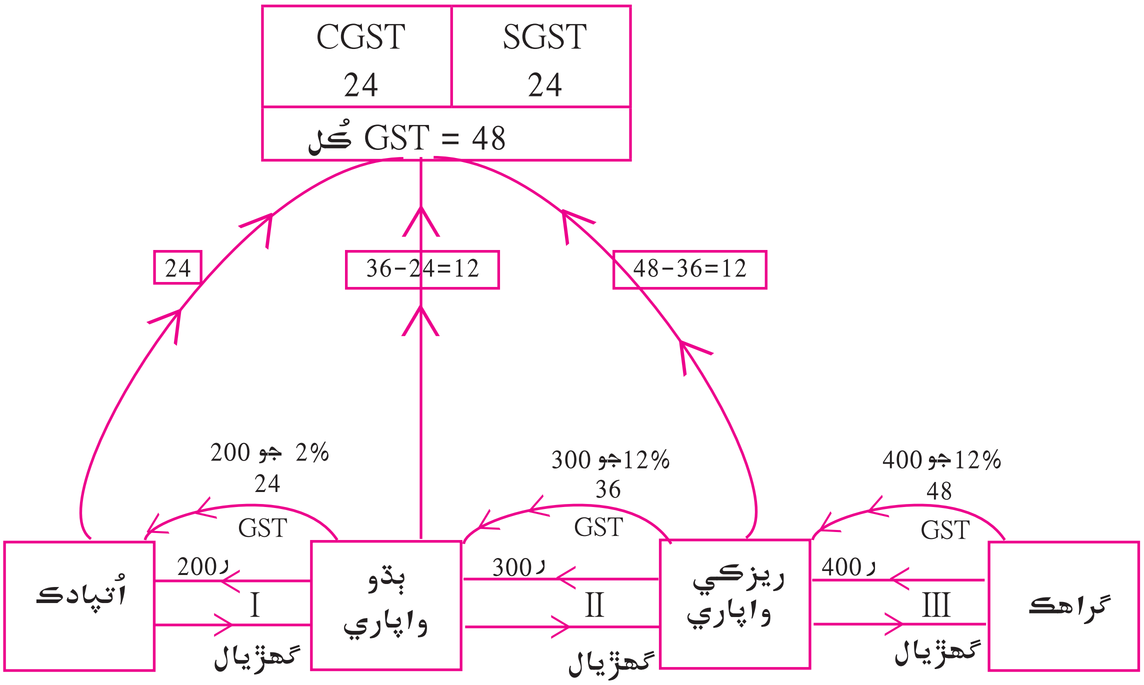
سائيءَ نموني واپاري زنجيرن ۾ GST سرڪار ۾ ڪيئن جمع ٿئي ٿي اُهو هڪ مثال ۾ ڏسون.

مثال : سمجهو تہ هڪ ٻڌي واپاريءَ کي اُتپادڪ هڪ گهڙيال نفعو ملائي 200ر وڪيو اُن ٻڌي واپاري اِهو گهڙيال هڪ ريزڪي واپاري کي 300 ر وڪيو. ريزڪي واپاري اِهو گهڙيال گراهڪ کي 400ر وڪيو. جي ايس ٽي 12% آهي اُتپادڪ، ٻڌو واپاري ۽ گراهڪ اِنپٽ ٽئڪس ڪريڊٽ (ITC) ڪيئن پري ٿو. اِهو هيٺ ڏنل نمونو ڏسي اَڀياس ڪريو.

سمجهاڻي :

اُتپادن ڪندڙ ڪان گهڙيال گراهڪ تائين پهچڻ ۾ ٿي وهنوار ٿين ٿا هرهڪ وهنوار ۾ ٿيل ٽئڪس سوروپ، جمع ٿيل ٽئڪس (راجيہ ۽ مرڪز) ڪيئن ٿئي ٿي. اِهو آسان ڏسنداسين.

گهڙيال



گهڙيال ريزڪي واپاري گهڙيال ٻڌو واپاري گهڙيال اُتپادڪ مٿي ڏنل وهنوار ۾ ٽي جدا جدا وهنوار هڪ ئي راجيہ ۾ ٿيا آهن. اُنهن جي هرهڪ ٽئڪس اِنوائز GST هيٺ ڏنل آهي.

A ۾ GST سوَروپ	
گهڙيال جي قيمت	= ₹ 200
CGST 6%	= ₹ 12
SGST 6%	= ₹ 12
ڪل قيمت	= ₹ 224

گراهڪ ٽئڪس اِنوائز

(B2B)

B ۾ GST سوَروپ	
گهڙيال جي قيمت	= ₹ 300
CGST 6%	= ₹ 18
SGST 6%	= ₹ 18
ڪل قيمت	= ₹ 336

ٻڌو واپاري ٽئڪس اِنوائز

(B2B)

C ۾ GST سوَروپ	
گهڙيال جي قيمت	= ₹ 400
CGST 6%	=₹ 24
SGST 6%	= ₹ 24
ڪل قيمت	=₹ 448

اُتپادڪ ٽئڪس اِنوائز

(B2C)

اِهو ڌيان ۾ رکو

ٻن GSTIN ڌارڪن ۾ ٽيندڙ وهنوار کي Business to Business ٽوري ۾ B2B چئبو آهي. آخرين ڪڙيءَ ۾ اها گراهڪ تائين پهچي ٿي. انکي Business to Consumer يعني B2C چئبو آهي.

هن واپار زنجير ۾ هرهڪ واپاري جي ڀريل GST جي ورهاست هيٺئن ريت آهي :

	CGST		SGST		GST
• اتپادڪ	₹ 12	+	₹ 12	=	ڀريل ₹ 24
• ٻڌو واپاري	₹ 6	+	₹ 6	=	ڀريل ₹ 12
• ريزڪي واپاري	₹ 6	+	₹ 6	=	ڀريل ₹ 12
ڪُل ڀريل	₹ 24	+	₹ 24	=	₹ 48

ٽپ : اِهو توهان کي ڌيان ۾ آيو؟ هرهڪ واپاري پنهنجي سطح تي اِنپٽ ٽئڪس ڪريڊٽ ۾ خريديءَ مهل ڏنل ٽئڪس ڪٽ ڪري GST ڀري ٿو آخر ۾ اِهو گهڙيال گراهڪ کي 448ر مليو مليل 48 رپين مان، ڏنل تختي موجب اِهو گراهڪ ئي GST ڀري ٿو. اِنڪري GST هڪ اَڻ سڌي ٽئڪس (Indirect Tax) آهي. پوءِ ٻڌو واپاري ۽ ريزڪي واپاريءَ کي اُنهن جي پاران ڀريل ٽئڪس، ڪين واپس ملي ٿي.

خريديءَ وقت ڀريل ٽئڪس ۾ ڪاٽ ITC (Credit Tax Input)

شيءِ جي اُتپادن کان، اُنجي گراهڪ تائين پهچڻ تائين، هرهڪ وهنوار ۾ GST لڳائي وڃي ٿي. شيءِ وڪڻڻ وقت مليل ٽئڪس مطلب آئوٽ پٽ ٽئڪس اُن واپاري شيءِ خريد ڪرڻ وقت ڏنل ٽئڪس مطلب اِنپٽ پٽ ٽئڪس اِها ٽئڪس آئوٽ پٽ ٽئڪس مان ڪٽ ڪبي اُن کي اِنپٽ ٽئڪس ڪريڊٽ چئبو آهي.

اِنپٽ ٽئڪس - آئوٽ پٽ ٽئڪس - جي ايس ٽي ڀرڻ

ٽپ : ٽوري ۾ سرڪار ۾ ٽئڪس ڀرڻ وقت هرهڪ واپاري خريدي وقت ڀريل رقم، وڪڻڻ مهل حاصل ڪيل ٽئڪس مان ڪٽ ڪري باقي ٽئڪس جمع ڪري ٿو.

حل ڪيل مثال

مثال (1) شري روهت هڪ ريزڪي واپاري آهي مشين جي خريديءَ وقت 6500 ر GST ڏني.
شين جي وڪڻ سان هن کي GST 8000ر مليو.
تہ (i) اِن پٽ ٽئڪس ۽ آئوٽ پٽ ٽئڪس ڪيتري؟(ii) شري روهت کي Input Tax Credit گهٽي ملندي؟
(iii) هن کي GST ڪيتري ڀرڻي پوندي؟ (iv) مرڪزي ۽ راڄيہ جي ٽئڪس لکو.

حل : شري روهت لاءِ سرڪار کي ڀرڻ جي ٽئڪس

(1) وڪڻ مهل مليل (آئوٽ پٽ ٽئڪس) - 8000 ر

(2) خريديءَ وقت ڏنل ٽئڪس (اِنپٽ ٽئڪس) 6500ر

(3) مطلب اِنپٽ ٽئڪس ڪريڊٽ : 1500=8000-6500 ر

(4) مرڪزي ٽئڪس $\frac{1500}{2}$ = 750ر راڄيہ لاءِ ٽئڪس 750ر

مثال (2) ميسرس جيہ ڪيميڪل 8000 ر ٽئڪس لائق رقم تي پاڻيٽ صابڻ خريد ڪيو ۽ اُهو 10000ر ٽئڪس ٽئڪس لائق رقم تي گراهڪ کي وڪيو GST جو اَگهہ 18% تي جيہ ڪيميڪلس مرڪز ۽ راڄيہ لاءِ ڪيتري ٽئڪس ڀري؟

حل : خريديءَ وقت ڏنل ٽئڪس (Input) 8000 ر تي 18%

$$= \frac{18}{100} \times 8000$$

= 1440 ر

$\therefore$ ITC = 1440 ر

وڪڻ وقت حاصل ڪيل ٽئڪس = آئوٽ پٽ ٽئڪس

$$= \frac{18}{100} \times 10000$$

= 1800 ر

ITC آئوٽ پٽ ٽئڪس = ٽئڪس بل

= 1800 − 1440 = 360 ر

مطلب مرڪز ٽئڪس 180ر ۽ راڄيہ ٽئڪس 180ر

مثال (3) ميسرس جيہ ڪيميڪلس 8000ر (ٽئڪس ملايل قيمت) ۾ پاڻيٽ صابڻ خريد ڪري گراهڪ کي 10000 ر (ٽئڪس ملايل قيمت) ۾ وڪيو ٻڌايو تہ جيہ ڪيميڪل مرڪز ۽ راڄيہ جي ڪيتري ٽئڪس ڀري؟ GST جو اَگهہ 18% آهي.

حل : هتي قيمت ٽئڪس ملايم رقم آهي.

ٽئڪس + ٽئڪس لائق رقم = شيءِ جي ٽئڪس ملايل قيمت

پاڻيٽ صابڻ جي قيمت (ٽئڪس لائق) 100ر آهي

ٽئڪس سان گڏ اِها ٿيندي 118ر

$\dfrac{\text{ٽئڪس ملايل قيمت}}{\text{ٽئڪس لائق رقم}}$ = اِهو ريشو مقرر آهي.

سمجهو تہ پاڻيٽ صابڻ جي ٽئڪس لائق قيمت 'x' رپيا آهي

$\therefore \quad \dfrac{100}{118} = \dfrac{x}{8000}$ اهڙي نموني 10000 رقم لاءِ ٽئڪس لائق رقم

$\therefore \quad x = \dfrac{8000}{118} \times 100 = 6779.66$ ر

$\therefore$ GST = 8000 − 6779.66 خريدي مهل پيريل

$\therefore$ ITC = 1220.34 ر

اهڙي نموني 10000 رقم لاءِ ٽئڪس لائق رقم 'Y'

$\therefore \quad \dfrac{100}{118} = \dfrac{y}{10000}$

$\therefore \quad y = \dfrac{10,00,000}{118} = 8474.58$ ر

$\therefore$ GST = Output tax 10000.00 − 8474.58 =

= 1525.42 ر

$\therefore$ GST = Output tax -Input Tax

= 1525.42 − 1220.34 = 305.08

$\therefore$ راجيہ ٽئڪس = مرڪزي ٽئڪس = 305.08 ÷ 2 = 152.54

جواب : جيہ ڪيميڪلس جي راجيہ ۽ مرڪز جي هرهڪ ٽئڪس 152.54 ر آهي.

> **ٽپ :** مثال (2) ۽ (3) جو ڌيان سان اَڀياس ڪريو وهنوار ۾ اِنهن پنهي جا اِنواتر ڌسڻ لاءِ ملندا. مطلب دڪاندار شيءِ جي ڇپيل قيمت ٽئڪس ملايل رقم ٻڌائي آهي يا ڇپيم قيمت تي ٽئڪس لڳائڻي آهي اِهو سمجهي، پوءِ خريداري ڪريو.

ICT Tools or Links

مقرر ڪيل تاريخ Tax پري اُن ڪان پوءِ ڏنل تاريخ اَندر (GST Returns) داخل ڪرڻ لازمي آهي.
اِهو سڀ هاڻي On Line تي ٿيندو آهي www.gst.gov.in تي توهان اَڀياس ڪري سگهو ٿا.

مثال (4) هڪ سائيڪل اُتپادڪ، ہڏي واپاريءَ کي هڪ سائيڪل 4000 ر وڪي ہڏي واپاري اُها سائيڪل هڪ ريزڪي واپاريءَ کي 4800 ر وڪي، ريزڪي واپاريءَ اُها سائيڪل گراهڪ کي 5200 ر وڪي سڀ ملهه ٽئڪس لائق رقمون آهن GST جو اَگهه 12% آهي تہ وڪري تي هر ڏاڪي تہ CGST ۽ SGST لهو اِن لاءِ هيٺ ڏنل مشغولي پوري ڪريو.

حل : واپار - زنجير

☐ ← ₹ 4000 (12%) ← ☐ ← ₹ 4800 (12%) ← ☐ ← ₹ 5200 (12%) ← ☐

اتپادڪ وڪڻڻ وقت Tax حاصل ڪئي. = 12% $4000 = \frac{\cdots}{\cdots} \times \cdots = ☐$

ہڏي واپاري Tax حاصل ڪئي = 4800 12% = 576 ر

$\therefore$ GST = Output tax -Input Tax = ہڏي واپاري تي GST

= 576 − 480

= 96 ر

دڪاندار جي GST = 5200 12% = ☐

$\therefore$ GST = Output tax -Input Tax = دڪاندار جي GST

= ☐ − ☐

= ☐

واپار زنجير ۾ پيريل GST جي ورهاست

ماڻهو	GST ڪل	CGST ڪل	SGST
اُتپادڪ	₹ 480	₹ 240	₹ ☐
ہڏو واپاري	₹ 96	₹ ☐	₹ ☐
دڪاندار	₹ ☐	₹ ☐	₹ ☐
ڪل	₹ ☐	₹ ☐	₹ ☐

اَچو تہ ويچار ڪريو

- سمجھيو تہ ھڪ واپاري کي جولاءِ مھني ۾ مليل آئوٽ پٽ ٽئڪس، سندس اِنپٽ ٽئڪس کان گھٽ آھي، اِن حالت ۾ ٽئڪس ڪيئن ڪٽبي؟
- سمجھو ھڪ واپاريءَ جي جولاءِ مھني ۾ آئوٽ پٽ ۽ اِن پٽ ٽئڪس برابر آھن تہ ٽئڪس ڪيتري ڀربي

اَڀياس 4.2

1. چيتنا اِسٽورس جولاءِ مھني ۾ ڪيل خريديءَ تي 1,00,500 ر GST ڀريو ۽ 1,22,500 ر تي GST حاصل ڪئي تہ اِن عرصي ۾ چيتنا اِسٽورس کي ڪيتري GST ڀرڻي پوندي؟
2. نجما GST قاعدي اَندر درج ٿيل دڪاندار آھي ھن خريديءَ تي ڪل GST 12500 ر ڀريو ۽ وڪري تي GST 147,50 ر حاصل ڪئي تہ ٻڌايو تہ ھن کي Input ٽئڪس ڪريڊٽ ملندي ڇا؟ سندس کي GST ڪيتري ڀرڻي پوندي؟
3. امير اِنٽرپرائيز چاڪليٽ ساس بوتلون خريد ڪرڻ وقت 3800ر GST ڀريو ھن اَڪبر بردرس کي وڪڻڻ مھل 4100 ر GST حاصل ڪئي مينڪ فوڊ ڪارنر اَڪبر بردرس کان اُھي بوتلون 4500 ر GST ڏيئي خريد ڪيون تہ ھرھڪ وھنوار ۾ GST لھو CGST ۽ SGST لھو.
4. چنديگڙھ اِھو مرڪز حد اَندر آھي ھتي ملڪ گئس اجينسي گھرو اُپيوگہ لاءِ گئس ٽانڪيون 24,500 ر خريد ڪيون ۽ اُھي گراھڪن کي 26,500ر وڪيو GST اَگھہ 5% آھي تہ GST لھو CGST ۽ SGST لھو. (مرڪز حد اَندر لاءِ SGST کي UTGST چئبو آھي.)
5. ميسرس بيوٽي پراڊڪٽس 6000 ر تي GST ڏيئي سينگار جا سامان خريد ڪيا ۽ ھڪ گراھڪ کي اِھي 10,000ر ۾ وڪيا تہ اِن وھنوار ۾ ميسرس بيوٽي پراڊڪٽس جي تيار ڪيل ٽئڪس اِنوائز ۾ CGST ۽ SGST ۾ شيون ۽ سيوائون ٽئڪس جي ڪيتري رقم ڏيڪاريل آھي؟
6. ھيٺ ڏنل چارٽ موجب دڪاندار کان گراھڪ (B2C) اِن لاءِ ٽئڪس اِنوائز تيار ڪريو

نالو، ائڊريس، تاريخ وغيرھ توھان پنھنجي پسند انوسار لکو

سپلائر ـ ـ ـ ـ ـ ائڊريس ـ ـ ـ ـ ـ راجيہ ـ ـ ـ ـ ـ تاريخ

انوائز نمبر ـ ـ ـ ـ ـ GSTIN ـ ـ ـ ـ ـ ـ ـ

شين جا تفصيل موبائيل بيٽري ملھہ – ₹ 200 ھڪ GST ملھہ 12% HSN 8507, 1 pc.

ھيڊ فون جو ملھہ – ₹ 750 ھڪ GST ملھہ 18% HSN 8518, 1 pc.

7. هيٺ ڏنل چارٽ موجب هڪ واپاري ڪان ٻئي واپار (B2B) جو ٽئڪس اِنوائز تيار ڪريو نالو، ائڊريس تاريخ وغيره پنهنجي پسنديءَ اَنوسار لکو.

بل نمبر GSTIN تاريخ ائڊريس نالو : سپلائر
GSTIN ائڊريس، نالو حاصل ڪندڙ

شين جا تفصيل (1) پينسل باڪس 100ر، HSN 3924 20ر 12%GST
(2) جڳه - ساپزلس 50 HSN9503 اَگهه 100ر 12%GST
(3) ………………… (4) …………………

وڌيڪ ڄاڻ لاءِ

ڪمپوزيشن يوجنا (Composition Scheme)

جن ماڻهن جي گذريل سال ۾ ٽرن اوور1.5 ڪروڙ رپين کان گهٽ آهي. اُنهن لاءِ ڪمپوزيشن يوجنا آهي اِن يوجنا تهت ٽئڪس پريندڙ سرڪار طرفان مقرر ڪيل اَگهن تي ٽئي ٽئڪس پريندو.

ڪمپوزيشن يوجنا جا اَگهه (GST rates for composition Scheme)

نمبر	سپلاءِ ڪندڙ	GST	(CGST + SGST)
1.	ريستارنٽ	5%	2.5% + 2.5%
2.	اُتپادڪ ۽ وڪرو ڪندڙ	1%	0.5% + 0.5%

ڪمپوزيشن يوجنا جي واپارين لاءِ نيم

- واپارين کي گراهڪ کان ڪابه ٽئڪس حاصل ڪرڻي نه آهي. واپارين کي ٽئڪس اِنوائز نه پر (Bill of supply) ڏيڻو آهي.
- واپارين کي هر ٽي مهني ڏنل وقت اَنوسار سرڪار ۾ ٽئڪس جمع ڪرائڻي آهي.
- اِن يوجنا ۾ هو ٻئي راڄيه ۾ ڪجهه به وڪڻي نه ٿو سگهي پر ٻئي راڄيه مان خريد ڪري سگهي ٿو.
- ان يوجنا ۾ واپارين کي به ڪوبه ITC فائدو نه ملڻو آهي.
- واپارين کي دڪان جي بورڊ مٿان لکائڻو آهي. ''ڪامپوزيشن يوجنا واپاري'' (Composition taxable person)
- واپارين کي (Bill of supply) تي چٽن اکرن ۾ ڇپائڻو آهي ته سپلاءِ ته ڪابه ٽئڪس نه ونڻي آهي (Composition taxable person not eligible to collect tax on supplies)

جي ايس ٽي جون خاصيتون (Features of GST)

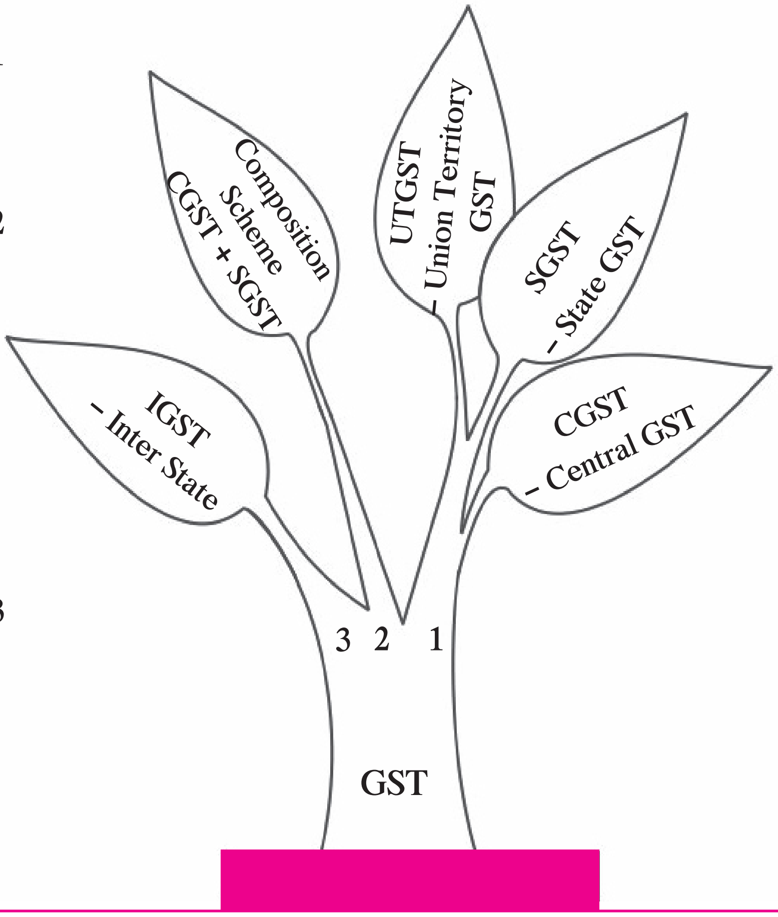
- جدا جدا ڪيترن سڌيون ٽئڪسون ملي
- شين ۽ سيوائون هڪ ئي روپ ۾
- واپارين ۾ راجيه حوالي درج ٿيڻ
- GST حاصل ڪندڙ واپارين ڪي سهوليت سان GST پرڻ
- وهنوار ۾ شفاف پڻو
- سادي ۽ سمجهه ۾ ايندڙ
- ٽئڪس مٿان ٽئڪس نٿي سا لڳي جنهن ڪري شين ۽ سيوائن جي قيمت اِستر رهي ٿي.
- شين ۽ سيوائن ۾ اَنترراشٽريه بازار سان پيٽ ڪرڻ ۾ سندن جنهن ۾ واڌ
- ميڪ اِن اِنڊيا لاءِ رفتار
- تڪنيڪ گيان تي آڌار رکندڙ سرشتو جنهن ڪري فيصلو وٺڻ سولو
- شيون ۽ سيوائون ٽئڪس اِهو ٻٽيرو ماڊل (Dual model) ڪري راجيه ۽ مرڪز لاءِ برابر ٽئڪس

شيوا ۽ سيوا ٽئڪس جي اندر ايندڙ ٽئڪس

1. CGST-SGST (UTGST):
هڪ راجيه ۾ خريدي وڪرو وهنوار لاءِ

2. ڪمپوزيشن يوجنا (composition Scheme):
جنهن جي ٽرن اوور 20 لکن کان 1.5 ڪروڙ روپين تائين آهي اُنهن کي اِن يوجنا جو لاڀ ملندو. اُنهن کي SGST ۽ CGST اَلڳ اَگهن سان ڏيڻي آهي.

3. IGST:
(Inter State)
انتر راجيه وهنوار ڪندڙ واپارين لاءِ



وڌيڪ ڄاڻ لاءِ

تڪ ميل شيون ۽ سيوائون ٽئڪس – IGST (Integrated GST)

جڏهن وڪرو وهنوار ٻن راڄين (Inter State) هوندو آهي اُن وقت GST کي IGST چئبو آهي اِها سڄي مرڪزي سرڪار ۾ جمع ڪرائبي آهي هڪ راڄيه جي واپاري، ٻئي راڄيه مان شيون خريد ڪري پنهنجي راڄيه ۾ وڪيائين ته اُن وقت IGST پرڻ وقت ITC ڪيئن لهبي، اُهو ڏسنداسين.

مثال : هڪ واپاري M(مهاراشٽر جو) 20,000 جا اِسڪوٽر جا پرزا واپاري P(پنجاب) کان ورتا. اُن وقت 28% آڳهه سان هن 5600 رپيا IGST اِها P واپاريءَ کي ڏنا.

M اِهي سڀ پرزا مڪاني گراهڪن کي 25000 ر وڪيا اُن وقت 28% آڳهه سان 7000 ر حاصل ڪئي.

گراهڪ کان حاصل ڪيا.

هاڻي سرڪار کي 5600 ر مان ڪٽ ITC لاءِ ڪيئن ڪبي، اُهو سمجهنداسين.

> نوٽ :- IGST جي ڪريڊٽ وٺڻ لاءِ پهريائين آهي IGST لاءِ، پوءِ CGST لاءِ ۽ بچيل SGST لاءِ وٺبي. هتي M لاءِ IGST ڪانهي مطلب CGST لاءِ ڪريڊٽ وٺبي ۽ بچيل SGST لاءِ ڪريڊٽ وٺبي.

$\therefore$ CGST = 3500 − 3500 = 0

مطلب 5600 ر مان 3500 ر ڪريڊٽ وٺبي بچيل

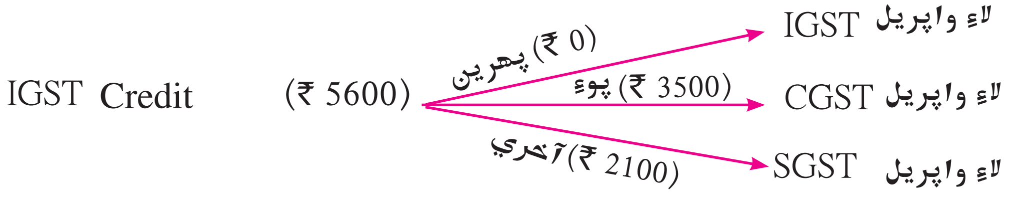
5600-3500=2100 اِها SGST لاءِ ٿيندي.

> M کي 1400 ر SGST پرڻي پوندي

ڌيان ڏيو ته M واپاريءَ کي خريدي تي ڏنل 5600 ر جي سموري ڪريڊٽ ملي مطلب Input Tax جي ڪريڊٽ ملي.

ITC حاصل ڪيل ٽئڪس

حاصل ڪيل ٽئڪس (Output Liability)   خريديءَ تي ڏنل ٽئڪس (ITC)



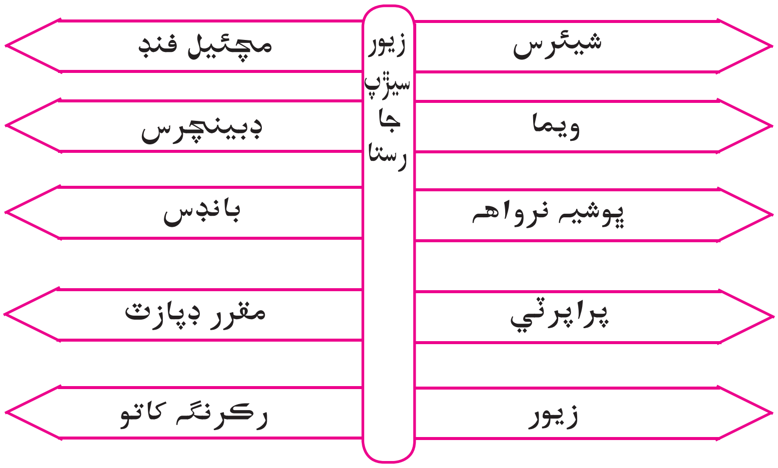
(اِنڪري SGST1400 پرڻي پوندي)

چاڪي وٺون

اَسان گذريل سال بچت ۽ سيڙپ بابت ڄاڻ حاصل ڪئي آهي اُن موجب توهان جيڪو ممڪن آهي اُهو عمل ڪيو هوندو هميشهه تندرست رهڻ لاءِ جيئن سرير جا سڀ عضوا رڳا ۾ هئڻ گهرجن تيئن مالي تندرستيءَ لاءِ بچت ۽ سيڙپ جو تال ميل هئڻ گهرجي. سيڙپ جا ڪيترائي قسم آهن اُنهن جو اَڀياس ۽ آزمودو ٿئي ضروري آهن.

اَچو تہ چرچا ڪريون

شويتا هڪ ڪمپنيءَ ۾ نوڪري ڪندي آهي هن مهني کان سندس پگهار 5 سيڪڙو وڌي ۽ ايندڙ مهني ڪيس بونس بہ ملڻو آهي. هوءَ وڌيل رقم سٺي هنڌ سيڙپ ڪرڻ چاهي ٿي پنهنجي ساهيڙي نيها کان هوءَ صلاح وٺي ٿي نيها چيو، ” سيڙپ لاءِ جيون ويما، ميڊي ڪليم، پنهنجو گهر، بئنڪ F.D ، رڪرنگہ کاتو اِنهن بابت ويچار ڪر“ شيوتا چيو، ”مونکي ويمو ٿيل آهي ۽ بئنڪ ۾ پڻ .. ڪيل آهي پگهار مان بہ ڪٽجندو آهي. اَڃان ٻيا ڪهڙا رستا آهن؟



نيها چيو، ”شيئرس، مُچيل فنڊ (MF) ، ڊبينچرس، بانڊ وغيرهہ بہ سيڙپ ڪرڻا جا رستا آهن.

. جيڪي اڄ وڌيل بہ آهن. S.I.P لاءِ ماڻهن جو رخ وڌيو آهي. توکي هاڻي هر مهني مقرر رقم وڌيڪ ملڻ واري آهي. اِن ڪري اُها SIP (SIP - Systematic Investment Plan) ۾ تون مقرر ٿيل رقم رکين سگهين ٿي.

اَهڙا گفتگو اَسان جدا جدا هنڌن تي ٻڌندا آهيون جي نقص ڄاڻ ئي سپني لاءِ مفيد ٿيندي. اَچو تہ اَسان شيئرس، مُچئل فنڊ ۽ SIP بابت ڄاڻ حاصل ڪريون.

چاڙهي وتون

شيئرس (Shares)

ماڻهوءَ جو پنهنجو دڪان آهي تہ اِنکي مالڪپڻو (پروپرائيٽرشپ) چئبو ہ چار ماڻهون ملي واپار ڪن تہ اُنکي ڀائيوار (پارٽنرشپ) چئبو پر ڪا ڪمپني، ڌندو يا ڪارخانو شروع ڪرڻ لاءِ وڏي سيڙپ کپي، اِها سيڙپ سماج مان ڪٺي ڪجي ٿي.

ڪارخانو يا ڪمپني شروع ڪندڙ ماڻهن نہ گڏ ٿي سماج مان پئسا حاصل ڪرڻ لاءِ ڪمپني ٺاهيندا آهن پارٽيہ ڪمپني 1956 اَنوسار ڪمپني پهريائين درج ڪرائبي آهي. ڪمپني ٺاهيندڙن کي پروموٽرس چئبو آهي. اِها ڪمپني پبلڪ لميٽيڊ ڪمپني هوندي آهي.

ڪمپني شروع ڪرڻ لاءِ جيڪي پئسا کپن، اُن کي سيڙپ چئبو آهي اِن سيڙپ جا ننڍا ننڍا حصا 100ر وغيرھ ملهہ وارا هوندا آهن هرهڪ حصي کي شيئر چئبو آهي اِهي شيئر وڪڻي ڪمپني سيڙپ ڪٺي ڪندي آهي.

شيئر : ڪمپني جي سيڙپ جي هڪ حصي کي شيئر چئبو آهي. شيئر سرٽيفڪيٽ مٿان شيئر جو ملهہ، شيئرن جو اَندازُ نمبر وغيرھ ڇپيل هوندا آهن.

شيئر هولڊر (شيئر ڌارڪ) : شيئر خريد ڪندڙ کي شيئر هولڊر (Share Holder) چئبو آهي. ائين چئجي تہ شيئر هولڊر اُن ريشي موجب ڪمپنيءَ جو مالڪ آهي.

اسٽاڪ ايڪسچينج (Stock Exchange) اُها جڳهہ جتي شيئرس خريد ڪيا ويندا آهن يا وڪيا ويندا آهن اُنکي شيئر بازار (اِسٽاڪ ايڪسچينج يا اِسٽاڪ مارڪيٽ يا اِڪوٽي مارڪيٽ يا ڪئپيٽال مارڪيٽ يا شيئر مارڪيٽ) چئبو آهي. پبلڪ لميٽيڊ ڪمپنيءَ جو شيئر بازار ۾ درج ڪرائڻ (Listed Company) ضروري آهي.

درسني ملهہ (Face Value-FV) : ڪمپنيءَ جي شيئر سرٽيفڪيٽ تي ڇپيم هڪ شيئر جي قيمت کي درسني ملهہ (FV) چئبو آهي. بازار ملهہ (Market Value-MV) جنهن قيمت تي شيئر بازار ۾ شيئر جي خريدي - وڪرو ٿيندو آهي اُنکي بازار ملهہ (MV) چئبو آهي.

ڪمپني ٺهڻ بعد جيڪڏهن ڪمپنيءَ سٺي نموني ترقي ڪئي تہ اُن ڪمپنيءَ جي شيئرن جي بازار ۾ گهرج (Demand) وڌندي وڃي ٿي. جڏهن تہ ڪمپني طرفان شيئرن جو انداز مقرر ٿئي ٿو تہ اُن جي انداز ۾ واڌ ڪري نہ ٿي سگهجي اِن ڪري اُن ڪمپنيءَ جي شيئرن جو ملهہ وڌندڙ رهي ٿو. جيڪڏهن ڪمپني گهاٽي ۾ آهي تہ شيئرن جو بازار ملهہ گهٽجندو رهي ٿو. اِن واڌ - لاهہ کي نمبروار ▲، ▼ نشانين وسيلي ڏيکارجي ٿو. اِن واڌ لاهہ جي ڪري شيئر بازار جو عدد وڌندو يا گهٽجندو رهي ٿو.

شيئرن جو اَگهه هر پل بدلجندڙ رهي ٿو.

نفعو - حصو (Dividend) ڪمپني جي مالي سال ۾ ٿيل نفعو شيئر ڌارڪن ۾ شيئرس اَنداز موجب ورهايو ويندو آهي. اُنکي ڊويڊنڊ چئبو آهي.

ڪمپني سٺي نموني هلندي رهي ته ڪمپنيءَ جي پراپرٽي وڌندي رهي ٿي ۽ شيئر هولڊرن کي فائدو ملندو رهي ٿو اِهو ياد رهي ته ڊويڊنڊ تي اِنڪم ٽئڪس نه لڳندي آهي.

اِهو ڌيان ۾ رکو

شيئرس جو اَگهه پل ، بازار ۾ وڌندو يا گهٽجندو رهي پر نفعو حصو (ڊويڊنڊ) اِهو درستي ملهه (FV) تي ئي ملندو آهي.

وڌيڪ ڄاڻ لاءِ

ممبئيءَ جي شيئر بازار (بامبي اِسٽاڪ ايڪسچينج BSE) ۽ راشٽريه شيئر بازار (نئشنل اِسٽاڪ ايڪسچينج NSE) اِهو ڀارت جو ٻه مکيه شيئر بازارون آهن ممبئيءَ جي شيئر بازار جهوني ۾ جهوني ۽ راشٽريه شيئر بازار اِها وڏي ۾ وڏي شيئر بازار آهي.

شيئر بازار ۾ واڌ - لاهه سمجهڻ لاءِ SENSEX (سينسيڪس) ۽ NIFTY(نفٽي) اِهي ٻه مکيه فوٽ نمائون آهن. SENSEX اِهو SENsisive + indEX اِنهن ٻن لفظن مان تيار ٿيل آهي. BSE 1.1.1986 کان SENSEN ڏيڻ شروع ڪبو . سيني کان وڏي سيڙپ وارين درج ٿيل اَهڙين 30 ڪمپنين جا اَگهه ٻڌائيندي رهي ٿي. NIFTY اِهو NSE+FIFTY لفظن مان نهيل آهي. اِها سيني کان ترقي ڪيل اوچ اَهڙين 50 ڪمپنين بابت ٻڌائي ٿي.

ICT Tools or Links

SEBI اِنٽرنيٽ تي وٺو BSE، NSE ۽ دوردرشن جي چئنلس يا نيٽ تي شيئر بازار ڄاڻ ڏيندڙ ويڊيو ڏسو، اِن کي سمجهو شيئرن ۾ واڌ لهه .. تي لڳاتار ڏيکاريا ويندا آهن. عام طور متي ڏنل پتي BSE ممبئي ۽ هيٺ واري پتي NSE شيئرن جو اَگهه ٻڌائي ٿي شيئرن جي بوڪ وئليو (Book value) بابت ڄاڻ حاصل ڪريو.

درستي ملهہ ۽ بازار ملهہ وچ‌ڀيٽ (Comparison of FV and MV) :

(1) جيڪڏهن MV > FV تہ شيئر وڌيڪ ملهہ اگهہ تي (share is at premium) آهي ائين چئبو آهي.

(2) جيڪڏهن MV=FV تہ شيئر برابر ملهہ تي آهي (share is at par) ائين چئبو آهي.

(3) جيڪڏهن FV > MV تہ شيئر گهٽ ملهہ تي آهي (share is at discount) ائين چئبو آهي

مثال (1) سمجهہ FV= 10ر ۽ MV= 15ر اِهو شيئر جو اَگهہ آهي

شيئر پريميم تي آهي. 5 = 10 - 15

(2) سمجهہ FV= 10ر ۽ MV= 10ر

0=10-10 مطلب شيئر ائٽ پار آهي.

(3) سمجهو تہ FV= 10ر MV= 7ر

3=7-10 تہ شيئر ڊسڪائونٽ تي آهي.

ڪل سيڙپ : شيئرس خريديءَ لاءِ ڪل لڳل رقم

مطلب ڪل سيڙپ

هڪ شيئر جو بازار ۾ ملهہ x شيئرن جو انداز = ڪل سيڙپ

مثال 100 رپيا FV واري شيئر جي قيمت 120 ر MV جي حساب سان 50 شيئر خريد ڪيا ويا تہ ڪل سيڙپ ڪيتري؟

حل : هڪ شيئر جو MV x شيئرن جو انداز = ڪل سيڙپ

= 50x120 = 6000 رپيا

شيئرس جو موٽ (Rate of Return) :

اگهہ اَسان جي شيئرن ۾ لڳايل سيڙپ عرصي بعد ڪيتري موٽ ڏيئي ٿي اِهو سمجهڻ اَهميت واري آهي.

مثال (1) راجيش 100 ر FV هڪ شيئرن 120 ر MV جي حساب سان خريد ڪيو ڪمپني 15% ڊويڊنڊ ڏنو تہ شيئرس جو موٽ اَگهہ لهو.

حل : Dividend= 15% ,MV=120 ,FV= 100   سمجهو تہ موٽ اَگهہ x% آهي.

هتي سمجهو تہ 120 ر سيڙپ تي 15% ملن ٿا

15 : 120 جيڪڏهن	
x : 100 تہ	

$$\therefore \quad \frac{15}{120} = \frac{x}{100}$$

$$\therefore \quad x = \frac{15\times100}{120} = \frac{25}{2} = 12.5\%$$

جواب : راجيش کي موٽ اَگهہ 12.5% مليو.

مثال (2) FV = 100ر Premium = 65 ر تہ MV لهو = ؟

حل : MV = FV + Premium = 100 + 65 = 165ر

شيئر جو بازار ملهہ 165 رپيا آهي.

مثال (3) هيٺ ڏنل تختو مناسب عدد پري پورو ڪريو

نمبر	FV	ملهہ جو قسم	بازار ملهہ
(i)	₹ 10	وڌيڪ اگهہ ₹ 7	
(ii)	₹ 25		₹ 16
(iii)		برابر اگهہ	₹ 5

حل : (i) 17 = 7 + 10 ر ، (ii) 9ر = 16 - 25 (iii) 5 ر

مثال (4) نيرج هن جدا جدا ڪمپنين ۾ شيئرس ۾ سيڙپ ڪئي

ڪمپني A : 350شيئرس، FV = 10 ₹، شيئر وڌيڪ اَگهہ = 7 ر

ڪمپني B : 2750شيئرس، FV = 5 ₹ ، شيئر وڌيڪ اَگهہ = 4 ر

ڪمپني C : 50 شيئرس، FV = 100₹ ، شيئر وڌيڪ اَگهہ = 150ر

حل: ڪمپني A : شيئرس = 7 ر ۾ وڌيڪ اَگهہ FV + Premium

= 10 + 7 = 17ر

∴ 5950 = 17 × 350 = شيئرس جو اَنداز = سيڙپ

ڪمپني B ۾ 11,000ر =2750x4= xM.V شيئرس جو انداز = سيڙپ

ڪمپني C ۾ 7,500ر =50x150= xM.V شيئرس جو انداز = سيڙپ

ڪل سيڙپ = 5950+ 11000 + 7500 = 24450ر

مثال (5) سميتا 12,000 ر + سيڙپ 10ر F.V وارا شيئر 2 ر پريميم اَگهہ سان ورتا. ٻڌايو تہ هن ڪل ڪيترا شيئرس خريد ڪيا. اِن لاءِ هيٺيئين مشغولي پوري ڪريو.

حل : 2 ر ، Premium = 10ر ، FV =

∴ MV = FV + ☐ = ☐ + ☐ = ☐

∴ شيئرس جو اَنداز = ڪل سيڙپ / MV = 12000 / ☐ = ☐ شيئرس

جواب : سميتا ☐ شيئرس خريد ڪيا

مثال (6) FV 10 ر ملهه وارا 50 شيئرس MV ر في شيئر سان خريد ڪيا ويا ڪمپني اُن تي30% ڊويڊنڊ ظاهر ڪيو تہ (1) ڪل سيڙپ (2) مليل ڊويڊنڊ (3) شيئرس جو موٽ آگهہ لهو

حل : شيئرس جوFV = 10 ر MV= 25 ر۽ شيئرس جو اَنداز = 50

∴ 250 ر = 25x50 = ڪل سيڙپ

$$\text{ڊويڊنڊ} = 10 \times \frac{30}{100} = 3\text{ر هرهڪ شيئر تي}$$

∴ 50 شيئرس تي ڊويڊنڊ = 150=50x3 ر

$$\therefore \quad \text{موٽ آگهہ} = \frac{\text{ڪل ڊوينڊ}}{\text{ڪل سيڙپ}} \times 100$$

$$= \frac{150}{1250} \times 100 = 12\%$$

جواب (1) ڪل سيڙپ : 1250ر (2) 50 شيئرس تي مليل ڪل ڊويڊنڊ 150ر (3) موٽ آگهہ 12%

اَڀياس 4.3

1. هيٺ ڏنل تختو مناسب عدد ڀري پورو ڪريو

نمبر	FV	آگهہ جو قسم	MV
(1)	100 رپيا	برابر آگهہ	. . .
(2)	. . .	وڌيڪ آگهہ = 500رپيا	575 رپيا
(3)	10 رپيا	. . .	5 رپيا

2. بازار آگهہ (MV) 80 رپئي FV 100ر وارا 50 شيئرس خريد ڪيا ويا اُن سال ڪمپني 20% ڊويڊينڊ ڏنو تہ سيڙپ تي موٽ آگهہ لهو.

3. جوسف جدا جدا ڪمپنين ۾ شيئرس وٺي سيڙپ ڪئي تہ سندس ڪل سيڙپ لهو.

ڪمپني A : 500 ر =FV پريميم شيئرس ڪمپني شيئرس

ڪمپني B : 500 ر =MVهڪ شيئر

4. شريمتي ديشپانڊي 20000 رسيڙپ ڪري5 رپئي درسني ملهہ وارا 20 ر وڌيڪ آگهہ تي شيئرس خريد ڪيا ڏايو تہ هن ڪل ڪيترا شيئرس خريد ڪيا؟

5. ڪمپني 7% ڊويڊينڊ ظاهر ڪرڻ تي شري شانتيلعل 100ر درستي ملهہ 120 ر بازار ملهہ تي 150شيئرس خريد ڪيا تہ سندس سيڙپ تي موٽ - آگهہ ڪيترو؟

6. هيٺ ڏنل ڪمپنين مان ڪنهن ۾ سيڙپ فائدي واري ٿيندي؟ ٻنهي ڪمپنين ۾ شيئر جو درستي ملهه ساڳيو آهي ڪمپني A جو بازار ملهه 80 رپيا ۽ ڊويڊينڊ 16% ڪو ڪمپني B جو بازار ملهه 120 رپيا ۽ ڊويڊنڊ 20% آهي .

ICT Tools or Links

انٽرنيٽ تي يا ٻئي ڪنهن ملهه ذريعي پنجن ڪمپنين جا درسني ملهه ۽ بازار ملهه شيئرس جا جاچيو اُنهن جو ڏنل ڪالم گراف ڪيو ۽ ڀيٽ ڪريو. (ممڪن هجي تہ ▼ ,▲ ٻنهي قسمن جا شيئرس ڏسو)

ڄاڻي ونون

شيئرس جي خريدي وڪرو تي دلالي ۽ ٽئڪس (Brokerage and taxes on share trading)

دلالي (بروڪريج Brokerage) شيئرس جي خريدي وڪرو خانگي نموني نٿو ڪجي اِهو شيئر بازار جي منظور ٿيل شخص يا سنستا پاران ڪيو ويندو آهي. اُنهن کي **شيئر دلال (Share Broker)** چئبو آهي. دلال ذريعي شيئرس جي خريدي ۽ وڪرو ڪندي بازار ملهه انوسار جيڪو ملهه دلال وٺندو آهي اَنکي دلالي چئبو آهي. معنيٰ شيئرس خريدي ڪندڙ ۽ وڪرو ڪندڙ ٻنهي کي دلالي ڏيڻي پوي ٿي.

مثال 1: سمجهو 100 ر FV ۽ 150 ر MV وارا شيئر آهن. دلالي ۽ جو اَگهه 0.5% آهي. اَهڙن 100 شيئرن خريد ڪرڻ لاءِ ڪيتري رقم ڏيڻي پوندي؟ اَهڙا 100 شيئر وڪڻڻ سان ڪيتري رقم ملندي؟

شيئرس خريد ڪرڻ مهل

دلالي +MV = هڪ شيئر جي خريدي

= 150 ر + 150 ر 0.5% = 150 + 0.75

= 150.75 ∴ هڪ شيئر جي خريدي قيمت

100 شيئرس جي خريدي = 100 × 150.75 = 15075ر

هتي 15000ر جا شيئرس 75 ر دلالي آهي.

شيئرس - وڪرو مهل

دلالي - MV = هڪ شيئر جو وڪرو

= 150 ر - 150 ر 0.5% = 150 - 0.75

= 149.25 ∴ هڪ شيئر جي وڪرو قيمت

∴ 100 شيئرس جي وڪرو قِيمت = 14925 = 100 × 149.25

∴ 100 شيئرس وڪڻڻ سان 14925 ر ملندا.

اِهو ڌيان ۾ رکو

- دلالي هميشه بازار اَگهه تي لهبي آهي
- شيئر خريد يا وڪڻ مهل دلاليءَ لاءِ هڪ شيئر تي حساب ڪيو ويندو آهي.

مشغولي I : پنهنجي علائقي ۾ شيئر دلالي سيوا ڏيندڙ شخص يا سنستا بابت ڄاڻ حاصل ڪريو اُنهن جي دلالي اَگهن وچ ۾ ڀيٽ ڪريو.

مشغولي II : ڊي - مئٽ کاتو (Demat A/c) ۽ ٽريڊنگ کاتي جا تفصيل (Statement) حاصل ڪريو اُن ۾ ڪهڙا ڪهڙا مُدا هوندا آهن اِن بابت نيت جا دلال کان حاصل ڪريو. دوستن ۾ چرچا ڪريو.

وڌيڪ ڄاڻ لاءِ : هرهڪ شيئر دلال کي سيبي (SEBI - Securities and Exchange Board of India) قاعدو 1962 تحت درج ڪرائڻو آهي ۽ اُن مٿان SEBI جو ضابطو هوندو آهي

شيئرس، بانڊس، مُچيئل فنڊ وغيره جي درج ڪرائڻ لاءِ ڊي - مئٽ کاتو ۽ خريدي وڪري ٽريڊنگ کاتو (Dematerialized Account, Trading Account) کولڻ ضروري آهن اِهي کاتا بئنڪ يا دلالن معرفت کوليا ويندا آهن DP Depository Participants اِهي NSDL,DP ۽ CDSL اِنهن ۾ جي هيٺ هوندا آهن ڊي - مئٽ کاتي ۾ شيئرس جي خريدي ۽ وڪرو جو حساب رکيو ويندو آهي اِهو بئنڪ کاتي وانگر ئي هوندو آهي وڪيل شيئرس جو خرچ Debit ۾ ۽ خريد ڪيل شيئرس جو جمع Credit ۾ درج ڪبو آهي. اُنهن جا تفصيل (Statement) گُهرڻ سان ملندي آهي اِن لاءِ مقرر في ڀربي آهي اِن کاتي ۾ توهان جا شيئرس اليڪٽرانڪ فارمن ۾ جمع رهندا آهن. اِنهن پنهي کاتن سان توهان جي بئنڪ جي بچت کاتي سان جوڙيو ويندو آهي شيئرس جي خريديءَ وقت پئسا اُن مان ڪٽجندا رهن ٿا ۽ شيئرس جي وڪرو وقت اُن ۾ پئسا جمع ٿيندا آهن. دلال ۽ بئنڪ عملو اِنهن بابت مارگدرشن ڪندا آهن.

ڄاڻي وٺو

دلالي مٿان دلالي سيوا جو GST (GST on brokerage services)

مارگه درشن شيئر دلال اُنهن جي کاتيدارن پاران شيئرس جي خريدي وڪرو جي سيوا ڏيندا آهن.

دلالي سيوا جو GST اَگهه 18% آهي اُنهن جو SAC نمبر ڄاڇيو.

ٽپ : گراهڪن جي سلامتيءَ لاءِ GST ڪانسواءِ شيئرس جي خريدي - وڪرو تي اَڃا به ڪجهه ننڍيون ٽئڪسون آهن مثال سيڪيورٽي ٽرانزيڪشن ٽئڪس (STT) SEBI چارج، اِسٽئمپ ڊيوٽي وغيره اُنهن بابت اَسان هتي ويچار نه ڪنداسين فقط دلاليءَ مان بابت ويچار ڪنداسين.

مثال (2) مثال (1) ۾ هڪ ماڻهوءَ 15075ر جا شيئرس خريد ڪيا. اِن رقم تي 75ر دلالي آهي تہ هنڪي 75 ر تي 18% اَگهہ سان ڪيتري ٽئڪس لڳندي اِها لهوءِ اُنجي Statement تيار ڪريو.

حل : سمجهو 75ر تي GST = $75 \times \frac{18}{100}$ =

13.50 ر

B شيئرس خريديءِ جو تفصيل نوٽ

شيئرس جي ڪُل خريدي قيمت	9% دلالي SGST	9% دلالي CGST	دلالي 0.5%	شيئرس جي FV	شيئرس MV	شيئرس جو تعداد
15088.50 ر	6.75 ر	6.75 ر	75 ر	15000 ر	150 ر	100(B)

مثال (3) بشيرخان 40 ر MV تي 100 شيئرس خريد ڪيا دلاليءَ جو اَگهہ 0.5% ۽ GST آهي تہ 100شيئرس تي ڪل ڪيترو خرچ ٿيو؟

حل : 100 شيئرس جي قيمت 4000 = 100 × 40 ر

هڪ شيئر تي دلالي = $40 \times \frac{0.5}{100}$ = 0.20 ر

∴ هڪ شيئر جي خريدي قيمت + شيئرس جو اَگهہ = دلالي

= 40 + 0.20 = 40.20 ر

∴ 100 شيئرس جي قيمت 4020 ر = 100 × 40.20 =

100 شيئرس جي دلالي 20 ر = 100 × 0.20

∴ دلاليءَ تي = $\frac{18}{100} \times 20$

= 3.60 ر

جواب : بشير خان 100 شيئرس خريد ڪيا 4023.60 ر = 3.60 + 4020 =

مثال (4) پنڪج 1,25,295 ر سيڙپ ڪري 10 درسني ملهہ وارا ۽ 125 ر بازار ملهہ وارا شيئرس خريد ڪيا دلاليءَ جو اَگهہ 0.5% ۽ GST 18% آهي. (1) ڪل ڪيترا شيئر خريد ڪيا؟ (2) ڪل ڪيتري دلالي ڏني؟ (3) GST ڪيتري پري؟

حل : ڪل سيڙپ 1,25,295ر بازار ملهہ 125ر

دلالي 0.2% ۽ GST=18%

هڪ شيئر جي دلالي = $0.25 = \frac{0.2}{100} \times 125$ ر

هڪ شيئر دلالي تي GST = $0.25 \times 18\% = 0.045$ ر

∴ هڪ شيئر جي ڪل خريدي = بازار اَگهه + دلالي + GST

$= 125 + 0.25 + 0.045 = 125.295$ ر

∴ شيئرس جو اَنداز = $1000 = \frac{125295}{125.295}$ شيئرن

∴ ڪل دلالي $250 = 1000 \times 0.25 =$ رپيا

ڪل GST $45 = 0.045 \times 1000 =$ رپيا

جواب (1) 1000 شيئرس خريد ڪيا (2) دلالي 250 ر (3) جي ايس ٽي 45 ر

مثال (5) نليني ٻائي 10 ر درسني ملهه ۽ بازار اَگهه 60 ر ڊويڊنڊ ملڻ بعد 50 ر بازار اَگهه سان وڪٽي چڙيا هر وهنوار ۾ دلالي 0.4% آهي ته هنڪي نفعو ٿيو يا نقصان اِهو خالي چوڪنڊا ڀري لهو.

حل : هتي ٽئڪس جو اگهه ڏنل نه آهي انڪري هتي GST جو ويچار نه ڪيل آهي

10ر درسني ملهه جو شيئر 60 ر خريد ڪيو.

هرهڪ شيئر جي دلالي = $\frac{0.4}{100} \times 60 = \square$ رپيا

∴ هڪ شيئر جي قيمت = $0.24 + 60 = \square$ رپيا

∴ هڪ شيئرس جو اَنداز $100 = \frac{6024}{60.24}$ شيئرس خريد ڪيا

10 ر درسني ملهه وارا شيئرس 50 ر بازار ملهه تي وڪيا ويا

∴ هرهڪ شيئر تي دلالي $0.20 = 50 \times \frac{0.4}{100} =$ رپيا

∴ هڪ شيئر جي وڪرو قيمت = $0.20 - 50 = \square$ رپيا

∴ 100 شيئرس جو ڊويند قيمت = $49.80 \times 100 = \square$ رپيا

فائدو - حصو 60% مليو

∴ هڪ شيئر تي ڊويڊينڊ = $6 = 10 \times \frac{60}{100}$ رپيا

∴ 100 شيئرس جو ڊويند قيمت = $6 \times 100 = \square$ رپيا

∴ نيلني ٻائي کي مليا (شيئرس وڪرو + ڊويڊينڊ) $\square + \square = 5580$ رپيا

نليني ٻائيءَ جي ڪل سيڙپ = 6024 رپيا

∴ نقصان = $\square - \square = \square$ رپيا

جواب نليني ٻائي کي ڪل 444 ر نقصان ٿيو.

مشغولي : خريدي وڪرو تي 18% GST ۽ مثال (5) موجب نقصان ڪيو. توهان جو جواب 451.92 ر اَچي ٿو ڇا؟ جاچ ڪريو

جاڳي وٺون

مچئل فنڊ (Mutual Fund – MF)

شيئرس جو اَڀياس ڪندي آسان سمجهو ته ڪمپني ناڻي لاءِ چاهڪ ماڻهو ڳڏ ٿي. سماج جي سهڪار سان وڏي لاڳت جمع ڪن ٿا. جيڪڏهن ڪمپني سٺي هلي ته سيني ماڻهن جو فائدو ٿيندو. شيئرس جو بازار ملهه وڌڻ سان فائدو ٿي ٿو. ڪمپنيءَ جي ڪئپيٽم وڏي ٿي. ديش جي ترقي ٿئي ٿي. ٿوري ۾ سماج شاستر جو تتو 'Together we can progress' پر هر سڪي ڪي به پاسا هوندا آهن. شيئرس ۾ ڪڏهن ڪڏهن فائدي بدران نقصان ٿيندو آهي. اِهو نقصان گهٽائي سگهجي ٿو ڇا؟ سيڙپ ڪندڙن لاءِ اِهو خطرو گهٽائي سگهجي ٿو ڇا؟ ها. اَڄڪلهه ڪيترائي ماڻهو مُچئل فنڊ ۾ سيڙپ ڪندا آهن.

مچئل فنڊ مطلب گهڻين ئي سيڙپ ڪندڙن جا پئسا ڳڏ ڪري ناهيل رقم : اِها رقم شيئرس ۾ سيڙپ نه ڪري، سيڙپ جي ڀين قسمن ۾ سيڙايا ويندا آهن جوکم گهٽ ۽ فائدو سيني کي ورهايو ويندو آهي مُچئل فنڊ ۾ سيڙپ ڪيئن ڪجي؟ اُن مان موٽ ڪيئن ملندي آهي؟ ڪيتري عرصي لاءِ رقم سيڙائبي؟ اِنهن سوالن جا جواب مالي - ماهر صلاح ڏيئي ڏائي سگهندو.

> Investments in Mutual Funds are subject to Market risks. Read all scheme related documents carefully.
>
> اهو جملو توهان ڪيترائي دفعا پڙهو يا ڏٺو هوندو اِن جو مطلب سمجهي وٺو. ڪيترائي دفعا MF ۾ فائدي بدران نقصان به ٿي سگهي ٿو. اِهو سيڙپ ڪندڙن کي سوچڻ گهرجي.

MF مطلب ماهر پروفيشنل ماڻهن طرفان ناهيل فنڊ يوجنا اِنهن ماهرن کي AMC مطلب Company Asset Management چئبو آهي. بازار کي سمجهي هي سيڙپ ڪندڙن جا پئسا لڳائيندا آهن جدا جدا ڪمپنين، شيئرس، اِڪوٽي، فنڊ ۾، ڊبينچرس، بانڊس وغيره ۾.

شيئر بازار ۾ پئسا لڳائڻ سان آسان کي شيئرس يونٽس ملندا آهن. MF ۾ آسان کي ملندا آهن

هر يونٽ جو بازار اَگهه اُنجي Net asset Value - Units آهي.

هڪ يونٽ جو NAV x يونٽن جو اَنداز = ڪل سيڙپ ملهه.

ٽپ: شيئرس وانگر MF جا يونٽ پڻ بازار اَگهه ۾ گهٽجندا وڌندا رهندا آهن. اِنهن جي ڊمانڊ تي اِهي خريد ڪيا وڃن ٿا.

بئنڪ يا پارٽيه پوسٽ سيوا ۾ سيڙپ وڌيڪ سلامتيءَ واري آهي اِهو ڌيان رکڻ گهرجي تہ صحيح ڍنگ سان پئسا سيڙپ ڪرڻ گهرجن اِن کي چئبو آهي مالي يوجنا (Financial Planning) اِن ڪري مناسب ويچار ڪري ئي پئسا سيڙائڻ گهرجن.

نيمت سيڙپ يوجنا (SIP -Systematic Investment Plan)

سمجهو تہ MF ۾ هڪ وقت وڏي رقم آسان سيڙائي نٿا سگهون تہ هر مهني ننڍي قسط سيڙپ ڪري سگهجي ٿي. گهٽ ۾ گهٽ 500 ر مُچئل فنڊ ۾ سيڙائي سگهجن ٿا. اِن نموني ماهوار يا ٽماهي قسط سيڙائي سگهجي ٿي. اِن ۾ بچت ٿيندي رهي ٿي ۽ اَڳتي بہ مالي مقصد پورا ٿين ٿا. وڏي عرصي لاءِ بہ سيڙپ ڪرڻ فائديمند آهي اِن ۾ جوکم گهٽ آهي. گهٽ ۾ 3 کان 5 سال، وڌ ۾ وڌ 10-15 سال مدو هئڻ گهرجي.

MF جا فائدا

- آزمودگار ماهر مئنيجر
- سيڙپ ۾ جدا جدا ماڌيم (diversifications of funds)
- شفاف پٽو
- گهٽ جوکم
- وڪڻڻ جي سهوليت
- گهٽ ۽ وڌ عرصي ۾ فائدو
- ڪجهہ مقرر ٿيل فنڊ (ELSS) ۾ 80c اِنڪم ٽئڪس رعايت

حل ڪيل مثال

مثال (1) هڪ مُچئل فنڊ 15 بازار اَگهه 200 ڪروڙ ر ۾ 8 ڪروڙ يونٽس آهن تہ هڪ يونٽ جو NAV لهو.

حل: هڪ يونٽ جو NAV ر = 200 ڪروڙ رپيا / 8 ڪروڙ يونٽ = 25 ر يونٽ

مثال (2) مثال (1) ۾ توهان 10000 جي سيڙپ ڪئي تہ توهان کي ڪيترا يونٽ ملندا؟

حل: يونٽس جو اَنداز = 10,000/25 = 400 يونٽس ملندا.

اَڀياس 4.4

1. هڪ شيئر جو بازار اَگهه 200 ر ۽ دلالي 0.3% آهي تہ اِن شيئر جي خريدي ڪهڙي؟
2. هڪ شيئر جي بازار ملهہ 1000 ر ۽ دلالي 0.1% تہ اِن شيئر جو وڪرو ڪيترو؟
3. هيٺ شيئر خريدي جو تختو پورو ڪريو (B= خريد ڪيا، S = وڪيا)

شيئرس انداز	بازار ملهہ	شيئرس قيمت	دلالي 0.2%	دلالي جي CGST 9%	دلالي جي SGST 9%	ڪل قيمت
100 B	45 ر					
75 S	200 ر					

4. شريمتي ديسائي 100ر درسني ملهہ جا شيئرس بازار ملهہ 50 ر هوندي وڪيا تہ اُنکي 4988.20 ر مليا. دلالي 0.02% ۽ دلالي تي GST 18% آهي تہ اُن گهڻا شيئرس وڪيا اِهو لهو.

5. مسٽر ڊسوزا 50 درسني ملهہ جا 200 شيئرس 100 رپئي وڏيڪ اگهہ تي خريد ڪيا. اُن تي ڪمپني 50% ڊيوڊنٽ ڏنو. ڊيوڊنٽ ملڻ کانپوءِ 100 شيئرس 10 ر گهٽ قيمت تي وڪيا ۽ بچيل 75 شيئرس وڏيڪ اگهہ تي وڪيا. هرهڪ وهنوار ۾ 20 ر دلالي ڏني. تہ اُن ۾ هنکي فائدو ٿيو يا نقصان؟ ڪيترو؟

گڏيل اَڀياس 4 A

1. مناسب متبدل جواب چونڊي لکو

(1) جيون لاءِ ضروري شين جو GST اگهہ .... آهي.

(A) 5% (B) 12% (C) 0% (D) 18%

(2) هڪ ئي راجيہ ۾ واپار لاءِ مرڪزي ٽئڪس ۾......... آهي.

(A) IGST (B) CGST (C) SGST (D) UTGST

(3) اسان جي ديش ۾............ کان جي ايس ٽي شروع آهي.

(A) 31 مارچ 2017 (B) 1 اپريل 2017

(C) 1 جنوري 2017 (D) 1 جولاءِ 2017

(4) اِسٽيل برتنن تي جي ايس ٽي 18% آهي تہ اُن مٿان راجيہ جي جي ايس ٽي .... آهي.

(A) 18% (B) 9% (C) 36% (D) 0.9%

(5) GSTIN ۾ ڪل .... اَنگہ - اکر هوندا آهن.

(A) 15 (B) 10 (C) 16 (D) 9

(6) هڪ درج ڪيل واپاريءَ جو ٻئي درج ڪيل واپاري جي وهنوار کي .... چئبو آهي.

(A) BB (B) B2B (C) BC (D) B2C

2. 25000 ر هڪ شوبيز تي واپاريءَ 10% چوٽ ڏيئي، بچيل رقم تي 28% جي ايس ٽي لڳائي ته ڪل بل گهٽ رپين جو ٿيندو؟ اُن ۾ CGST ۽ SGST ڪالمن ۾ گهٽي رقم پيربي؟

3. هڪ ريڊيميڊ ڪپڙن جي دڪان ۾ 1000ر قيمت جي ڊريس تي 5% چوٽ ڏيئي باقي رقم تي 5% GST لڳائي ويو ته اُن لاءِ گهٽا رپيا لڳندا؟

4. سورت، گجرات جي هڪ واپاري 2.5 لک ر ٽئڪس لائق رقم جا سوٽي ڪپڙا راجڪوٽ، گجرات ۾ وڪيا ته ٻئي واپاري کي 5% GST تي ڪيترا رپيا لڳندا؟

5. شريمتي ملهوترا 85,000ر هڪ سولار سيٽ خريد ڪري 90,000 ر وڪيو GST 5% حساب سان کيس ڪيترا روپيا واپس ملندا؟

6. Z سيڪيورٽي ڊينڊز ڪمپني 64,500 ر ٽئڪس لائق رقم جون سيوائون ڏنيون GST 18% آهي اِن ڪمپني لانڊري سروس لاءِ 1550ر پيري آهي. اِن ڪمپني جو ITC ڪيترو؟ CGST ۽ SGST لکو.

7. هڪ واپاري پوليس ڪنٽرول روم لاءِ ٽئڪس سيمنٽ 84000ر قيمت جا واڪي ٽاڪي وڪيا GST 12% آهي ته CGST ۽ SGST لکو.

★8. هڪ ٻڌي واپاريءَ ٽئڪس لائق 50,000 ر جا بجلي اوزار خريد ڪيا اِن اِهي سپ ريزڪي واپاريءَ کي ٽئڪس لائق رقم 1,80,000ر وڪيا 2,20,000ر ته هرهڪ وهنوار ٽئڪس اِنوائز ۾ CGST ۽ SGST ڪٿيو ۽ هرهڪ واپاري لاءِ CGST ۽ SGST لکو.

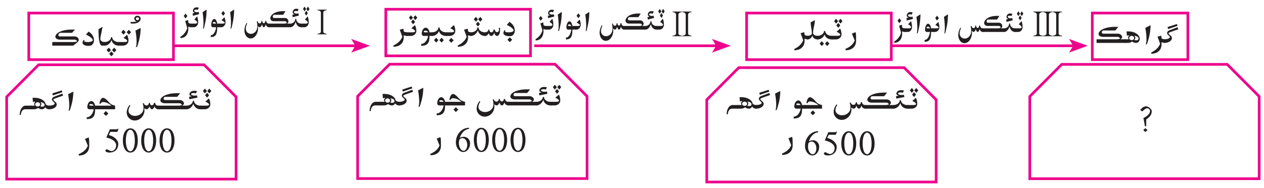
★9. آٽا پاٽل (ٿاڻي، مهاراشٽر) 14000ر ٽئڪس لائق رقم تي هڪ وئڪيوم ڪلينر (ممبئي) جي هڪ واپاريءَ کي وڪيو GST 28% آهي ته وسئيءَ جي واپاري اِهو گراهڪ کي 16800 ر وڪيو ته

(1) اٽا پاٽل جي CGST ۽ SGST لکو.

(2) وسئي جي واپاريءَ جي گراهڪ جي CGST ۽ SGST لکو

(3) وسئي واپاريءَ جي CGST ۽ SGST لکو.

★10. هيٺ هڪ واپار - زنجير ۾ A,B,C ۾ GST 12% سان لهو.



(1) اُتپادڪ، ڊسٽريبيوٽر، ريزڪي واپاري سرڪار ۾ GST ڪهڙي سِري هن ڏيکاري آهي اهڙو تختو تيار ڪريو.

(2) آخر ۾ اِها گراهڪ کي ڪهڙن رپين ۾ پيئي؟

(3) هن زنجير ۾ B2B ۽ B2C اِنوائز ڪهڙا؟ اِهي لکو.

گڏيل اَڀياس 4 B

1. هيٺ ڏنل متبدل جوابن مان مناسب جواب چونڊيو

(1) درسني ملهه (FV) 100ر، بازار ملهه (MV) 75ر ته ڪهڙو جملو صحيح آهي.

(A) 175 ر وڌيڪ اگهه (B) 25 ر گهٽ اگهه

(C) 25ر وڌيڪ اگهه (D) 75 رگهٽ اگهه

(2) 50% ڊويڊينڊ ظاهر ڪيل ڪمپني جو 10ر FV لاءِ هڪ شيئر جو ڊوينيڊ ڪيترو؟

(A) 50 ر (B) 5 ر (C) 500 ر (D) 100 ر

(3) هڪ مچيئل فنڊ جي هڪ يونٽ جو NAV **10.65** آهي ته 500 يونٽس جي قيمت ڪيتري؟

(A) 5325 (B) 5235 (C) 532500 (D) 53250

(4) دلالي تي GST .... اگهه آهي.

(A) 5% (B) 12% (C) 18% (D) 28%

(5) شيئرس خريد ڪرڻ وقت هڪ شيئر جي قيمت لهڻ لاءِ بازار اَگهه، دلالي ۽ GST جو .... ڪرڻو پوندو.

(A) جوڙ (B) ڪٽ (C) ضرب (D) ونڊ

2. 100ر تي وي وارا شيئر 30 ر وڌيڪ اَگهه تي خريد ڪيا ويا دلالي 0.3% ته هڪ شيئر جي قيمت لهو.

3. پرشانت 100رFV وارا 180ر MV تي 50 شيئر خريد ڪيا ڪمپني 40% ڊويڊينڊ ڏنو تہ پرشانت جو سيڙپ موٽ اَگهہ لهو.

FV. 100ر FV ۽ 30 ر گهٽ اَگهہ تي 300 شيئرس وڪيا تہ ڪل ڪيترا رپيا ملندا؟

5. 100ر FV ۽ 120ر MV 60000ر سيڙائي شيئرس خريد ڪيا ويا شيئرس جو انداز لهو.

6. شريمتي گيتا اَگروال 100 ر MV تي 10,200 شيئرس خريد ڪري 60 شيئرس 125رMV ۽ بچيا شيئر 90ر MV تي وڪيا ڪيس فائدو ٿيو يا نقصان؟ ڪيترا رپيا؟

7. 100ر، درستي ملهہ وارن ٻن ڪمپنين جا MV ۽ ڊويڊينڊ ڏنل آهن ٻڌايو تہ ڪهڙي ڪمپني ۾ سيڙپ فائديواري ٿيندي؟

(1) A- ڪمپني 12% 132 ر (2) A- ڪمپني 16% 144 ر

8.★ آدتيہ 100ر FV، 50ر MV تي 50118ر جا شيئرس خريد ڪيا دلالي 0.2% ڏني ۽ اُن تي 18% GST آهي تہ اُنکي 50118 رپئي ۾ گهٽا شيئرس ملندا.

9.★ شري باٽلي والا 303.50ر جا شيئرس وڪيا ۽ 69650 ر جا شيئرس خريد ڪيا اُن ڏينهن خريدي / وڪري تي 0.1% دلالي ۽ اُن تي GST18% ڏنو. اِن وهنوار ۾ دلاليءَ تي GST لهو.

10.★ شريمتي اَروڻا نڪر هڪ ڪمپنيءَ جا 100 شيئرس 1200ر خريد ڪيا دلالي 0.3% ۽ اُن تي GST18% ڀري تہ

(1) ڪل سيڙپ ڪيتري؟ (2) سيڙپ تي دلالي ڪيتري؟

(3) دلاليءَ تي GST ڪيتري؟ (4) 100 شيئرن تي ڪل ڪيترو خرچ آيو؟

11.★ شريمتي اَنگما دوشي 661ر بازار اَگهہ تي 22 شيئرن ورتا. هن جي ڪل ڪيتري سيڙپ؟ اُنهن شيئرس تي 20% ڊوينيڊ وٺي 100ر درسني قيمت جو 650ر بازار اَگهہ تي وڪيا. هرهڪ وهنوار ۾ دلالي 0.1% هئي اِن وهنوار ۾ نفعو يا نقصان سيڪڙو لهو.

▢▢▢

5 اِمڪان

اَچو تہ سکون

- اِمڪان : سڃاڻپ
- جنس اُوڪاش گھٽنا
- اٽڪل وارو تجربو ۽ نتيجو
- گھٽنا جو اِمڪان

هلو تہ چرچا ڪريون

ماستر : وديارٿي دوستو، اَسان جي ڪلاس ۾ جيترا شاگرد آهن، اوترين چٽين هن ڪوڪي ۾ وڌل آهن. هرهڪ ڪي هڪ چٽي ڪڍڻ آهي. چٽيءَ تي ٻوٽن جا نالا لکيل آهن ڪنهن بہ چٽيءَ تي ساڳيو ٻوٽو نہ ڏنل آهي. سڀ ڇٽا رول نمبر موجب قطار ۾ ٻيهو. سيني کي چٽي ملڻ ڪانپوءِ ئي توهان پنهنجي چٽي پڙهندا. اَسان ڏسندا سين تہ تلسي ٻوٽي واري چٽي ڪنهن کي ٿي ملي؟

اَروڻا : سر، مان قطار ۾ پهرين نمبر تي آهيان. مان پهرين چٽي نہ ڪڍندس ڇو تہ ايترن چٽين ۾ مونکي اُها ئي چٽي ملي، اِن جو اِمڪام تمام گھٽ آهي.

جهرينا : سر، مان تہ بلڪل آخر ۾ آهيان مان آخرين چٽي نہ ڪڍندس ڇو تہ تلسي واري چٽي تہ اَڳ ۾ئي ڪنيل هوندي ٿوري ۾ پهرين ۽ آخرين شاگرد کي اِها چٽي ملي، اِن جو اِمڪان گھٽ آهي. مٿي ڏنل گفتگو مان اِمڪان گھٽ يا اِمڪان وڌيڪ بابت ويچار ڪيل آهي. اَسان روزاني زندگيءَ ۾ ڳالهائڻ ۾ هيٺيان لفظ واپرائيندا آهيون.

- ممڪن آهي
- اڪثر
- گھڻو ڪري
- تي سگھي ٿو
- ناممڪن
- پڪ، لڳ ڀڳ،
- 50-50

ٿيندڙ ڳالهين بابت هيٺ ڏنل بيان ڏسو

- گھڻو ڪري اَڄ برسات پوندي
- مهنگائي وڌي سگھي ٿي
- ڀارت کي ڪرڪيٽ ۾ ورلڊ ڪپ ملڻ ممڪن آهي.
- پڪ ئي مان پهريون نمبر ايندس
- ٻارن کي پوليو ڊوز ڏبو تہ پوليو جي بيماري ٿيڻ ممڪن نہ آهي.

ﭘر واري شڪل ۾ ڪرڪيٽ رانديگر سڪو
ڦٽي ڪري رهيا آهن ڇا ايندو؟

☐ يا ☐

مطلب سِڪو ڦٽي ڪرڻ تي ☐ اَچي سگهي ٿو

مشغولي 1 ڪلاس ۾ هرهڪ شاگرد هڪ سِڪو اُڇلائيندو ته ڇا ايندو. (ماسٽر بورڊ تي تختو تيار ڪري جواب لکي ٿو)

ڪر (T)	بُر (H)	ممڪن
. . .	. . .	شاگردن جو اَنداز

مشغولي 2 هاڻي هرهڪ شاگرد اُهو سڪو ٻه دفعا اُڇلائي ڇا ممڪن ٿيندو؟

TT	TH	HT	H H	ممڪن
				شاگرد جو اَنداز

مشغولي 3 پنهنجي ويجهو ڏارو اُڇلايو اُن جي مٿاڇڙي تي ڇا ايندو. انجو جو ويچار ڪريو.

(هتي ڏاري جو مٿان وارو پاسو ڏيکاريل آهي.)

جاڻي وٺون

اَٽڪل وارو تجربو (Random Experiment)

اهو تجربو جنهن ۾ سڀ ممڪن نتيجا اَڳواٽ ئي ڄاڻل رهن پر ڪنهن به نتيجي جي خاطري نه هجي، اُن کي اَٽڪل وارو تجربو چئبو اهي. مثال : سڪو اُڇلائڻ، ڏارو اُڇلائڻ، 1 کان 50 اَنگن جي سيٽ مان هڪ ڪارڊ ڪڍڻ، راند ۾ 52 پتن مان هڪ پتو ڪڍڻ وغيره.

نتيجو (Outcome)

اَٽڪل واري تجربي ۾ ايندڙ جواب حاصل ٿيل ڳالهين کي نتيجا چئبو آهي.

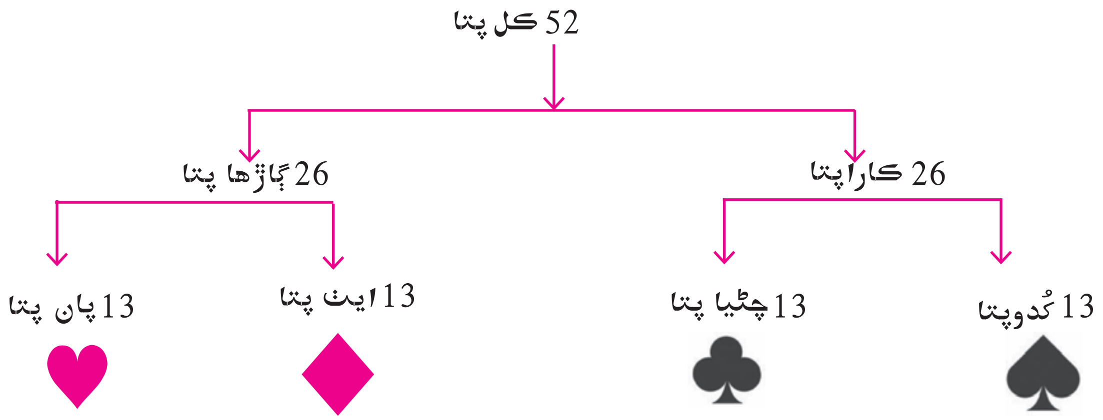
مثال(1) هڪ سڪو اُڇلائڻ سان ٻه نتيجا اَچن ٿا

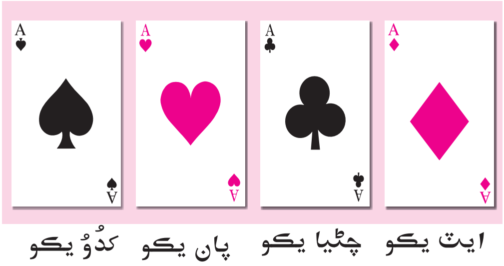
(1) مان ڪر (T) ۽ ٻڙ (H)

(2) هڪ ڊارو ڦٽي ڪرڻ سان 6 نتيجا ايندا ٽُبڪن جي عددن تان 6 نتيجا ممڪن آهن.
1 يا 2 يا 3 يا 4 يا 5 يا 6

(3) هڪ ڪانُ 50 اَنگ لکيل ڪارڊن مان هڪ ڪارڊ ڪڍڻ وقت 50 نتيجا ممڪن آهن.

(4) راند جي پتن مان هڪ پتو ڪڍڻ، اِن اَٽڪل واري تجربي ۾ 52 پتا آهن، اِهو هيٺ ڏيکاريل آهي.





ڪدو، چڙيا، ايٽ يا پان اِهي ۴ ويس آهي هڪ ويس جا 13 پتا آهن ان ۾ بادشاهه بيگم ۽ غلام انگن وارا پتا. اَنگ لکيل پتي کي يڪو چئبو آهي. بادشاهه بيگم ۽ غلام اِهي درشتي پتا آهن. ڪل اِهي 12 پتا آهن.

برابر ممڪن نتيجا (Equally Likely Outcomes)

جيڪڏهن اَسان هڪ ڊارو اُڇليون ٿا ته هرهڪ اَنگ اَچڻ جي سمپاونا ساڳي آهي. مطلب 1 کان 6تائين ڪوبہ اَنگ متئين متاچڙي تي اَچڻ جو اِمڪان ساڳيو آهي. جيڪڏهن ڪو ڊارو اَهڙي نموني ٺهيل آهي جو ڪو خاص اَنگ هر گهڙي اَچي ٿو ته اِهو ڊارو غلط (biased) آهي اِنڪري اِهي نتيجا برابر ممڪن نہ آهن اِنڪري اَٽڪل واري تجربي ۾ گهٽتا (Fair يا Unbiased) هئڻ گهرجي.

جيڪڏهن ممڪن نتيجن مان ڪوبہ نتيجو ٻين جي ڀيٽ ۾ وڌيڪ دفعا حاصل نٿو ٿئي تہ اهڙن نتيجن کي برابر ممڪن نتيجا چئجي ٿو. مثال آسان سڪو اُڇلايون ٿا تہ ڪر يا ٻُر جا نتيجا برابر عدد ۾ اَچڻ جو اِمڪان آهي يا ڊارو ڦٽي ڪرڻ سان 1 کان 6 تائين نتيجا برابر عدد ۾ اَچن.

اَڀياس 5.1

1. هيٺ ڏنل تجربن ۾ ڪيترو اِمڪان آهي؟

(i) ونيتا کي مهاراشٽر جي سئر جڳهين بابت ڄاڻ آهي هن کي ميءِ جي مهني ۾ موڪلن ۾ اُتي وڃڻو آهي اَجنتا، مهابليشور، لورينڊ، ڻاڊونا ون، آمبولي، رائيگڙهہ، مئٿيرا، آنند ون.

(ii) هڪ هفتي ۾ اَٽڪل واري تجربي مان هڪ ڏينهن چونڊڻ

(iii) ڀتن مان اٽڪل واري تجربي مان هڪ پتو چونڊڻ

(iv) هرهڪ ڪارڊ تي هڪ انگہ اُن موجب 10 کان 20 تائين انگہ لکيل آهن. اُنهن مان هڪ ڪارڊ اٽڪل واري تجربي موجب چونڊڻ.

ويچار ڪريو

هيٺ ڏنل تجربن ۾ ڪهڙي تجربي ۾ نتيجي ملڻ جو اِمڪان وڌيڪ آهي؟

(i) هڪ ڊارو ڦٽي ڪرڻ سان 1 ملڻ

(ii) هڪ ناڻو اُڇلائڻ سان H ملي.

ڄاڻي وٺون

جنس اَوڪاش (Sample Space)

اَٽڪل واري تجربي جي ممڪن سيني نتيجن جي سيٽ کي جنس اوڪاش چئجي ٿو.
اهو S يا Ω (گريڪ اَکر اومگيا) نشاني وسيلي ڏيکارجي ٿو. جنس اَوڪاش جي هرهڪ تتوکي جنس ٽِڪو چئجي ٿو. 'S' سيٽ ۾ تتون جو تعداد n(S) وسيلي ڏيکارجي ٿو. جيڪڏهن n(S) محدود آهي تہ اِن کي محدود جنهن آوڪاش چئجي ٿو. هيٺ محدود جنس اَوڪاش جا مثال ڏنل آهن.

نمبر	اَٽڪل تجربو	جنس اَوڪاش	جنس ٽيڪا
1	هڪ سڪو اُڇلائڻ	S = {H, T}	n(S) = 2
2	ٻه سڪا اُڇلائڻ	S = { HH, HT, TH, TT}	n(S) = ☐
3	ٽي سڪا اُڇلائڻ	S = {HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT}	n(S) = 8
4	هڪ ڏارو اُڇلائڻ	S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}	n(S) = ☐
5	ٻه ڏارا اُڇلائڻ	S = {(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)}	n(S) = 36
6	1 کان 25 تائين اَنگَ لکيل ڪارڊن مان 1 ڪارڊ ڪڍڻ	S = {1, 2, 3, 4, ..., 25}	n(S) = ☐
7	چٽيءَ طرح ڏاپ ڏنل 52 پتن مان هڪ پتو ڪڍڻ	ايٽ : ايڪا , 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, راجا, راڻي، غلام پان : ايڪا , 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, راجا, راڻي، غلام ڪدو : ايڪا , 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, راجا, راڻي، غلام چڙيا : ايڪا , 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10,راجا, راڻي، غلام	n(S) = 52

اِهو ڌيان ۾ رکو

(i) سڪو ٻه دفعا اُڇلائڻ يا 2 سڪا هڪ دفعو اُڇلائڻ ٻنهي تجربن ۾ جنس اَوڪاش ساڳيو رهندو.

(ii) هڪ ڏارو ٻه دفعا اُڇلائڻ يا 2 ڏارا هڪ دفعو اُڇلائڻ ٻنهي تجربن ۾ جنس اَوڪاش ساڳيو رهندو.

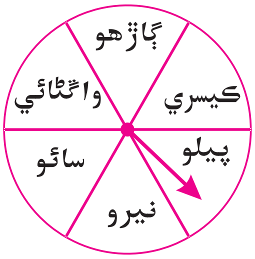
اَڀياس 5.2

1. هيٺ ڏنل هر هڪ تجربي ۾ اَوڪاش ’S‘ ۽ اُن ۾ سمايل جنس ٽيڪا n(S) لکو.

(1) هڪ سڪو ۽ هڪ ڏارو هڪ ئي وقت اُڇلائڻ

(2) 5,3,2 اَنگن مان بنا ڏهرائڻ جي ٻن اَنگن وارا عدد تيار ڪرڻ.

(2) ڇهن رنگن واري گول ڦرندڙ ڦرڪي مٿان ڪهڙي رنگ تي تير چپڪندو؟



MARCH - 2019						
M	T	W	T	F	S	S
				1	2	3
4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17
18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31

(3) سال 2019 جي مارچ مهني ۾ 5 جي ضربجندڙ جون تاريخون حاصل ڪريو.
(ڏنل ڪيلينڊر جو پتو ڏسو)

(4) ٻن ڇوڪرن (B1 , B2) ۽ ٻن ڇوڪرين (G1 , G2) انهن مان هڪ رستو - سلامتي سمتي ٺاهڻ آهي. اِن لاءِ جنس اوڪاش (S) لکڻ لاءِ مشغولي پوري ڪريو .

(1) ٻن ڇوڪرن جي سمتي = ☐ (2) ٻن ڇوڪرين جي سمتي = ☐

(3) هڪ ڇوڪرو ۽ هڪ ڇوڪري ٻن ڄڻن جي سمتي = B_1, G_1 ☐ ☐ ☐

(4) ∴ جنس اَوڪاس = {.... ,.... ,.... ,.... ,.... ,.... ,....}

چاڪي وٺون

گهٽنا (Event)

ڏنل شرط جو پورائو ڪندڙ نتيجن کي سٺاوا نتيجا (favourable outcome) چئبو آهي. جنس اوڪاش ڏنل آهي . گهٽنا جنس اوڪاش جو اُپ سيٽ اهي گهٽنائون انگريزي وڏن اَکرن A, B, C, D وغيره روپ ۾ ڏيکاريبيون آهن.

مثال : ٻه سڪا اُڇلايا A گهٽنا ۾ گهٽ ۾ گهٽ هڪ T اَچي

$$A = \{TT, TH, HT\}$$

گهٽنا A جي تتون جو تعداد n(A) ڏيکاربو آهي. $n(A) = 3$

گهٽنا جا قسم	وڌيڪ چاڻ لاءِ
(i) يقيني گهٽنا (Certain event)	(iv) پورڪ گهٽنا (Complement of an event)
(ii) ناممڪن گهٽنا (Impossible event)	(v) اڻ ميلاپي گهٽنائون (Mutually exclusive events)
(iii) هڪ تتوي گهٽنا (Simple event)	(vi) سمپورن گهٽنائون (Exhaustive events)

حل ڪيل مثال

مثال (1) ٻہ سڪا اُڇلائڻ واري تجربي ۾ جنس اوڪاش 'S' لکو n(S) لکو هن ڏنل گهٽنائن جا سيٽ n(S) تتون جو اَنداز لکو

(i) گهٽنا A: گهٽ ۾ گهٽ هڪ 'H' هئڻ گهرجي.

(ii) گهٽنا B: هڪ H هئڻ گهرجي.

(iii) گهٽنا C: وڌ ۾ وڌ هڪ T هئڻ گهرجي.

(iv) گهٽنا D: هڪ بہ H نہ هئڻ گهرجي.

حل : ٻہ سڪا هڪ وقت اُڇلائڻ

$S = \{HH, HT, TH, TT\}$ $\quad n(S) = 4$

(i) گهٽنا A: گهٽنا گهٽ ۾ گهٽ هڪ H هئڻ گهرجي

$A = \{HH, HT, TH\}$ $\quad n(A) = 3$

(ii) گهٽنا B: ۾ هڪ H هئڻ گهرجي

$B = \{HT, TH\}$ $\quad n(B) = 2$

(iii) گهٽنا C: وڌ ۾ وڌ هڪ T هئڻ گهرجي

$C = \{HH, HT, TH\}$ $\quad n(C) = 3$

(iv) گهٽنا D: ۾ هڪ بہ H نہ هئڻ گهرجي

$D = \{TT\}$ $\quad n(D) = 1$

مثال (2) هڪ ٿيلهيءَ ۾ 1 کان 50 اَنگن لکيل ڪارڊ آهن. اُن مان هڪ ڪارڊ ڪيڍٿو آهي تہ S لهو n(S) لهو. B ۽ A گهٽنائون ۽ تتوَن جو اَنداز لکو.

(i) گهٽنا A: عدد 6 سان ونڊجندڙ هجي

(ii) گهٽنا B: ۾ عدد پورڻ ٻي سگهي هجي

حل : $S = \{1, 2, 3, \ldots, 49, 50\}$ $\quad n(S) = 50$

(i) گهٽنا .A: عدد 6 سان ونڊجندڙ هجي

$A = \{6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48\}$, $\quad n(A) = 8$

(ii) گهٽنا B: عدد پورڻ ٻي سگهي هجي

$B = \{1, 4, 9, 16, 25, 36, 49\}$, $\quad n(B) = 7$

مثال (3) 3 ڇوڪرن ۽ ٻن ڇوڪرين، اِنهن مان ٻن شاگردن جي صفائِي سمتي نـاهٽي آهي ‘S’ ۽ n(S) لکو

هيٺ ڏنل گهٽنائن لاءِ جنس ٽيڪا لهو.

(i) گهٽنا A : گهٽ ۾ گهٽ هڪ ڇوڪري هئڻ گهرجي

(ii) گهٽنا B : سمتي ۾ هڪ ڇوڪرو ۽ هڪ ڇوڪري هئڻ گهرجي

(iii) گهٽنا C: فقط ڇوڪرا هئڻ گهرجن

(iv) گهٽنا D : وڌ ۾ وڌ هڪ ڇوڪري هئڻ گهرجي

حل : سمجهو تي ڇوڪرا آهن B_1, B_2, B_3 ۽ تي ڇوڪريون آهن G_1, G_2

$$S = \{B_1B_2, B_1B_3, B_2B_3, B_1G_1, B_1G_2, B_2G_1, B_2G_2, B_3G_1, B_3G_2, G_1G_2\} \qquad n(S) = 10$$

(i) گهٽنا A ۾ گهٽ ۾ گهٽ هڪ ڇوڪري هئڻ گهرجي

$$A = \{B_1G_1, B_1G_2, B_2G_1, B_2G_2, B_3G_1, B_3G_2, G_1G_2\} \qquad n(A) = 7$$

(ii) گهٽنا B ۾ هڪ ڇوڪرو ۽ هڪ ڇوڪري هئڻ گهرجي

$$B = \{B_1G_1, B_1G_2, B_2G_1, B_2G_2, B_3G_1, B_3G_2\} \qquad n(B) = 6$$

(iii) گهٽنا A ۾ فقط ڇوڪرا هئڻ گهرجن

$$C = \{B_1B_2, B_1B_3, B_2B_3\} \qquad n(C) = 3$$

(iv) $$D = \{B_1B_2, B_1B_3, B_2B_3, B_1G_1, B_1G_2, B_2G_1, B_2G_2, B_3G_1, B_3G_2\} \qquad n(D) = 9$$

مثال (4) ٻہ ڏارا اُڇلائڻ ۾ ‘S’ ۽ n(S) لهو.

هن شرط پورا ڪندڙ گهٽنائن جا سيٽ ۽ تتون جو تعداد لکو

(i) مٿئين مٿاڇري تي اَنگن جو جوڙ مفرد عدد هئڻ گهرجي

(ii) مٿئين مٿاڇري تي اَنگن جو جوڙ 5 جو ضربجندڙ هئڻ گهرجي

(iii) مٿئين مٿاڇري تي اَنگن جو جوڙ 25 هئڻ گهرجي

(iv) پهرين ڏاري جو اَنگ ٻئي ڏاري جي اَنگ کان ننڍو هئڻ گهرجي.

حل جنس اُوڪاش

$$S = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),$$
$$(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),$$
$$(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),$$
$$(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6),$$
$$(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),$$
$$(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\} \quad n(S) = 36$$

(i) سمجهو تہ E گهٽنا ۾ اَنڱن جو جوڙ مفرد عدد آهي

$$E = \{(1,1),(1,2),(1,4),(1,6),(2,1),(2,3),(2,5),(3,2),(3,4),$$
$$(4,1),(4,3),(5,2),(5,6),(6,1),(6,5)\} \quad n(E) = 15$$

(ii) سمجهو تہ F گهٽنا ۾ انڱن جو جوڙ 5 جو ضربجنديڙ هجي

$$F = \{ (1,4),(2,3),(3,2),(4,1),(4,6),(5,5),(6,4) \} \quad n(F) = 7$$

(iii) سمجهو تہ G گهٽنا ۾ اَنڱن جو جوڙ 25 آهي.

$$G = \{ \ \} = \phi \qquad n(G) = 0$$

(iv) سمجهو تہ H گهٽنا ۾ پهرين ڏاري جو انڱہ ٻئي ڏاري جي اَنڱہ کان ننڍو آهي.

$$H = \{(1,2)\ (1,3)\ (1,4)\ (1,5)\ (1,6)\ (2,3)\ (2,4)\ (2,5)\ (2,6)$$
$$(3,4)\ (3,5)\ (3,6)\ (4,5)\ (4,6)\ (5,6)\} \qquad n(H) = 15$$

اَڀياس 5.3

1. هيٺ هرهڪ اَٽڪل واري تجربي ۾ S,n(S) ساڳئي نموني، C,B,A ۽ n(A), n(B) ۽ n(C) لکو.

(i) هڪ ڏارو اُڇلائڻ

گهٽنا A: متئين متاڇڙي تي ٻڌي عدد هئڻ گهرجي

گهٽنا B: متئين متاڇڙي تي اڪي عدد هئڻ گهرجي

گهٽنا C: متئين متاڇڙي تي مفرد عدد هئڻ گهرجي

(2) ٻہ ڏارا اُڇلائڻ

گهٽنا A: متئين متاڇڙي تي اَنڱن جو جوڙ 6 ضربجنديڙ هئڻ گهرجي

گهٽنا B: متئين متاڇڙي تي اَنڱن جو جوڙ گهٽ ۾ گهٽ 10 ضربجنديڙ هئڻ گهرجي

گهٽنا C: ٻنهي ڏارن تي ساڳيو اَنڱہ هئڻ گهرجي.

(3) ٽي سڪا هڪ ئي وقت اُڇلائڻ

گهٽنا A : گهٽ ۾ گهٽ ٻه دفعا H اَچڻ گهرجي

گهٽنا B : هڪ به H نه هئڻ گهرجي

گهٽنا B : ٻئي سڪي تي H هئڻ گهرجي

(4) : 5,4,3,2,1,0 اَنگ بنا دهراوت واپرائي ٻن اَنگن وارا عدد ٻڌي هئڻ گهرجي.

گهٽنا A : ملندڙ عدد ٻڌي هئڻ گهرجي.

گهٽنا B : 4 سان ونڊجندڙ عدد هئڻ گهرجن.

گهٽنا B : ملندڙ عدد 50 کان وڏا هئڻ گهرجن.

(5) ٽن مردن ۽ ٻن عورتن مان ٻن ڄڻن جي 'پرياورڻ سمتي' ٺاهڻي آهي.

گهٽنا A : سمتي ۾ گهٽ ۾ گهٽ هڪ عورت هئڻ گهرجي.

گهٽنا B : سمتي ۾ هڪ مرد ۽ هڪ عورت هئڻ گهرجي.

گهٽنا C : سمتي ۾ هڪ به عورت نه هئڻ گهرجي.

(6) هڪ سڪو ۽ هڪ ڊارو هڪ ئي وقت اُڇلائڻ

گهٽنا A : H ۽ اِڪي عدد هئڻ گهرجي.

گهٽنا B : H يا T ۽ ٻڌي عدد هئڻ گهرجي.

گهٽنا C : T ۽ عدد 7 کان وڏو هئڻ گهرجي.

چاڻي وٺون

گهٽنا جو اِمڪان (Probability of an event)

هڪ سولو تجربو سوچيون ٿا هڪ ٿيلهي ۾ ساڳئي آڪار جا چار بال آهن.

اُنهن ۾ ٽي اَڇي رنگ ۽ هڪ ڪاري رنگ جو آهي.

اُنهن مان اکيون بند ڪري هڪ بال ڪڍڻو آهي اَڇي رنگ جو بال هئڻ جو وڌيڪ اِمڪان آهي.

علم رياضي ۾ هڪ گهٽنا جو ممڪن هئڻ کي گهٽنا جو اِمڪان چئجي ٿو.

ڪنهن اَٽڪل واري تجربي ۾ جنس اَوڪاش S ۽ A هڪ گهٽنا آهي ته اُن گهٽنا جو اِمڪان P(A) نموني ڏيکاربو آهي. اِهو سوتر وسيلي لکجي ٿو.

$$P(A) = \frac{\text{A جنس ٽيڪن جو عدد}}{\text{S ۾ ٽيڪن جو عدد}} = \frac{n(A)}{n(S)}$$

متي ڏنل تجربي ۾ سمجھو A گھٽنا ۾ اَڇا بال آھن. $n(A) = 3 \quad n(S) = 4$

∴ تہ A جو اِمڪان : $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{4}$

B گھٽنا ۾ سمجھو ڪارو بال آھي تہ B گھٽنا جو اِمڪان $P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{1}{4}$ ∴ $(B) = 1$

حل ڪيل مثال

مثال (1) هڪ سڪو اُڇلائڻ ۾ هيٺ ڏنل گھٽنائن جو اِمڪان لھو

(i) H ملڻ　　(ii) T ملڻ

حل : سمجھو تہ S جنس اوڪاش آھي

$S = \{H, T\} \qquad n(S) = 2$

(i) سمجھو A گھٽنا ۾ H ملي ٿي

$A = \{H\} \qquad n(A) = 1$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{1}{2}$$

(ii) سمجھو B گھٽنا ۾ T ملي ٿي

$B = \{T\} \qquad n(B) = 1$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{1}{2}$$

مثال (2) هڪ ڊارو اُڇلائڻ ۾ هيٺ ڏنل گھٽنائن جو اِمڪان لھو.

(i) متئين متاچڙي تي مغرد عدد هجي.　　(ii) متئين متاچڙي تي عدد ٻڌي هجي.

حل : سمجھو تہ جنس اَوڪاش 'S' آھي

$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \qquad n(S) = 6$

(i) سمجھو A گھٽنا ۾ مغرد عدد آھي.

$A = \{2, 3, 5\} \qquad n(A) = 3$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

(ii) گهٽنا B ۾ متئين متاڇڙي تي ٻڌي عدد هجي

$B = \{2, 4, 6\}$ $\quad n(B) = 3$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)}$$

$$P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

مثال (3) سني نموني ڦاپيل 52 پتن مان هڪ پتو ڪڍڻ. اِنهن گهٽنائن جو اِمڪان لهو.

(i) پتو ڳاڙهو هجي (ii) درشتي پتو هجي .

حل : سمجهو تہ جنس اَوڪاش S آهي $\therefore\ n(S) = 52$

گهٽنا A: ۾ ڳاڙهو پتو آهي

13 ايٽ + 13 پان = 26 ڳاڙها پتا

$n(A) = 26$

$$P(A) = \frac{26}{52} \qquad \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{1}{2}$$

(ii) گهٽنا B ۾ درشتي پتو آهي

ڪل بادشاهہ, راڻي ۽ غلام جا 12 درشتي پتا آهن $\therefore\ n(B) = 12$

$$P(B) = \frac{12}{52} \qquad \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{3}{13}$$

مثال (4) هڪ ڪوڪي ۾ 5 اِسترابيري، 6 ڪافي ۽ 2 پيپرمنٽ جا چاڪليٽ آهن تہ

(i) ڪافي چاڪليٽ

(ii) پيپرمنٽ چاڪليٽ اِنهن جو اِمڪان لهو

حل : سمجهو تہ جنس اَوڪاش S آهي $\therefore\ n(S) = 5 + 6 + 2 = 13$

گهٽنا A ۾ ڪافي چاڪليٽ

$n(A) = 6$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

$$P(A) = \frac{6}{13}$$

گهٽنا B ۾ پيپرمينٽ چاڪليٽ

$n(B) = 2$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)}$$

$$P(B) = \frac{2}{13}$$

اِهو ڌيان ۾ رکو

- امڪان ٻڌائڻ يا لکڻ وقت اڪثر يا سيڪڙو واپرائجي ٿو
- ڪنهن به گهٽنا جو اِمڪان 0 کان 1 يا 0% کان 100% هوندو آهي.

مطلب $0 \% \leq P(E) \leq 100 \%$ يا $0 \leq P(E) \leq 1$

مثال $\frac{1}{4}$ اِمڪان 25% لکي سگهجي ٿي.

- باب جي شروعات ۾ ڪلاس ۾ ٻارن کي ٻوٽن جي نالن واريون چٺيون ڪڍڻ لاءِ چيو ويو اُن وقت تلسي ٻوٽي اِهو نالو هوندڙ شاگرد جي اِمڪان بابت ويچار ڪيو ويو هڪ ٺي چٺيءَ تي تلسيءَ جو نالو آهي 40 شاگردن کي اِن تلسيءَ واري نالي ڪڍڻ جي چٺيءَ جو اِمڪان هرهڪ شاگرد لاءِ $\frac{1}{40}$ آهي. شروعاتي، وچ ۾ يا آخر ۾ چٺي ڪڍندڙ بار جو اِمڪان ساڳيو ئي آهي.

اَڀياس 5.4

1. ٻن سڪن جي اُڇلائڻ سان هيٺ ڏنل گهٽنائن جو اِمڪان لکو.

(1) گهٽ ۾ گهٽ هڪ H ملڻ (2) هڪ به H نه ملڻ

2. ٻه ڏارا اُڇلائڻ سان هيٺ گهٽنائن جو اِمڪان لکو

(1) متئين متاڇڙي تي اَنڱن جو جوڙ گهٽ ۾ گهٽ 10 هئڻ

(2) متئين متاڇڙي تي اَنڱن جو جوڙ 33 هئڻ

(3) پهرين ڏاري جو اَنڱ، ٻئي ڏاري جي اَنڱ کان وڏو هئڻ

3. هڪ پيٽيءَ ۾ 15 ٽڪيٽون آهن هرهڪ ٽڪيٽ تي 1 کان 15 مان هڪ عدد لکيل آهي اُن ۾ هڪ ڪڍڻي آهي ته

(1) ٻڌي عدد هئڻ (2) 5 جو ضربجندڙ عدد اِنهن جو اِمڪان لکو

4. 2,3,5,7,9 اِهي اَنڱ بنا دهرائڻ جي هڪ دفعو ڪم آڻي ٻن اَنڱن وارا عدد تيار ڪيا ته گهٽنائن جو اِمڪان لکو.

(1) عدد اڪي آهي (2) 5 جو ضربجندڙ عدد آهي.

5. چڱيءَ طرح ڦاٻيل 52 پتن مان هڪ پتو ڪڍڻ سان هيٺ ڏنل گهٽنائن جو اِمڪان لکو

(1) يڪو ملڻ (2) ڪُڏوُ پتو ملڻ

گڏيل اَڀياس -5

.1 هيٺ هرهڪ سوال جو مناسب متبدل چونڊيو

(1) هيٺ ڏنل جوابن مان ڪهڙو اِمڪان ناممڪن آهي .

(A) $\frac{2}{3}$ (B) 1.5 (C) 15% (D) 0.7

(2) هڪ ڊارو اُڇلائڻ سان 3 کان گهٽ ايندڙ انگن جو اِمڪان .... آهي.

(A) $\frac{1}{6}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) 0

(3) 1 کان 100 تائين ڪنيل مفرد عددن جو اِمڪان .... آهي.

(A) $\frac{1}{5}$ (B) $\frac{6}{25}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) $\frac{13}{50}$

.4 هڪ ٿيلهي ۾ 1 کان 40 انگ لکيل ڪارڊ آهن. اِنهن ڪارڊن مان هڪ ڪارڊ ڪڍڻ وقت اُهو 5 جو ضربجندڙ آهي ته اِن گهٽنا جو اِمڪان.......... ٿيندو.

(A) $\frac{1}{5}$ (B) $\frac{3}{5}$ (C) $\frac{4}{5}$ (D) $\frac{1}{3}$

(5) جيڪڏهن $n(A) = 2$، $P(A) = \frac{1}{5}$، ته $n(S) = ؟$

(A) 10 (B) $\frac{5}{2}$ (C) $\frac{2}{5}$ (D) $\frac{1}{3}$

.2 باسڪيٽ بال رانديگر جان، واسم ۽ آڪاش هڪ مقرر جڳهه تي راند جو اَڀياس ڪن ٿا باسڪيٽ بال ۾ بال وجهڻ ۾ جان جو اِمڪان $\frac{4}{5}$ ، واسم جو 0.83 ۽ آڪاش جو 58% آهي ته اِنهن مان سڀ کان وڏيڪ اِمڪان ڪنهن جو آهي؟

.3 هڪ هاڪي ٽيم ۾ 6 بچاءُ ڪندڙ، 4 حملو ڪندڙ ۽ 1 گول ڪيپر آهي اَٽڪل تجربي ۾ هڪ ڪئپٽين چونڊٽو آهي ته اِمڪان لکو. (1) گول ڪيپر ڪيپٽين آهي (2) بچاؤُ ڪندڙ رانديگر ڪيپٽين آهي.

.4 جوسف ٽوپيءَ ۾ 26 ڪارڊ، هرهڪ تي انگريزيءَ جو هڪ اکر وارو ڪارڊ رکيو اِن مان سيوَر (vowel) واري ڪارڊ جو اِمڪان لکو.

.5 ڦوڪڻي واري وٽ 2 ڳاڙها، 3 نيرا ۽ 4 ساوا اِنهن رنگن جا ڦوڪڻا آهن. هڪ ڦوڪڻو پرٽاليءَ ڪي ڏيئي تو گهٽنائن جو اِمڪان لکو.

(1) حاصل ٿيل قڪوڻو ڳاڙهو هئڻ

(2) حاصل ٿيل ڦوڪڻو نيرو هئڻ

(3) حاصل ٿيڻ ڦوڪڻو ساٺو هئڻ.

6. هڪ باڪس ۾ 5 ڳاڙهي رنگ، 8 نيري رنگ ۽ 3 سائي رنگ جون پينيون آهن اَٽڪل واري تجربي ۾ ريتا کي هڪ ٻين ڪيڏي نيري رنگ واري ڪيڏي آهي ته اِن گهٽنا جو اِمڪان لهو.

7. هڪ ڊاري ۾ ڇهن مٿاچڙا هيٺ ڏنل نموني موجب آهن.

A	B	C	D	E	A

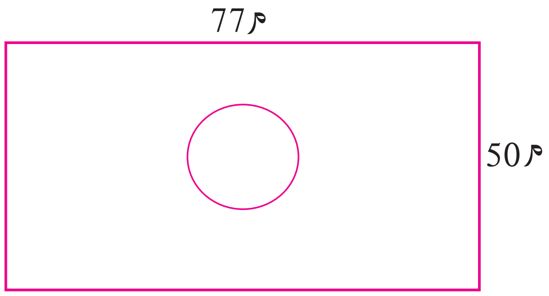
هڪ دفعو ڊارو اُڇلائڻ سان هيٺ گهٽنائن جو اِمڪان لهو.

(1) مٿئين مٿاچڙي تي ‘A’ هئڻ (2) مٿئين مٿاچڙي تي D هئڻ

8. هڪ ڪوکي ۾ 1 کان 30 لکيل اَهڙيون 30 ٽڪيٽون آهن.

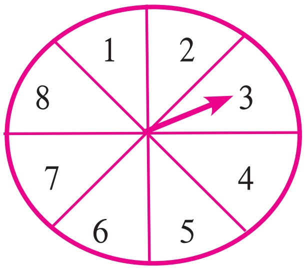
هيٺ ڏنل گهٽنائن جو اِمڪان لهو

(1) ٽڪيٽ جو عدد اِڪي آهي (2) ٽڪيٽ تي عدد پورڻ ٻي سگهه آهي.



9 هڪ مستطيل باغ جي ڊيگهه ۽ ويڪر نمبروار 77 م ۽ 50 م آهي باغ ۾ 14 م قطر وارو تلاءُ آهي باغ جي پرسان هڪ عمارت مان هڪ ٽوال باغ ۾ اَچي ڪريو ته باغ ۾ تلاءُ ۾ اُن جي ڪرڻ جو اِمڪان لهو.

10. چٽاپيٽي راند ۾ 8,7,6,5,4,3,2,1 اِنهن مان هڪ اَنگ تي تير هٽڻو آهي هيٺ ڏنل گهٽنائن جو اِمڪان لهو



(1) اِهو تير 8 اَنگ تي پوي ٿو

(2) اِهو پنڙ اِڪي انگ تي پوي ٿو

(3) تير 2 کان وڏي اَنگ تي پوي ٿو.

(4) تير 9 کان گهٽ اَنگ تي پوي ٿو.

11. هڪ ڪارڊ تي ۾ 0 کان 5 تائين اَنگ لکيل 6 ڪارڊ آهن ته هيٺ ڏنل گهٽنائن جو اِمڪان لهو.

(i) ڪڍيل ڪارڊ تي قدرتي عدد آهي.

(ii) ڪڍيل ڪارڊ تي 1 کان گهٽ عدد آهي.

(iii) ڪڍيل ڪارڊ تي سچو عدد آهي.

(iv) ڪڍيل ڪارڊ تي 5 کان گهٽ عدد آهي

12. هڪ ٿيلهي ۾ 3 ڳاڙها ، 3 اَڇا ۽ 2 سائي رنگ جا بال آهن. 1 بال ڪيڍڻ لاءِ گهٽنائن جو اِمڪان لهو.

(1) ڪيڍيل بال ڳاڙهي رنگ جو آهي

(2) ڪيڍيل بال ڳاڙهي رنگ جو نہ آهي

(3) ڪيڍيل بال ڳاڙهو يا اڇو آهي.

13. هرهڪ ڪارڊ تي Mathematics اِن لفظ جا سڀ اَکر ڪٽي ڪارڊ تيار ڪيا ويا ۽ اُهي اُبتا رکيا ويا تہ اُن مان 'm' اَکر واري ڪارڊ ڪيڍڻ جو اِمڪان لهو.

14. هڪ اِسڪول ۾ 200 شاگردن مان 135 شاگردن کي ڪبڊي راند پسند آهي باقي ٻين ٻارن کي اِها راند پسند نہ آهي. سيني ٻارن مان هڪ شاگرد چونڊڻ ۾ راند کي نہ پسند ڪرڻ اِمڪان لهو.

★15. 4,3,2,1,0 اِهي اَنگہ بنا دهرائڻ جي ٻن اَنگن جا عدد تيار ڪرڻا آهن تہ هيٺ ڏنل گهٽنائن جو اِمڪان لهو.

(i) اُهو عدد مفرد آهي

(ii) اِهو عدد 4 جو ضربجندڙ آهي.

(iii) اِهو عدد 11 جو ضربجندڙ آهي.

★16. هڪ ڏاري تي متاڇڙن تي 5,4,3,2,1,0 اِهي اَنگہ آهن اِهو ڏارو ٻہ دفعا اُڇلائڻ سان متين متاڇڙن تي ملندڙ انگن جو ضرب اُپٽ ٻڙي اَچي، اِن گهٽنا جو اِمڪان لهو.

17. هيٺيون مشغوليون ڪريو.

مشغولي : I توهانجي ڪلاس جو ڪُل تعداد n(S) = [ ]

ڪلاس ۾ عينڪ وارا ٻار n(A) = [ ]

سيني ٻارن مان هڪ عينڪ وارو ٻار اٽڪل وارو تجربي ذريعي ڳولهڻ جو اَمڪان P(A) = [ ]

سيني ٻارن ۾ عينڪ واپرائڻ وارو هڪ ٻار اٽڪل واري تجربي ذريعي ڳولهڻ جو اَمڪان n(S) = [ ]

مشغولي II جنس اَوڪاش مقرر ڪري هينيان چؤڪٽ پريو.

جنس اوڪاش	گهٽنا A لاءِ برابر عدد ملڻ ضروري
↓	↓
S = { }	A = { }
↓	↓
n(S) = [ ]	n(A) = [ ]

$P(A) = \frac{[\ ]}{[\ ]} = [\ ]$

6 عدد شاستر

اڇو تہ سکي وٺون

- مرڪزي رُخ جون ماپون - گروهيل جهجهائي ڇڄري ۾ سراسري، وچون عدد، ڇڄري جو ڍنگ
- عددي چاڙ جو شڪل وسيلي پيشڪش - هستوگرام، جهجهائي گهٽڪندو، گول گراف (پاءِ ڊائگرام)

انسان جي زندگيءَ ۾ عدد شاستر جو انيڪ ڪيترن ۾ اُپيوگ آهي مثال ڪيتي، آرٽ شاستر، واپار، ميڊيڪل، علم نباتات، علم حيات - تڪنيڪ، علم ڪيميا، عام سڪيا، سماج وگيان، بندوبست وغيره هڪ تجربي مان ڪيترائي نتيجا ممڪن آهن جڏهن اُنهن جو اِمڪان جاچڻو آهي، اُن وقت وڏي پيماني تي تجربو ڪري سڀ چاڙ سٺي نموني درج ڪبي آهي. اِن درج جو اِستعمال ڪري جدا جدا نتيجا جاچيا وڃن ٿا. اِن ڪري عدد شاستر ۾ ڪجهہ عددي نيم ٺاهيا ويا آهن.

فرانسز گالٽن

فرانسز گالٽن (1822-1911) برٽش سائنسدان عدد شاستر ۾ بنيادي ڪم ڪيو. هو سوال تيار ڪري عام ماڻهن ۾ ورهائيندو هو ۽ سوالن جا جواب پرڻ لاءِ عرض ڪندو هو. آهڙي ريت چاڙ حاصل ڪري، اُنهن ماڻهن جي اَڳہ حالت، آرٿڪ دشا، بيماريون، تندرستي وغيره جي چاڙ نوٽ ڪندو هو. گالٽن ڪيترن ئي ماڻهن جي آڱرين جا نشان حاصل ڪري اُنهن جو ورگيڪرڻ ڪرڻ جو بنياد وڌو.

اِهو ڏيکاريو تہ ڪن بہ ٻن ماڻهن جي آڱرين جا نشان ساڳيا نہ هوندا آهن. آڱرين جي نشانن سان ماڻهوءَ جي سڃاڻپ ممڪن ٿي. ڏوهاري ڪندڙن کي سڃاڻڻ ۾ اِهو طريقو ڪورٽن ۾ پڻ منظور ٿيل آهي. اِنسان ۽ جانورن جي آدِ-شاستر ۾ هن خوب ڪم ڪيو

ڄاڻي وٺون

سروي مان حاصل ٿيل عددي چاڙ مان هڪ خاصيت تہ ظاهر آهي تہ سڀ مليل ڪٿون ڪنهن خاص ڪٿ چوگرد يا اُن جي آسپاس مرڪزي ٿيڻ جو ڍنگہ اِها خاص ڪٿ سڄي گروهہ جو عيوضي عدد هوندي آهي اِن ملهہ کي مرڪزي رخ جي ماپ چئبو آهي. اَڻ گروهيل ڇڄري ۾ سراسري (Mean) وچون عدد (Median) ۽ ڍنگہ (Mode) بابت آسان سکي چڪا آهيون.

عملي ڪم 1 : توهان جي ڪلاس ۾ سيني ٻارن جي اوچائي س م ۾ درج ڪريو. اَسان کي ائين لڳندو تہ ڪيترن ئي ٻارن جي اوچائي ڪنهن خاص عدد جي چوگرد يا آسپاس مرڪزي ٿيندڙ نظر ايندي.

عملي ڪم 2 : پيپل جا هيٺ ڪريل پن جمع ڪريو هرهڪ شاگرد کي هڪ پن ڏيو هرهڪ کي پن جي ڊيگهہ ماپڻ لاءِ چئو سڀني ڄاڻ درج ڪريو. توهان ڏسندا تہ مليل عدد (ڪٽٽون) ڪنهن خاص عدد جي چوگرد يا مرڪزي هوندي.

هاڻي اَسان عددي ڄاڻ جي مرڪزي رخجون ماپون سراسري (Median) وچون عدد (Mean) ۽ ڊينگہ (Mode) بابت ڄاڻ حاصل ڪنداسين.

$$\text{عددي ڄاڻ جي سراسري} = \frac{\text{سيني ڪٽٽن جو جوڙ}}{\text{ڪل ڪٽٽون}} = \frac{\sum_{i=1} x_i}{N}$$

سراسري $\overline{X}$ وسيلي ڏيکاريل آهي اِها عددي ڄاڻ جي سراسري آهي

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N}$$

ڄاڻي وٺون

گروهيل ڇڄري مان سراسري (Mean from classified frequency distribution)

جيڪڏهن ڪٽٽن جو اَنداز وڏو هوندو آهي تہ سراسري لهڻ لاءِ مٿي ڏنل فارمولا ڪم آڻبي آهي. ڪڏهن ڪڏهن وڏي ڄاڻ گروهيل ڇڄري ۾ حاصل ٿيل هوندي آهي. اَهڙي وقت مٿي ڏنل فارمولا وسيلي سراسري نہ لهي سگهبي اِن هي هيٺ ڏنل طريقا ڪم آڻي سگهجن ٿا.

سڌو طريقو (Direct Method)

هاڻي گروهيل عددي ڄاڻ مان سراسري لهڻ جو طريقو سمجهنداسين.

مثال : هيٺ ڏنل ڇڄري ۾ هڪ ڪم پورو ڪرڻ ۾ مزورن جو جهجائي جو لڳل وقت ڏنل آهي تہ هڪ مزور جو ڪم ۾ لڳل وقت جي سراسري لهو.

هرهڪ کي ڪم پورو ڪرڻ لاءِ لڳل وقت (ڪلاڪن ۾)	15-19	20-24	25-29	30-34	35-39
مزورن جو تعداد	10	15	12	8	5

حل :

(1) چار ڪالم هوندڙ چجرو تيار ڪيو
(2) پهرين ڪالم ۾ ڪلاس وٺي ڪم ۾ لڳل وقت آهي.
(3) ٻئي ڪالم ۾ ڪلاس وچ ٽيڪو (ڪلاس نشان) x_i لکيو
(4) ٽئين ڪالم ۾ مزورن جي جهجهائي (f_i) لکيو.
(5) چوٿين ڪالم مو هرهڪ ڪلاس لاءِ $(x_i \times f_i)$ اِها ضرب اُپٽ لکي
(6) ڪم جا ڪل ڪلاڪ : $\sum_{i=1}^{N} x_i f_i$ لکي.
(7) فارمولا ڪم آڻي سراسري ڪڍي

ڪلاس وقت (ڪلاڪن ۾)	ڪلاس درج x_i	جهجهائي f_i	$x_i f_i$
15-19	17	10	170
20-24	22	15	330
25-29	27	12	324
30-34	32	8	256
35-39	37	5	185
ڪُل		$\sum f_i = 50$	$\sum x_i f_i = 1265$

$$\text{سراسري} = \bar{X} = \frac{\sum x_i f_i}{N} = \frac{1265}{50} = 25.3 \quad \because \sum f_i = N$$

هڪ مزور ڪي سراسري لڳندڙ وقت 25.3 ڪلاڪ آهي. (اٽڪل)

حل ڪيل مثال

مثال (1) هيٺ ڏنل چجري ۾ 50 شاگردن جو يونٽ آزمائش ۾ مارڪن جو سيڪڙو ڏنل آهي تہ مارڪن جي سيڪڙو جي سراسري لهو.

مارڪن جو سيڪڙو	0-20	20-40	40-60	60-80	80-100
شاگردن جو انداز	3	7	15	20	5

حل : ڏاڪن جي آڌار تي چجرو تيار ڪيو

ڪلاس (مارڪن جو سيڪڙو)	ڪلاس نشان x_i	جهجائي (شاگردن جو اَنداز) f_i	ڪلاس نشان $x_i f_i$
0-20	10	3	30
20-40	30	7	210
40-60	50	15	750
60-80	70	20	1400
80-100	90	5	450
ڪُل		$N = \sum f_i = 50$	$\sum x_i f_i = 2840$

$$\bar{X} = \frac{\sum x_i f_i}{\sum f_i} = \frac{2840}{50} = 56.8$$

$\therefore$ مارڪن جي سيڪڙو جي سراسري $= 56.8$

مثال (2) گذريل سال مهاراشٽر جي 30 جدا جدا شهرن اونهاري ۾ هڪ ڏينهن جو وڌ ۾ وڌ گرمي پد C° هيٺ ڄاڻايل چجري ۾ ڏنل آهي. ته اُن گرمي پد جي سراسري لهو.

وڌ ۾ وڌ گرمي	24-28	28-32	32-36	36-40	40-44
شهرن جو تعداد	4	5	7	8	6

حل :

ڪلاس (گرمي پدC°)	ڪلاس نشان x_i	جهجهائي f_i	ڪلاس × ڪلاس نشان $x_i f_i$
24-28	26	4	104
28-32	30	5	150
32-36	34	7	238
36-40	38	8	304
40-44	42	6	252
ڪُل		$N = \sum f_i = 30$	$\sum x_i f_i = 1048$

سراسري = $\overline{X} = \dfrac{\sum x_i f_i}{\sum f_i} = \dfrac{1048}{30} = 34.9\,^\circ C$

مچيل سراسري طريقو (Assumed Mean Method)

متي حل ڪيل مثالن ۾ ڪڏهن ڪڏهن $x_i f_i$ اِها ضرب اُپت تمام وڏي ٿئي ٿي. اِنڪري سڌي طريقي سراسري ڪيڏو ڪجهه اوکي ٿئي ٿي. اِن لاءِ هڪ طريقو مچيل سراسري طريقو سمجهي وٺون. اِن طريقي ۾ سراسري لهڻ لاءِ ننڍن عددن جو جوڙي ونڊ ڪرڻ سولو آهي.

مثال : 40, 42, 43, 45, 47, 48 اِهي ڪٿنون آهن اِنهن جو سراسري لهڻي آهي.

اِن مثال کي جاچڻ سان معلوم ٿئي ٿو ته سراسري 40 کان وڌيڪ آهي. اَسان سمجهو 40 کي سراسري مچيون ٿا اِها مچيل سراسري آهي $40-40 = 0,\ 42-40 = 2,\ 43-40 = 3,\ 45-40 = 5,\ 47-40 = 7,$

$48-40 = 8$ اِهي فرق ڏسو اِنهن کي ڦيريل چئبو آهي. اِنهن فرقن جي سراسري لهي اُنهن ۾ 40 ملائبا ته اسان کي سچي ڄاڻ جي سراسري ملندي.

ڦيريلن جي سراسري + مچيل سراسري = سراسري

$$\overline{X} = 40 + \left(\frac{0+2+3+5+7+8}{6}\right) = 40 + \frac{25}{6} = 40 + 4\frac{1}{6} = 44\frac{1}{6}$$

سمجهو تہ مجيل سراسري A مجيل سراسري جا ڦيريل d ۽ ڦيريلن جي سراسري $\overline{d}$ آهي.

اِهو سوتر ڪم آڻبو $\overline{X} = A + \overline{d}$

ساڳيو مثال آسان مجيل سراسري 43ڪري ڏسون

$40 - 43 = -3,\ 42 - 43 = -1,\ 43 - 43 = 0,\ 45 - 43 = 2,\ 47 - 43 = 4,\ 48 - 43 = 5$

ڦيريلن جو جوڙ $= -3 -1 + 0 + 2 + 4 + 5 = 7$

هاڻي $\overline{X} = A + \overline{d}$

$= 43 + \left(\frac{7}{6}\right)$ (هتي ڪُل 6 ڦيريل آهن)

$= 43 + 1\frac{1}{6}$

$= 44\frac{1}{6}$

ان مان سمجهہ ۾ اَچي ٿو تہ مجيل سراسري کهڙي بہ ڪٿت ڪٿبي تہ سراسري ۾ ڪابہ تبديل نہ ايندي. هاڻي اِها گروهيل جهجهائي ۾ اِهو طريقو ڪيئن ڪم آڻبو، مثال وسيلي سمجهنداسين.

مثال : 100 ياجي وڪڻندڙ جو روز جو وڪرو هيٺ ڏنل آهي. مجيل سراسري طريقي سان روزاني وڪرو جي سراسري لهو.

روزانو وڪرو	1000−1500	1500−2000	2000−2500	2500−3000
وڪڻندڙ جو اَنداز	15	20	35	30

حل : سمجهيو $A = 2250$ مجيل A سراسري $d_i = x_i - A$

ڪلاس روزانو وڪرو (رپين ۾)	ڪلاس نشان x_i	$d_i = x_i - A$ $= x_i - 2250$	وڪڻندڙن جو اَنداز f_i	جهجهائي × ڦيريل $f_i d_i$
1000−1500	1250	−1000	15	−15000
1500−2000	1750	−500	20	−10000
2000−2500	2250→A	0	35	0
2500−3000	2750	500	30	15000
ڪُل			$N = \sum f_i = 100$	$\sum f_i d_i = -10000$

هينيان ڏاڪا ڪم آڻي چجرو تيار ڪيو.

(1) مچيل سراسري A=2250 کڻين (رواجي طرح وڏيڪ جهجهائي وارو ڪلاس نشان ڪڻڻ گهرجي)

(2) پهرين ڪالم ۾ وڪرو ڪلاس ۾ لکيو.

(3) ٻئين ڪالم ۾ ڪلاس نشانو لکيو.

(4) ٽئين ڪالم ۾ $d_i = x_i - A = x_i - 2250$ ملهه لکيو.

(5) چوٿين ڪالم ۾ هرهڪ ڪلاس جي وڪڻندڙن جو اَنداز ۽ جوڙ $\sum f_i$ لکيو

(6) پنجين ڪالم ۾ $(f_i \times d_i)$ لکيو ۽ جوڙ $\sum f_i d_i$ ڪيو

سوتر ڪم آڻي $\overline{X}$ $\overline{d}$ ڪڍي.

$$\overline{d} = \frac{\sum f_i d_i}{\sum f_i} = -\frac{10000}{100} = -100 \qquad \therefore\ \overline{X} = A + \overline{d} = 2250 - 100 = 2150$$

روزانو وڪرو سراسري 2150 ر

مشغولي : اِهو مثال سڌي طريقي حل ڪريو

حل ڪيل مثال

مثال (1) هيٺ ڏنل چجري ۾ هڪ ڪارخانيدار وٽ 50 مزورن جي روزاني پگهار جهجهائي ڏنل آهي هڪ مزور جي روزاني سراسري ڪمائي مچيل سراسري طريقي لهو.

روزانو پگهار رپين ۾	200-240	240-280	280-320	320-360	360-400
مزورن جو انداز	5	10	15	12	8

حل : سمجهو ته A = 300 مچيل سراسري :

مزورن جو اَنداز	ڪلاس نشان x_i	$d_i = x_i - A$ $d_i = x_i - 300$	ڪلاس پگهار (رپين ۾) f_i	$f_i d_i$
200-240	220	-80	5	-400
240-280	260	-40	10	-400
280-320	300→A	0	15	0
320-360	340	40	12	480
360-400	380	80	8	640
ڪُل			$\sum f_i = 50$	$\sum f_i d_i = 320$

$$\overline{d} = \frac{\sum f_i d_i}{\sum f_i} = \frac{320}{50} = 6.4$$

سراسري , $\overline{X} = A + \overline{d}$

$= 300 + 6.4$

$= 306.40$

روزانو سراسري پگهار 306.40 ر

قيرايل ڏاڪي وارو طريقو (Step deviation method)

اَسان سراسري لهڻ لاءِ سڌو طريقو ۽ مچيل سراسري طريقو اُپياس ڪيو وڌيڪ سهوليت لاءِ سراسري لهڻ لاءِ هڪ ٻيو طريقو سمجهنداسين.

- پهريائين A اِها مچيل سراسري ڪٿ ڪري d_i وارو ڪالم تيار ڪنداسين.
- سپ d_i جي اوچائي g ملندو ته $u_i = \frac{d_i}{g}$ وارو ڪالم تيار ڪنداسين.
- u_i انهن عددن جي سراسري $\overline{u}$ لهنداسين
- $\overline{X} = A + \overline{u}\, g$ اهو سوتر ڪم آڻي سراسري لهنداسين

نمونو مثال : 100 ڪُٽنبن جي صحت لاءِ اِنشورنس رقم هيٺ جهجهائي چجري ۾ ڏنل آهي. قيرايل ڏاڪي واري طريقي سالياني اِنشورنس جي سراسري لهو.

ويما رقم رپين ۾	800-1200	1200-1600	1600-2000	2000-2400	2400-2800	2800-3200
ڪٽنبن جو اَنداز	3	15	20	25	30	7

حل : سمجهو ته مچيل سراسري $A = 2200$ سيئي d_i ڏسي هتي $g = 400$

ڪلاس ويما رقم (رپيا)	ڪلاس نشان x_i	$d_i = x_i - A$ $= x_i - 2200$	$u_i = \frac{d_i}{g}$	جهجهائي ڪٽنبن جو انداز f_i	$f_i u_i$
800-1200	1000	-1200	-3	3	-9
1200-1600	1400	-800	-2	15	-30
1600-2000	1800	-400	-1	20	-20
2000-2400	2200→A	0	0	25	0
2400-2800	2600	400	1	30	30
2800-3200	3000	800	2	7	14
ڪُل				$\sum f_i = 100$	$\sum f_i u_i = -15$

مٿي ڏنل چجري هيٺ ڏاڪن تي تيار ڪيل آهي.

(1) پهرين ڪالم ۾ ويما رقم ڪلاس ۾ لکي

(2) ٻئين ڪالم ۾ ڪلاس نشان x_i لکيو.

(3) ٽئين ڪالم ۾ $d_i = x_i - A$ ملهه لکيو

(4) چوٿين ڪالم ۾ سڀ عدد 400 جا ضربجندڙ آهن اِنڪري g-400 اِن ڪالم ۾ $u_i = \frac{d_i}{g} = \frac{d_i}{400}$ جو ملهه لکيو

(5) پنجين ڪالم ۾ جهجهائي لکي.

(6) ڇهين ڪالم ۾ $f_i \times u_i$ جو ملهه لکيو.

u_i جي سراسري فارمولا ڪم آڻي ڪيڏي.

$$\overline{u} = \frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i} = \frac{-15}{100} = -0.15$$

$$\overline{X} = A + \overline{u}\, g$$

$$= 2200 + (-0.15)(400)$$

$$= 2200 + (-60.00)$$

$$= 2200 - 60 = 2140$$

ڪٽنبن جي ويما رقم جي ساليانِي سراسري 2140ر آهي.

ڌيان ڏيو : سڌي طريقي. مڃيل سراسري طريقي يا ڦيريل ڏاڪي واري طريقي ڪيڏيل سراسري ساڳي هوندي آهي.

حل ڪيل مثال

مثال (1) اِسڪول جي 50 شاگردن پوڙ راحت لاءِ ڏنل چندي جو جهجهائي ڇيڙو هيٺ ڏنل آهي.جمع ڪيل چندي جي سراسري ڦيرايل ڏاڪو طريقو ڪم آڻي لهو.

چندو (روپيا)	0-500	500-1000	1000-1500	1500-2000	2000-2500	2500-3000
شاگرد	2	4	24	18	1	1

پڇاڙيءَ وارن ڪلاسن ۾ ڪٿون تمام گهٽ هجڻ ڪري اُهي ٻئي ملائي هڪ ڪلاس ڪرڻ سولو ٿيندو 0-500 ۽ 500-1000 جو هڪ ڪلاس ۽ 2500 - 2000 ۽ 3000-2500 جو هڪ ڪلاس ڪيو.

چندو رقم (رپين ۾)	0-1000	1000-1500	1500-2000	2000-3000
شاگرد	6	24	18	2

حل : سمجهو تہ A=1250 سڀ d_i جاچي g=250 کنيو.

ڪلاس چندو رقمون رپين ۾	ڪلاس نشان x_i	$d_i = x_i - A$ $= x_i - 1250$	$u_i = \frac{d_i}{g}$	جهجهائي f_i	$f_i u_i$
0-1000	500	-750	-3	6	-18
1000-1500	1250→A	0	0	24	0
1500 - 2000	1750	500	2	18	36
2000-3000	2500	1250	5	2	10
				$\sum f_i = 50$	$\sum f_i u_i = 28$

$$\overline{u} = \frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i} = \frac{28}{50} = 0.56,$$

$$\overline{u}\, g = 0.56 \times 250 = 140$$

$$\overline{X} = A + g\overline{u} = 1250 + 140 = 1390$$

∴ ڪٺو ڪيل چندو سراسري 1390 رپيا آهي

مشغولي -

1. اِهو مثال سڌي طريقي حل ڪريو.

2. متين مثال ۾ ڪڍيل سراسري مجيل سراسري طريقي لهي جاچ ڪريو.

3. A=1750 ڪٺي متيون مثال حل ڪريو.

اَڀياس 6.1

1.ڏهين درجي جي 50 شاگردن جو روزانو اَڀياس ڪرڻ ۾ گذاريل ڪلاڪ ۽ شاگردن جو تعداد جو جهجهائي ڇڇرو ڏنل آهي ڪلاڪن جي سراسري سڌي طريقي لهو.

وقت (ڪلاڪن ۾)	0-2	2-4	4-6	6-8	8-10
شاگرد	7	18	12	10	3

2. هڪ هاءِ وي ٽول ناڪي تي صبوح جو 6 ڪان شام جو 6 تائين جمع ٿيل ٽئڪس ۽ واهڻن جو انداز هيٺ جهجهائي ڇڇري ۾ ڏنل آهي مٽيل سراسري طريقي جمع ٽئڪس جي سراسري لهو.

جمع ٽئڪس(رپيا)	300-400	400-500	500-600	600-700	700-800
واهن انداز	80	110	120	70	40

3. هڪ کير وڪرو ڪندڙ مرڪز تان 50 گراهڪن ۾ ورهايل کير (ليٽرن ۾) اِن جو جهجهائي ڇڇرو هيٺ ڏنل آهي ته کير جو ليٽرن ۾ سڌي طريقي سراسري لهو.

کير ورهاست (ليٽرن ۾)	1-2	2-3	3-4	4-5	5-6
گراهڪ-انداز	17	13	10	7	3

4. باغ مالڪن ۽ نارنگين جي پيدائش جو جهجهائي ڇڇري مان مٽيل سراسري طريقو ڪم آڻي سراسري لهو.

اُتپادن (هزار رپين ۾)	25-30	30-35	35-40	40-45	45-50
باغ مالڪ اَنداز	20	25	15	10	10

5. هڪ ڪمپنيءَ ۾ 120 ڪم ڪندڙن ڏڪار لاءِ رقم جمع ڪئي اِن جي سراسري ڦيربل ڏاڪي طريقي لهو.

جمع رقم	0-500	500-1000	1000-1500	1500-2000	2000-2500
ڪم ڪندڙ	35	28	32	15	10

6. هڪ ڪارخاني ۾ 150 مزورن جي هفتيوار پگهار جي جهجهائي ڇڇري مان ڦيريل ڏاڪي وارو طريقو ڪم آڻي سراسري لهو.

هفتيوار پگهار	1000-2000	2000-3000	3000-4000	4000-5000
مزور اَنداز	25	45	50	30

ذرا ياد ڪريو

وگيان نماوُ لاءِ پاڳه وٺڻ لاءِ هڪ اِسڪول مان 4 شاگرد، ٻه ڇوڪرا ۽ ٻه ڇوڪريون ٻن ڏينهن لاءِ ٻئي شهر ڀرويا. رات جو روٽي ڪٽي ڪائڇي ڪم واري جڳهه کان هڪ ڪلوميٽر اَندر 10 هوٽلون هيون. اِنهن هوٽلن جو اگهه وڌندڙ سلسلي ۾ ڏنل آهي.

40, 45, 60, 65, 70, 80, 90, 100 ۽ 500

انهن اَگهن جي سراسري $\frac{1130}{10} = 113$ ر

500 ر اَگهه کي ڇڏي باقي اگهه 113 ر کان گهٽ هئا اِنڪري شاگردن وچون عدد سوچيو پهرين ڏينهن 70 ر ۽ ٻئي ڏينهن 80 ر اَگهه واري روٽي کاڌي گهٽيئي دفعا سراسري بدران وچون عدد واپرائبو آهي.

گذريل سال توهان اَڻ گروهيل ڄاڻ مان وچون عدد (Madian) ڪيئن ڪڍڻ سکيا آهي.

- ڏنل ڪٽئن کي وڌندڙ يا گهٽجندڙ سلسلي ۾ رکي وچ واري ڪٽ کي وچون عدد چئبو آهي.
- وچون عددن ڪٽئن کي برابر ٻن حصن ۾ ورهائي ٿو.
- ڏنل ڪٽئون $_1 \le k_2 \le k_3 . . . . . \le k_n$
- ڪٽئن جو عدد اِڪي هوندو ته $\frac{n+1}{2}$ اِهو وچون عدد ٿيندو جو ته $k_{\frac{n+1}{2}}$ کان اَڳه $\frac{n-1}{2}$ ۽ پوءِ $\frac{n-1}{2}$ ايتريون ڪٽئون هونديون. $n = 2m + 1$ ڪٽي ڄاڇيو
- مليل ڪٽئون n اِهو ٻڌي اَنگه آهي ته وچواريون ٻه ڪٽئون ڪٽي اُنجي سراسري وچون عدد ٿيندو ڄاڪاڻ ته $k_{\frac{n}{2}}$ کان اڳه ۽ پوءِ $k_{\frac{n+2}{2}}$ ايتريون ڪٽئون هونديون $n = 2m$ ڪٽي ڄاڇيو.
- مطلب $\frac{n}{2}$ يا $\frac{n+2}{2}$ اِنهن جي سراسري وچون عدد ٿيندو.

مثال (1) 32, 33, 38, 40, 43, 48, 50 ڪٽئن جو وچون عدد لهو اِنهن ڪٽئن ۾ 40 وچون عدد آهي.

مثال (2) 61, 62, 65, 66, 68, 70, 74, 75 ۾ ڪل ڪٽئون 8 يعني ٻڌي اَنگه آهن وچ وارا عدد66 ۽ 68 آهن اِنڪري وچون عدد $\frac{66+68}{2} = 67$ آهي.

چاڙئي وٽون

گروهيل جهجهائي ورهاست جو وچون عدد (Median from classified frequency distribution)

ڪٽئون تمام گھٽيون هجن تہ اُنهن کي گروهن ۾ ورهائي وچون عدد لهبو. اَسان گورهيل جهجهائي ورهاست جو وچون عدد لهڻ سکنداسين.

مثال 6, 8, 10.4, 11, 15.5, 12, 18 اِنهن جو وچون عدد لهو.

جهجهائي	ليڪا نشان	ڪلاس
3	III	5.5-10.5
2	II	10.5-15.5
2	II	15.5-20.5

جهجهائي	ليڪا نشان	ڪلاس
2	II	6-10
2	II	11-15
1	I	16-20

پهرين ڇڄري ۾ 10.4 ۽ 15.5 اِهي بہ ڪٽئون شامل نہ ڪيل آهن ڇو تہ اِهي 20-16 ,15-11 ,10-6 عدد ڪنهن بہ ڪلاس ۾ نمائي نہ ٿيون سگھجن

اَسان کي ڪلاس لاڳيتا ڏاهڻ جي چاڙ آهي

. اِن ڇڄري ۾ هيٺئين حد (Lower Limit) مان 0.5 ڪٽ ڪري ۽ مٿئين حد (Upper Limit) ۾ 0.5 جوڙ ڪري

ٻيو ڇڄرو تيار ڪيو.

اِن ۾ 15.5 اِها ڪٽ 15.5-20.5 ڪلاس ۾ شامل آهي. لاڳيتا ڪلاس بدلجڻ سان جهجهائي بہ بدلجي ٿي.

اِهو ڌيان ۾ رکو

مٿئين ڇڄري ۾ 6-10 ڪلاس ۾ ڪلاس نشان = $8 = \frac{16}{2} = \frac{6+10}{2}$ ؛

ساڳئي نموني 5.5-10.5 اِن جو ڪلاس نشان = $8. = \frac{16}{2} = \frac{5.5+10.5}{2}$

مطلب ڪلاس جي رچنا بدلائڻ سان ڪلاس - نشان نہ بدلجندو آهي اِهو ڌيان ۾ رکو.

نمونو مثال

درجي ڏهين جي اَيپاس اِمتحان ۾ 100 شاگردن جي مارڪن جو جهجهائي ڇڄرو هيٺ ڏنل آهي مارڪن جو وچون عدد لهو.

اِمتحان ۾ ڪنيل مارڪون	0-20	20-40	40-60	60-80	80-100
شاگردن جو تعداد	4	20	30	40	6

حل : $N = 100$

$\frac{N}{2} = 50$ مطلب 50 اهو وچون عدد آهي اِنڪري اِهو عدد ڪهڙي ڪلاس ۾ اَچي ٿو، اِهو ڳولهڻو آهي اِنڪري مٿين حد کان گهٽ گڏيل جهجهائي ڪٽڻي پوندي اِنڪري چجري ۾ گڏيل جهجهائي (کان گهٽ) جو ڪالم تيار ڪرڻو پوندو.

گڏيل جهجهائي کان گهٽ cf	شاگرد جو اَنداز fi	مارڪون ڪلاس
4	4	0–20
24	20	20–40
54	30	40–60
94	40	60–80
100	6	80–100

اِن چجري ۾

- $\frac{N}{2} = 50$ اهو عدد 40-60 ڪلاس ۾ آهي. جنهن ڪلاس ۾وچون عدد هوندو آهي اُن کي مڌيڪ ڪلاس چئبو آهي. اِتي سڌيڪ ڪلاس (Median Class) 40-60 آهي.
- 40-60 ڪلاس ۾ هيٺين حد 40 ۽ اُنجي جهجهائي 30 آهي
- اِن ڪلاس کان اڳ 24 ڪٽڻون 40 کان گهٽ آهي. 50 تائين بچيل 26=50-24 ڪٽڻون (40-60) اِن ڪلاس ۾ آهن. اِنڪري. 50 جي ڪٽڻ جو اَنداز هيٺين نموني لهندا سين.
- اِن ڪلاس ۾ ڪل 30 مان 26 ڪٽڻون 50 کان وڌيڪ ۽ پوءِ 20 ڪٽڻون آهن مطلب 50 اِها ڪٽڻ 40 جي ڀيٽ ۾ $20 \times \frac{26}{30}$ اوڻ آهي.

انڪري $40 + \frac{26}{30} \times 20 = 40 + \frac{52}{3} = 57\frac{1}{3}$

$\therefore$ وچون عدد $= 57\frac{1}{3}$

• سوتر روپ ۾ آسان هيٺين نموني لکندا

$$\text{وچون عدد} = L + \left[\frac{\frac{N}{2} - cf}{f}\right] \times h$$

ڪل جهجهائي = N　　　　مڊيڪ ڪلاس جي هيٺين حد = L

مڊيڪ ڪلاس جي جهجهائي = f　　　　ڪلاس وٿي = h

مڊيڪ ڪلاس کان اڳ ڪلاس جي گڏيل جهجهائي = cf

مٿئين مثال ۾ $\frac{N}{2} = 50,\ cf = 24,\ h = 20, f = 30,\ L = 40,$

$$\text{سوتر} \ldots\ldots\ \ L + \left[\frac{\frac{N}{2} - cf}{f}\right] \times h = \text{وچون عدد}$$

$$= 40 + \left(\frac{50 - 24}{30}\right) \times 20$$

$$= 40 + \frac{26 \times 20}{30}$$

$$= 40 + 17\frac{1}{3}$$

$$= 57\frac{1}{3}$$

اِهو ڌيان ۾ رکو

- وچون عدد لهڻ لاءِ لاڳيتا ڪلاس هئڻ گهرجن
- ڪٿن جو انداز وڏو هئڻ ڪري ڪلاس ٺاهي چجرو تيار ڪرڻ گهرجي وچون عدد لهڻ لاءِ هيٺ ڏنل سوتر ڪم آڻجي

$$\text{وچون عدد} = L + \left[\frac{\frac{N}{2} - cf}{f}\right] \times h$$

حل ڪيل مثال

مثال (1) عام پبلڪ سيوا ۾ 60 بسين جو هڪ ڏينهن ۾ ڪيل مفاصلي جو جهجهائي چجرو ڏنل آهي. هڪ ڏينهن ڪيل مفاصلي جو وچون عدد لهو.

مفاصلو (ڪ.م)	200−209	210−219	220−229	230−239	240−249
بسين جو اَندازو	4	14	26	10	6

حل (1) ڪلاس لاڳيتا نہ آهن. اِنڪري آهي لاڳيتا ڪرڻا پوندا.

هتي هڪ ڪلاس جي مٿين حد ۽ ٻئي ڪلاس جي هيٺين حد ۾ فرق آهي 2÷1=0.5 اهو ملهہ هرهڪ ڪلاس ۾ مٿين حد مان ڪٽ ڪرڻ ۽ مٿين حد جو جوڙ ڪرڻ سان لاڳيتا ڪلاس تيار ڪيا.

پوءِ ڪان گهٽ واري گڏيل جهجهائي ڪالم تيار ڪبو.

ڏنل ڪلاس	لاڳيتا ڪلاس	جهجهائي f_i	گڏيل جهجهائي (ڪان گهٽ)
200−209	199.5−209.5	4	4
210−219	209.5−219.5	14	18 $\rightarrow$ cf
220−229	219.5−229.5	26 $\rightarrow f$	44
230−239	229.5−239.5	10	54
240−249	239.5−249.5	6	60

هتي ڪل جهجهائي $\Sigma f_i = N = 60 \therefore \frac{N}{2} = 30. \therefore$ اِهو وچون عدد 30 ڪٽٽ آهي.

پهريائين 18 ڪٽنون 219.5 ڪان گهٽ ۽ بچيل 12=30-18 اِهي ڪٽنون 219.5-229.5 ڪلاس ۾ آهن. اِنڪري اِهو مذيڪ ڪلاس آهي.

219.5-229.5 اِن ڪلاس جي گڏيل جهجهائي 44 آهي.

سوتر موجب

$L = 219.5,$ مذيڪ ڪلاس جي هيٺين حد، ڪلاس وٿي $h = 10$

cf گڏيل جهجهائي ڪلاس جي اڳيان ڪلاس جي مذيڪ $= 18,$

f مذيڪ ڪلاس جي جهجهائي $= 26$

$$\text{وچون عدد} = L + \left[\frac{\frac{N}{2} - cf}{f}\right] \times h$$

$$\therefore \text{وچون عدد} = 219.5 + \left(\frac{30-18}{26}\right) \times 10$$

$$= 219.5 + \left(\frac{12 \times 10}{26}\right)$$

$$= 219.50 + 4.62$$

$$= 224.12$$

بس جو هڪ ڏينهن مفاصلي جو وچون عدد 224.12 = ڪ م

مثال (2) هيٺ ڇڄري ۾ هڪ ڏينهن ميوزم ۾ ويل ماڻهن جي ڪمر ڏنل آهي. ماڻهن جي عمر جو وچون ڳڻپ ڪريو لهو.

عمر (سال)	ماڻهن جو اَنداز
10 کان گهٽ	3
20 کان گهٽ	10
30 کان گهٽ	22
40 کان گهٽ	40
50 کان گهٽ	54
60 کان گهٽ	71

حل : هتي گڏيل جهجهائي (کان گهٽ) ڏنل آهي. سڀ کان پهريائين ڪلاس ناهڻا پوندا اَسان کي ڄاڻ آهي ته گڏيل جهجهائي (کان گهٽ) اِها ڪلاس جي مٿين ڪلاسن تي آڌارت آهي. پهرين ڪلاس جي مٿين حد 0 آهي. اِنڪري پهريون ڪلاس 0-10 ٿيندو ٻئين ڪلاس جي مٿين حد 20 آهي. اِنڪري ٻيو ڪلاس 10-20 ٿيندو اَهڙي نموني 10 جو فرق ڪٽي ڪلاس تيار ڪبا آخرين ڪلاس 50-60 ٿيندو .

عمر (سال)	ڪلاس	ماڻهن جو انداز	گڏيل جهجهائي (کان گهٽ)
10 کان گهٽ	0−10	3	3
20 کان گهٽ	10−20	10 − 3 = 7	10
30 کان گهٽ	20−30	22 − 10 = 12	$22 \rightarrow cf$
40 کان گهٽ	30−40	$40 - 22 = 18 \rightarrow f$	40
50 کان گهٽ	40−50	54 − 40 = 14	54
60 کان گهٽ	50−60	71 − 54 = 17	71

هتي $\frac{N}{2} = 35.5 \therefore N = 71$ ۽ $h = 10$

انڪري 22 آهي جهجهائي $cf = 22, L = 30, f = 18.$

$$\text{وچون عدد} = L + \left[\frac{\frac{N}{2} - cf}{f}\right] \times h$$

$$= 30 + (35.5-22) \frac{10}{18}$$

$$= 30 + (13.5) \frac{10}{18}$$

$$= 30 + 7.5$$

$$= 37.5$$

∴ ماڻهن جي عمرن جو وچون عدد = 37.5 سال

اَڀياس 6.2

1. هيٺ ڄڇري ۾ هڪ سافٽ ويئر ڪمپني جي روزاني ڪمن جا ڪلاڪ ۽ اُهي ڪلاڪ عمر ڪندڙن جو اَنداز ڏنل آهي. روزاني ڪلاڪن جو وچون ٿيڪو لهو.

ڪم (ڪلاڪن ۾)	8-10	10-12	12-14	14-16
ڪم ڪندڙن جو اَنداز	150	500	300	50

2. هڪ باغ ۾ اَنبن جا وڻ ۽ اَنبن جو اَنداز جهجهائي ڄڇري ۾ ڏنل آهي ته مليل ڄاڻ جو وچون عدد لهو.

اَنبن جو اَنداز	50-100	100-150	150-200	200-250	250-300
وڻن جو اَنداز	33	30	90	80	17

3. ممبئي - پڻي تيز هاءِ وي (E-way) تي واهڻن تي ضابطو ڪرڻ لاءِ پوليس طرفان سروي ڪئي ويئي اِن سروي موجب هيٺين ڄاڻ حاصل ٿي. اِن ڄاڻ جو وچون ٿيڪو لهو.

رفتار ڪم	60-64	65-69	70-74	75-79	80- 84	85-89
ڪلاڪ واهڻن جو اَنداز	10	34	55	85	10	6

4. جدا جدا ڪارخانن ۾ ڏيئن جو اُتپادن (هزارن ۾) ڏنل آهي اُتپادن جو وچون ٽيڪو لهو.

ڏيئا (هزارن ۾)	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90	90-100
ڪارخانا	12	35	20	15	8	7	8

چاڻي وٺو

گروهيل جهجهائي ورهاست مان ڍنگ (Mode from classified frequency distribution)

ڏنل ڪٿتن مان وڏيڪ وڏيڪ دفعا اَچڻ واري ڪٿت مطلب اُن گروهہ جو ڍنگ (Mode) هوندو آهي اِها اَسان کي ڄاڻ آهي. مثال ہِ ڦيتي اُتپادڪ ڪمپني جدا جدا رنگن جو گاڏيون تيار ڪري ٿي. ڪهڙي رنگہ جي وڏيڪ ٻمانڊ آهي، اِهو ڄاڻڻ ڪمپنيءَ لاءِ ضروري آهي. اَهڙي نموني جدا جدا شين جي لاءِ اُتپادن ڪندڙن کي جنهن شيءِ جو واهپو يا گهرج وڏيڪ آهي، اُها وڏيڪ ٺاهڻي پوندي اِن وڏيڪ واري ڪٿت کي ڍنگہ چئبو آهي.

اَسان اَڻ گروهيل جهجهائيءَ مان ڍنگہ ڪيڍڻ سکيا آهيون هاڻي اَسان گروهيل جهجهائي ورهاست مان ڍنگيڍ ڪيئن لهجي، اُهو فارمولا ڪم آڻي سکنداسين.

$$\text{ڍنگہ} = L + \left[\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right] \times h$$

سوتر ۾

ڍنگہ ڪلاس جي هيٺين حد $= L$, ڍنگہ سوتر ۾

$f_1 =$ ڍنگہ ڪلاس جي جهجهائي

$f_0 =$ ڍنگہ ڪلاس جي مٿئين ڪلاس جي جهجهائي

$f_2 =$ ڍنگہ ڪلاس جي هيٺين ڪلاس جي جهجهائي

$h =$ ڪلاس جي وٿي.

هن سوتر جو اِستعمال ڪري اندازي ڍنگہ هن مثال مان سکنداسين.

حل ڪيل مثال

مثال (1) هيٺ ڄڻڄڻائي ورهاست ۾ ميدان تي راند ڪندڙن ۾ اُنهن جي عمر گروهه ڏنل آهي ته راند ڪندڙ ٻارن جي عمر ڊنگر لهو.

عمر (سالن ۾)	6-8	8-10	10-12	12-14	14-16
ٻارن جو اَنداز	43	$58 \rightarrow f_0$	$70 \rightarrow f_1$	$42 \rightarrow f_2$	27

متئين چجري ۾ 10-12 عمر گروهه ۾ شاگردن جو اَنداز وڌ ۾ وڌ آهي.

حل : هتي $f_1 = 70$ مطلب 10-12 اِهو ڊنگر ڪلاس آهي.

$\therefore$ ڏنل مثال ۾

L = ڊنگر ڪلاس جي هيٺين حد = 10

h = ڪلاس وٿي = 2

f_1 = ڊنگر ڪلاس جي ڄڻڄڻائي = 70

f_0 = ڊنگر ڪلاس اڳ ڪلاس ڄڻڄڻائي = 58

f_2 = ڊنگر ڪلاس پوءِ ڪلاس ڄڻڄڻائي = 42

$$\text{ڊنگر} = L+\left[\frac{f_1-f_0}{2f_1-f_0-f_2}\right]\times h$$

$$= 10 + \left[\frac{70-58}{2(70)-58-42}\right]\times 2$$

$$= 10 + \left[\frac{12}{140-100}\right]\times 2$$

$$= 10 + \left[\frac{12}{40}\right]\times 2$$

$$= 10 + \frac{24}{40}$$

$$= 10 + 0.6$$

$$= 10.6$$

$\therefore$ راند ڪندڙ ٻارن جي عمر جو ڊنگر = 10.6 سال

مثال (2) هيٺ جهجهائي ورهاست ڇجري ۾ هڪ پيٽرول پمپ تي پيٽرول پرڻ لاءِ واهڻن جو تعداد ۽ پيٽرول جي چارٽ ڏنل آهي. پيٽرول جي گنجايش جو ڊنگه لهو.

پيٽرول (ليٽر)	1-3	4-6	7-9	10-12	13-15
واهڻن جو تعداد	33	40	27	18	12

حل : ڪلاس لاڳيتا نه آهن اِنڪري پهريان ڪلاس لاڳيتا ڪرڻا پوندا اَهڙي نموني ڇجرو تيار ڪنداسين.

ڪلاس	حقيقي حد	جهجهائي
1-3	0.5-3.5	$33 \rightarrow f_0$
4-6	3.5-6.5	$40 \rightarrow f_1$
7-9	6.5-9.5	$27 \rightarrow f_2$
10-12	9.5-12.5	18
13-15	12.5-15.5	12

هتي f_1 = ڊنگه ڪلاس = 40، ڊنگه 3.5-6.5

ڊنگه $= L + \left[\frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2}\right] \times h$

ڊنگه $= 3.5 + \left[\frac{40-33}{2(40)-33-27}\right] \times h$

$= 3.5 + \left[\frac{7}{80-60}\right] \times 3$

$= 3.5 + \frac{21}{20}$

$= 3.5 + 1.05$

$= 4.55$

∴ واهڻن ۾ پيل پيٽرول جي گنجائش جو ڊنگه = 4.55 ليٽر

اڀياس 6.3

1. هڪ کير گڏ ڪندڙ مرڪز تي گڏيل ڪيل ڳاڻ جو کير ۾ لئڪٽوهٽر وسيلي ماپيل ملائي هيٺ ڏنل چڄري ۾ ڏنل آهي ملائيءَ جو ڏينگر لهو.

ملائي (%)	2-3	3-4	4-5	5-6	6-7
کير ليٽرن ۾	30	70	80	60	20

2. ڪن ڪٽنبن جو ماهوار بجلي واهپو هٽ چڄري ۾ ڏنل آهي. بجلي واهپو جو ڏينگر لهو.

بجلي (يونٽ)	0-20	20-40	40-60	60-80	80-100	100-120
ڪٽنب	13	50	70	100	80	17

3. ڇانهن جي 100 هوٽلن ۾ کير ۾ هوٽلن جو تعداد هيٺ ڏنل آهي کير جو ڏينگر لهو.

کير ليٽر	1-3	3-5	5-7	7-9	9-11	11-13
هوٽلون	7	5	15	20	35	18

4. هيٺ جهجهائي چڄري ۾ 200 مريضن جي عمر ۾ علاج ڪرائيندڙن جي عمر ڏنل آهي. عمر جو ڏينگر لهو.

عمر (سال)	5 کان گهٽ	5-9	10-14	15-19	20-24	25-29
مريض ڪان ڪٽڻ	38	32	50	36	24	20

مشغولي :-

- پنهنجي ڪلاس ۾ 20 شاگردن جي وزن جي سراسري لهو.
- ڪلاس ۾ ڇوڪرن جي شرٽ جي ماپ جو ڏينگر لهو.
- هرهڪ شاگرد جو هڪ منٽ ۾ دل جي دڙڪن ماپي، اُن ماپ جو ڏينگر لهو.
- ڪلاس ۾ هرهڪ شاگرد جي اوچائي لهو اُنهن جو وچون عدد لهو.

اِهو ڌيان ۾ رکو

مرڪزي رخ ۾ اَسان سراسري، وچون عدد ۽ ڊينگهه بابت اَڀياس ڪيو. اِن ڪري مرڪزي رخ ۾ اَسان ڪي چا لهڻ گهرجي، اِن جي اَسان کي ڄاڻ هئڻ گهرجي.

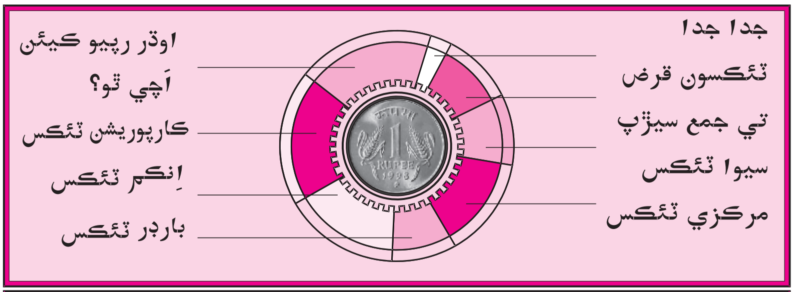
سمجهو ته هڪ اِسڪول ۾ ڏهين درجي جا 5 ڪلاس آهن اِنهن پنجن ڪلاسن مان ڪهڙو ڪلاس سٺو آهي. اِنڪري اَسان کي اِمتحان ۾ ڪنيل مارڪن جي سراسري ڪڍڻي پوندي.

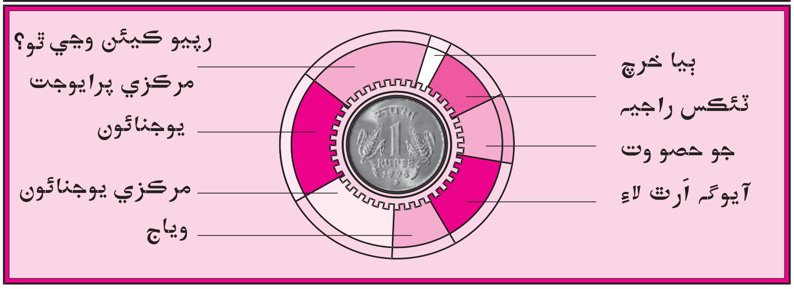
ڪنهن ڪلاس ۾ مارڪن جي آڌار تي شاگردن جا به گروهه ڪري، مارڪن جو وچون عدد لهڻ صحيح ٿيندو. چاڪ تيار ڪرڻ وقت اِهو ڄاڻڻ ضروري آهي ته ڪهڙي رنگ جو چاڪ مارڪيٽ ۾ وڌيڪ ڊمانڊ وارو آهي، اِن لاءِ اَسان کي ڊينگهه لهڻ گهرجي.

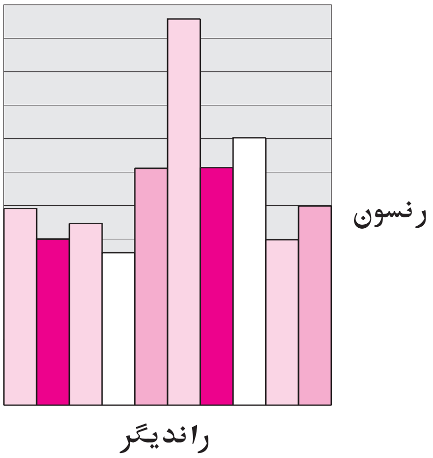
عددي ڄاڻ جي شڪلي پيشڪش (Pictorial representation of statistical data)

عددي ڄاڻ مان سراسري وچون عدد ۽ ڊينگهه اِنهن مان يا ڄاڻ جو ڇيد ڪرڻ سان خاص نتيجا ڪڍي سگهجن ٿا.

عددي ڄاڻ کي هڪ خاص روپ، چجري ۾ بدلائڻ جو طريقو اَسان سکي چڪا آهيون پر چجري مان سڌو نتيجو ڪڍڻ ممڪن نه آهي عام ماڻهن کي نتيجوسمجهه ۾ اَچي، اِن لاءِ جدا جدا روپ ڪم آڻبا آهن. اِنهن جو اِستعمال اَرٿ شاستر، راندين جي ڄاڻ وغيره ۾ ٿئي ٿو.

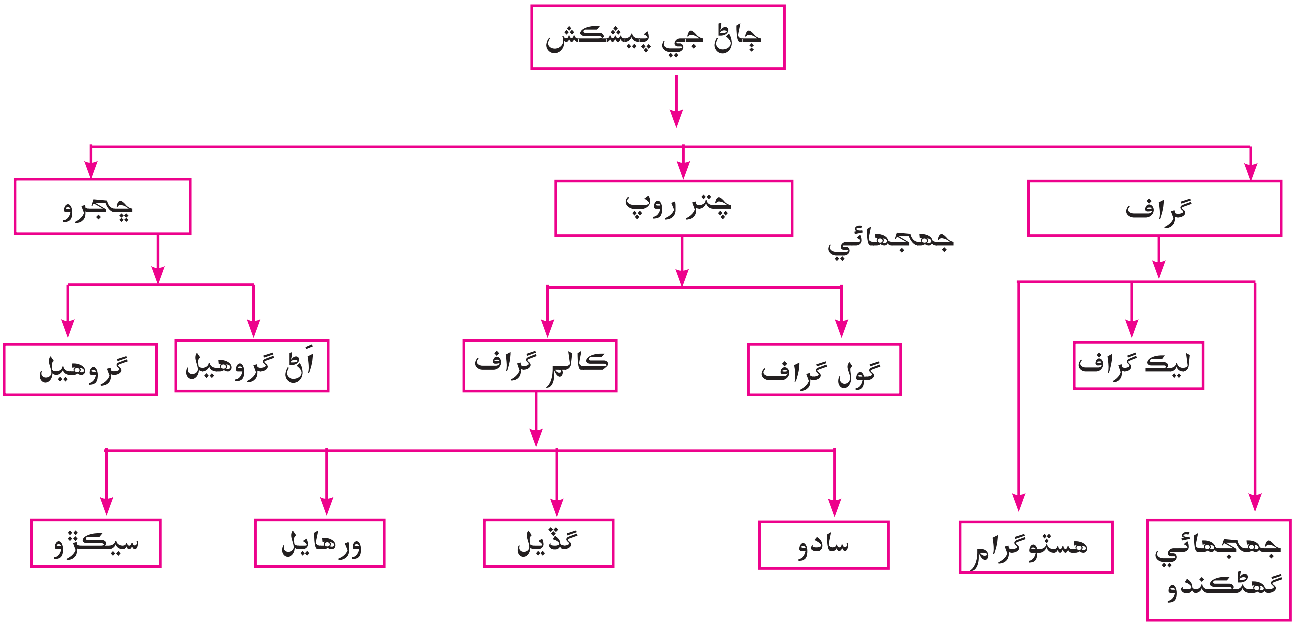






ڊاٽا جي پيش ڪش (Presentation of Data)

چٽر روپ ۾ گراف اِهي ڊاٽا جي پيش‌ڪش ڪرڻ جا ماڌيم آهن اِن جو وڻ چارٽ (Tree Chart) هيٺ ڏنل آهي.



گذريل سال آسان ڪجهه گراف ۾ ٻيا طريقا سکيا آهين هاڻي آسان هستوگرام، جهجهائي گهٽڪندو ۽ گول گراف سکنداسين

فلورينس نائيٽنگل (1820-1910)

هن بهادر عورت ڪي اُتم ۾ مقصد شرڌا دوت ڪري سڃاتو وڃي ٿو. سيمين لڙائي ۾ ڪيترن ئي زخمي سولجرن جي سيوا ڪري اُنهن جي جان بچائي. عدد شاستر ۾ فلورينس بنيادي ڪم ڪيو آهي. سپاهين جي حالت اُنهن جو ڪيل علاج، ۽ اُنهن جو اُپيوگ اِهي سڀ باقاعدي درج ڪري، خاص نتيجا ڪڍيا.

سپاهين جو موت زخمن ڪان وڌيڪ ٽائيفائڊ، ڪالرا ڪري ٿيو اِنهن بيمارين جا ڪارڻ پسگرداڻي ۾ جي گندگي، پيئڻ جو پاڻي غلاضتن وارو، مريضن جي گهٽي تعداد ۾ گڏ ميڙ ۾ رهڻ وغيره هئا. اِنهن ڪارڻن ڪي سمجهي فلورينس چارٽ جهڙا گراف تيار ڪيا. برابر صفائي ۾ صحت جا نيم سمجهي، سپاهين جو موت آگهه گهٽايو. اُنجا نتيجا جهڙوڪ شهر جي صفائي، صحيح نيڪال شرشتو، صاف پيئڻ جو پاڻي اِهي نگر پالڪا مڃيا. ڪيترن ئي سروي جاچڻ مان درج ڪيل نيم، عددن جي آڌار تي درج ڪيا ويا جيڪي مددگار ٿيا اِهو فلورينس جي ڪمن ۾ نظر آيو.

چاڪي وٺون

مستطيل گراف - هستوگرام : Histogram

هستوگرام ڪيڻ لاءِ هڪ مثال سمجهي وٺون

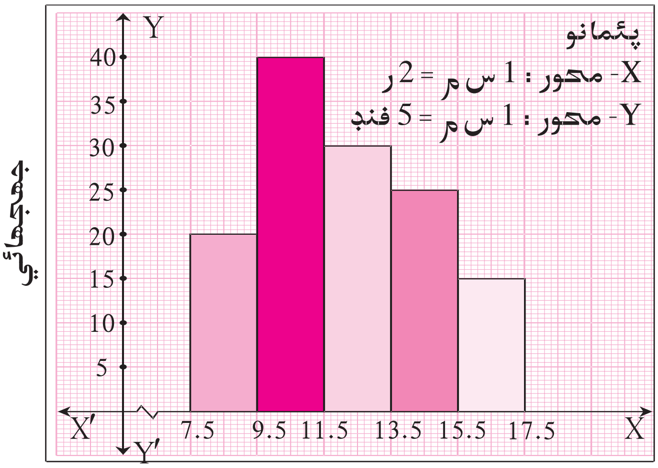
مثال : هيٺ ڏاڪي ۾ جدا جدا ڪمپنين جي مُچئل فنڊ جي هڪ يونٽ جو نيٽ ملهه (Net asset Value) مليل آهي.

اُن جو هستوگرام ڪيو.

نيٽ ملهه ر (NAV)	8-9	10-11	12-13	14-15	16-17
مُچئل فنڊ جو تعداد	20	40	30	25	15

حل :- ڇجري جا ڪلاس لاڳيتا نہ آهن پهريائين ڪلاس لاڳيتا ڪرڻا پوندا.

وڌايل ڪلاس	7.5-9.5	9.5-11.5	11.5-13.5	13.5-15.5	15.5-17.5
جهجهائي	20	40	30	25	15



شڪل 6.1

هستوگرام ڪيڻ جي مشغولي

(1) سڀ ڪلاس لاڳيتا ڪرڻ گهرجن اِنهن کي وڌايل ڪلاس (Extended Class Intervals) چئجي ٿو.

(2) اِهي ڪلاس محور -X تي مناسب پئمانو ڪٽي ڏيکارس.

(3) محور -Y تي جهجهائي مناسب پئمانو ڪٽي ڏيکارس.

(4) محور -X تي وڌايل ڪلاس اِهو پايو ڪٽي مستطيل ڪيڻو اِن جي اوچائي جهجهائي تائين هئڻ گهرجي.

ڌيان ۾ رکو

محور -X تي منڍ ٽيڪوءَ پهرين ڪلاس وچ ۾ [kink symbol] نشان آهي. اِن کي ڪرنڪ نشان (Krink Mark) چئبو آهي. اِن جو مطلب آهي تہ منڍ ٽيڪي کان پهرين ڪلاس تائين ڪا بہ جهجهائي نہ آهي.
محور X کي سُسائڻ ڪري اِهو نشان آهن ضرورت اَنوسار محور -Y تي پڻ اِهو نشان ڪڍي سگهجي ٿو.

اَڀياس 6.4

1. هيٺ ڏنل چاٽ هستوگرام وسيلي ڏيکاريو

150-155	145-150	140-145	135-140	شاگردن جي اوچائي (س م)
8	16	12	4	شاگردن جو اَنداز

2. هيٺ جوئر جي پيداور هيڪٽرن ۾ ڏنل آهي اِن جو هستوگرام ڪيو

10-11	8-9	6-7	4-5	2-3	جوئر (ڪئنٽال) هيڪٽر
20	40	55	50	30	ڪسانن جو انداز

3. هيٺ ڇجري ۾ 210 ڪتنبن جي ساليانِي سيڙپ ڏنل آهي. اِن جو هستوگرام ڪيو.

30-35	25-30	20-25	15-20	10-15	سيڙپ (هزارن ۾)
15	55	60	50	30	ڪتنب جو اَنداز

4. هيٺ شاگردن جو اِمتحان جي پڑهائي لاءِ ڏنل منٽ جي چاٽ آهي اِن جو هستوگرام ڪيو.

140-160	120-140	100-120	80-100	60-80	وقت (منٽن ۾)
16	22	24	20	14	شاگردن جو اَنداز

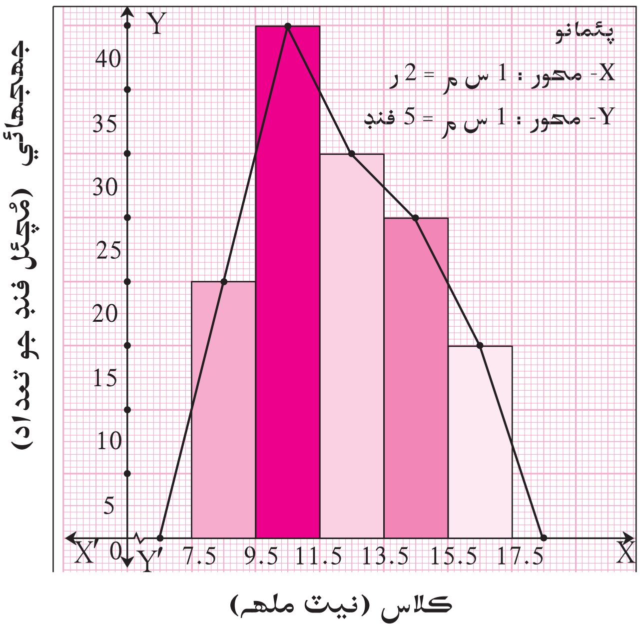
چاڪي ونون

جهجهائي گهڻڪنڊو (Frequency polygon)

جهجهائي ڇجري ۾ جدا جدا چاٽ ڏيکاري سگهجي ٿي. آسان هستوگرام جو اَڀياس ڪيو ٻيو قسم ”جهجهائي گهڻڪنڊو آهي“ جهجهائي گهڻڪنڊو ڪڍڻ لاءِ بہ طريقا اَڀياس ڪنداسين

(1) هستوگرام جي مدد سان (2) بنا هستوگرام جي

(1) شڪل 6.1 مثال ڪم آڻي آسان جهجهائي گهڻڪنڊو ڪڍڻ سکنداسين.



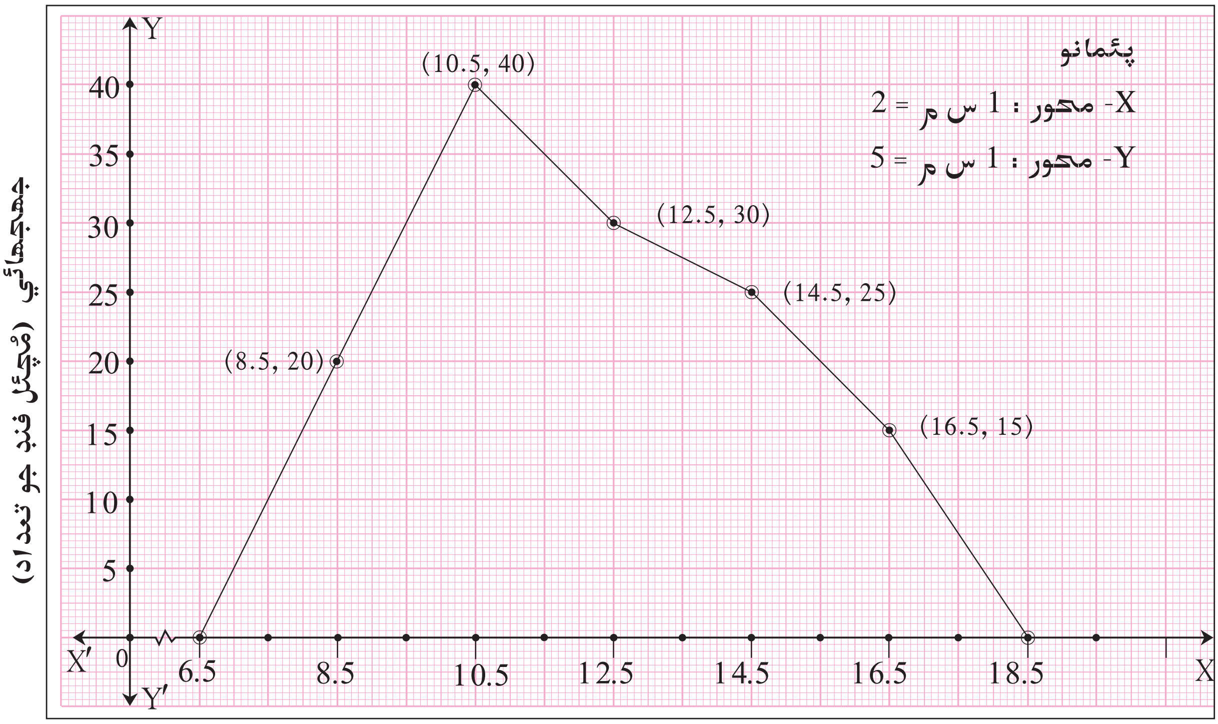
شڪل 6.2

1. هستوگرام ۾ هرهڪ مستطيل جي مٿئين پاسي جو مڏيہ - ٽپڪو لهو.
2. پهرين مستطيل کان اَڳہ ٻڙي ڊيگهہ وارو مستطيل آهي. اُن جو بہ مڏيہ ٽپڪو لهنداسين اِهي X- محور تي ئي هوندو.
2. سپ مڏيہ ٽپڪا هڪ ليڪ وسيلي ملائينداسين
3. آخرين مستطيل کان پوءِ ٻڙي ڊيگهہ وارو مستطيل جو مڏيہ ٽپڪو .. ليڪ سان ملائينداسين.
هڪ محدود شڪل ٺيندو جهجهائي گهڻڪندو.

(2) هستوگرام جي مدد بنا جهجهائي گهڻڪندو ڪيڙ لاءِ ٽپڪن جا مساوا مقرر ڪنداسين اِهو هيٺ ڏنل چجري مان سمجهي وٺو.

ٽپڪي جا مساوا	جهجهائي	ڪلاس - نشان	لاڳيتا ڪلاس	ڪلاس
(6.5, 0)	0	6.5	5.5 - 7.5	6 - 7
(8.5, 20)	20	8.5	7.5 - 9.5	8 - 9
(10.5, 40)	40	10.5	9.5 - 11.5	10 - 11
(12.5, 30)	30	12.5	11.5 - 13.5	12 -13
(14.5, 25)	25	14.5	13.5 - 15.5	14 - 15
(16.5, 15)	15	16.5	15.5 - 17.5	16 - 17
(18.5, 0)	0	18.5	17.5 - 19.5	18 - 19

چجري جي پنجين ٿنيي ۾ مليل ٽپڪن جا مساوا گراف پني تي ڪيڊبا. اُهي سلسلي ۾ ملائڻ سان جهجهائي گهڻڪندو ملندو. اِهو شڪل 6.3 ۾ ڏيکاريل آهي.



شڪل 6.3

حل ڪيل مثال

مثال (1) پرواري شڪل ۾ هڪ جهجهائي گهڻڪندو ڏنل آهي اُن جي آڌار تي سوالن جا جواب ڏيو.

جهجهائي

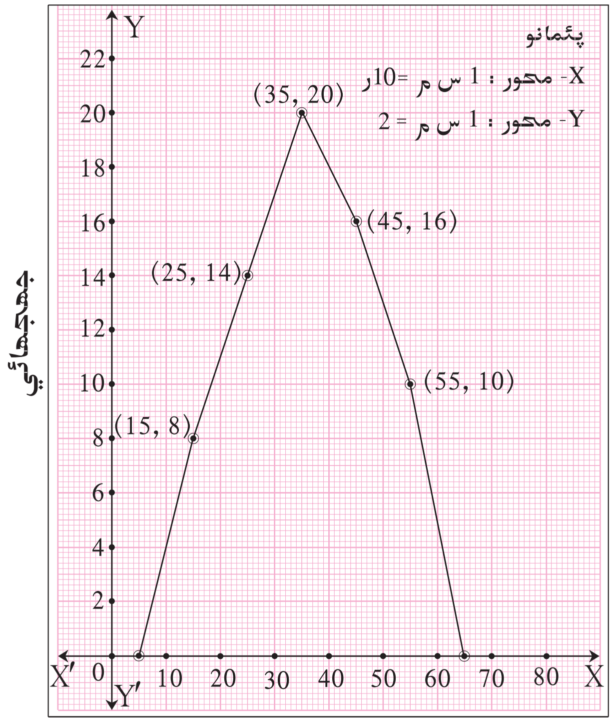
(1) 50-60 ڪلاس جي جهجهائي لکو

(2) ڪهڙي ڪلاس جي جهجهائي 14 آهي؟

(3) 55 اِهو ڪهڙي ڪلاس جو مڌيہ تبکو آهي؟

(4) ڪهڙي ڪلاس جي جهجهائي وڌ ۾ وڌ آهي؟

(5) ٻڙي جهجهائيءَ وارا ڪلاس لکو.



شڪل 6.4

حل :

1. 50-60 ڪلاس جو مذيہ ٽپڪو 55 آهي 55 اِن نشان تي Y- محور وٽ اوچائي ڏسبي تہ اِها 10 آهي 60-50 ڪلاس جي جهجهائي 10 آهي .

2. Y-محور تي 14 اِهو جهجهائي نشان ڏنو اِن ٽپڪي کان X-محور تي گروهہ ڏسبو تہ اِهو 20-30 ڪلاس آهي مطلب 20-30 ڪلاس جي جهجهائي 14 آهي.

3. 55 اِهو ڪلاس 50-60 جو مذيہ ٽپڪو آهي.

4. سڀ کان اوچي ۾ اوچو ٽپڪو گهٽڪندي تي ڏسو اِهو ڪلاس 30-40 ۾ ملي ٿو. مطلب 40-50 ڪلاس جي جهجهائي وڌ ۾ وڌ آهي.

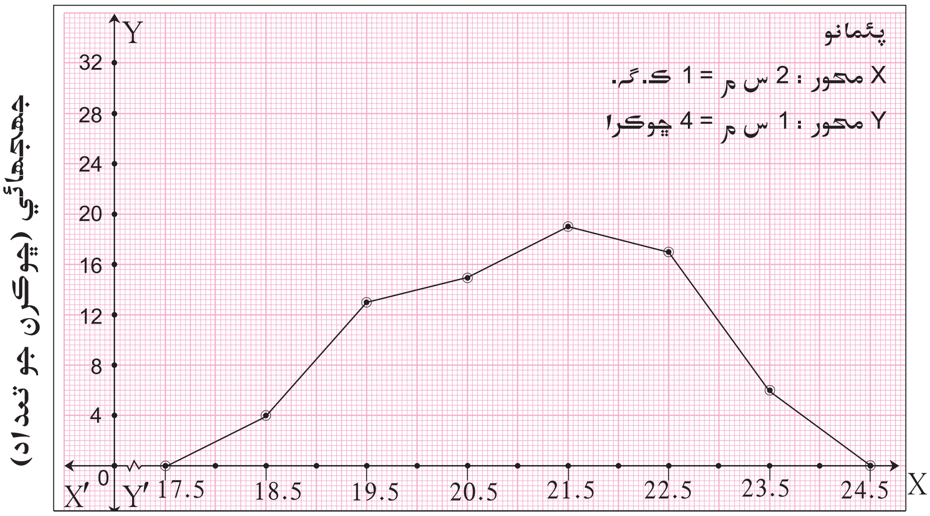
5. 0 جهجهائيءَ وارا ڪلاس آهن 0-10 ۽ 60-70

مثال (2) هيٺ ڏنل چجري ۾ ٻارن جو وزن ۽ تعداد ڏنل آهي. اِن جهجهائيءَ جو گهٽڪندو لهو.

وزن (ڪ.گ)	18−19	19−20	20−21	21−22	22−23	23−24
ٻارن جو تعداد	4	13	15	25	17	6

جهجهائي گهٽڪندو ڪڍڻ لاءِ هيٺ ڏنل چجرو تيار ڪيو.

ڪلاس	18−19	19−20	20−21	21−22	22−23	23−24
ڪلاس نشان	18.5	19.5	20.5	21.5	22.5	23.5
جهجهائي	4	13	15	19	17	6
ٽپڪن جا مساوا	(18.5, 4)	(19.5,13)	(20.5,15)	(21.5,19)	(22.5,17)	(23.5,6)

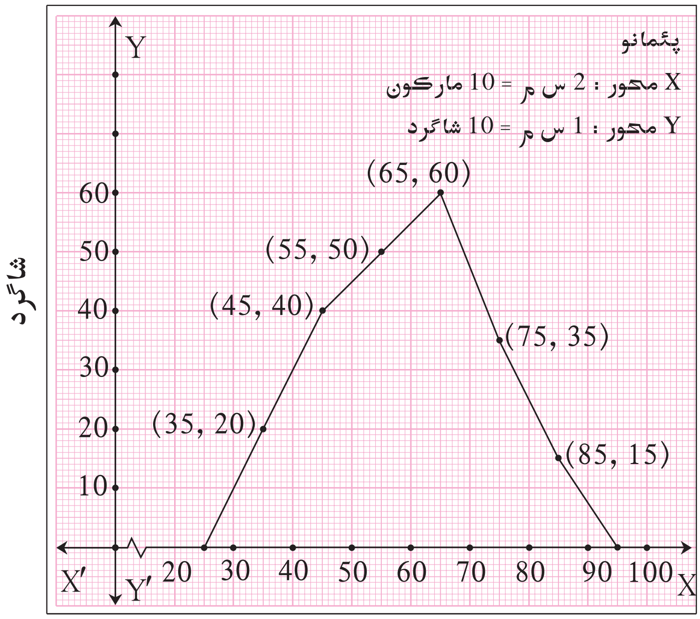


ڪلاس وزن -ڪ.گ.)

6.5 شڪل

اَڀياس 6.5

.1 پرواري شڪل ۾ ڏيکاريل ڳڻيل سوالن جا جواب لکو.



مارڪون

شڪل 6.6

(i) وڌ ۾ وڌ مارڪون کڻندڙ شاگردن جو ڪهڙو ڪلاس؟

(ii) ٻڙي جهجهائي وارا ڪلاس لکو.

(iii) 50 شاگردن واري ڪلاس جو مڏيہ ٽيڪو ڪهڙو؟

(iv) ڪلاس ٽيڪو 85 جي ڪلاس جي هيٺين حد ۽ مٿين حد لکو.

(v) 80-90 مارڪون کڻندڙ ڪيترا شاگرد ؟

.2 هيٺ ڏنل چارٽ موجب جهجهائي ڏيکاريندو

ٻجلي بل (رپيا)	0-200	200-400	400-600	600-800	800-1000
ڪٽنب	240	300	450	350	160

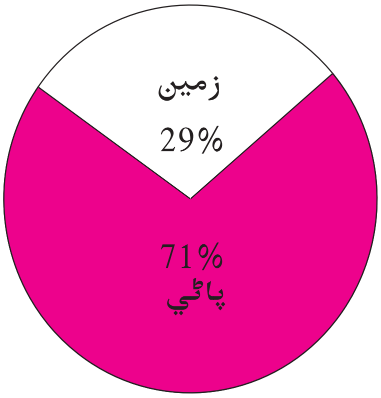
.3 هڪ اِمتحان ۾ ظاهر نتيجي جي چارٽ هيٺ چيجري ۾ ڏنل آهي اِن چارٽ تي جهجهائي ڏيکاريندو ڪيو.

نتيجو (سيڪڙو)	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90	90-100
شاگردن جو	7	33	45	65	47	18	5

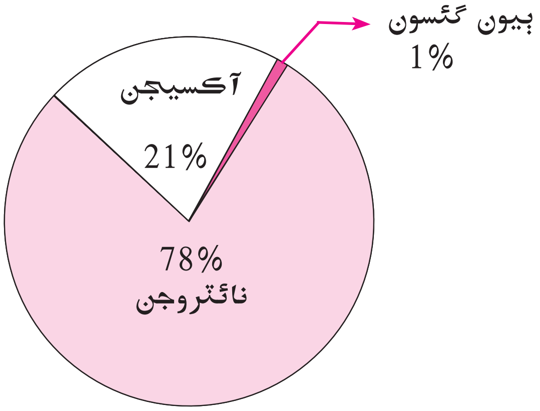
اِهو ڌيان ۾ رکو

پاءِ شڪل (گول گراف)(Pie diagram)

گذريل سال اَسان جاگرافي ۽ سائنس ۾ هيٺ ڏنل گراف بابت سکيا آهيون اَهڙي گراف کي گول گراف چئبو آهي.

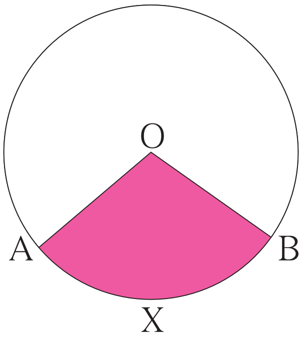


(ڌرتيءَ تي زمين پاڻيءَ جو ريشو)



(هوا ۾ گئس جو ريشو)

شڪل 6.7



شڪل 6.8

گول گراف ۾ عددي ڊاٽا سچي گول ۾ ڏيکارجي ٿي. ڊاٽا جي جدا جدا حصن کي گول جي قطاع دائرن وسيلي ڏيکارجي ٿو.

شڪل 6.8 ۾ گول جو مرڪز O آهي.

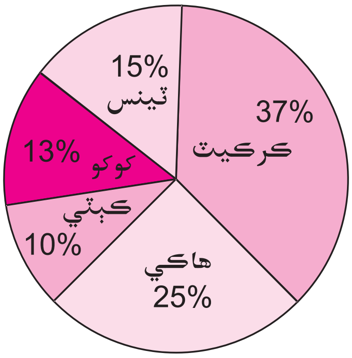
OA ۽ OB اِهي نيم قطر آهن.

$\angle AOB$ مرڪزي ڪنڊ آهي.

O-AXB اِهو قطاع دائره (Secter Of a circle) آهي.

ڄاڻي وٺون

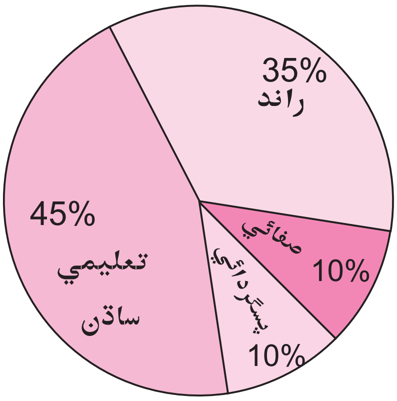
Reading of Pie diagram پاءِ شڪل پڙهڻ



شڪل 6.9

گول گراف مان سڌي ڄاڻ ڪيئن ملندي آهي. اِهو مثال وسيلي سمجهنداسين

مثال (1) 10 درجي جي 120 ٻارن کان ’توهان کي کهڙي راند وڻندي آهي‘ سوال پڇيو ويو اُها ڄاڻ گول گراف وسيلي ڏيکاريل آهي. سڀ کان وڌيڪ ڪهڙي راند وڻندڙ آهي؟ ڪو-ڪو راند ڪيترو سيڪڙو ٻار پسند ڪن ٿا ڪبڏي پسند ڪندڙ ٻارن جو ڪيترو اِنهن سوالن جا جواب آسانکي هڪ نظر سان ملن ٿا هڪ ٻيو بہ گول گراف جو مثال ڏسون.



شڪل 6.10

پر واري شڪل ۾ هڪ اِسڪول جي ساليانی مالي - يوجنا ڏنل آهي. اِن مان آسان سمجهون ٿا تہ

- 45% سيڪڙو رقم تعليمي سامان لاءِ رکيل آهي.
- 35% سيڪڙو رانديِن جي سامان لاءِ رقم بچايل آهي.
- 10% سيڪڙو رقم پسگردائيءِ لاءِ رکيل آهي.
- 10% سيڪڙو رقم صفائي لاءِ رکيل آهي.

اهڙي نموني هڪ نظر ۾ آسان کي گول گراف مان ڄاڻ ملي
پاءِ شڪل (گول گراف) پڙهڻ اَخبارن ۾ ڪيترائي دفعا جدا جدا خبرون جيئن ساليانی بجيٽ. آلمپڪ رانديِن ۾ جدا جدا ديشن جي حاصلات، ديش جو پئسو ڪيئن آچي ٿو، ڪيئن وڃي ٿو وغيرهہ اِنڪري آسان پاءِ شڪل ڪيئن پڙهڻ گهرجي، اِهو سکنداسين.

نمونو مثال :

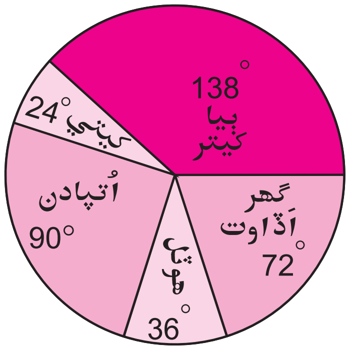
هڪ سروي ۾ ماهر ڪاريگرن جي چاڙ هيٺ پاءِ شڪل ۾ ڏنل اُتپادن ۾ لڳل ڪل 4500 ماڻهو آهن هيٺ سوالن جا جواب لکو.

(i) سيني ڪيترن ۾ ڪل ڪيترا ماڻهو آهن؟

(ii) گهر اَڏاوت ۾ ڪم ڪندڙن جو اَنداز لهو.

(iii) کيتي ڪم ۾ لڳل ڪيترا ماڻهو؟

(iv) اُتپادن ۽ گهر اَڏاوت ۾ ڪم ڪندڙن ۾ ڪيترو تفاوت؟



شڪل 6.11

حل (1) سمجهو سيني ڪيترن ۾ ڪل ڪم ڪندڙن جو اَنداز x آهي.

$\therefore$ x اِنڪري = 360° لاءِ

$$360 \times \frac{\text{اُتپادن ڪندڙ ماڻهو}}{\text{مرڪزي ڪند}} = \frac{\text{ڪل ماڻهو}}{\text{مرڪزي ڪند}}$$

$$90 = \frac{4500}{x} \times 360$$

$$\therefore \; x = 18000$$

$\therefore$ سيني ڪيترن ۾ ڪم ڪندڙ ڪل ماڻهو = 18000

(ii) گهر اَڏاوت ۾ ڪم ڪندڙن جي مرڪزي ڪند 72° سيڪڙو آهي

$$360 \times \frac{\text{گهر اَڏاوت ڪم ڪندڙ}}{18000} = 72$$

$\therefore$ گهر اَڏاوت ڪم ڪندڙ = $\frac{72 \times 18000}{360}$

گهر اَڏاوت ڪم ڪندڙ آهن = 3600

(iii) کيتيءَ ۾ ڪم ڪندڙ = 24° آهي

$$24 = \frac{\text{اُتپادن ڪندڙ ماڻهو}}{\text{کيتيءَ ۾ ڪم ڪندڙ}} \times 360$$

$$24 = \frac{\text{اُتپادن ڪندڙ ماڻهو}}{18000} \times 360$$

$\therefore$ کيتيءَ ۾ ڪم ڪندڙ آهي = $\frac{24 \times 18000}{360}$

= 1200

(iv) سمجهو اُتيادن ۽ گهر آڏاوت ۾ ڪم ڪندڙن ۾ تفاوت Q آهي $90^\circ - 72^\circ = 18^\circ$

بنهي جي مرڪزي ڪنڊن ۾ تفاوت $= \dfrac{18}{360} = \dfrac{P}{18000}$ $\dfrac{\text{بنهي ڪيترن جي ماڻهن ۾ فرق} \times 360}{\text{ڪُل ماڻهو}}$

$$\frac{\text{بنهي ڪيترن جي ماڻهن ۾ فرق}}{18000} \times 360$$

$$= \frac{18 \times 18000}{360}$$

$$= 900$$

فرق $= 900$

اِهو ڌيان ۾ رکو

- مليل چاڙ جا حصا هميشھ گول جي قاطع دائرن ۾ پيش ڪيا آهن.
- مرڪزي ڪنڊ. اُن نسبتي حصي سان خاص ريشي ۾ هوندي آهي.
- مرڪزي ڪنڊ جي ماپ $(\theta) = \dfrac{\text{چونڊيل حصو}}{\text{ڪل حصا}} \times 360^0$
- مناسب نيم قطر ڪٽي گول ڪيڊبو آهي برابر مرڪزي ڪنڊ ڪٽي، گول ڪي ماپ اَنوسار قاطع دائرن ۾ ورهائبو آهي.

چاٽي وٺون

پاءِ شڪل ڪيڊ (To draw Pie diagram)

ڪيڊيل پاءِ شڪل تان چاڙ ڪيئن حاصل ڪجي اِهو اسان ڏٺو. هاڻي پاءِ شڪل ڪيئن ڪيڊجي اِهو ڏسنداسين.

1. پاءِ شڪل ڪيڊ وقت گول ڪي برابر ماپ اَنوسار قاطع دائرن ۾ ورهائبو آهي.
2. هرهڪ سيڪٽر لاءِ مرڪزي ڪنڊ ڪيڊ گهرجي

$$\text{مرڪزي ڪنڊ} \; \theta = \frac{\text{حصي جو تعداد}}{\text{ڪل تعداد}} \times 360^0$$

مناسب نيم قطر ڪٽي گول ڪي برابر ماپ سيڪٽرن ۾ ورهائجي. هڪ مثال جي آڌار تي آسان پاءِ شڪل ڪيڊ سمجهنداسين.

پاءِ شڪل ڪيڊ جي مشغولي هيٺ ڏنل مثال ذريعي سمجهي وٺنداسين.

حل ڪيل مثال

نمونو مثال (1) هڪ ﭘ قيمتي گاڏيءَ جي دڪان تان جدا جدا رنگن ۾ گاڏيءَ جو ورڪرو هيٺ ڏنل آهي اِها چاڙ پاءِ شڪل ڪيڏڻ لاءِ هرهڪ رنگ جي مرڪزي ڪند لهو.

حل : ﭘ قيمتي گاڏين جي ڪل ڳهرج 36 آهي.
اُنهن مان 10 گاڏين اَڇي رنگ جون آهن.

$$\text{اَڇي رنگ جي مرڪزي عدد} = 360 \times \frac{\text{اَڇي رنگ وارين گاڏين جو تعداد}}{\text{ڪل گاڏيون}}$$

$$= \frac{10}{36} \times 360 = 100$$

اَهڙي نموني سوتر ڪم آڻي ٻين رنگن جي گاڏين جون نسبتي مرڪزي ڪندو لهنداسين.

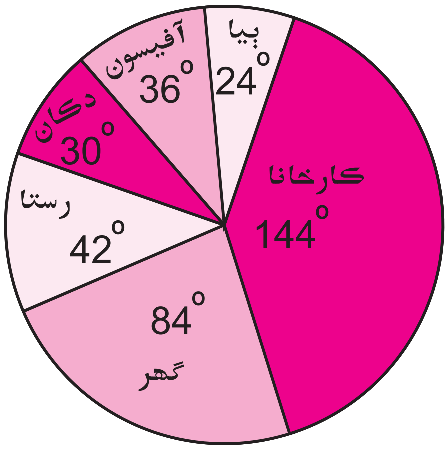
رنگ	ڳهرج	مرڪزي ڪند
اَڇو	10	$\frac{10}{36} \times 360^\circ = 100^\circ$
ڪارو	9	$\frac{9}{36} \times 360^\circ = 90^\circ$
نيرو	6	60°
ناگيري	7	70°
ڳاڙهو	4	40°
ڪل	36	360°

نمونو مثال (2) هڪ ڳوٺ ۾ جدا جدا جڳهين تي بجلي رسد هيٺ چجري ۾ ڏنل آهن پاءِ شڪل ڪيڊو

جڳهه	ڪارخانا	گهر	رستا	دڪان	آفيسون	پيا
بجلي رسد (هزار يونٽ)	24	14	7	5	6	4

حل : ڪل بجلي رسد 60 هزار يونٽ آهي اُن مان پهريائين مرڪزي ڪندون لهنداسين

بجلي رسد	يونٽ	مرڪزي ڪند
ڪارخانا	24	$\frac{24}{60} \times 360 = 144^\circ$
گهر	14	$\frac{14}{60} \times 360 = 84^\circ$
رستا	7	$\frac{7}{60} \times 360 = 42^\circ$
دڪان	5	$\frac{5}{60} \times 360 = 30^\circ$
آفيسون	6	$\frac{6}{60} \times 360 = 36^\circ$
پيا	4	$\frac{4}{60} \times 360 = 24^\circ$
ڪل	60	360°



شڪل 6.12

پاءِ شڪل ڪڍڻ جا ڏاڪا :

(1) پھريائين گول ۾ ھڪ نيم قطر ڪڍي، پوءِ ٻيا نيم قطر، ڇجري موجب ڪڍيا، مرڪزي ڪنڊون ($144^\circ, 84^\circ, 42^\circ, 30^\circ, 36^\circ$, ۽ 24°) اِھي ڪنڊون ڪٽي گھڙيال جي ڪانٽن طرف ڪڍيا. سيڪٽر ھڪ تان پوءِ ٻيو ڪڍو .

(2) ھرھڪ سيڪٽر ۾ نالا ۽ ماپ لکبي .

مشغولي :

ھڪ ڪٽنب جو جدا جدا اِسمن تي ٿيندڙ ماھوار خرچ ڏنل آھي پاءِ شڪل ڪيو

اِسم	خرچ سيڪڙو	مرڪزي ڪنڊ
اناج	40	$\frac{40}{100} \times 360 = \square$
ڪپڙا	20	$\square \times \square = \square$
مسواڙ	15	$\square \times \square = \square$
تعليم	20	$\square \times \square = \square$
ٻيا خرچ	05	$\square \times \square = \square$
ڪل	100	360°

اڀياس 6.6

1. ھڪ رت دان ڪئمپ ۾ 200 ماڻھن جدا جدا عمر گروھ وارن رت دان ڪيو. اُن تي پاءِ شڪل ڪيو.

عمر گروھ	20-25	25-30	30-35	35-40
ماڻھن جو انداز	80	60	35	25

2. ھڪ شاگرد جون جدا جدا وشين مان گذريل مارڪون ھيٺ ڏنل آھن. اِھا ڄاڻ پاءِ شڪل وسيلي ڏيکاريو.

وشيه	انگريزي	مراٺي	سائنس	حساب	اِتھاس	ھندي
مارڪون	50	70	80	90	60	50

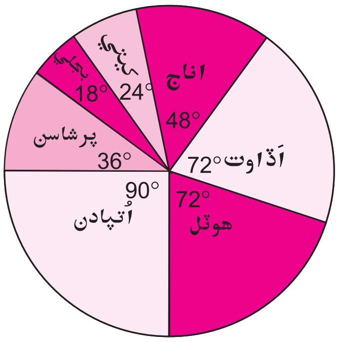
3. ٻوٽا پوکڻ ڪاريہ ڪرم ۾ جدا جدا ڪلاسن ۾ پڙهندڙ شاگردن هيٺ ڏنل چچري موجب ٻوٽا لڳايا. اِها چاڙ پاءِ شڪل وسيلي ڏيکاريو.

درجو	5	6	7	8	9	10
ٻوٽن جو اَنداز	40	50	75	50	70	75

4. هڪ ميوا وڪڻندڙ وٽ گهرج اَنوسار سيڪڙي ۾ ميوا. اِها چاڙ چچري ۾ ڏنل آهي. پاءِ شڪل ڪيو.

ميوا	اَنب	موسمبي	صوف	چڪون	نارنگي
گهرج (سيڪڙي ۾)	30	15	25	20	10

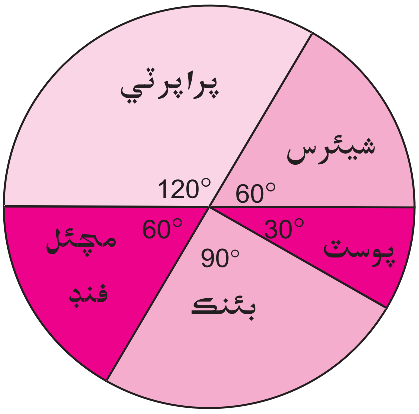
5. هڪ ڳوٺ ۾ جدا جدا هنرن ۾ ڪم ڪندڙن جي چاڙ سيڪڙي ۾ ڏنل آهي پاءِ شڪل جاچي جاچي سوالن جا جواب ڏيو.



شڪل 6.13

1. ماڻهو 10000آهن تہ آڏاوت ۾ ڪيترا ماڻهو ڪم ڪندڙ آهن؟

(2) پرشاسن ۾ ڪيترا ماڻهو ڪم ڪندڙ آهن؟ (3) اُتپادن ۾ ڪيترو سيڪڙو ڪم ڪندڙ آهن.



شڪل 6.14

6. هڪ ڪٽنب جي ساليانی سيڙپ، پاءِ شڪل ۾ ڏيکاريل آهي تہ

(i) شيئرس ۾ سيڙپ 2000 ر تہ ڪل سيڙپ ڪيتري؟

(ii) بئنڪ جي سيڙپ ڪيتري؟

(iii) مچئل فنڊ ۾ شيئرس ڪان وڌيڪ ڪيتري رقم؟

(iv) پوسٽ ۾ ڪيتري سيڙپ؟

گڏيل اَڀياس 6

1. گهڻ متبدل سوالن جا جواب چونڊي لکو

(1) O- گروهہ رت ڏيندڙ 40° آهن تہ اُنجي مرڪزي ڪنڊ ڪيتري؟

(A) 114° (B) 140° (C) 104° (D) 144°

(2) عمارت جي اَڏاوت جي جدا جدا خرچن حساب پاءِ شڪل ۾، سيمينٽ جي مرڪزي ڪنڊ 75° ۽ خرچ 45000 ر آهي تہ ڪل خرچ ....

(A) 2,16,000 (B) 3,60,000 (C) 4,50,000 (D) 7,50,000

(3) گروهيل ڄهڄهائي چڄري ۾ گڏيل ڄهڄهائيءَ جو اِستعمال .... لهڻ لاءِ ڪبو آهي.

(A) سراسري (B) وچون عدد (C) ڍنگ (D) اهي سپ

(4) گروهيل ڄهڄهائي چڄري ۾ سراسري لهڻ جي فارمولا $\overline{X} = A + \frac{\sum f_i u_i}{\sum f_i} \times g$

$u_i = \ldots$

(A) $\frac{x_i + A}{g}$ (B) $(x_i - A)$ (C) $\frac{x_i - A}{g}$ (D) $\frac{A - x_i}{g}$

(5)

18-20	16-18	14-16	12-14	هڪ ليٽر ۾ مفاصلو
7	20	12	11	موٽرن جو اَنداز

متئين چڄري ۾ موٽر جو مائليج جي سراسري ... ڪلاس ۾ آهي

(A) 12-14 (B) 14-16 (C) 16-18 (D) 18-20

(6)

10-12	7-9	4-6	1-3	هرهڪ شاگرد جا لڳايل ٻوٽا
4	6	8	7	شاگرد

مٿي ڏنل چڄري ۾ ڄهڄهائي گهٽڪندو ڪيڏو آهي 3-5 ڪلاس جا شاگرد ڏيکارڻ لاءِ ٽپڪن جا مساوا ....

(A) (4, 8) (B) (3, 5) (C) (5, 8) (D) (8, 4)

2. اَنگورن جي منڊ ۾ باغباني ڪندڙ جي پيداوار هيٺ چڄري ۾ ڏنل آهي پيداوار جي سراسري لهو.

70-80	60-70	50-60	40-50	30-40	20-30	پيداوار هزار رپين ۾
14	18	16	15	11	10	باغباني ڪندڙ

3. هيٺ گروهيل ڄهڄهائي چڄري ڏهہ ڪيتي لاءِ هڪ بئنڪ جو ڏنل قرض (هزار رپين ۾) ڏنل آهي تہ اِن جي سراسري لهو.

80-90	70-80	60-70	50-60	40-50	قرض (هزار رپين ۾)
7	36	24	20	13	ڪسان

4. هڪ ڪارخاني ۾ 120 مزورن جي هفتيوار پگهار هيٺ جهجهائي چجري ۾ ڏنل آهي اِن جي سراسري لهو

هفتيوار پگهار (رپين ۾)	0-2000	2000-4000	4000-6000	6000-8000
مزورن جو تعداد	15	35	50	20

5. هيٺ گروهيل جهجهائي چجري ۾ 50 ٻوڏ پيڙت پريوارن کي مليل مدد (هزار رپين ۾) ڏنل اهي مدد رقم جي سراسري لهو.

مدد - رقم	50-60	60-70	70-80	80-90	90-100
ڪٽنبن جو انداز	7	13	20	6	4

6. هيٺ گروهيل جهجهائي چجري ۾ 250 بسن جو هڪ ڏينهن ۾ ڪيل مفاصلو (ڪ.م) ڏنل آهي. هڪ ڏينهن مفاصلي جو وچون عدد لهو.

مفاصلو	200-210	210-220	220-230	230-240	240-250
بسن جو اَنداز	40	60	80	50	20

7. هڪ جنرل اِسٽور ۾ جدا جدا شين جي اگهن اُنهن جي قيمت جو گروهيل جهجهائي چجرو ڏنل آهي شين جي قيمت جو وچون عدد لهو.

قيمت (رپين ۾)	20	20-40	40-60	60-80	80-100
شين جو انداز	140	100	80	60	20

8. هيٺ گروهيل جهجهائي چجري ۾ هڪ مٺائيءَ واري دڪان ۾ جدا جدا وزن وارين مٺاين جي گهرج ڏنل آهي وزن جو ڊينگهه لهو.

وزن (گرامن ۾)	0-250	250-500	500-750	750-1000	1000-1250
گراهڪن جو تعداد	10	60	25	20	15

9. هيٺ ڏنل جهجهائي چجري جو هسٽوگرام ڪيو

بجلي واهپو	50-70	70-90	90-110	110-130	130-150	150-170
ڪٽنبن جو اَنداز	150	400	460	540	600	350

.10 هڪ هئنڊلوم ڪارخاني ۾ 140 مزورن جو هڪ ساڙهي ٺاهڻ ۾ ڏينهن جو چچرو هيٺ ڏنل آهي جهجهائي گھٽڪنڊو ڪڍو.

ڏينهن	8-10	10-12	12-14	14-16	16-18	18-20
مزورن جو انداز	5	16	30	40	35	14

.11 هڪ ڪلاس جي شاگردن جو وگيان تجربو ڪرڻ ۾ لڳل وقت جو جهجهائي چچرو هيٺ ڏنل آهي. اِن مان هسٽوگرام ڪڍي، جهجهائي گھٽڪنڊو ڪڍو.

تجربو (منٽن ۾)	20-22	22-24	24-26	26-28	28-30	30-32
شاگردن جو انداز	8	16	22	18	14	12

.12 هيٺ ڏنل گروهيل جهجهائي چچري تي جهجهائي گھٽڪنڊو ڪڍو

رت دان عمر (سال)	20-24	25-29	30-34	35-39	40-44	45-49
رت دان ڏيندڙن جو انداز	38	46	35	24	15	12

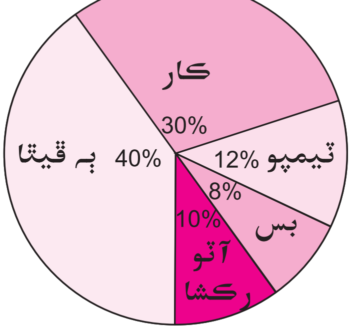
.13 هيٺ چچري ۾ 150 ڳوٺن جي ساليانيءَ برسات جي سراسري ڏنل آهي. اُن تي جهجهائي گھٽڪنڊو ڪڍو.

برسات (س م ۾)	0-20	20-40	40-60	60-80	80-100
ڳوٺن جو انداز	14	12	36	48	40

.14 صبح 8 بجي کان 10 بجي تائين هڪ شهر جي چونڪ کان سگنل کان اَڳتي ويندڙ واهڻن جي پاءِ شڪل ڏنل آهي ته

(1) هر هڪ واهڻ جي مرڪزي ڪنڊ لهو.

(2) پہ قيتي گاڏين جو اَنداز 1200 آهي ته ڪل واهڻن جو اَنداز لهو.

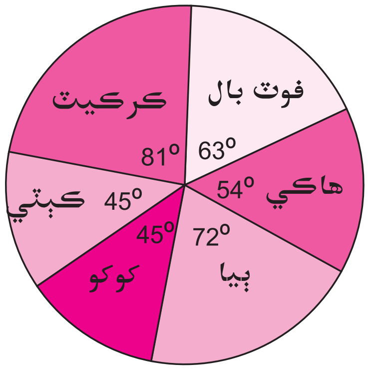


شڪل 6.15

.15 هيٺ چچري ۾ آواز پردوشڻ ڪندڙ اِسم ڏنل آهن اُن جو پاءِ شڪل ڪڍو

اَڏاوت	گھر	هوائي جهاز	ڪارخانا	ريلوي
10%	50%	9%	20%	11%

16. هڪ سروي موجب اِسڪولن جي شاگردن جي راندين بابت پسندگي پر واري باءِ شڪل ۾ ڏنل آهي ڪل 1000 شاگرد آهن ته



شڪل 6.18

(1) ڪرڪيٽ ڪندڙ شاگرد ڪيترا؟

(2) گهٽ - شاگردن کي فوٽ بال وڻندڙ آهن؟

(3) ٻيون رانديون پسند نڪندڙ شاگرد ڪيترا؟

17. هڪ ڳوٺ ۾ 180 عورتن جي آروگيه مرڪز ۾ تپاس ٿي. اُنهن مان 50 عورتن ۾ هيموگلوبن جي گهٽتائي، 10 عورتن ۾ موتيو بندو تڪليف ۽ 25 عورتون کي ساهه کڻڻ جي تڪليف هئي. باقي بچيل عورتون تندرست هيون اِها ڄاڻ ڏيکارڻ لاءِ پاءِ شڪل ڪڍو.

18. وڻ پوکيو پروجيڪٽ ۾ هڪ اِسڪول جي شاگردن پرياورڻ - ڏينهن تي 120 وڻ پوکيا اُها ڄاڻ هيٺ چجري ۾ ڏنل آهي اِها ڄاڻ ڏيکارڻ لاءِ پاءِ شڪل ڪڍو.

وڻن جا نالا	ڪرنج	ٻيهڙا	اَرجن	ٻڪڙ	نم
وڻن جو اَنداز	20	28	24	22	26

جواب

.1 ٻن ڦيرائتن ۾ ليکي مساواتون

اَڀياس 1.1

.2 (1) (2, 4) (2) (3, 1) (3) (6,1) (4) (5, 2)
(5) (−1, 1) (6) (1, 3) (7) (3, 2) (8) (7, 3)

اَڀياس 1.2

.1

(1)

x	3	**−2**	0
y	**0**	5	3
(x, y)	(3, 0)	**(−2, 5)**	(0, 3)

(2)

x	**4**	−1	0
y	0	**−5**	−4
(x, y)	**(4, 0)**	**(−1,−5)**	(0,−4)

.2 (1) (5, 1) (2) (4, 1) (3) (3, −3) (4) (−1, −5) (5) (1, 2.5) (6) (8, 4)

اَڀياس 1.3

.1 $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 3 \times \boxed{5} - \boxed{2} \times 4 = \boxed{15} - 8 = \boxed{7}$

.2 (1) −18 (2) 21 (3) $-\frac{4}{3}$

.3 (1) (2, −1) (2) (−2, 4) (3) (3, −2) (4) (2, 6) (5) (6, 5) (6) $(\frac{5}{8}, \frac{1}{4})$

اَڀياس 1.4

1. (1) $(\frac{1}{9}, 1)$ (2) (3, 2) (3) $(\frac{5}{2}, -2)$ (4) (1, 1)

اَڀياس 1.5

1. 2 ۽ 5 اُهي عدد
2. $x = 12, y = 8$ ايراضي = 640 چ۰اي گرد ماپ = 112 ايڪا
3. ٻار جي عُمر 15 , پيءُ جي عمر 40
4. $\frac{7}{18}$
5. A = 30 ڪ. گر, B = 55 ڪ. گر
6. 150 ڪ۰م۰

گڏيل اَڀياس 1

1. (1) B (2) A (3) D (4) C (5) A
2.

x	−5	$\frac{3}{2}$
y	$-\frac{13}{6}$	0
(x, y)	$(-5, -\frac{13}{6})$	$(\frac{3}{2}, 0)$

3. (1) (3, 2) (2) (−2, −1) (3) (0, 5) (4) (2, 4) (5) (3, 1)

4. (1) 22 (2) −1 (3) 13

5. (1) $(-\frac{2}{3}, 2)$ (2) (1, 4) (3) $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ (4) $(\frac{7}{11}, \frac{116}{33})$ (5) (2, 6)

6. (1) (6, −4) (2) $(-\frac{1}{4}, -1)$ (3) (1, 2) (4) (1, 1) (5) (2, 1)

7. (2) چانهه جو اَگهہ 300 ر في ڪلو
ڪنڊ جو اَگهہ 40رپيا في ڪلو

(5) سڪيل روزگار 450 ر
اَڻ سڪيل روزگار 270 ر

(3) 100 ر وارا 20نوٽ
50 ر وارا 10 نوٽ

(6) هميدا جي رفتار 18 ڪم / ڪلاڪ
جوسف جي رفتار 72 ڪم / ڪلاڪ

(4) منيشا جي عمر 23 ر
سويتا جي عمر 8 سال

2. ٻسگهي مساوت

اَڀياس 2.1

1. $m^2 + 5m + 3 = 0$, $y^2 - 3 = 0$ (اِنهن مان ڪون)
2. (1), (2), (4), (5) اِهي ٻسگهي مساوتون آهن.
3. (1) $y^2 + 2y - 10 = 0$, $a = 1, b = 2, c = -10$
(2) $x^2 - 4x - 2 = 0$, $a = 1, b = -4, c = -2$
(3) $x^2 + 4x + 3 = 0$, $a = 1, b = 4, c = 3$
(4) $m^2 + 0m + 9 = 0$, $a = 1, b = 0, c = 9$
(5) $6p^2 + 3p + 5 = 0$, $a = 6, b = 3, c = 5$
(6) $x^2 + 0x - 22 = 0$, $a = 1, b = 0, c = -22$
4. (1) 1 آهي, −1 نہ . (2) $\frac{5}{2}$ آهي, 2 نہ .
5. k = 3 6. k = −7

اَڀياس 2.2

1. (1) 9, 6 (2) −5, 4 (3) $-13, -\frac{1}{2}$ (4) $5, -\frac{3}{5}$
(5) $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ (6) $\frac{2}{3}, -\frac{1}{2}$ (7) $-\frac{5}{\sqrt{2}}, -\sqrt{2}$ (8) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$
(9) 25, −1 (10) $-\frac{3}{5}, \frac{3}{5}$ (11) 0, 3 (12) $-\sqrt{11}, \sqrt{11}$

ايياس 2.3

1. (1) 4,−5 (2) $(\sqrt{6}-1), (-\sqrt{6}-1)$ (3) $\frac{\sqrt{13}+5}{2}, \frac{-\sqrt{13}+5}{2}$

(4) $\frac{\sqrt{2}+2}{3}, \frac{-\sqrt{2}+2}{3}$ (5) $-\frac{5}{4}, -\frac{5}{2}$ (6) $\frac{2+\sqrt{39}}{5}, \frac{2-\sqrt{39}}{5}$

ايياس 2.4

1. (1) 1, −7, 5 (2) 2, −5, 5 (3) 1, −7, 0
2. (1) −1, −5 (2) $\frac{3+\sqrt{17}}{2}, \frac{3-\sqrt{17}}{2}$ (3) $\frac{-1+\sqrt{22}}{3}, \frac{-1-\sqrt{22}}{3}$

(4) $\frac{2+\sqrt{14}}{5}, \frac{2-\sqrt{14}}{5}$ (5) $\frac{-1+\sqrt{73}}{6}, \frac{-1-\sqrt{73}}{6}$ (6) $-1, -\frac{8}{5}$

3. $-\sqrt{3}, -\sqrt{3}$

ايياس 2.5

1. (1) 5 مول حقيقي عدد آهي ، 5- مول حقيقي عدد آهي

(2) $x^2 + 7x + 5 = 0$ (3) $\alpha + \beta = 2, \alpha \times \beta = -\frac{3}{2}$

2. (1) 53 (2) −55 (3) 0
3. (1) حقيقي ۽ برابر (2) حقيقي ۽ غير برابر (3) حقيقي نہ آهي
4. (1) $x^2 - 4x = 0$ (2) $x^2 + 7x - 30 = 0$

(3) $x^2 - \frac{1}{4} = 0$ (4) $x^2 - 4x - 1 = 0$

5. k = 3 **6.** (1) 18 (2) 50
7. (1) k = 12 يا k = −12 (2) k = 6

ايياس 2.6

1. 9 سال **2.** 10 ۽ 12 **3.** 15 اُپي قطار ۽ 10 آڏي قطار.
4. ڪشور جي عمر 10 سال ۽ وويڪ جي عمر 15سال
5. 10 مارڪون **6.** هرهڪ برتن جو مُلهہ - 100ر ۽ 6 برتن جو عدد برتن جو عدد
7. 6ڪ م / ڪلاڪ **8.** نشوءَ 6 ڏينهن ۽ پنٽو 12ڏينهن.
9. ونڊيندڙ = 9, ونڊ اُپت = 51 **10.** AB = 7س م , CD = 15س م, AD = BC = 5 س م٠

گڏيل اَيياس 2

1. (1) B (2) A (3) C (4) B (5) B (6) D (7) C (8) C
2. (1) ۽ (3) بسگهي مساوتون آهن.

3. (1) −15 (2) 1 (3) 21

4. k = 3 5. (1) $x^2 - 100 = 0$ (2) $x^2 - 2x - 44 = 0$ (3) $x^2 - 7x = 0$

6. (1) حقيقي عددن (2) حقيقي ۽ غير برابر (3) حقيقي ۽ برابر

7. (1) $\frac{1+\sqrt{21}}{2}, \frac{1-\sqrt{21}}{2}$ (2) $\frac{1}{2}, -\frac{1}{5}$ (3) 1, −4

(4) $\frac{-5+\sqrt{5}}{2}, \frac{-5-\sqrt{5}}{2}$ (5) مفرد نہ آهن (6) $(2+\sqrt{7}), (2-\sqrt{7})$

8. $m = 14$ 9. $x^2 - 5x + 6 = 0$ 10. $x^2 - 4pqx - (p^2 - q^2)^2 = 0$

11. ساگر وٽ 100 رپيا ۽ مکند وٽ 150

12. 12 ۽ $\sqrt{24}$ يا 12 $-\sqrt{24}$ 13. شاگردن جو تعداد 60

14. ويڪر 45م ڊيگھ 100 م پاسو 15 م

15. وڏو نل 3 ڪلاڪ ۽ ننڍو نل 6 ڪلاڪ

3. انگي پروگريشن

آپياس 3.1

1. (1) آهي $d = 2$ (2) آهي $d = \frac{1}{2}$ (3) آهي $d = 4$ (4) نہ

(5) آهي $d = -4$ (6) آهي $d = 0$ (7) آهي $d = \sqrt{2}$ (8) آهي $d = 5$

2. (1) 10, 15, 20, 25, . . . (2) −3, −3, −3, −3, . . . (3) −7, −6.5, −6, −5.5, . .

(4) −1.25, 1.75, 4.75, 7.75, . . .(5) 6, 3, 0, −3 . . . (6) −19, −23, −27, −31

3. (1) $a = 5, d = -4$ (2) $a = 0.6, d = 0.3$ (3) $a = 127, d = 8$ (4) $a = \frac{1}{4}, d = \frac{1}{2}$

آپياس 3.2

1. (1) $d = 7$ (2) $d = 3$ (3) $a = -3, d = -5$ (4) $a = 70, d = -10$

2. 121 آهي 3. 104 4. 115 5. −121 6. 180

7. 55 8. 55 جو 9. 60 10. 1

آپياس 3.3

1. 1215 2. 15252 3. 30450 5. 5040

5. 2380 6. 60 7. 4, 9, 14 يا 14, 9, 4 8. −3, 1, 5, 9

آپياس 3.4

1. 70455 رپيا 2. 560 رپيا آخري هفتو , 1000 رپيا پهريون هفتو 3. 1,92,000 رپيا

4. 48, 1242 5. $-20^\circ, -25^\circ, -30^\circ, -35^\circ, -40^\circ, -45^\circ$ 6. 325

گڏيل آپياس 3

1. (1) B (2) C (3) B (4) D (5) B (6) C (7) C (8) A (9) A (10) B

2. 40 3. 1, 6, 11, . . . 4. −195 5. 16, −21 6. −1 7. 6, 10

8. 8 9. 67, 69, 71 10.3, 7, 11, ... 147. 14. 2000 رپيا

4. مالي رٿا

691.48

4.1 اَڀياس

1. CGST 6%, SGST 6%   2. SGST 9%, GST 18%
3. CGST ₹ 784 ۽ SGST ₹ 784
4. اهو بليٽ گراهڪ کي 691.48 رپئي ملندو
5. CGST ₹ 135 SGST ₹ 135 اُن تي ₹ 1500 رانديڪن واري ڪار جي قيمت
6. (1) SGST 14%   (2) اي سي GST 28%
   (3) اي سي جي قيمت ₹ 40,000   (4) GST ڪل رقم 11,200 رُ
   (5) CGST 5600 ₹   (6) SGST 5600 ₹
7. ₹ 5320 CGST بل تي ۽ ملندي رپئي ₹ 48,640 پرمود کي واشنگ مشين
   ₹ 5320 SGST ۽

4.2 اَڀياس

1. چيتنا اِسٽورکي 22000ر آهي GST
2. نزما کي 12,500 ر اِنپٽ ٽئڪس ملندي ته انجو GST 22,50 ر
3. امير انٽرپرائيز GST 300 ر ان مان CGST 150 ر ۽ SGST 150 ر
   اَڪبري برڊرس GST 400 ر اُن مان CGST 200 ر ۽ SGST 200 ر
4. GST ₹ 100, CGST ₹ 50, UTGST ₹ 50.   5. CGST = SGST = ₹ 900

4.3 اَڀياس

1. (1) 100 بازار اگهه (2) رپيا 75 ظاهري اگهه (3) رپيا 5 اگهه
2. 25%   3. 37,040 رپيا   4. 800 شيئرس
5. 5.83% موٽ اگهه   6. A ڪمپني جي سيڙپ فائدي واري آهي.

4.4 اَڀياس

1. 200.60 رپيا   2. 999 رپيا
3.

شيئرس جو تعداد	شيئرس بازاري اگهه	شيئرس قيمت	دلالي 0.2%	دلالي CGST 9%	دلالي SGST 9%	شيئرس جي ڪل قيمت
100 B	₹ 45	₹ 4500	₹ 9	₹ 0.81	₹ 0.81	₹ 4510.62
75 S	₹ 200	₹15000	₹ 30	₹ 2.70	₹ 2.70	₹ 14964.60

4. 100 شيئرس وڪيا   5. رپيا 8560 نقصان

گڏيل اَڀياس 4A

1. (1) C (2) B (3) D (4) B (5) A (6) B
2. ڪُل بل 28,800 رپيا CGST 3150 رپيا SGST 3150 رپيا

3. ₹ 997.50 4. ₹ 12,500 5. ₹ 4250 ITC بل تي ٽئڪس ₹ 250

6. ITC ₹ 1550 CGST ₹ 5030, SGST 5030روپيا

7. ريزڪي واپاري ₹ 75,000, CGST ₹ 4500, SGST ₹ 4500

8.(1) ٻڌي واپاري CGST 16200 ₹ SGST 16200 روپيا

ريزڪي واپاري CGST رپئي 19,800 رپيا SGST 19,800 رپيا

(2) ٻڌو واپاري (CGST) 2700 (SGST) 2700,

ريزڪي واپاري (CGST) 3600 ۽ (SGST) 3600

9. (1) آٽا پاٽيل ڏنل CGST ₹ 1960, SGST ₹ 1960

(2) گراهڪ کي لڳايل وسئي جي واپاري جي ₹ 2352 CGST ۽ SGST ₹ 2352

(3) وسئي جي واپاري جو بل ₹ 392 CGST ۽ SGST ₹ 392

10.

(1)

ماڻھو	CGST بل (₹)	SGST بل (₹)	GST بل (₹)
اُڏپاتڪ	300	300	600
ٻڌو واپاري	360−300 =60	60	120
دڪاندار	390−360 = 30	30	60
ڪُل	390	390	780

(2) آخر گراهڪ کي اُها شيءِ 7280ملندي

(3) اڏپاتڪ ۽ ٻڌو واپاري B2B, ٻڌو واپاري ۽ دڪاندار B2B, دڪاندار ۽ گراهڪ B2C

گڏيل اَڀياس 4B

1. (1) B (2) B (3) A (4) C (5) A

2. ₹ 130.39 3. 22.2% 4. 21,000 رپيا ملندا

5. 500 شيئرس ملندا 6. رپيا فائدو 1058.52 7. ڪمپني B

8. 1000 شيئرس ملندا 9. 118 رپيا

10. (1) 1,20,000 رپيا (2) 360 رپيا (3) 64.80 رپيا (4) 120424.80 رپيا

11. 1% فائدو

5. اَڀياس

اَڀياس 5.1

1. (1) 8 (2) 7 (3) 52 (4) 11

اَڀياس 5.2

1. (1) S = {1H, 1T, 2H, 2T, 3H, 3T, 4H, 4T, 5H, 5T, 6H, 6T} n(S) = 12

(2) S = {23, 25, 32, 35, 52, 53} n(S) = 6

2. S = {ڳاڙهو، واڱڻائي، ڪيسري، پيلو، نيرو،سائو} n(S) = 6

3. S = {منگل، آرتوار، جمع، ٻڌر، سومر، ڇنڇر} n(S) = 6

4. (1) B_1B_2 (2) G_1G_2 (3) B_1G_1 B_2G_1 B_1G_2 B_2G_2

(4) $S = \{B_1B_2, B_1G_1, B_1G_2, B_2G_1, B_2G_2, G_1G_2,\}$

اَڀياس 5.3

1. (1) S = {1, 2, 3, 4, 5, 6} n(S) = 6

A = {2, 4, 6} n(A) = 3, B = {1, 3, 5} n(B) = 3, C = {2, 3, 5} n(C) = 3

(2) S = {(1,1), . . ., (1, 6), (2,1), . . ., (2, 6), (3, 1), . . .,(3, 6),
(4, 1), . . .,(4,6),(5, 1), . . .,(5, 6),(6, 1), . . .,(6, 6)} n(S) = 36

A = {(1, 5) (2, 4) (3, 3) (4, 2) (5, 1) (6, 6)} n(A) = 6

B = {(4, 6) (5, 5) (5, 6) (6, 4) (6, 5) (6, 6)} n(B) = 6

C = {(1, 1) (2, 2) (3, 3) (4, 4) (5, 5) (6, 6)} n(C) = 6

(3) S = {HHH, HHT, HTT, HTH, THT, TTH, THH, TTT} n(S) = 8

A = {HHH, HHT, HTH, THH} n(A) = 4

B = {TTT} n(B) = 1

C = {HHH, HHT, THH} n(C) = 3

(4) S = {10, 12, 13, 14, 15, 20, 21, 23, 24, 25, 30, 31, 32, 34, 35, 40, 41, 42, 43, 45, 50, 51, 52, 53, 54} n(S) = 25

A = {10, 12, 14, 20, 24, 30, 32, 34, 40, 42, 50, 52, 54} n(A) = 13

B = {12, 15, 21, 24, 30, 42, 45, 51, 54} n(B) = 9

C = {51, 52, 53, 54} n(C) = 4

(5) $S = \{M_1M_2, M_1M_3, M_1F_1, M_1F_2, M_2M_3, M_2F_1, M_2F_2, M_3F_1, M_3F_2, F_1F_2\}$
n(S) = 10

$A = \{M_1F_1, M_1F_2, M_2F_1, M_2F_2, M_3F_1, M_3F_2, F_1F_2\}$ n(A) = 7

$B = \{M_1F_1, M_1F_2, M_2F_1, M_2F_2, M_3F_1, M_3F_2\}$ n(B) = 6

$C = \{M_1M_2, M_1M_3, M_2M_3\}$ n(C) = 3

(6) S = {H1, H2, H3, H4, H5, H6 T1, T2, T3, T4, T5, T6} n(S) = 12

A = {H1, H3, H5} n(A) = 3

B = {H2, H4, H6, T2, T4, T6} n(B) = 6

C = { } n(C) = 0

اَڀياس 5.4

1. (1) $\frac{3}{4}$, (2) $\frac{1}{4}$ 2. (1) $\frac{1}{6}$ (2) 0 (3) $\frac{5}{12}$

3. (1) $\frac{7}{15}$ (2) $\frac{1}{5}$ 4. (1) $\frac{4}{5}$ (2) $\frac{1}{5}$ 5. (1) $\frac{1}{13}$ (2) $\frac{1}{4}$

گڏيل اَڀياس – 5

1. (1) B (2) B (3) C (4) A (5) A 2. وسيم جي 3. (1) $\frac{1}{11}$ (2) $\frac{6}{11}$

4. $\frac{5}{26}$ 5. (1) $\frac{2}{9}$ (2) $\frac{1}{3}$ (3) $\frac{4}{9}$ 6. $\frac{1}{2}$ 7. (1) $\frac{1}{3}$ (2) $\frac{1}{6}$

8. (1) $\frac{1}{2}$ (2) $\frac{1}{6}$ 9. $\frac{1}{25}$ 10. (1) $\frac{1}{8}$ (2) $\frac{1}{2}$ (3) $\frac{3}{4}$ (4) 1

11. (1) $\frac{5}{6}$ (2) $\frac{1}{6}$ (3) 1 (4) 0 12. (1) $\frac{1}{3}$ (2) $\frac{2}{3}$ (3) $\frac{2}{3}$ 13. $\frac{2}{11}$

14. $\frac{13}{40}$ 15. (1) $\frac{3}{10}$ (2) $\frac{3}{10}$ (3) $\frac{1}{5}$ 16. $\frac{11}{36}$

6. عدد شاستر

اَڀياس 6.1

(1) 4.36 ڪلاڪ (2) 521.43 رپيا (3) 2.82 ليٽر (4) 35310 رپيا
(5) 985 رپيا يا 987.5 رپيا (6) 3070 رپيا يا 3066.67 رپيا

اَڀياس 6.2

(1) 11.4 ڪلاڪ (2) 184.4 اندازي 184 آنب (3) 74.558 ≈ 75 گاڏيون (4) 52.75 ≈ 53 ڏيا

اَڀياس 6.3

1. 4.33 ليٽر 2. 72 يونٽ 3. 9.94 ليٽر 4. 12.31 سال

اَڀياس 6.5

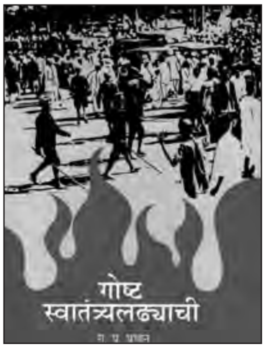
1. (1) 60-70 (2) 20-30 ۽ 90-100 (3) 55 (4) 80 ۽ 90 (5) 15

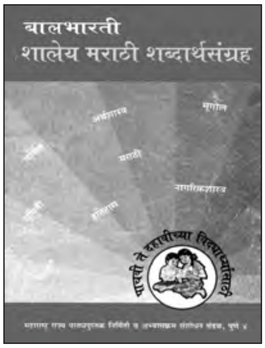
اَڀياس 6.6

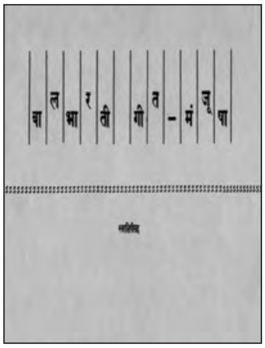
5. (1) 2000 (2) 1000 (3) 25%
6. (1) 12000 رپيا (2) 3000 رپيا (3) 2000 رپيا (4) 1000 رپيا

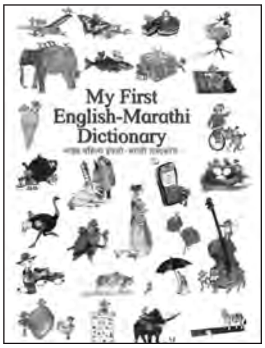
گڏيل اڀياس 6

1. (1) D (2) A (3) B (4) C (5) C (6) C
2. 52,500 رپيا 3. 65,400 رپيا 4. 4250 رپيا
5. 72,400 رپيا 6. 223.13 ڪم 7. 32 رپيا 8. 397.06 گرام
14. (1) ڪار - 108°, ٽيمپو - 43°, بس - 29°, رڪشا - 36°, ٻه ڦيٿي - 144°
(2) گاڏين جو ڪل تعداد - 3000
16. (1) ڪرڪيٽ وڏندڙ - 225, (2) فوٽ بال وڏندڙ - 175 (3) ٻيون رانديون وڏندڙ - 200.









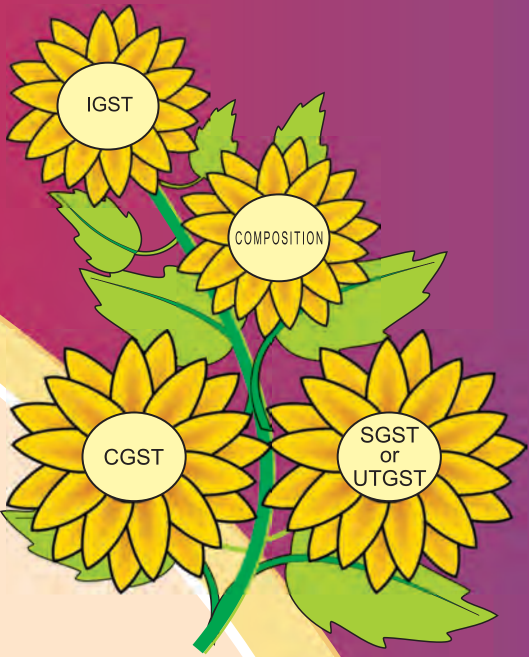
- पाठ्यपुस्तक मंडळाची वैशिष्ट्यपूर्ण पाठ्येत्तर प्रकाशने.
- नामवंत लेखक, कवी, विचारवंत यांच्या साहित्याचा समावेश.
- शालेय स्तरावर पूरक वाचनासाठी उपयुक्त.

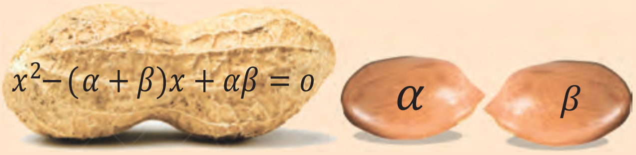
पुस्तक मागणीसाठी www.ebalbharati.in, www.balbharati.in संकेत स्थळावर भेट द्या.

साहित्य पाठ्यपुस्तक मंडळाच्या विभागीय भांडारांमध्ये विक्रीसाठी उपलब्ध आहे.

ebalbharati

विभागीय भांडारे संपर्क क्रमांक : पुणे - ☎ २५६५९४६५, कोल्हापूर- ☎ २४६८५७६, मुंबई (गोरेगाव) - ☎ २८७७१८४२, पनवेल - ☎ २७४६२६४६५, नाशिक - ☎ २३९१५११, औरंगाबाद - ☎ २३३२१७१, नागपूर - ☎ २५४७७१६/२५२३०७८, लातूर - ☎ २२०९३०, अमरावती - ☎ २५३०९६५





مهاراشٽر راجيہ پاٺيہ پُستڪ نرمتي
واڀياسڪرم سنشوڌن منڊل،
پُڻي - 411004

₹ 80.00

सिंधी (अरे.) गणित इ.१० वी भाग–१